Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Математический анализ (теория)

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки РФ (Свердловское региональное отделение) в качестве учебного пособия для студентов экономических и инженерно-технических направлений вузов

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2015

Рецензенты:

кафедра прикладной математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина;
М. Ю. Филимонов — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН

Электронное учебное пособие «Математический анализ» предназначено для студентов, обучающихся по экономическим и техническим направлениям подготовки, и преподавателей. Оно может быть использовано для проведения учебных занятий и самоподготовки.

© Ю. Б. Мельников, 2015
© Уральский государственный экономический университет, 2015

I. Инструкция к пособию

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Электронный учебник представляет собой систему из двух основных файлов `00MathAn.pdf` (теоретический материал) и `PrimMathAn.pdf` (примеры и задачи), которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия [1] **«Алгебра и теория чисел»** и [2] **«Элементарная математика».**

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Математический язык является высокоформализованным.

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\_ = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество   чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

_ $= \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество целых чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\dots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2;\dots\}$ — множество целых чисел;

___ $= \left\{\dfrac{m}{n}\,\middle|\, m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество   чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество рациональных чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество рациональных чисел;

$\_ = \mathbb{Q} \cup \left\{\pi;\ \sqrt{2}; \ldots\right\}$ — множество   чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{\pi;\ \sqrt{2}; \ldots\right\}$ — множество чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

Будем использовать обозначения, знакомые из школьного курса математики:

$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{\pi;\ \sqrt{2}; \ldots\right\}$ — множество действительных чисел;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:
квантор всеобщности $\forall$, который читается как «для любого», «произвольный» и т.п.;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:
квантор всеобщности $\forall$, который читается как «для любого», «произвольный» и т.п.;

Обозначение фактически представляет собой перевернутую букву A, от английского слова «**A**ll» (все).

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:

квантор всеобщности $\forall$, который читается как «для любого», «произвольный» и т.п.;

квантор существования $\exists$, который читается как «существует», «найдётся», «можно подобрать» и т.п.;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:

квантор всеобщности $\forall$, который читается как «для любого», «произвольный» и т.п.;

квантор существования $\exists$, который читается как «существует», «найдётся», «можно подобрать» и т.п.;

Обозначение фактически представляет собой перевернутую букву E, от английского глагола «to **E**xist» (существовать).

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:

квантор всеобщности $\forall$, который читается как «для любого», «произвольный» и т.п.;

квантор существования $\exists$, который читается как «существует», «найдётся», «можно подобрать» и т.п.;

логическая связка «импликация» $\Rightarrow$, где $A \Rightarrow B$ читается как «из A следует B», «утверждение A влечёт утверждение B», «если A, то B» и т.п.;

II. Язык математики: кванторы и логические связки

В записях формул мы будем широко пользоваться следующими общепринятыми обозначениями:

квантор всеобщности $\forall$, который читается как «для любого», «произвольный» и т.п.;

квантор существования $\exists$, который читается как «существует», «найдётся», «можно подобрать» и т.п.;

логическая связка «импликация» $\Rightarrow$, где $A \Rightarrow B$ читается как «из A следует B», «утверждение A влечёт утверждение B», «если A, то B» и т.п.;

логическая связка «эквиваленция» $\Leftrightarrow$, где $A \Leftrightarrow B$ читается как «A эквивалентно B», «A истинно тогда и только тогда, когда истинно B» и т.д.

Рассмотрим примеры?

III. Элементы теории пределов

Со времен французского математика Огюстена Луи Коши 1789-1857 понятие предела стало основным в математическом анализе.

Огюстен Луи Коши (1789-1857)

III. Элементы теории пределов

Со времен французского математика Огюстена Луи Коши 1789-1857 понятие предела стало основным в математическом анализе.

Все остальные понятия (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость) определяются при помощи предела.

III. Элементы теории пределов

Со времен французского математика Огюстена Луи Коши 1789-1857 понятие предела стало основным в математическом анализе.

Все остальные понятия (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость) определяются при помощи предела.

Поэтому успех в освоении всего курса математического анализа напрямую зависит от того, насколько хорошо будет усвоено понятие предела.

III. Элементы теории пределов

Со времен французского математика Огюстена Луи Коши 1789-1857 понятие предела стало основным в математическом анализе.

Попытаемся формализовать понятие предела.

III. Элементы теории предело

Со времен французского математика Огюстена Луи Коши 1789-1857 понятие предела стало основным в математическом анализе.

Попытаемся формализовать понятие предела.

Начнём с понятий «окрестность точки» и «предел последовательности».

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Мы рассмотрим самый низкий, примитивный уровень формализации понятия окрестности.

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Мы рассмотрим самый низкий, примитивный уровень формализации понятия окрестности.

Более абстрактная трактовка рассматривается в разделе математики, называемом «топология».

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Как задать числовое множество?

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Как задать числовое множество?

В данном разделе мы зададим окрестности,

во-первых,

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Как задать числовое множество?

В данном разделе мы зададим окрестности,
во-первых, графически, на числовой оси,
во-вторых,

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Как задать числовое множество?

В данном разделе мы зададим окрестности,

во-первых, графически, на числовой оси,

во-вторых, аналитически: уравнениями, неравенствами или

III.1. Понятие окрестности точки

Понятие **окрестность точки** математически формализует такие словосочетания как «близкие числа», «точки, находящиеся рядом на числовой оси» и т.п.

Как задать числовое множество?

В данном разделе мы зададим окрестности,
во-первых, графически, на числовой оси,
во-вторых, аналитически: уравнениями, неравенствами или системами уравнений и/или неравенств.

III.1. Понятие окрестности точки

Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

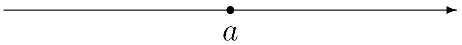
III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a

Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

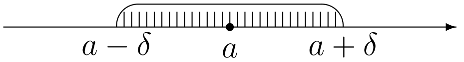
δ-окрестность числа a



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

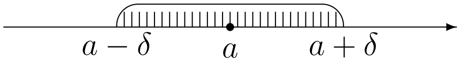
III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

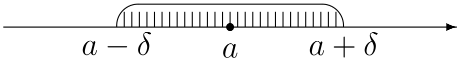
III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\qquad |x-a|<\delta$ 

Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$

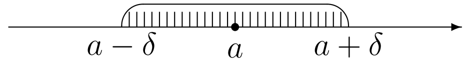


правая
δ-полуокрестность числа a

Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

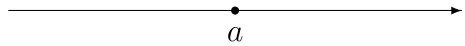
III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $|x-a|<\delta$



правая

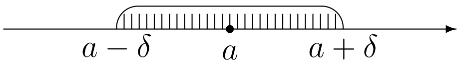
δ-полуокрестность числа a



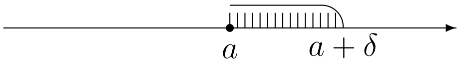
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\quad |x - a| < \delta$



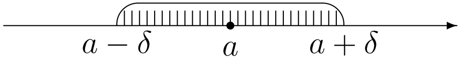
правая
δ-полуокрестность числа a



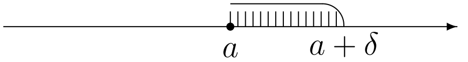
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



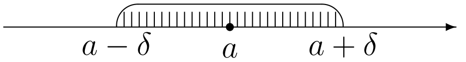
правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a<\delta$



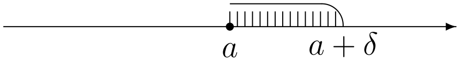
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a<\delta$

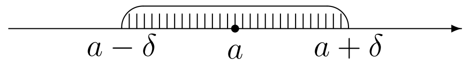


левая δ-полуокрестность числа a

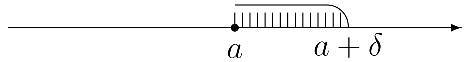
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

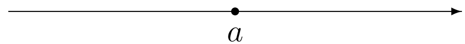
δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a<\delta$



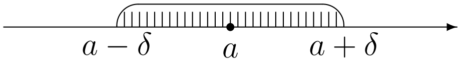
левая δ-полуокрестность числа a



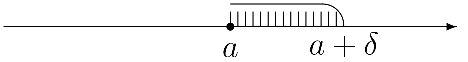
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

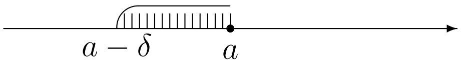
δ-окрестность числа a $\qquad |x-a|<\delta$



правая
δ-полуокрестность числа a $\qquad 0 \leqslant x-a<\delta$



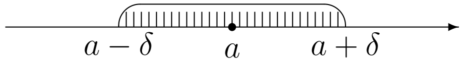
левая
δ-полуокрестность числа a



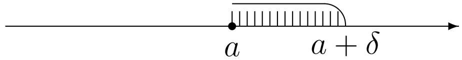
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

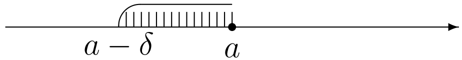
δ-окрестность числа a $\quad |x-a| < \delta$



правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a < \delta$



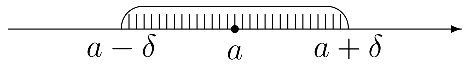
левая δ-полуокрестность числа a $\quad -\delta < x-a \leqslant 0$



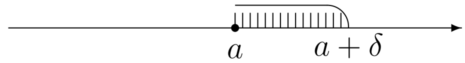
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

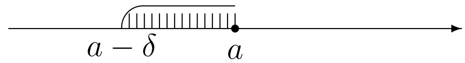
δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a<\delta$



левая δ-полуокрестность числа a $\quad -\delta<x-a \leqslant 0$

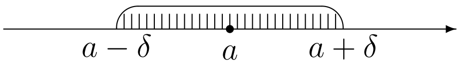


δ-окрестность точки ∞

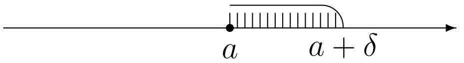
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

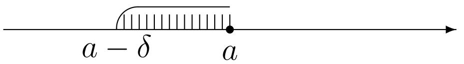
δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



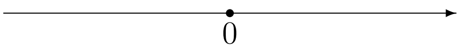
правая
δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a<\delta$



левая
δ-полуокрестность числа a $\quad -\delta<x-a \leqslant 0$



δ-окрестность точки ∞



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

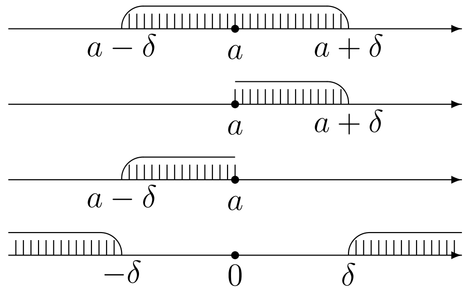
III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\qquad |x-a|<\delta$

правая δ-полуокрестность числа a $\qquad 0 \leqslant x-a<\delta$

левая δ-полуокрестность числа a $\qquad -\delta<x-a \leqslant 0$

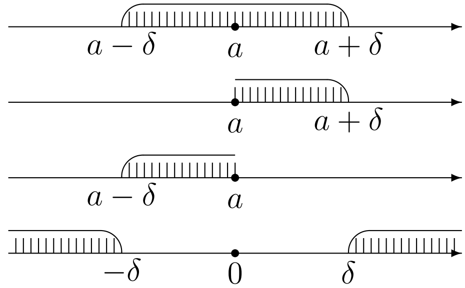
δ-окрестность точки ∞



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a	$\lvert x - a\rvert < \delta$
правая δ-полуокрестность числа a	$0 \leqslant x - a < \delta$
левая δ-полуокрестность числа a	$-\delta < x - a \leqslant 0$
δ-окрестность точки ∞	$\lvert x\rvert > \delta$



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

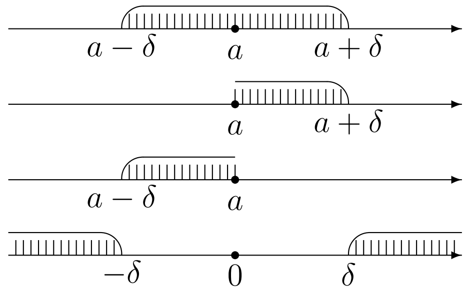
III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a $\qquad |x-a|<\delta$

правая δ-полуокрестность числа a $\qquad 0\leqslant x-a<\delta$

левая δ-полуокрестность числа a $\qquad -\delta<x-a\leqslant 0$

δ-окрестность точки ∞ $\qquad |x|>\delta$

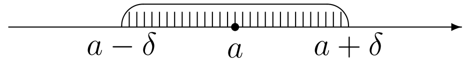


δ-окрестность точки $+\infty$

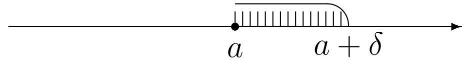
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

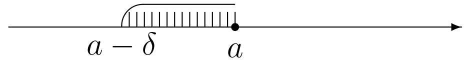
δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



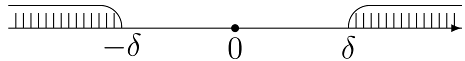
правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0 \leqslant x-a<\delta$



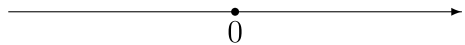
левая δ-полуокрестность числа a $\quad -\delta<x-a \leqslant 0$



δ-окрестность точки ∞ $\quad |x|>\delta$



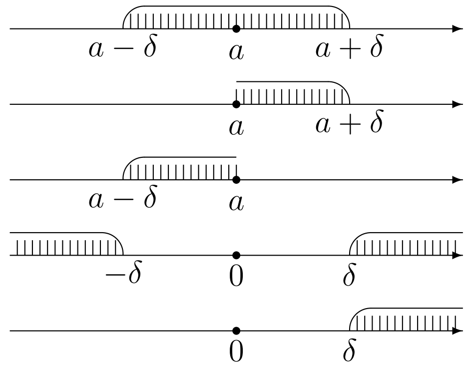
δ-окрестность точки $+\infty$



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

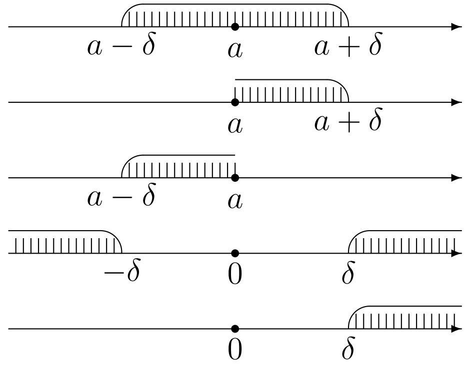
δ-окрестность числа a	$\lvert x-a\rvert<\delta$
правая δ-полуокрестность числа a	$0\leqslant x-a<\delta$
левая δ-полуокрестность числа a	$-\delta<x-a\leqslant 0$
δ-окрестность точки ∞	$\lvert x\rvert>\delta$
δ-окрестность точки $+\infty$	



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

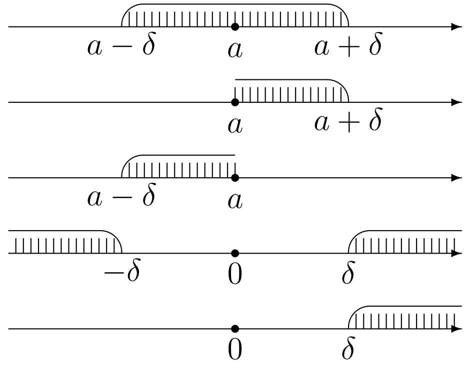
δ-окрестность числа a	$\lvert x-a\rvert<\delta$	
правая δ-полуокрестность числа a	$0\leqslant x-a<\delta$	
левая δ-полуокрестность числа a	$-\delta<x-a\leqslant 0$	
δ-окрестность точки ∞	$\lvert x\rvert>\delta$	
δ-окрестность точки $+\infty$	$x>\delta$	



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

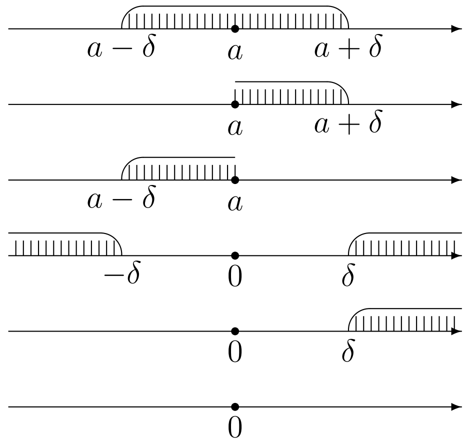
δ-окрестность числа a	$\lvert x-a\rvert<\delta$	
правая δ-полуокрестность числа a	$0\leqslant x-a<\delta$	
левая δ-полуокрестность числа a	$-\delta<x-a\leqslant 0$	
δ-окрестность точки ∞	$\lvert x\rvert>\delta$	
δ-окрестность точки $+\infty$	$x>\delta$	
δ-окрестность точки $-\infty$		



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

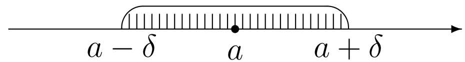
δ-окрестность числа a	$\lvert x-a\rvert<\delta$
правая δ-полуокрестность числа a	$0\leqslant x-a<\delta$
левая δ-полуокрестность числа a	$-\delta<x-a\leqslant 0$
δ-окрестность точки ∞	$\lvert x\rvert>\delta$
δ-окрестность точки $+\infty$	$x>\delta$
δ-окрестность точки $-\infty$	



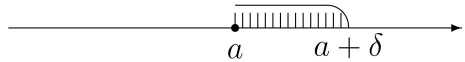
Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

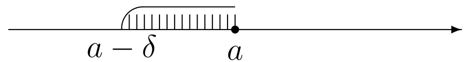
δ-окрестность числа a $\quad |x-a|<\delta$



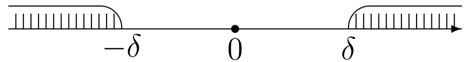
правая δ-полуокрестность числа a $\quad 0\leqslant x-a<\delta$



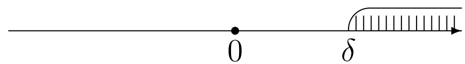
левая δ-полуокрестность числа a $\quad -\delta<x-a\leqslant 0$



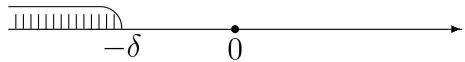
δ-окрестность точки ∞ $\quad |x|>\delta$



δ-окрестность точки $+\infty$ $\quad x>\delta$

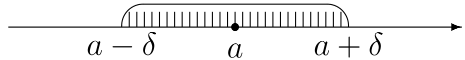
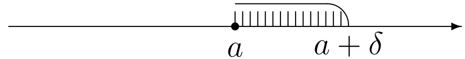
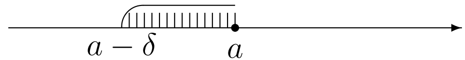
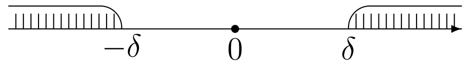
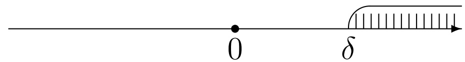
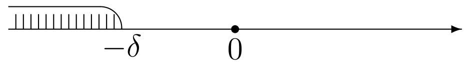


δ-окрестность точки $-\infty$



Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.1. Понятие окрестности точки

δ-окрестность числа a	$\lvert x-a\rvert<\delta$	
правая δ-полуокрестность числа a	$0\leqslant x-a<\delta$	
левая δ-полуокрестность числа a	$-\delta<x-a\leqslant 0$	
δ-окрестность точки ∞	$\lvert x\rvert>\delta$	
δ-окрестность точки $+\infty$	$x>\delta$	
δ-окрестность точки $-\infty$	$x<-\delta$	

Рассмотрим несколько наиболее важных трактовок окрестности числа и бесконечности.

