Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Бином Ньютона и «треугольник Паскаля»

Приложение к **электронному учебнику** для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Инструкция к пособию

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

I. Инструкция к пособию

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

Для просмотра файлов pdf желательно использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11, но для операционной системы Android желательно применять `Smart Office`. Можно использовать другую программу, поддерживающую выполнение скриптов, включенных в файл pdf. Следует проследить, чтобы было разрешено выполнение скриптов. Это необходимо для выполнения переходов по гиперссылкам.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

Электронный учебник представляет собой систему файлов, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`. Основным из этих файлов является `0000Spisok.pdf`, содержащий гиперссылки на файлы с представлениями лекций и практических занятий.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами:

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

Электронный учебник представляет собой систему файлов, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`. Основным из этих файлов является `0000Spisok.pdf`, содержащий гиперссылки на файлы с представлениями лекций и практических занятий.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами:
во-первых, с титульного листа с помощью гиперссылки, отмеченной словосочетанием «электронного учебника» во фразе «Раздел электронного учебника»;

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

Электронный учебник представляет собой систему файлов, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`. Основным из этих файлов является `0000Spisok.pdf`, содержащий гиперссылки на файлы с представлениями лекций и практических занятий.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами:
во-первых, с титульного листа с помощью гиперссылки, отмеченной словосочетанием «электронного учебника» во фразе «Раздел электронного учебника»;
во-вторых, с последней страницы, по гиперссылке «Вернуться к списку презентаций».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 8, 9 или 11.

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Введение

В математических исследованиях нередко возникает необходимость представить выражение $(a + b)^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в виде суммы выражений вида $\alpha_{k,m}a^k b^m$, где $\alpha_{k,m}$ — некоторый коэффициент. Для этого обычно применяется один из двух способов: метод, основанный на «**треугольнике Паскаля**» и использование формулы «**бинома Ньютона**».

III. «Треугольник Паскаля»

Сначала рассмотрим **построение «треугольника Паскаля»**, а потом — его **использование для преобразования** выражения $(a+b)^n$.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

«Треугольник Паскаля» представляет собой набор строк, состоящий из чисел, сгруппированных по определенному закону (который мы сейчас опишем) таким образом, что получается фигура, напоминающая треугольник. Например, мы изобразили первые 6 строк «треугольника Паскаля».

Слева от вертикальной черты мы указали номер строки, причем нумерацию строк мы начали с 0.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	

Рассмотрим процесс построения «треугольника Паскаля».

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0	1

Сначала на «вершину» «треугольника Паскаля» поместим 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0	**1**
1	1

На левой «стороне» «треугольника Паскаля» запишем 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0		1	
1	1		1

Крайний правый элемент « нижней стороны» «треугольника Паскаля» также сделаем равным 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0			1	
1		**1**		1
2	1			

В следующей строке на левую «сторону» «треугольника Паскаля» вновь поместим 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0			1	
1		**1**		**1**
2	1		2	

Следующий элемент строки «треугольника Паскаля» представляет собой сумму элементов предыдущей строки, находящихся над ним слева и справа. Эти элементы предыдущей строки выделены пурпурным цветом.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0			1		
1		1		**1**	
2	1		2		1

На «правой стороне» «треугольника Паскаля» ставим 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		**1**		2		1
3	1					

Итак, процедура построения очередной строки — «нижней стороны» «треугольника Паскаля» начинается с того, что на место крайнего левого элемента ставим 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		**1**		**2**		1
3	1		3			

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		1		**2**		**1**
3	1		3		3	

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		**1**	
3	1		3		3		1

Последний элемент строки равен 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1			
1				1		1		
2			1		2		1	
3		**1**		3		3		1
4	1							

Итак, на место крайнего левого элемента ставим 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
0 & & & & & 1 & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
\mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & 3 & & 1 \\
4 & 1 & & 4 & & & & & \\
\end{array}
$$

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		**3**		**3**		1	
4	1		4		6				

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
0 & & & & & 1 & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
3 & & 1 & & 3 & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} \\
4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 &
\end{array}
$$

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		**1**	
4	1		4		6		4		1

Крайний правый элемент строки вновь делаем равным 1.

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		**1**		4		6		4		1	
5	1										

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		**1**		**4**		6		4		1	
5	1		5								

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		**4**		**6**		4		1	
5	1		5		10						

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1				
1					1		1			
2				1		2		1		
3			1		3		3		1	
4		1		4		**6**		**4**		1
5	1		5		10		10			

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		**4**		**1**	
5	1		5		10		10		5		

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		**1**		
5	1		5		10		10		5		1	

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	**1**	5	10	10	5	1	
6	1						

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		**1**		**5**		10		10		5		1	
6	1		6										

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		**5**		**10**		10		5		1
6	1		6		15							

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		**10**		**10**		5		1
6	1		6		15		20					

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		10		**10**		**5**		1
6	1		6		15		20		15			

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		10		10		**5**		**1**
6	1		6		15		20		15		6	

III.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		**1**	
6	1		6		15		20		15		6		1

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a+b)^3$

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a + b)^3 =$

Сначала заготовим «шаблон», без учета значений числовых коэффициентов.

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a+b)^3 = \_\_a^3 +$

Степень 3 у a^3 совпадает со степенью суммы $(a+b)^3$.

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a + b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b +$

Если представить первое слагаемое в виде a^3b^0, то можно сказать, что у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 +$

Вновь у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3.$

Вновь у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0		1	
1	1		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		1				

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3.$

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0			1		
1		**1**		**1**	
2	1		2		

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0			1		
1		1		**1**	
2	1		2		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		**1**		2		1
3	1					

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		**1**		2		1		
3	1							

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		**1**		**2**		1
3	1		3			

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении $(a+b)^3 = 1a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		**2**		1	
3	1		3				

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		1		**2**		**1**
3	1		3		3	

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3.$

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		1		**2**		**1**
3	1		3		3	

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		1		2		**1**	
3	1		3		3		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		1		2		**1**		
3	1		3		3		1	

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

III.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		1		2		**1**		
3	1		3		3		1	

Получили ответ:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Рассмотреть пример?

IV. Бином Ньютона

Традиционно под «биномом Ньютона» понимают формулу

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{(n-3)!3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{n!}{(n-m)!m!}a^{n-m}b^m + \ldots + b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m.$$

Следует учесть, что по определению $0! = 1$.

Рассмотреть пример?

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернёмся к основному учебнику?

Другие электронные книги автора:

«Алгебра и теория чисел» или «Элементарная математика»