Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Аксиоматические теории множеств. Нечеткие множества

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 3-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2010

I. Традиционные аксиоматики теорий множеств

Наиболее распространенными являются системы аксиом Цермело, Цермело-Френкеля, Бернайса и Бернайса-Морса.

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Это теория первого порядка с равенством и символом двуместного отношения $\in$.

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$ (если x и y — множества, то $\{x, y\}$ — тоже множество;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

Аксиома объединения: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \exists w\, z \in w \,\&\, w \in x)$ — объединение всех множеств, являющихся элементами множества x, является множеством;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

Аксиома объединения: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \exists w\; z \in w \,\&\, w \in x)$;

Аксиома степени: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \forall w\, (w \in z \Rightarrow w \in x))$ — множество всех подмножеств множества — это множество;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\,(\forall z\,(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\,(y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

Аксиома объединения: $\forall x\, \exists y\, \forall z\,(z \in y \Leftrightarrow \exists w\; z \in w \,\&\, w \in x)$;

Аксиома степени: $\forall x\, \exists y\, \forall z\,(z \in y \Leftrightarrow \forall w\,(w \in z \Rightarrow w \in x))$;

Аксиома бесконечности:

$$\exists x\,((\exists y\,(y \in x)) \,\&\, (\forall y\,(y \in x \;\Rightarrow \exists z\,(y \in z \,\&\, z \in x));$$

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

Аксиома объединения: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \exists w\; z \in w \,\&\, w \in x)$;

Аксиома степени: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \forall w\, (w \in z \Rightarrow w \in x))$;

Аксиома бесконечности:

$$\exists x\, ((\exists y\, (y \in x)) \,\&\, (\forall y\, (y \in x\ \Rightarrow \exists z\, (y \in z \,\&\, z \in x));$$

Аксиома регулярности:

$$\forall x\ \Big((\exists y\; y \in x) \Rightarrow (\exists y\, (y \in x \,\&\, \overline{\exists z\, (z \in x \,\&\, z \in y}))))\Big)$$

— множество не пересекается хотя бы с одним из своих элементов;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y \, (\forall z \, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x \, \forall y \, (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall u \, (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

Аксиома объединения: $\forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \Leftrightarrow \exists w \; z \in w \,\&\, w \in x)$;

Аксиома степени: $\forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \Leftrightarrow \forall w \, (w \in z \Rightarrow w \in x))$;

Аксиома бесконечности:

$$\exists x \, ((\exists y \, (y \in x)) \,\&\, (\forall y \, (y \in x \; \Rightarrow \exists z \, (y \in z \,\&\, z \in x));$$

Аксиома регулярности:

$$\forall x \; \Big((\exists y \; y \in x) \Rightarrow (\exists y \, (y \in x \,\&\, \overline{\exists z \, (z \in x \,\&\, z \in y)}))\Big)$$

Аксиома подмножеств:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \,\&\, \varphi(z, u_1, u_2, \ldots, u_n))),$$

здесь φ — некоторая формула, в которую не входит y;

I.1. Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

Аксиома объединения: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \exists w\; z \in w \,\&\, w \in x)$;

Аксиома степени: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow \forall w\, (w \in z \Rightarrow w \in x))$;

Аксиома бесконечности:

$$\exists x\, ((\exists y\, (y \in x)) \,\&\, (\forall y\, (y \in x \;\Rightarrow \exists z\, (y \in z \,\&\, z \in x));$$

Аксиома регулярности:

$$\forall x\; \Big((\exists y\; y \in x) \Rightarrow (\exists y\, (y \in x \,\&\, \overline{\exists z\, (z \in x \,\&\, z \in y)}))\Big)$$

Аксиома подмножеств:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \,\&\, \varphi(z, u_1, u_2, \ldots, u_n))),$$

здесь φ — некоторая формула, в которую не входит y;

Аксиома семейств:

$$(\forall x\, (x \in u \Rightarrow \exists z\; \varphi(x, z, u, v_1, \ldots, v_n))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists y\, \forall x\, (x \in u \Rightarrow \exists z\, (z \in y \,\&\, \varphi(x, z, u, v_1, \ldots, v_n)));$$

При добавлении аксиомы выбора получаем ZFC.

I.2. Аксиомы теории NBG

Это теория того же типа, что и предложенная фон Нейманом, впоследствии пересмотренная и упрощенная Робинсоном, Бернайсом и Геделем.

Отождествление $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ предложено Куратовским для пар множеств.

При этом введено отождествление $\langle x, y, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ (во всяком случае, у Мендельсона).

Преимущество перед ZF — конечное число аксиом (для ZF аксиома подмножеств и аксиома семейств на самом деле представляют собой бесконечные семейства аксиом).

I.2. Аксиомы теории NBG $X, Y, \dots$ — классы, $x, y, \dots$ — множества.