III.2. Предел последовательности

Наша цель не ограничивается усвоением основных понятий математического анализа. Не менее, а, быть может, и более важной целью является формирование способности реализовать стратегию формализации информации и других важных универсальных стратегий деятельности.

III.2.1. Получение определения предела последовательности

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.

Возьмём некоторую конкретную последовательность.

Как её задать?

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.
Как её задать?

Последовательность — это функция.

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.
Как её задать?

Последовательность — это функция.
Функцию можно задать

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.
Как её задать?

Последовательность — это функция.
Функцию можно задать формулой,

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.
Как её задать?

Последовательность — это функция.
Функцию можно задать формулой, таблицей значений и

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.
Как её задать?

Последовательность — это функция.
Функцию можно задать формулой, таблицей значений и графиком.

III.2. Получение определения предела

Попробуем сформулировать математически корректное определение предела последовательности.

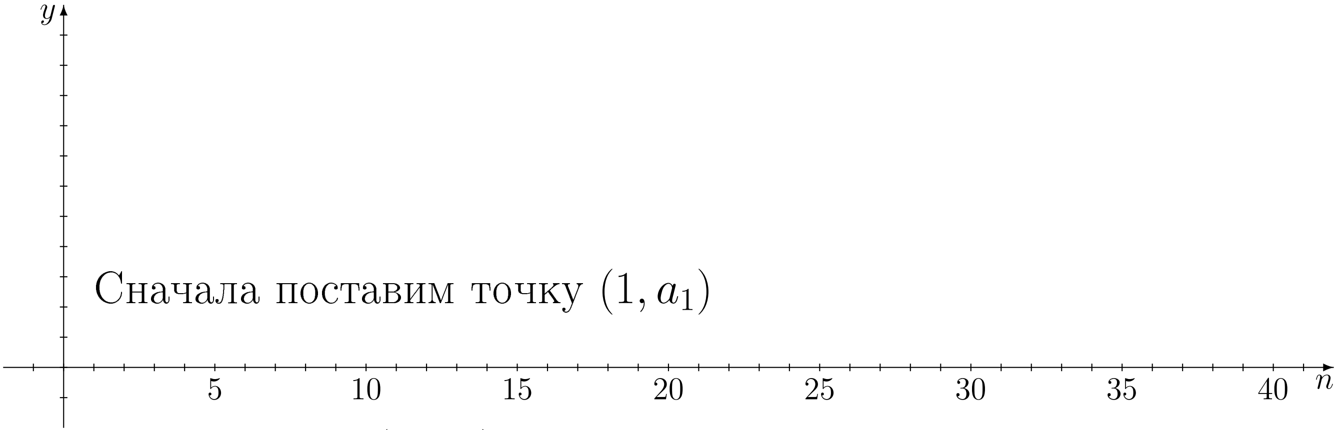
С чего начать?

Применим приём конкретизации.
Возьмём некоторую конкретную последовательность.
Как её задать?

Последовательность — это функция.
Функцию можно задать формулой, таблицей значений и графиком.

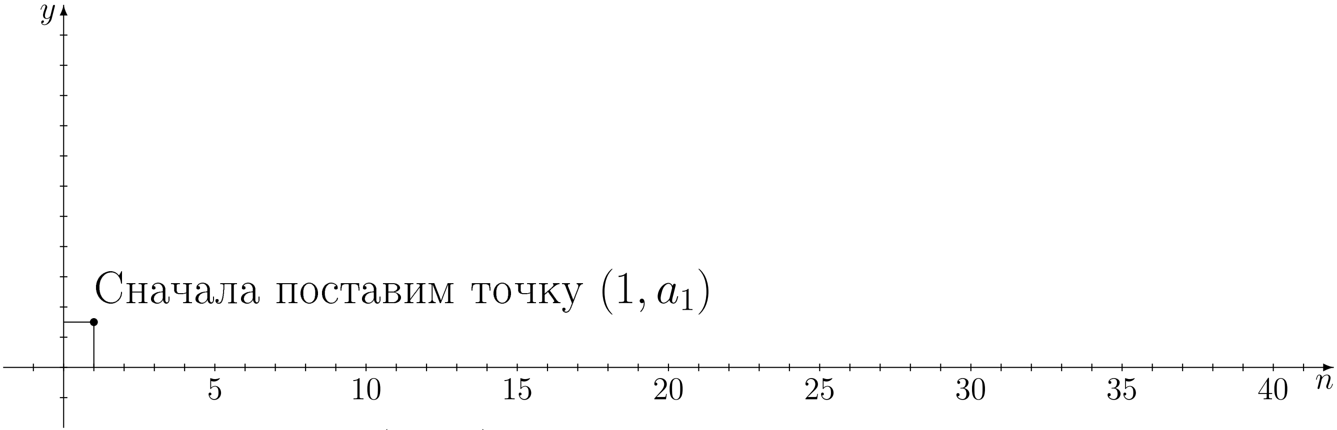
Выберем наиболее «визуальный» способ — задание графиком.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



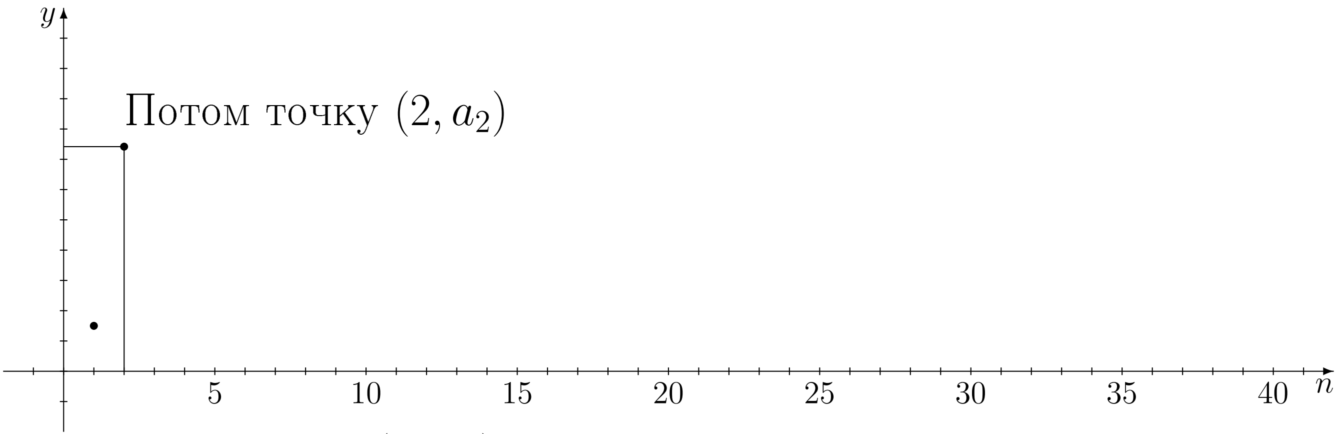
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



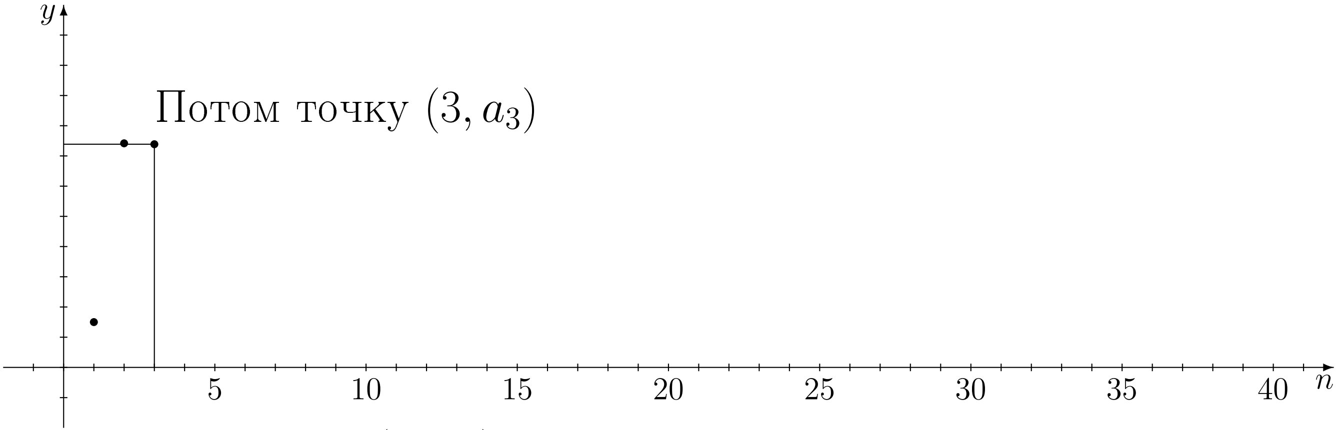
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



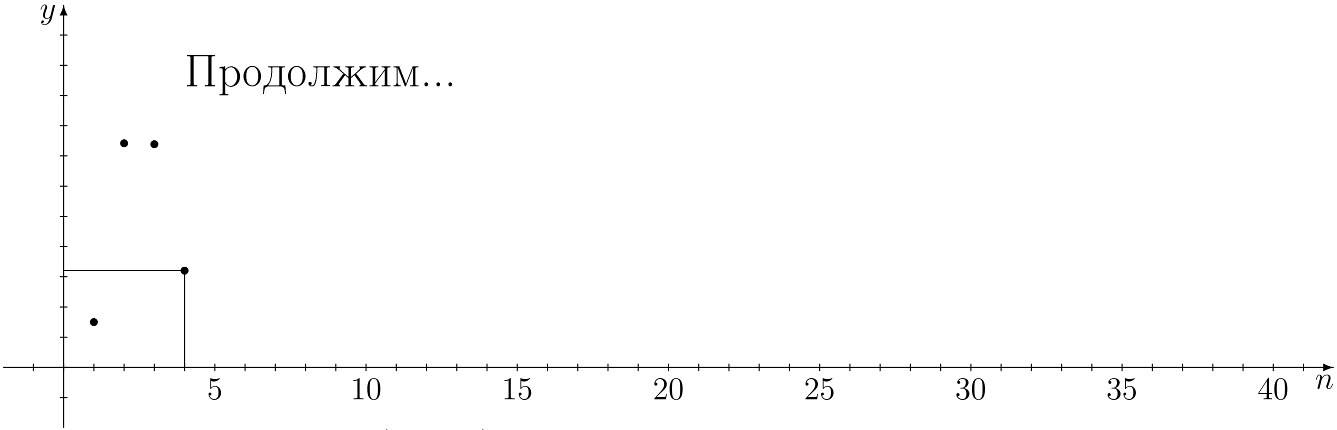
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



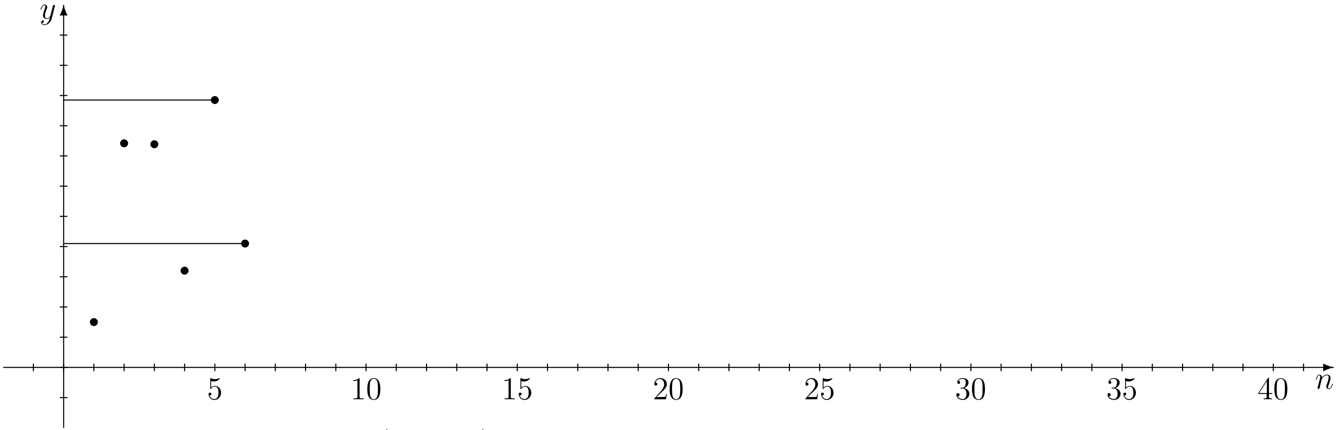
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



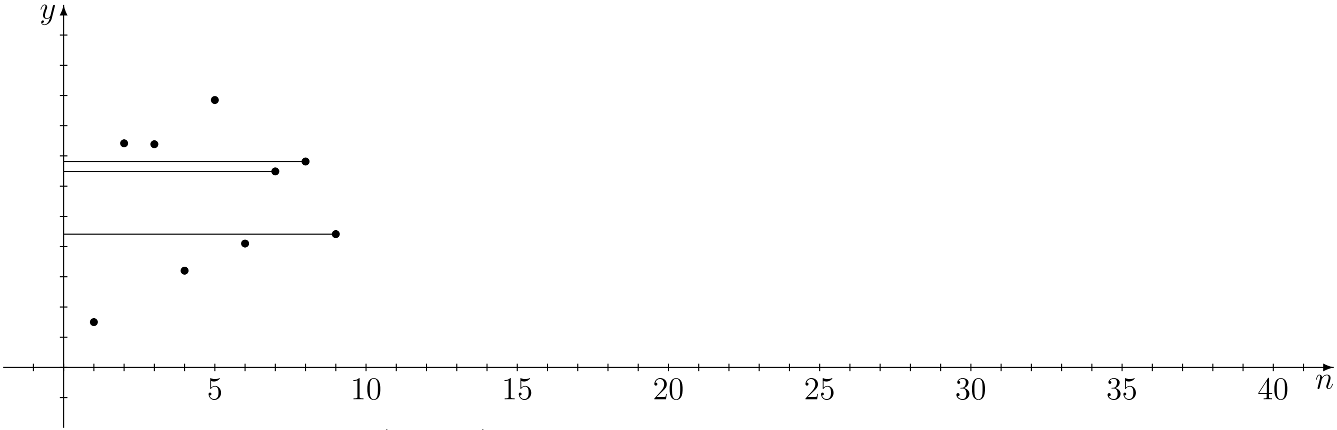
Изобразим точки (n, a_n).

III.2.1. Получение определения предела последовательности



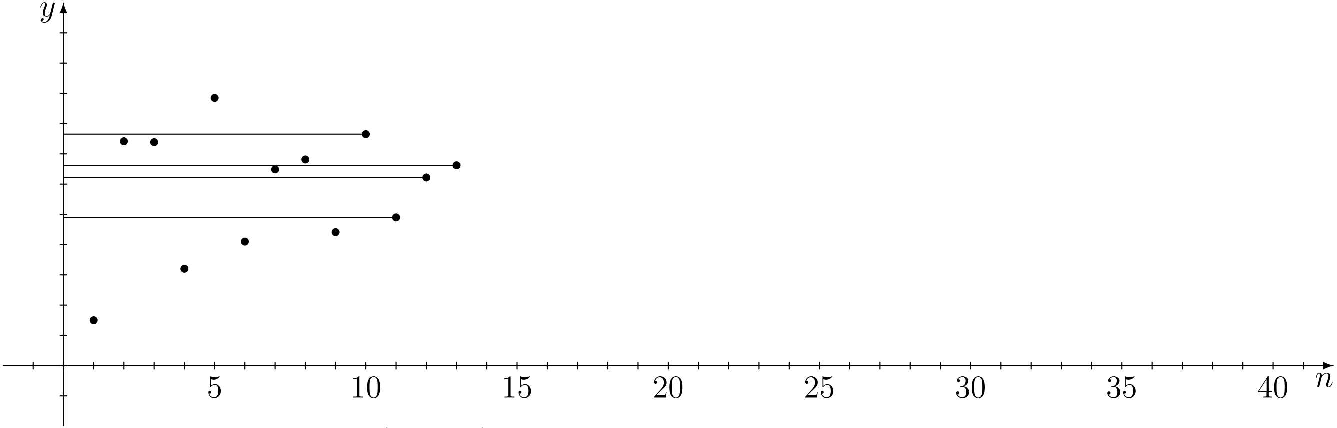
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



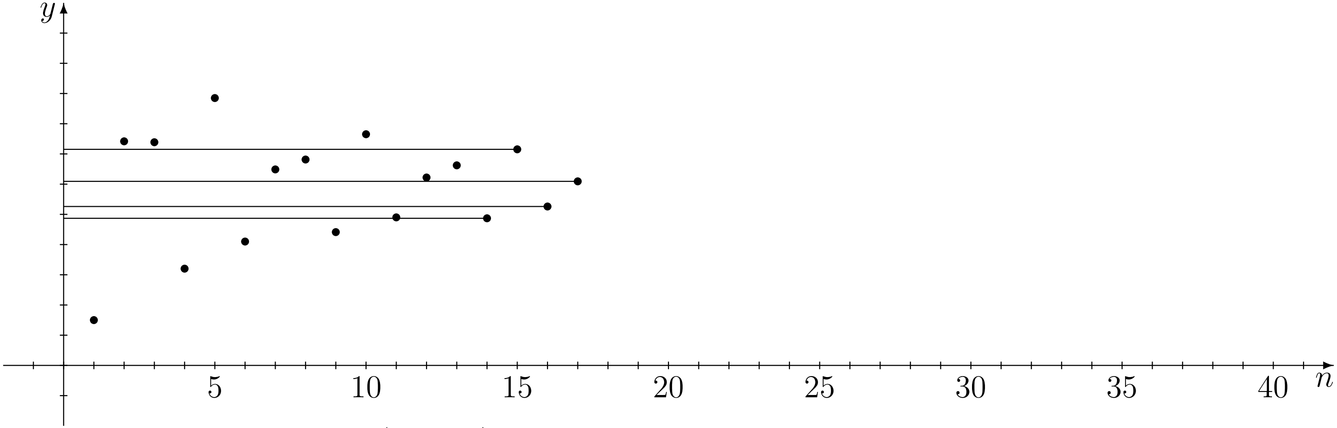
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



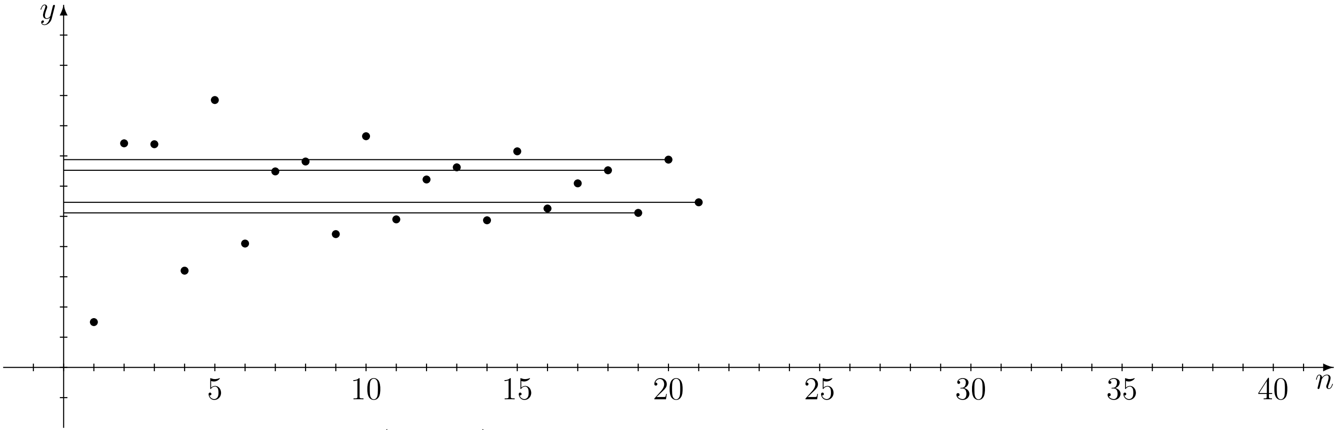
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



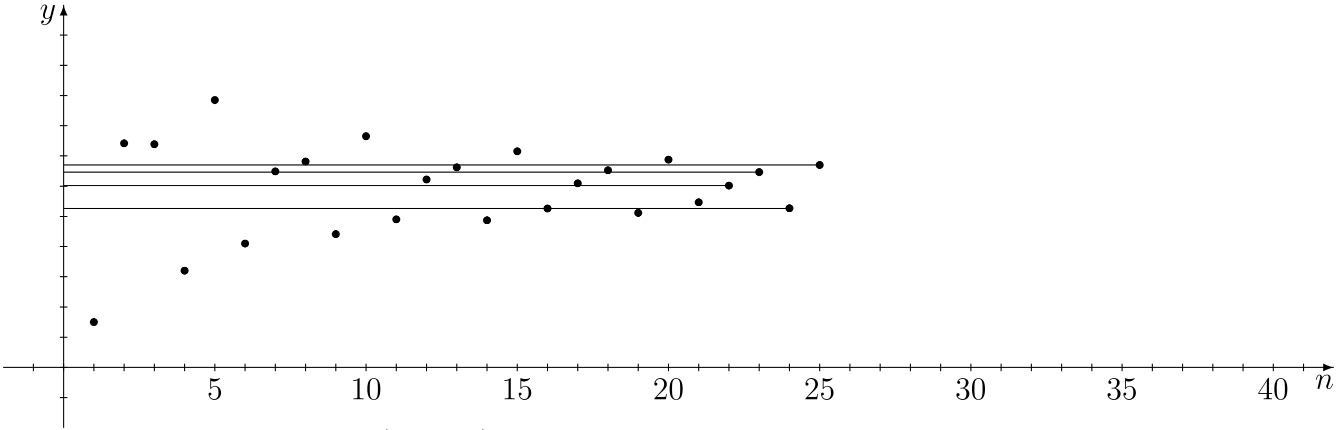
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



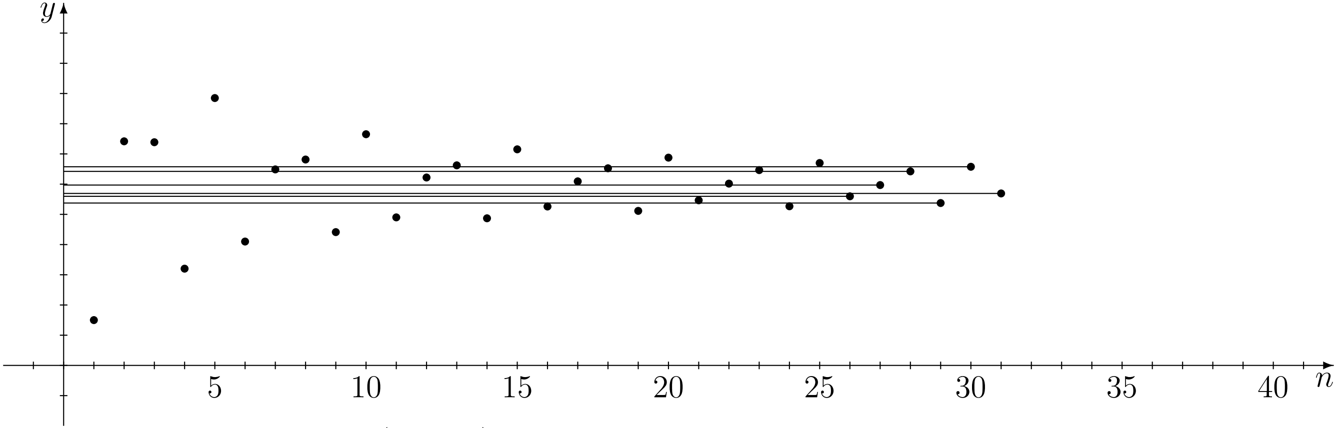
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



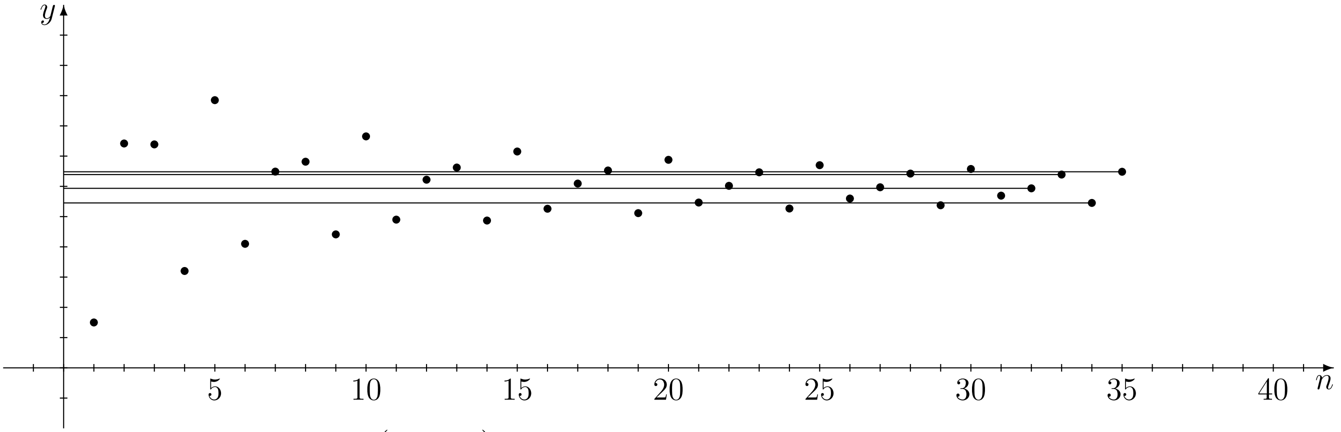
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



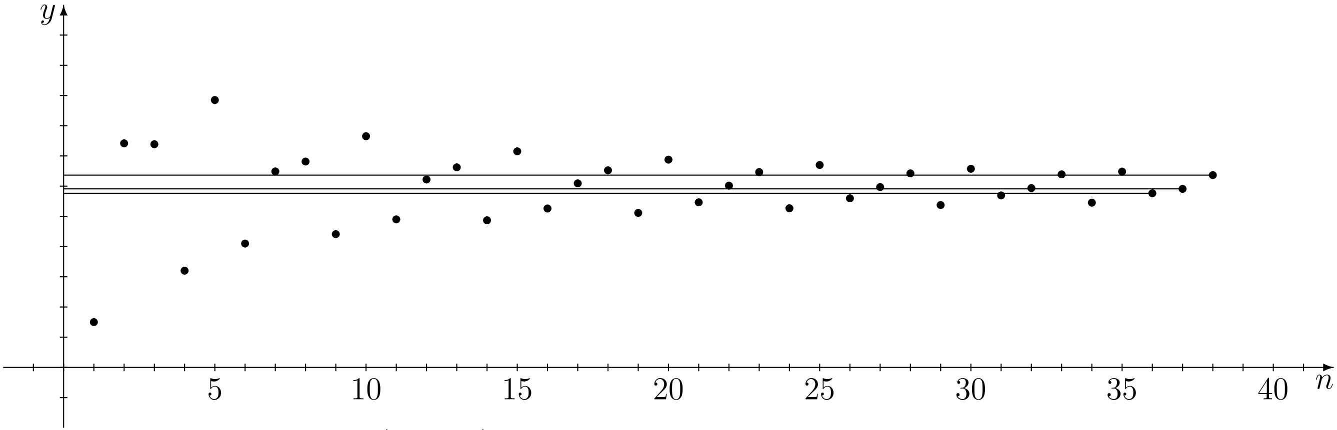
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



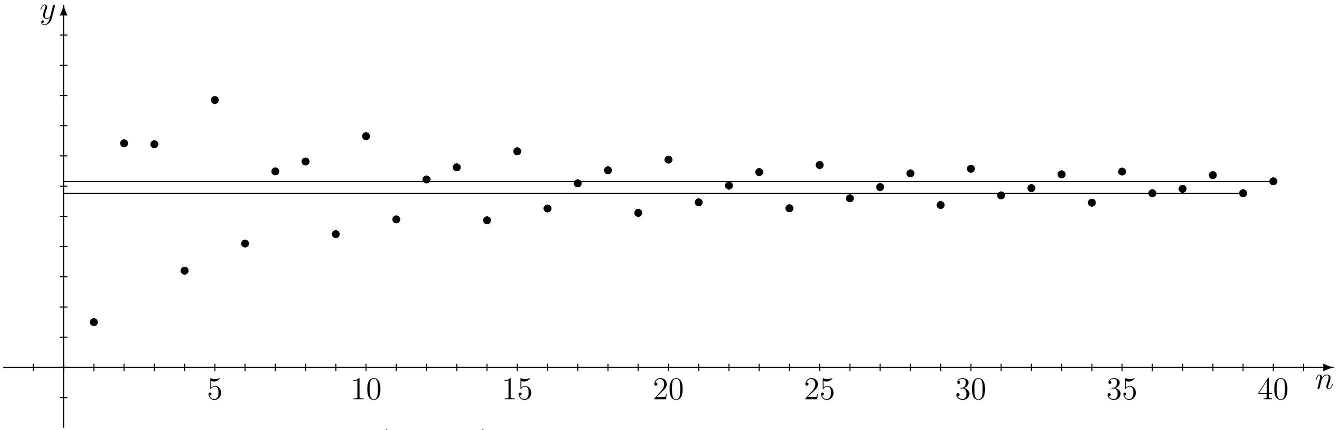
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



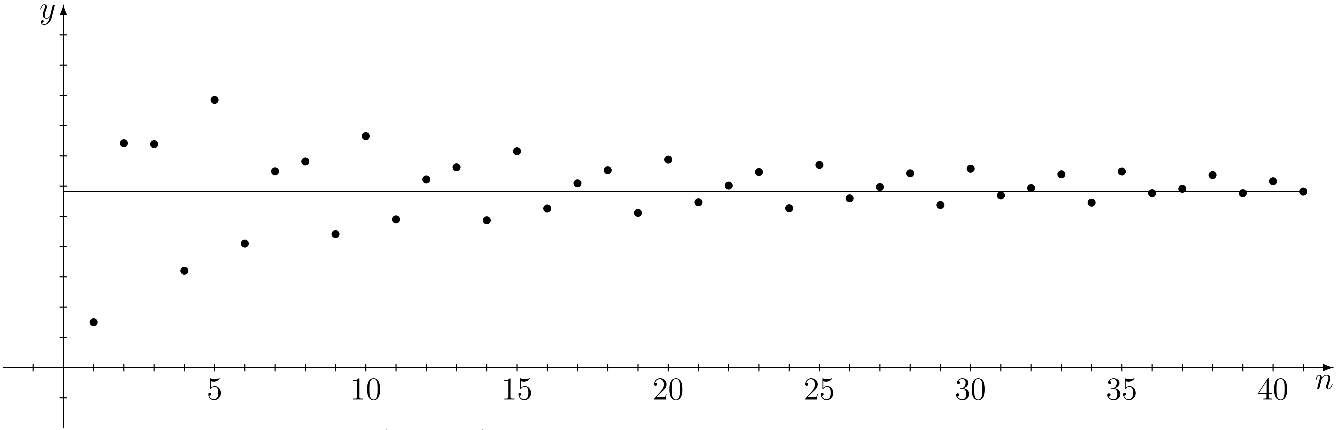
Изобразим точки (n, a_n).