Аксиома объемности: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$;

Аксиома пары: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u(u \in z \Leftrightarrow (u \in x \vee u \in y))$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиомы существования классов:

1. $\exists X\, \forall u\, \forall v\, (\langle u, v\rangle \in X \Leftrightarrow u \in v)$ ($\in$-отношение);
2. $\forall X\, \forall Y\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \Leftrightarrow (u \in X \& u \in Y))$ (пересечение);
3. $\forall X\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \Leftrightarrow u \notin X)$ (дополнение);
4. $\forall X\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \Leftrightarrow \exists v\, (\langle u, v\rangle \in X)$ (область определения);
5. $\forall X\, \exists Z\, \forall u \forall v\, (\langle u, v\rangle \in Z \Leftrightarrow u \in X)$;
6. $\forall X\, \exists Z\, \forall u \forall v \forall w\, (\langle u, v, w\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle v, w, u\rangle \in X)$;
7. $\forall X\, \exists Z\, \forall u \forall v \forall w\, (\langle u, v, w\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle u, w, v\rangle \in X)$;

Аксиома объединения:

$$\forall x \exists y \forall u \, (u \in y \Leftrightarrow \exists v \; u \in v \& v \in x)$$

(объединение всех множеств, являющихся элементами множества x, является множеством);

Аксиома множества всех подмножеств:

$$\forall x \exists y \forall u \, (u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x);$$

Аксиома выделения:

$$\forall x \forall Y \exists z \forall u \;\; (u \in z \Leftrightarrow (u \in x \,\&\, u \in Y)) \, ;$$

Аксиома замещения:

$$\forall x \;\; (Un(X) \Leftrightarrow \exists y \forall u \, (u \in y \Leftrightarrow \exists v (\langle v, u \rangle \in X \& v \in x))) \, ,$$

где $Un(X)$ означает, что отображение X однозначно (образ множества относительно функции является множеством).

II. Нечеткие множества

Понятие нечеткого множество было введено Л.Заде:

Zadeh L. Fussy Sets.— Inf.Control., v.8., 1965.— p. 338-353.

Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.— М.: Мир.— 1976.

II.1. Определение нечеткого множества

Определение 1. Нечетким подмножеством *множества* M *называется функция* $\mu: M \to [0, 1]$.

II.1. Определение нечеткого множества

Определение 1. Нечетким подмножеством *множества* M *называется функция* $\mu: M \to [0,1]$.

Про функцию μ обычно говорят, что она *характеризует степень принадлежности элемента к данному нечеткому подмножеству*.

II.1. Определение нечеткого множества

Определение 1. Нечетким подмножеством *множества* M *называется функция* $\mu : M \to [0,1]$.

Обычное, «четкое» подмножество A можно рассматривать, как нечеткое, если этому подмножеству A поставить в соответствие функцию $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in M \setminus A. \end{cases}$

II.1. Определение нечеткого множества

Определение 1. Нечетким подмножеством *множества* M *называется функция* $\mu : M \to [0,1]$.

Отождествляя «обычное» подмножество A с функцией μ_A, можно считать понятие нечеткого подмножества обобщением теоретико-множественного понятия подмножества. Часто в литературе пишут μ_A, считая при этом A либо, при $A \subseteq M$, вышеупомянутой функцией μ_A, с помощью которой осуществляется отождествление «четкого» и соответствующего нечеткого множества, либо, в противном случае, индексом, служащим для идентификации различных нечетких множеств. При этом μ_A называют **функцией принадлежности** нечеткого подмножества A.

II.2. Операции алгебры нечетких множеств

Определение 2. *На множестве всех нечетких подмножеств множества M для нечетких подмножеств A и B с функциями принадлежности μ_A и μ_B соответственно вводятся следующие операции:*

Пересечение: $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;

Произведение: $\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;

Объединение: $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;

Сумма: $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;

Дополнение: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

II.2. Операции алгебры нечетких множеств

Определение 2. *На множестве всех нечетких подмножеств множества M для нечетких подмножеств A и B с функциями принадлежности μ_A и μ_B соответственно вводятся следующие операции:*

Пересечение: $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;

Произведение: $\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;

Объединение: $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;

Сумма: $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;

Дополнение: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Рассмотреть примеры?

II.2. Операции алгебры нечетких множеств

В рассмотренных примерах для **множеств A и B** все результаты операций являются «истинно нечеткими» множествами.

II.2. Операции алгебры нечетких множеств

В рассмотренных примерах для **множеств A и B** все результаты операций являются «истинно нечеткими» множествами.

Для **нечетких множеств C и D** («истинно нечетких»!) результат операций «пересечение» и «умножение» совпадает и является «четким» множеством — пустым!

II.2. Операции алгебры нечетких множеств

Нечетким множествам E и G соответствуют «четкие», «обычные» множества: $E = \{a, d\}$, $G = \{b, d\}$, при этом результатам всех операций соответствуют также «четкие» множества, причем результаты этих операций совпадают с соответствующимим результатами операций для «обычных» множеств (кроме, естественно, суммы и произведения, которые для «обычных» множеств не определяются).

II.2. Операции алгебры нечетких множеств

Нечетким множествам E и G соответствуют «четкие», «обычные» множества: $E = \{a, d\}$, $G = \{b, d\}$, при этом результатам всех операций соответствуют также «четкие» множества, причем результаты этих операций совпадают с соответствующимим результатами операций для «обычных» множеств (кроме, естественно, суммы и произведения, которые для «обычных» множеств не определяются).

При этом не все теоремы теории множеств справедливы для обобщенных множеств. Следует, однако, отметить, что алгебра, носителем которой является множество всех нечетких подмножеств множества M, с сигнатурой $\mathcal{F} = \{\cup, \cap, \overline{}\}$ является, очевидно, **булевой алгеброй**. Если же заменить $\cup$ на $+$ и (или) пересечение на произведение, то получившаяся алгебра уже не является **булевой алгеброй**.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?