III.2.1. Получение определения предела последовательности



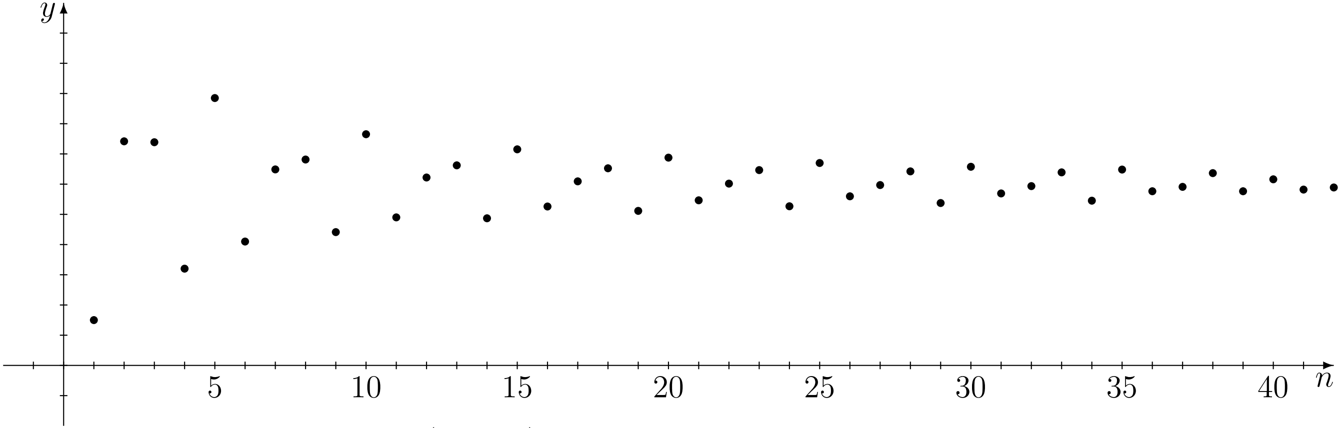
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



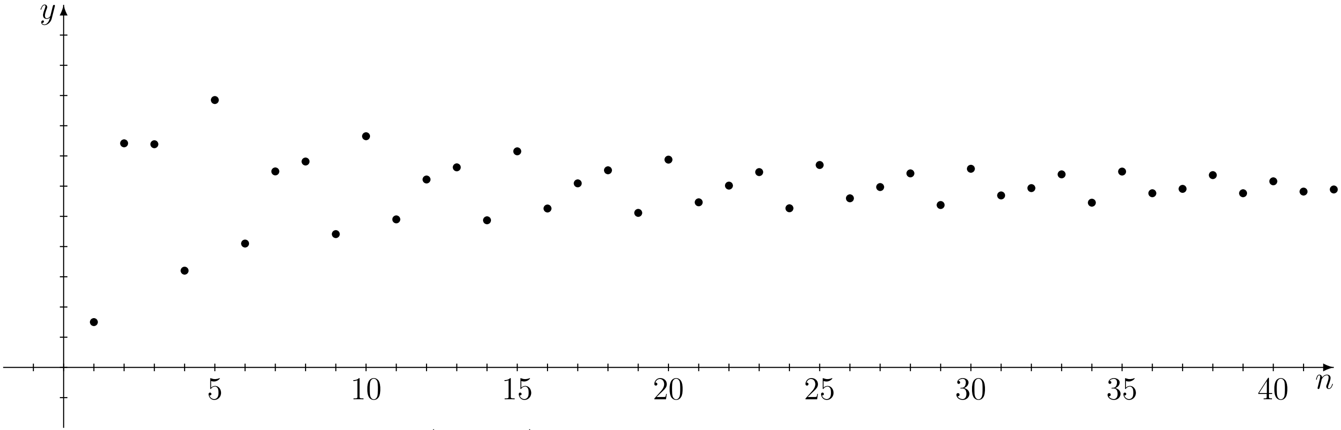
Изобразим точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



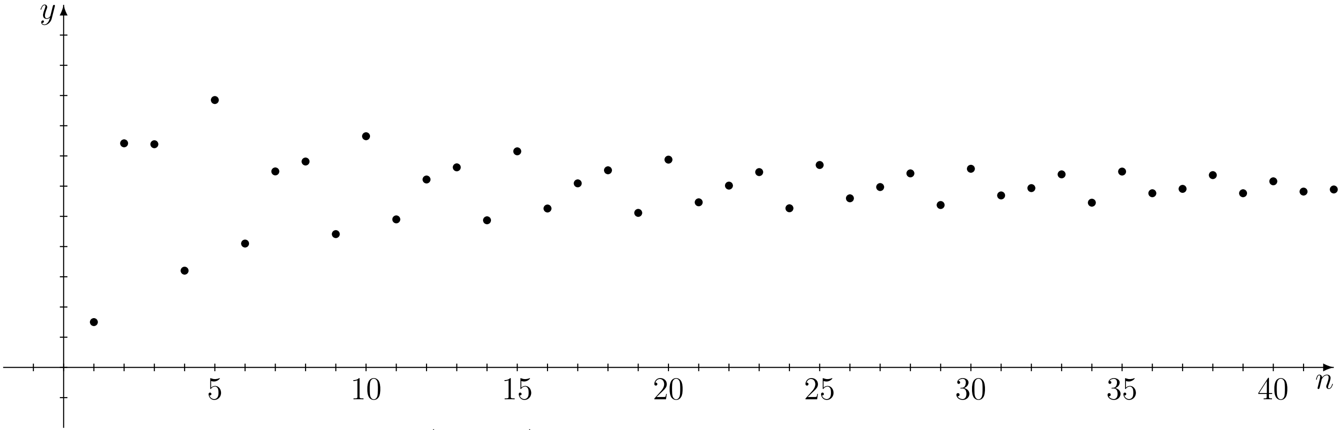
Изображены точки (n, a_n) .

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

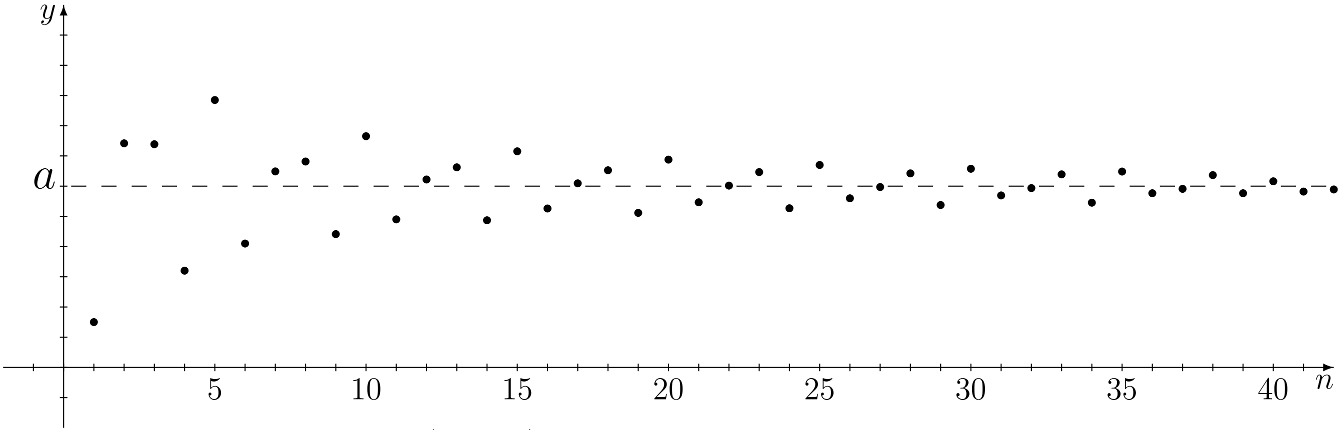
III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Построим линию $y = a$.

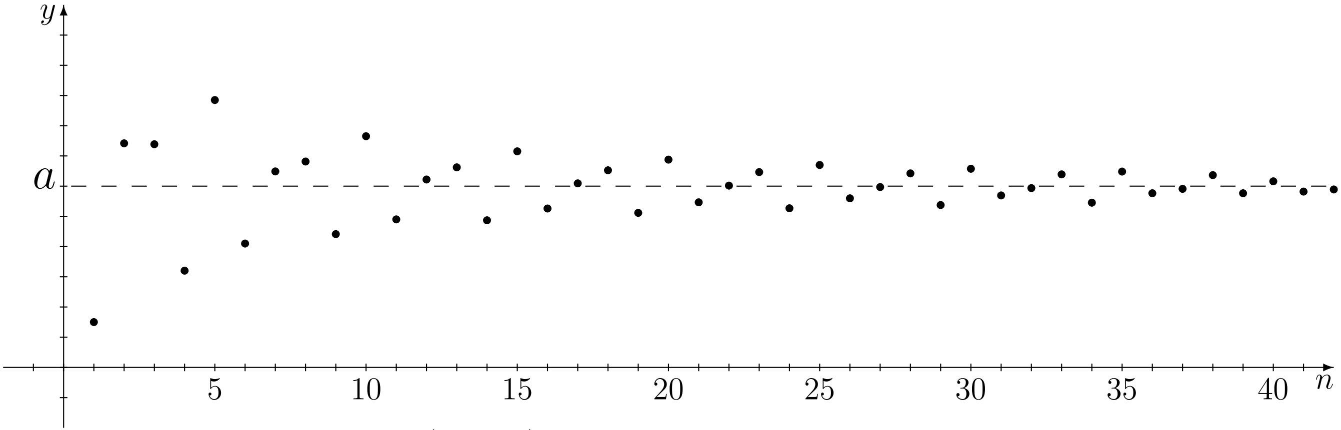
III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Построим линию $y = a$.

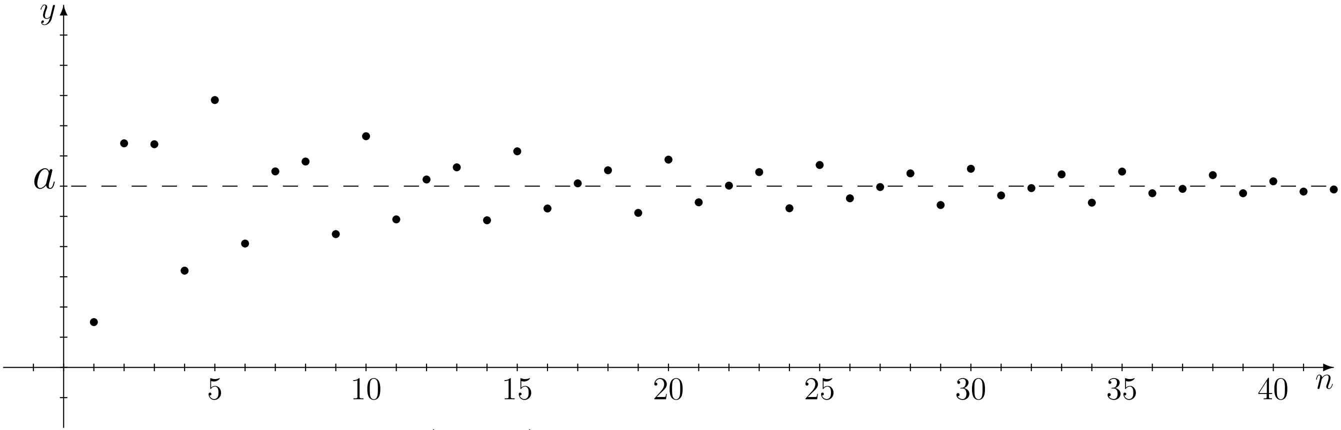
III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

III.2.1. Получение определения предела последовательности

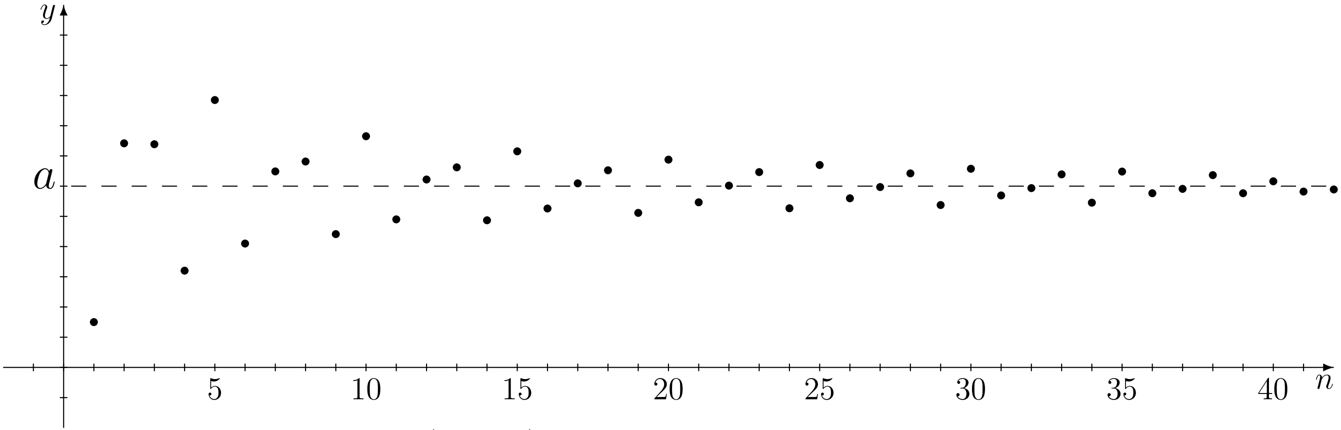


Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

С точки зрения математической строгости это просто «бла-бла-бла».

III.2.1. Получение определения предела последовательности

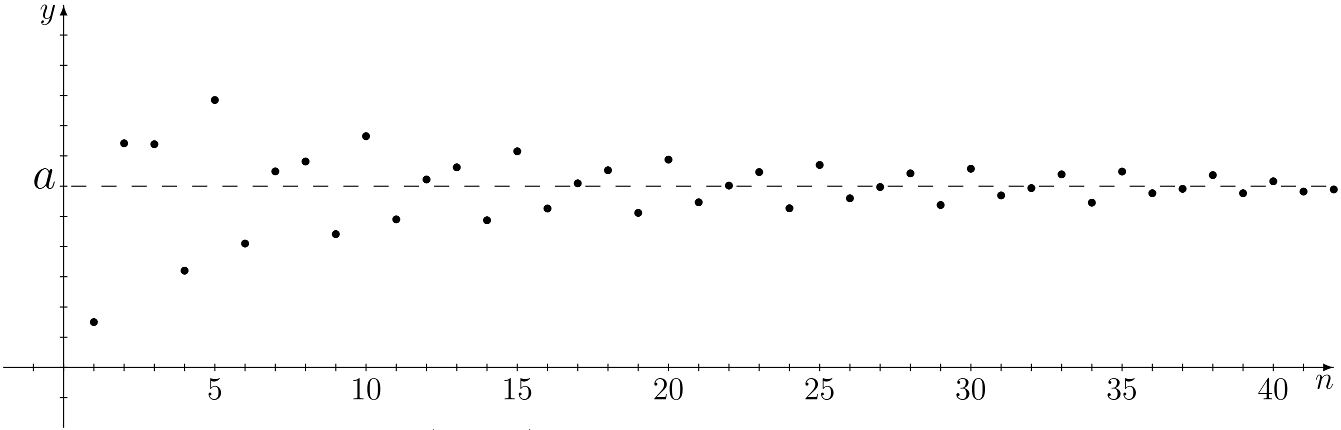


Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

Надо математически формализовать эту фразу.

III.2.1. Получение определения предела последовательности

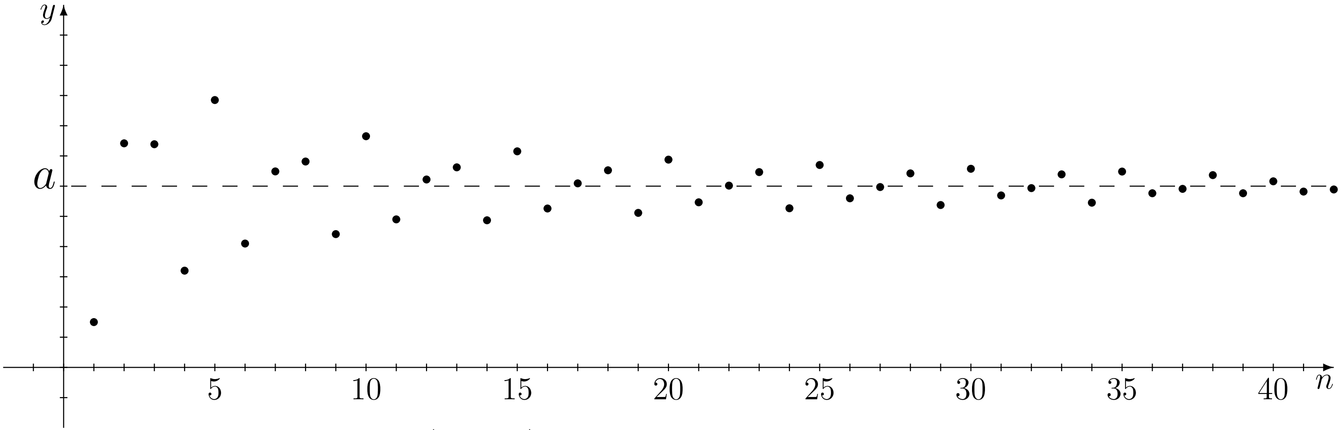


Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

Что значит «значения a_n **близки к** a»?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



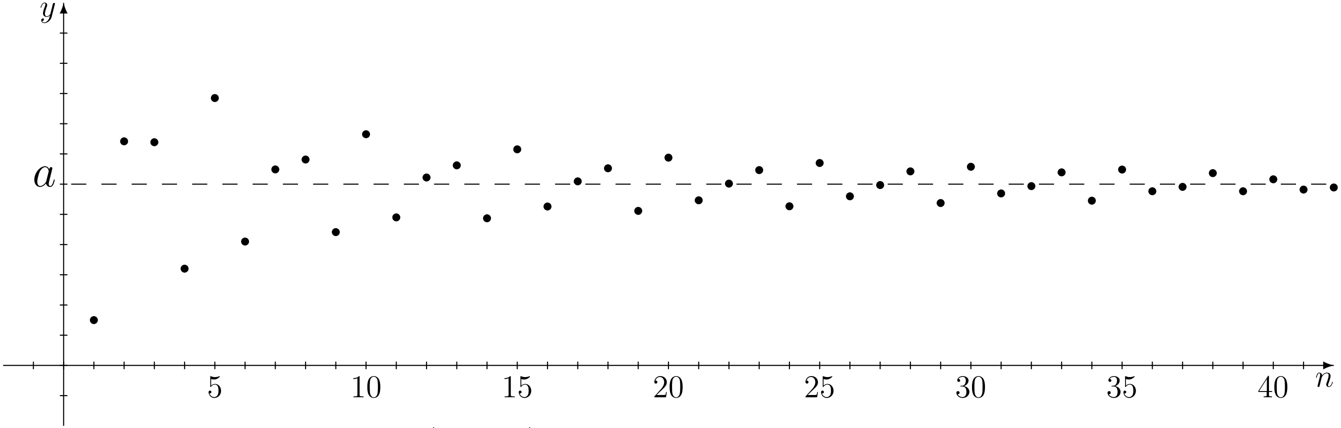
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Что значит «значения a_n **близки к a**»?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



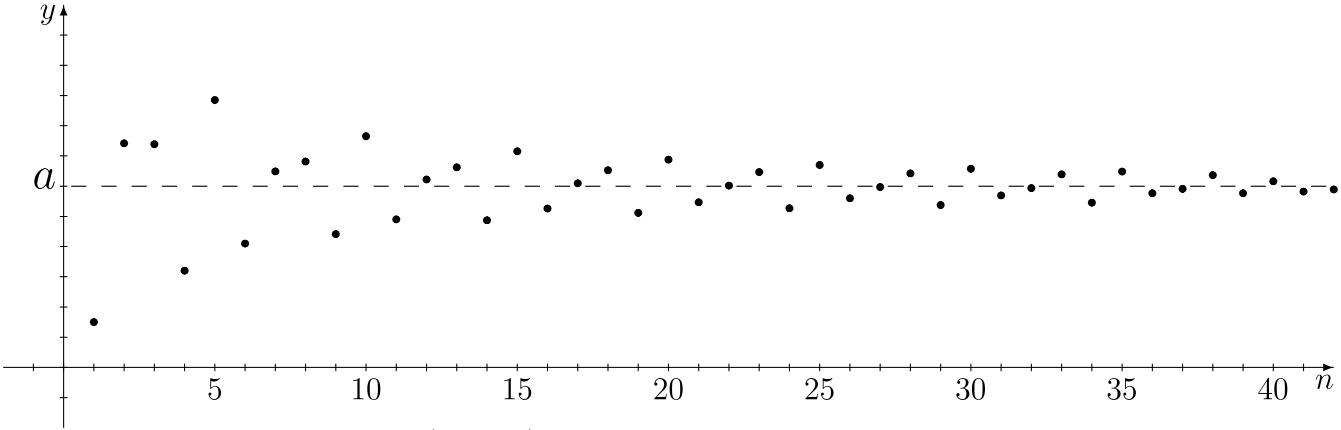
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Что значит «с ростом значений a_n...»?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



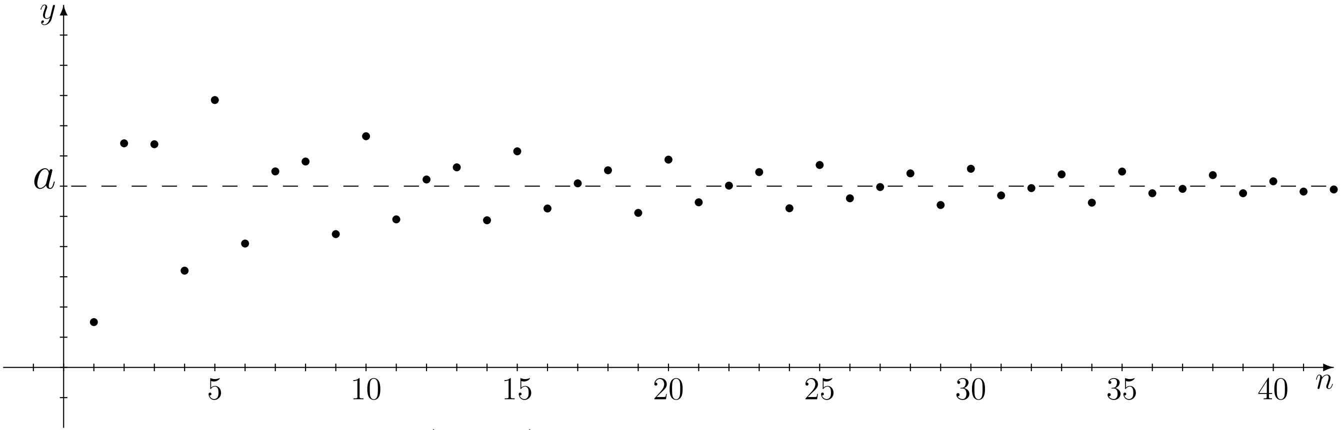
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Что значит «с ростом значений a_n...»?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



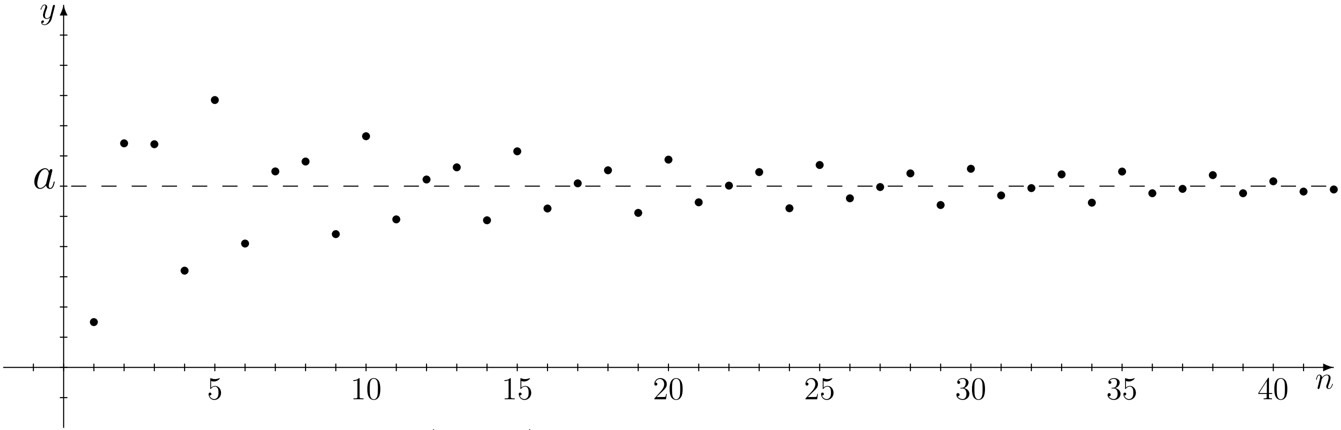
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Что значит «с ростом значений a_n...»?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



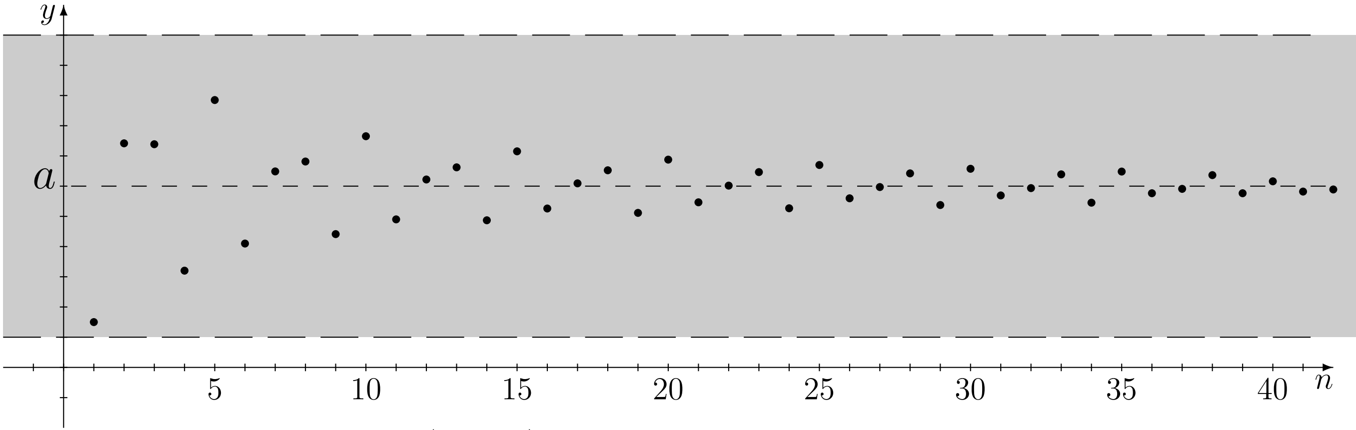
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



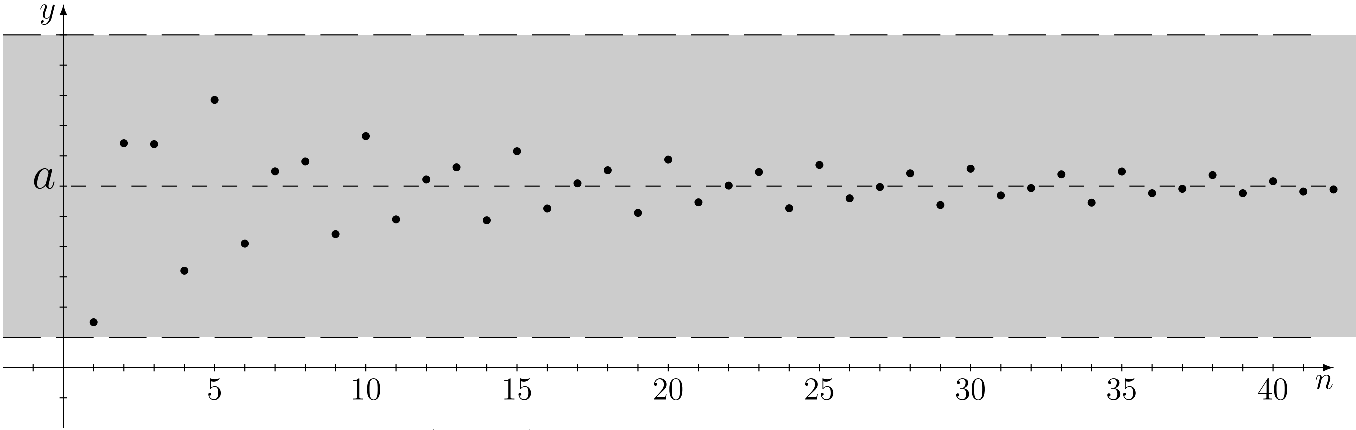
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

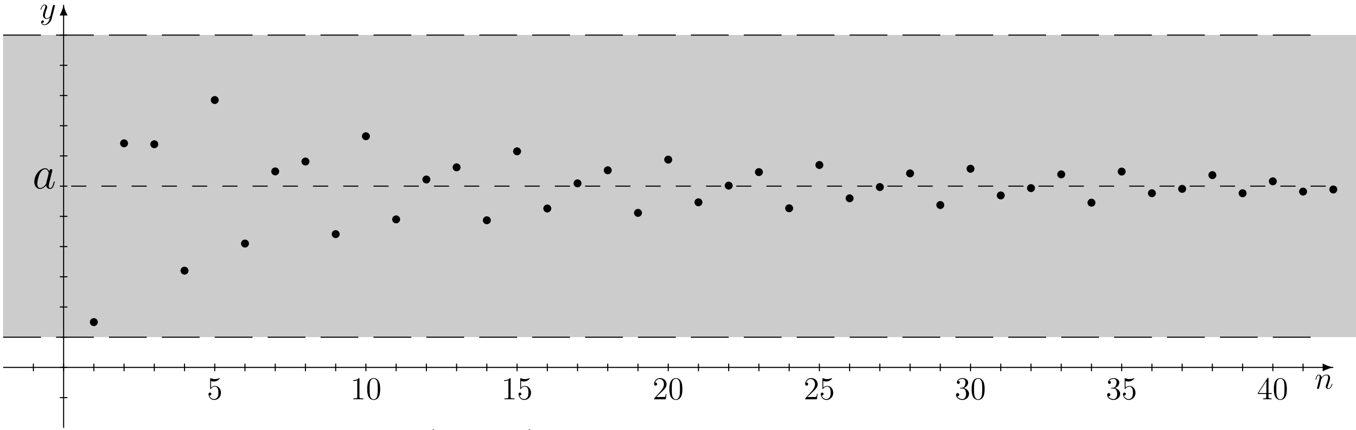
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

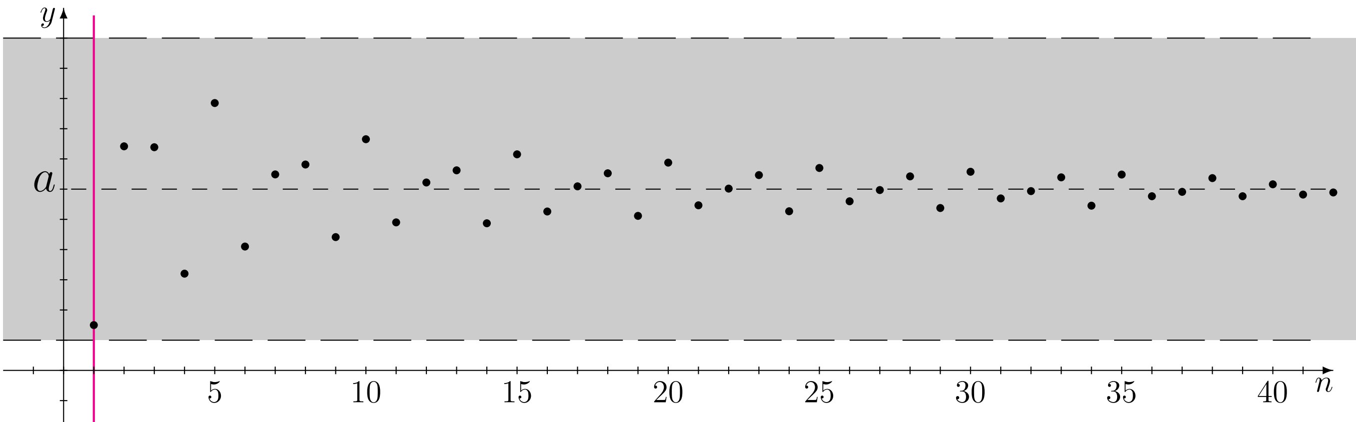
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Например, выберем $N = 1$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

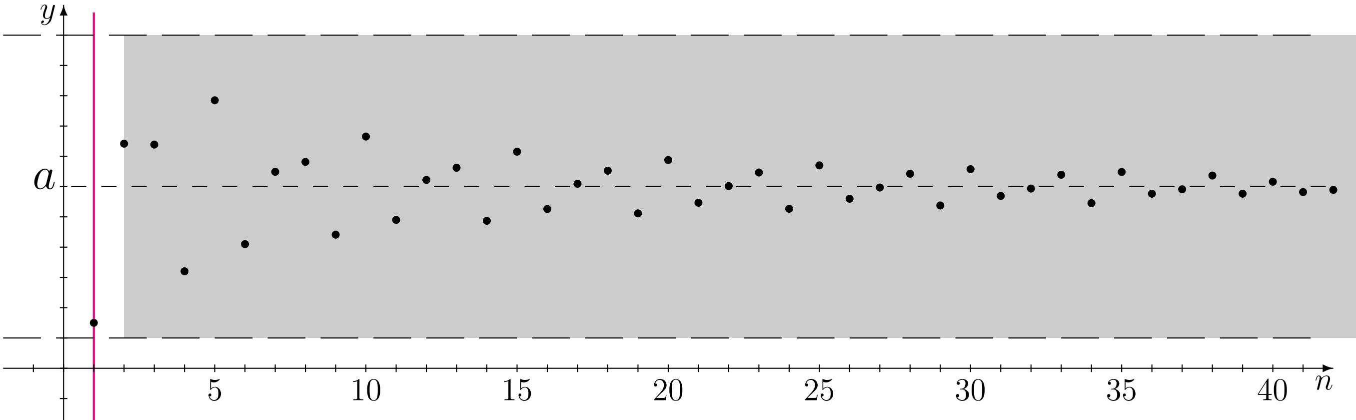
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Например, выберем $N = 1$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

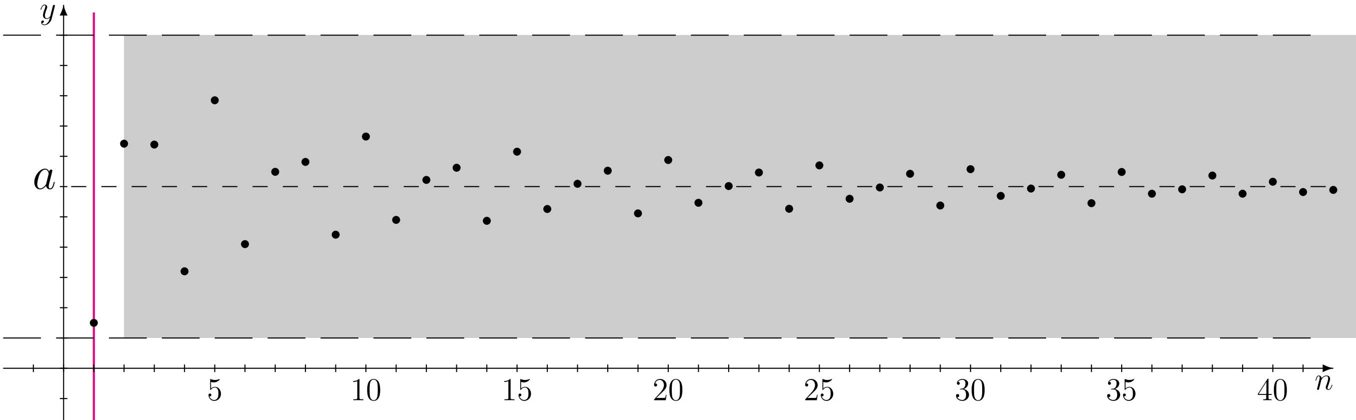
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Например, выберем $N = 1$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

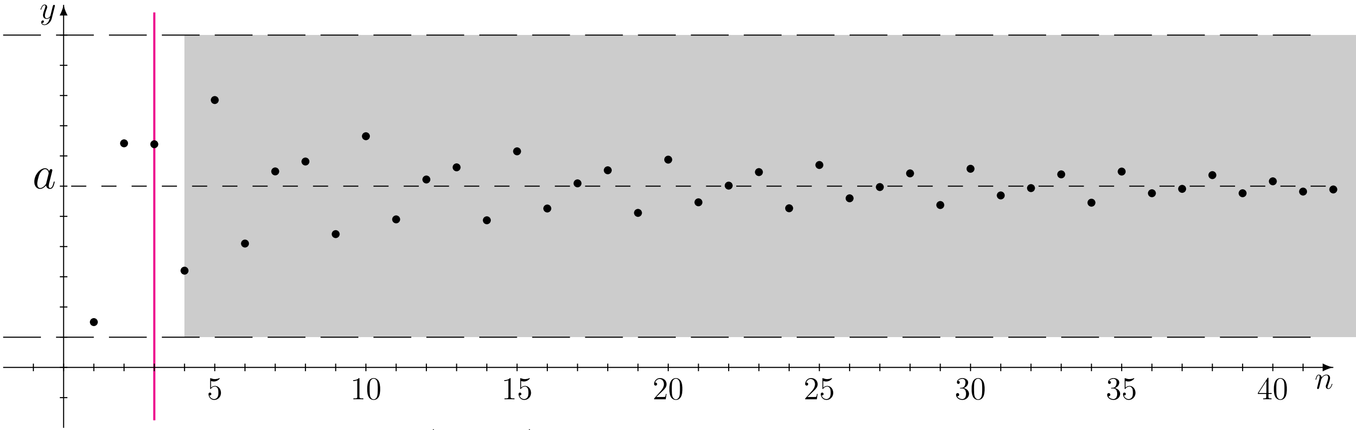
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Можно было выбрать и бо̀льшее значение, например, $N = 3$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

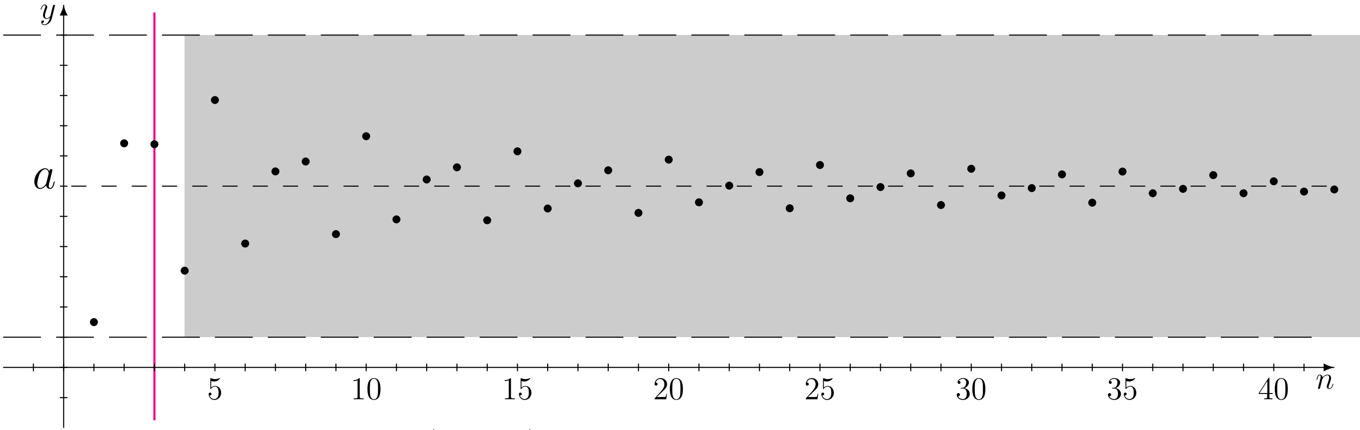
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Можно было выбрать и бо̀льшее значение, например, $N = 3$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

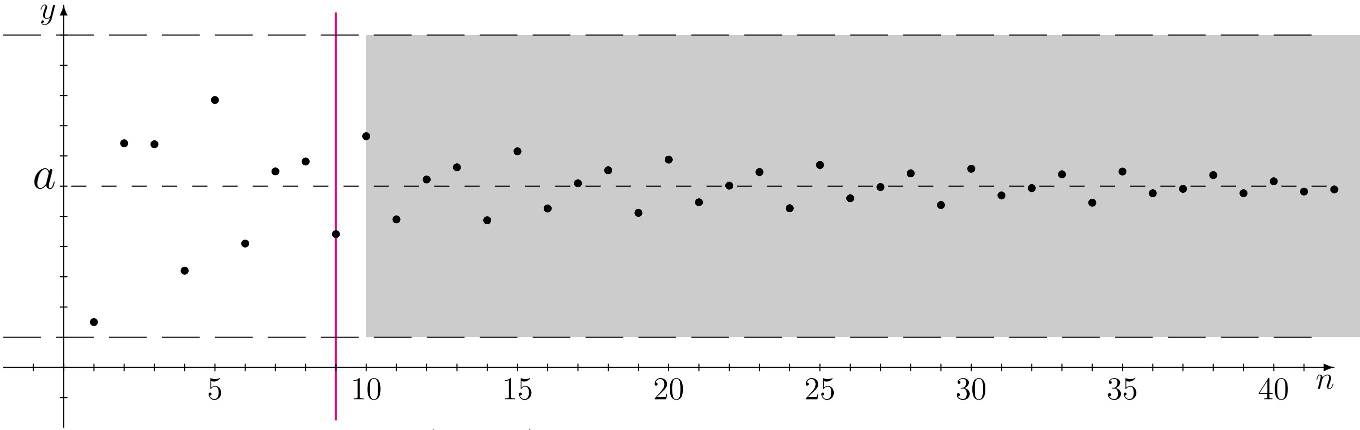
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Можно было выбрать и бо̀льшее значение, например, $N = 9$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

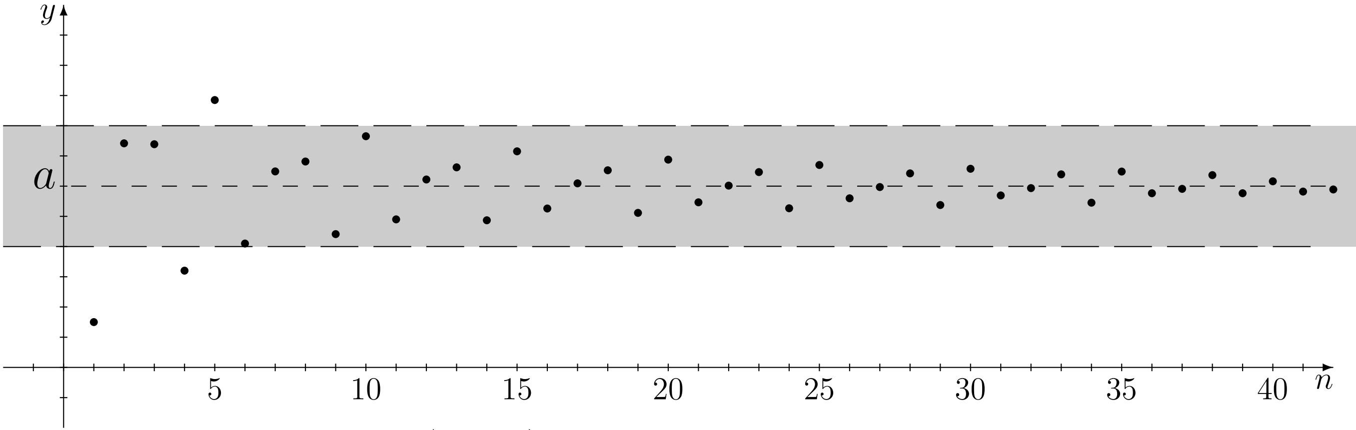
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

При выбранном ε можно взять любое натуральное значение n.

Можно было выбрать и бо̀льшее значение, например, $N = 9$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

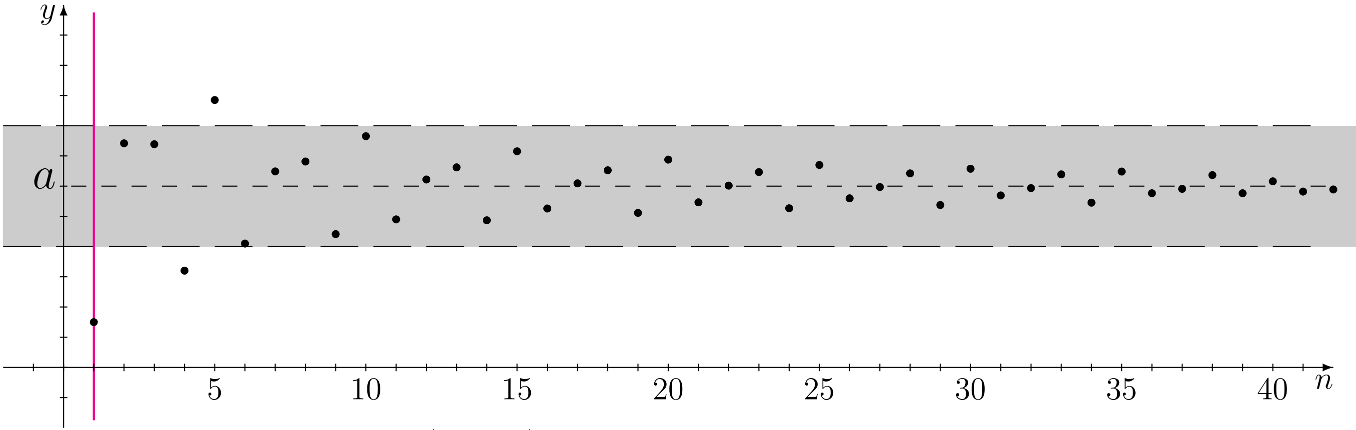
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном выборе ε выбор $N = 1$ неверен.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

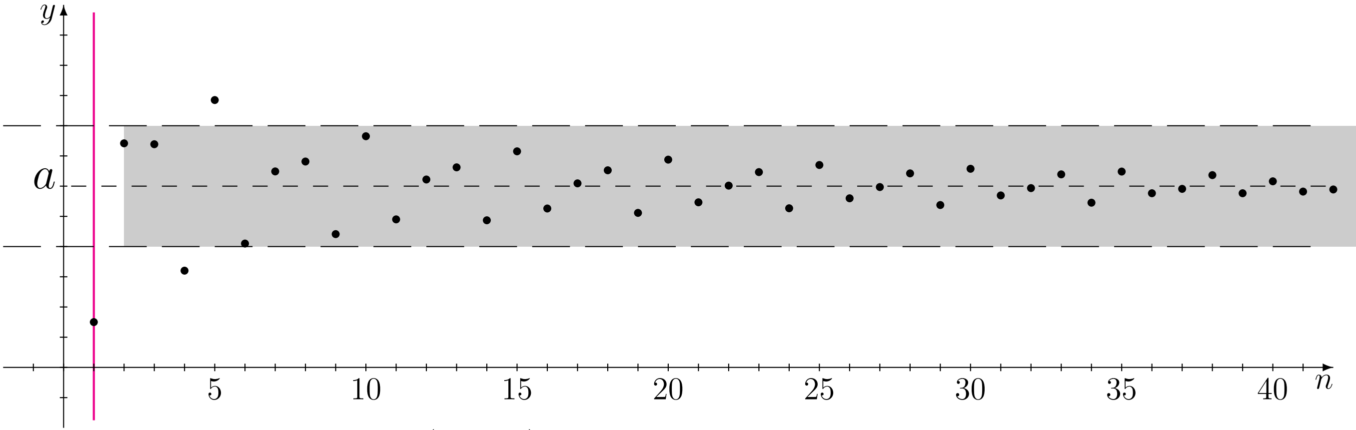
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном выборе ε выбор $N = 1$ неверен.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

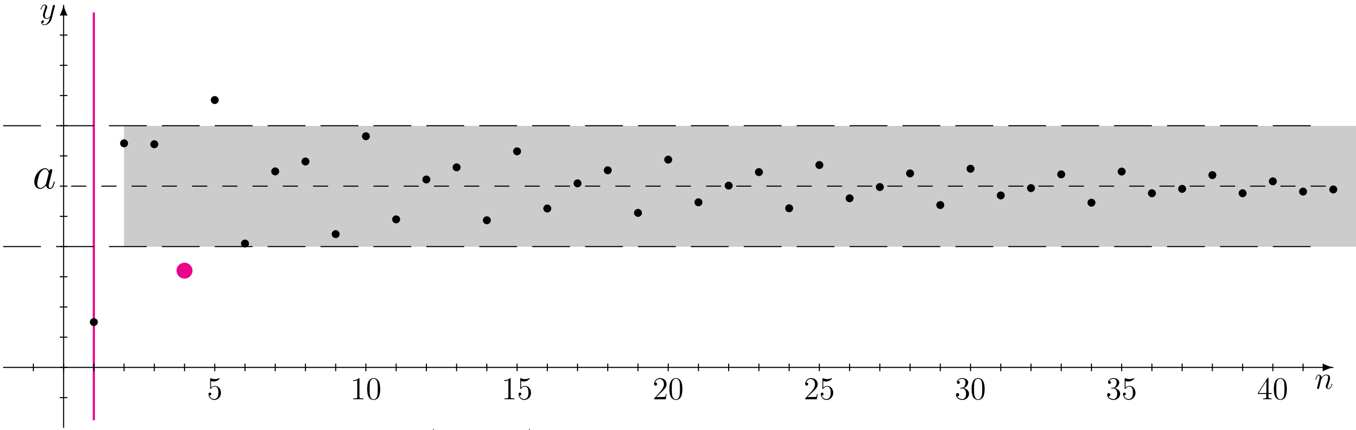
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном выборе ε выбор $N = 1$ неверен.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

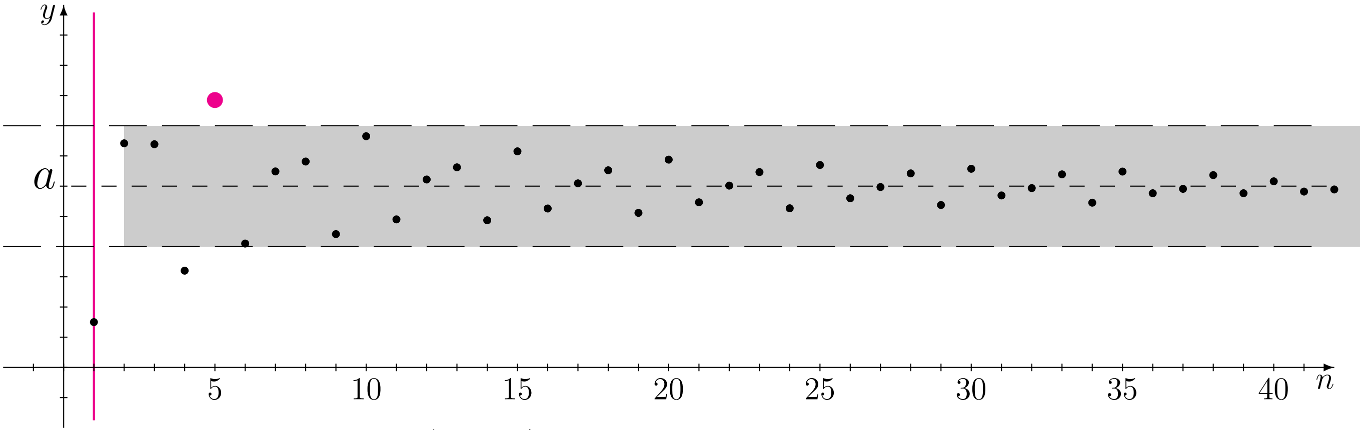
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном выборе ε выбор $N = 1$ неверен.

Например, точка $(4, a_4)$ не попала в область $|y - a| < \varepsilon$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

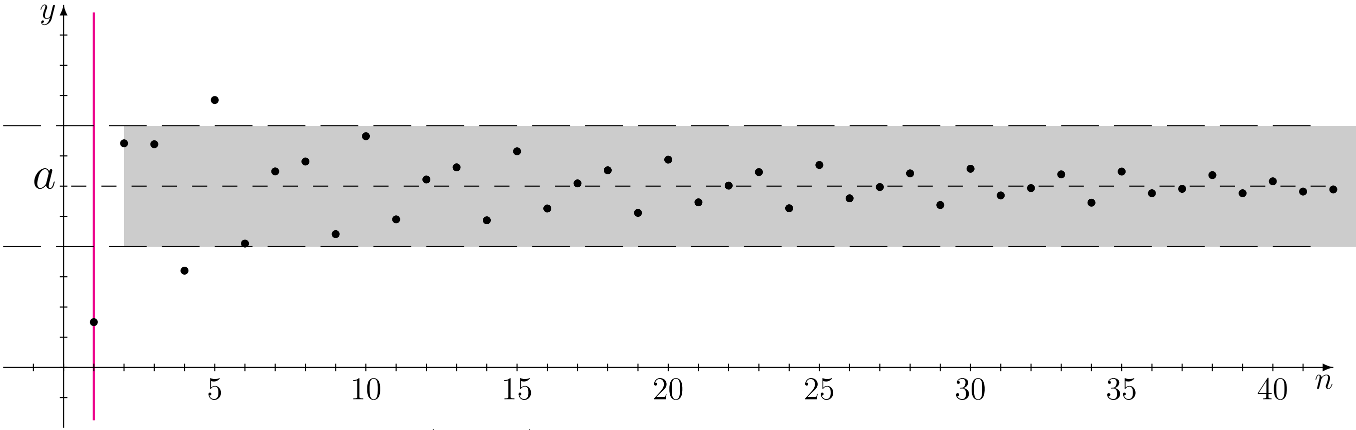
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном выборе ε выбор $N = 1$ неверен.

И $(5, a_5)$ тоже находится вне области $|y - a| < \varepsilon$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

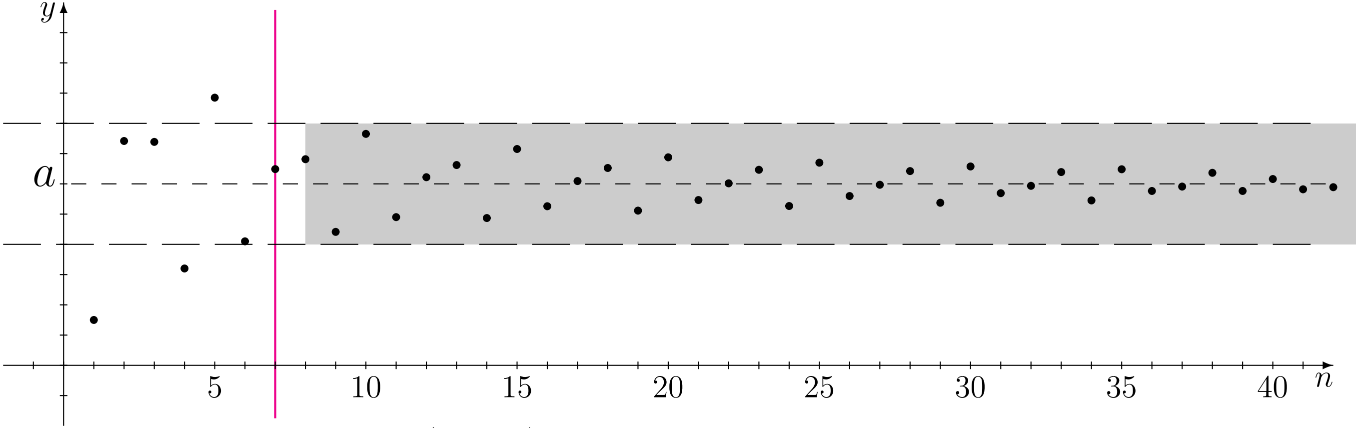
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно выбрать, например, $N = 7$

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

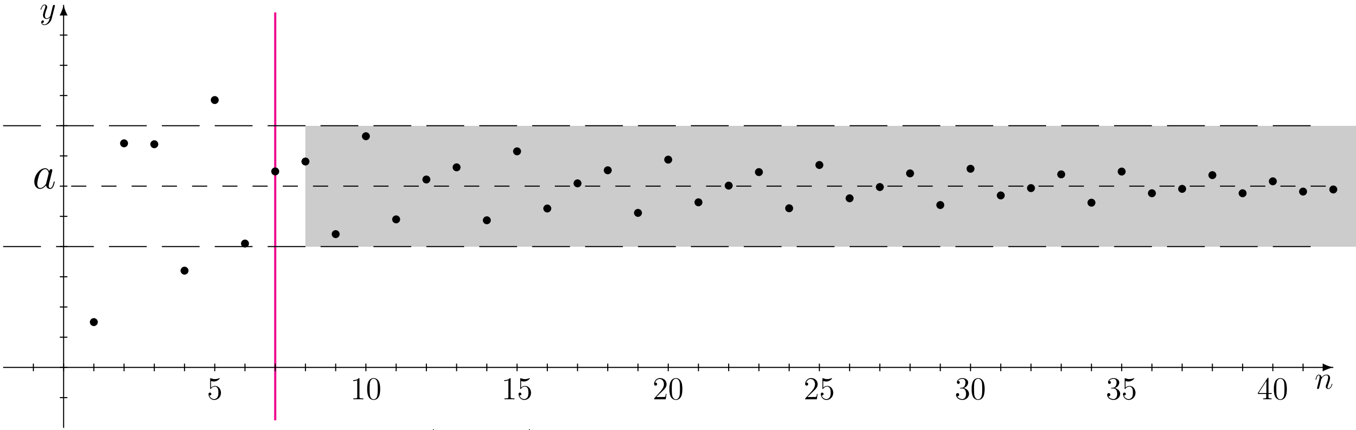
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно выбрать, например, $N = 7$

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

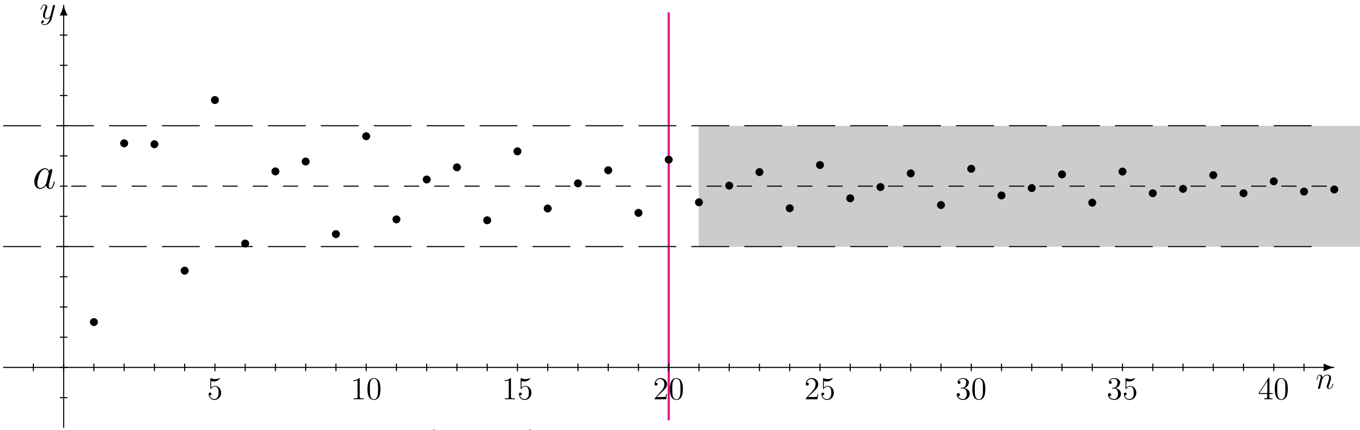
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно выбрать, например, $N = 7$ или больше.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

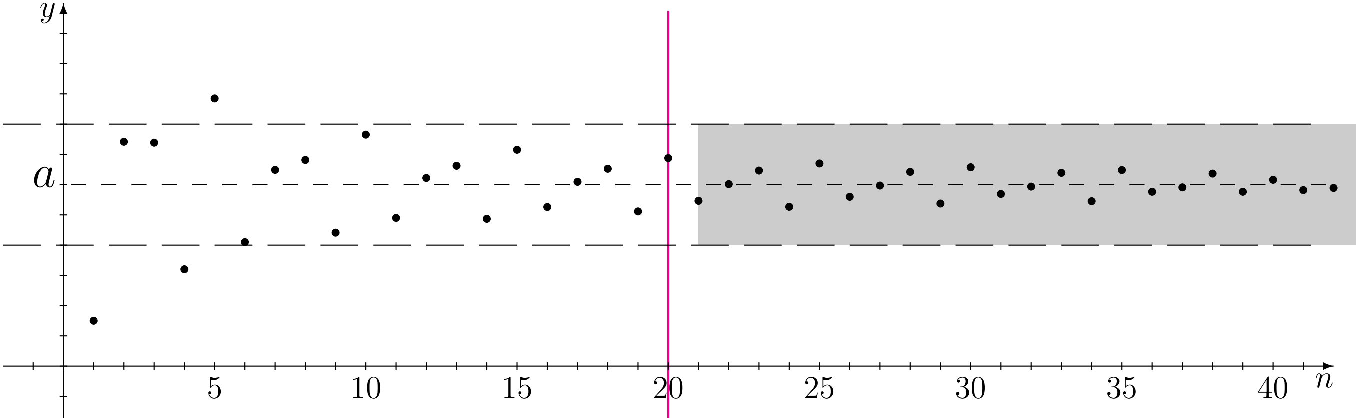
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно выбрать, например, $N = 7$ или больше.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

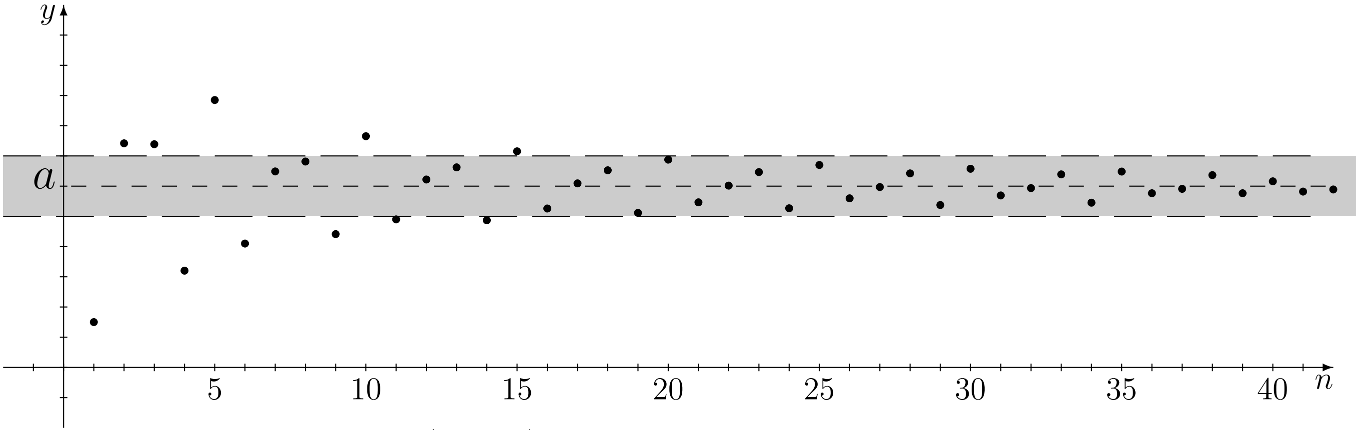
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Ещё раз уменьшим ε.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

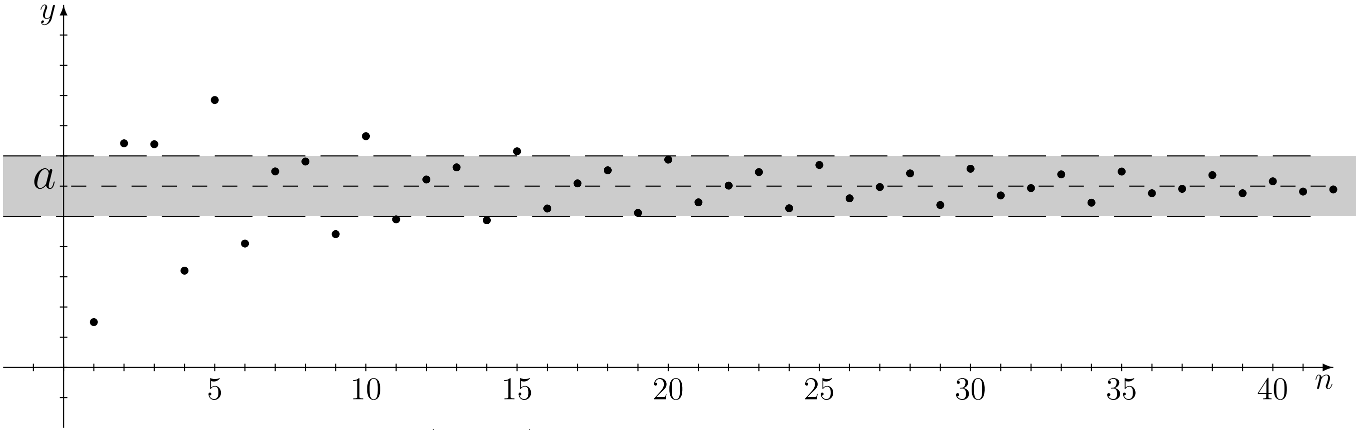
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Ещё раз уменьшим ε.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

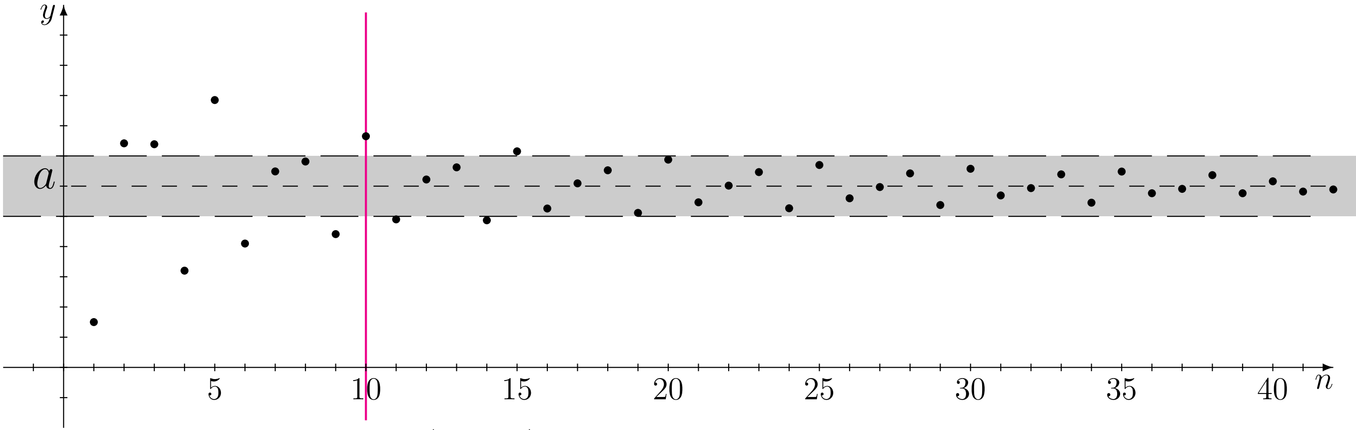
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно ли выбрать $N = 10$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

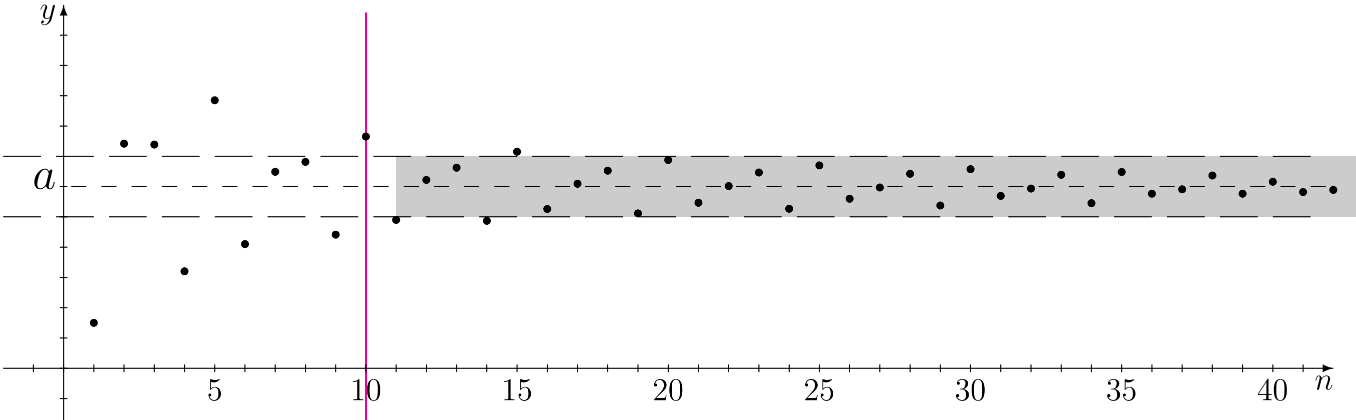
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно ли выбрать $N = 10$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

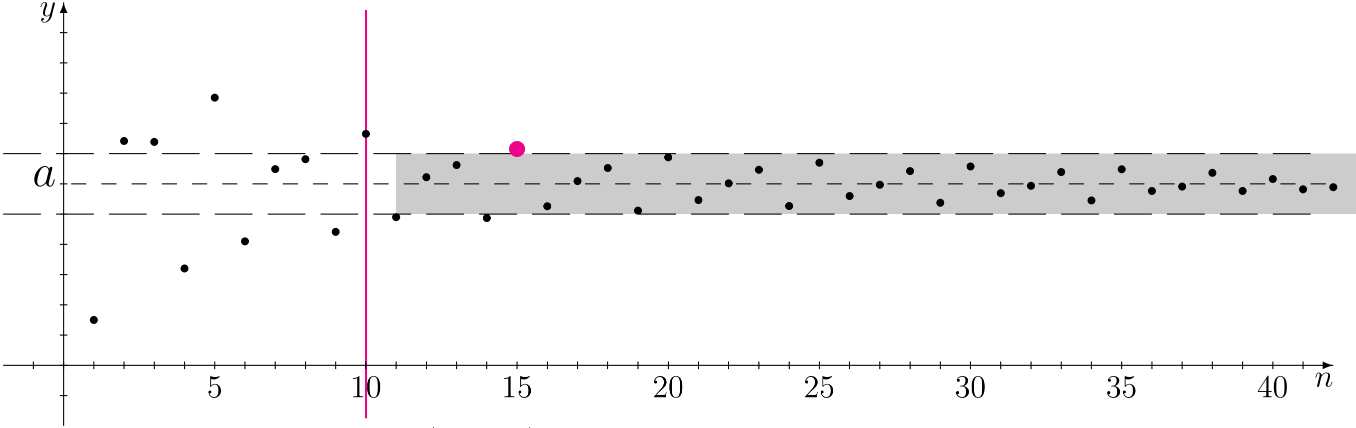
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно ли выбрать $N = 10$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

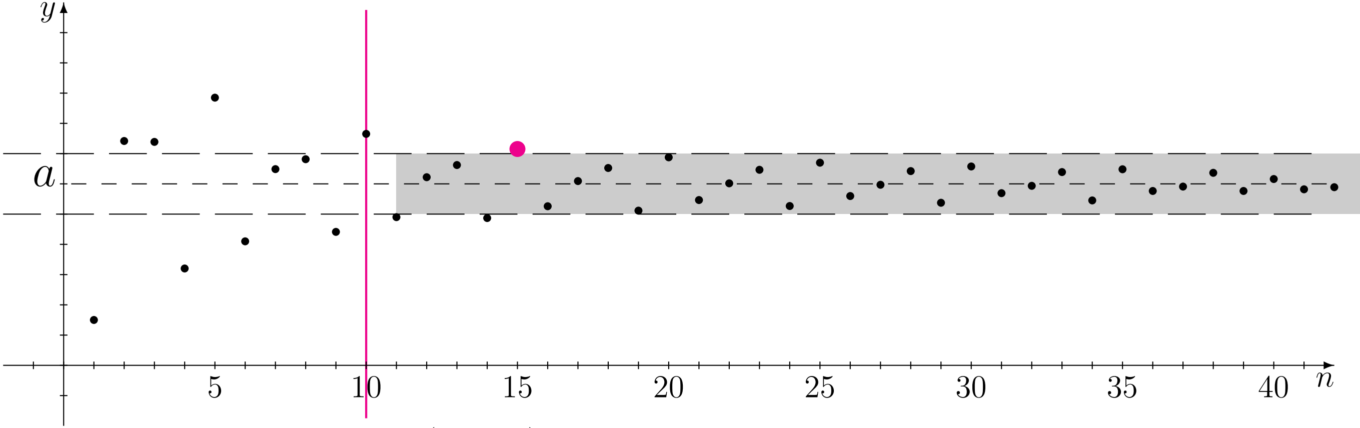
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно ли выбрать $N = 10$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

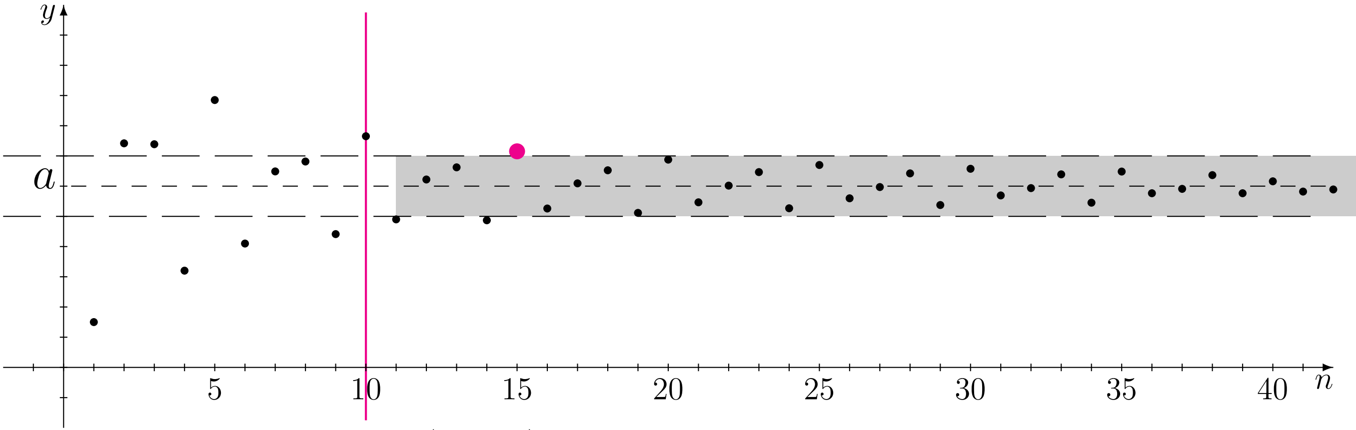
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно ли выбрать $N = 10$? Ой!

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

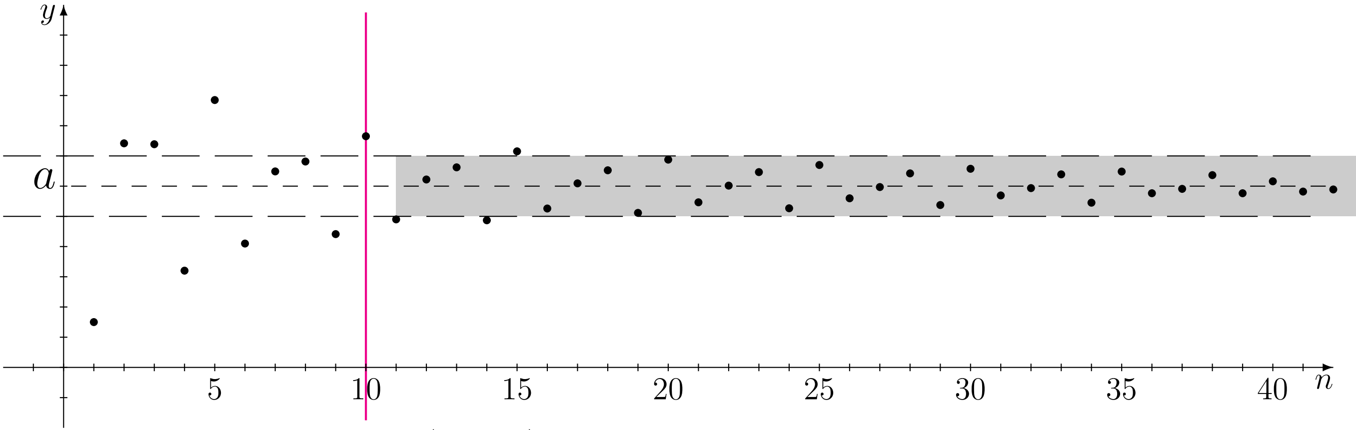
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно взять $N =$

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

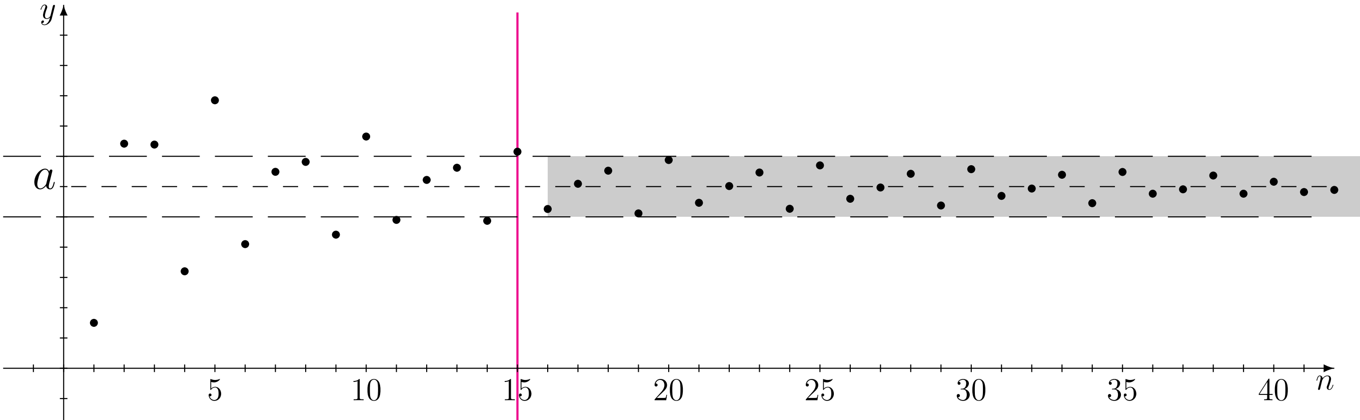
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно взять $N = 15$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

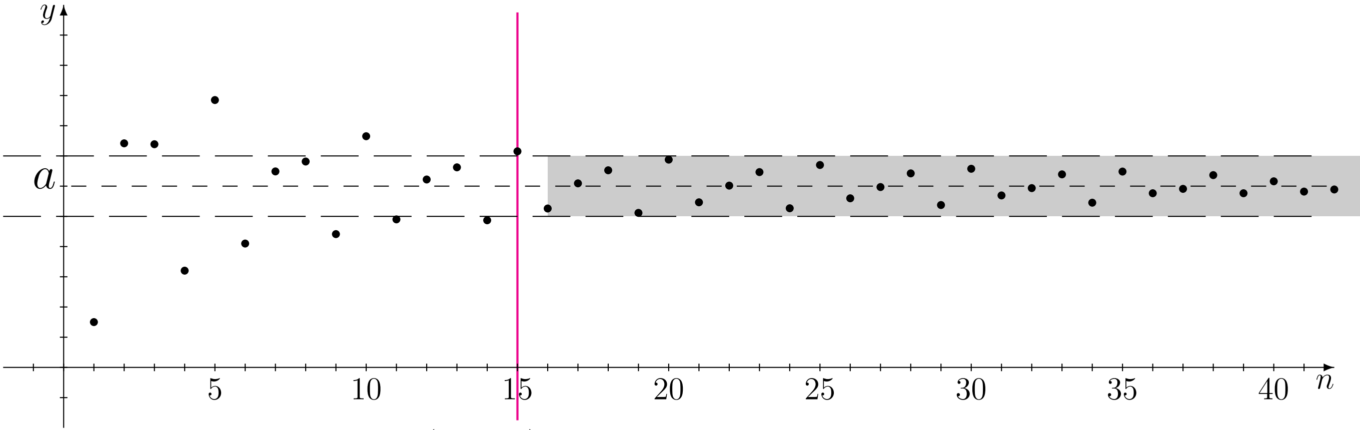
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно взять $N = 15$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

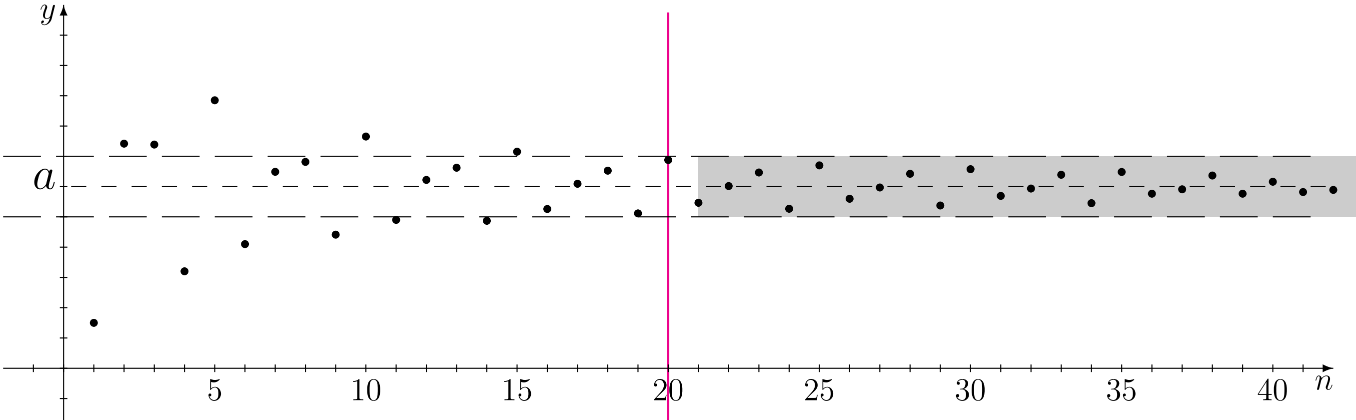
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно взять $N = 15$. Или больше.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

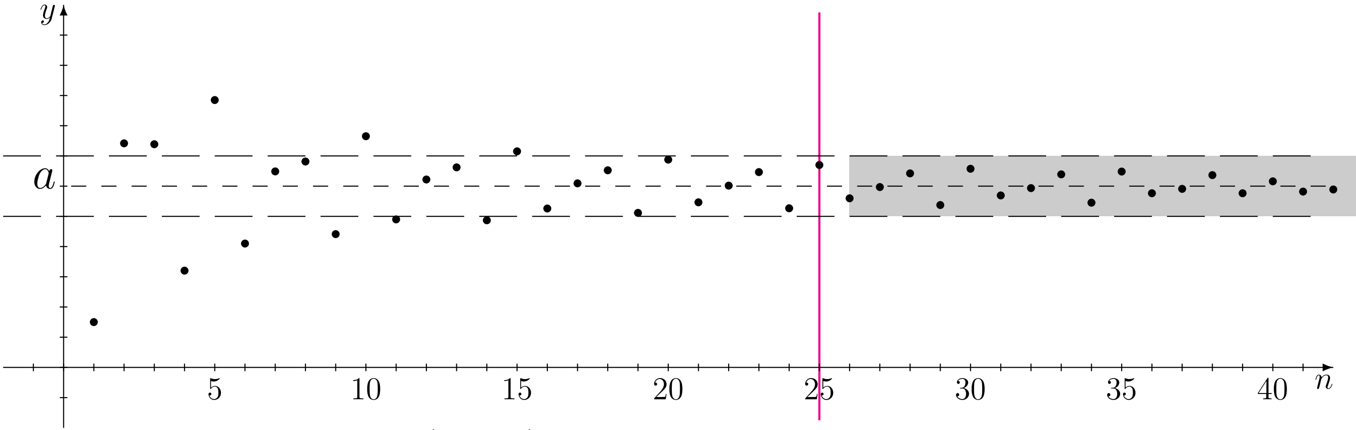
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно взять $N = 15$. Или больше.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

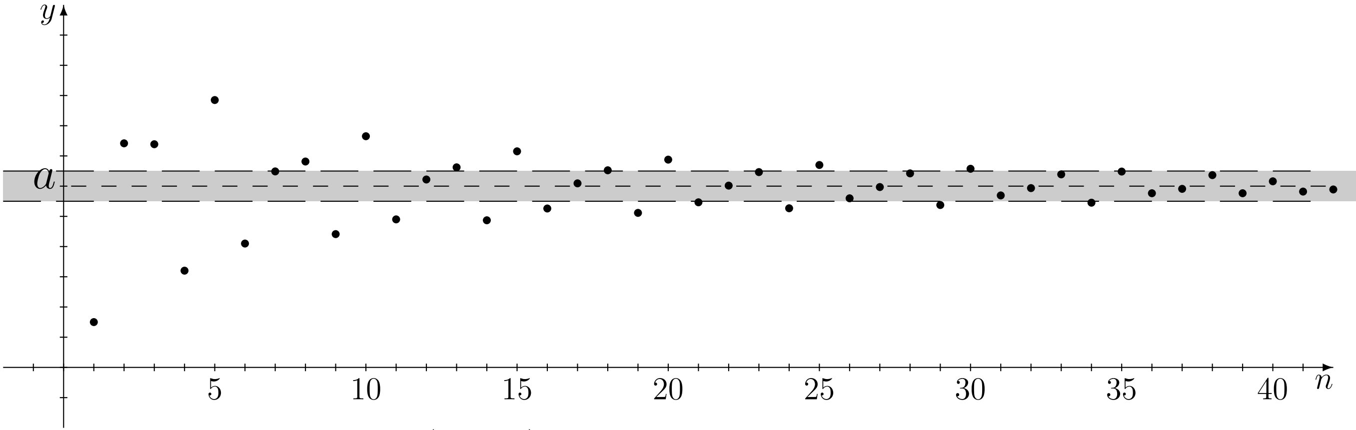
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Можно взять $N = 15$. Или больше.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

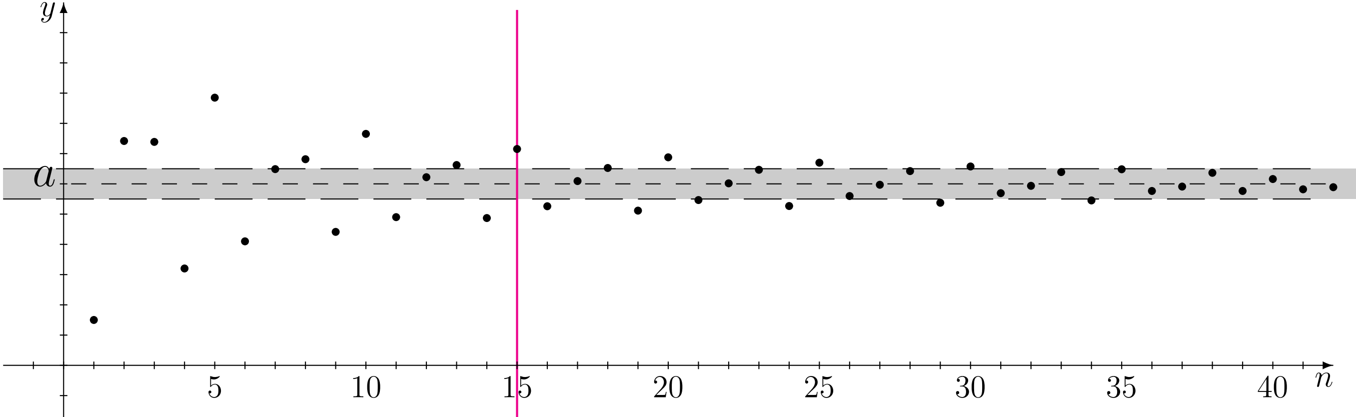
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном ε можно ли выбрать $N = 15$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

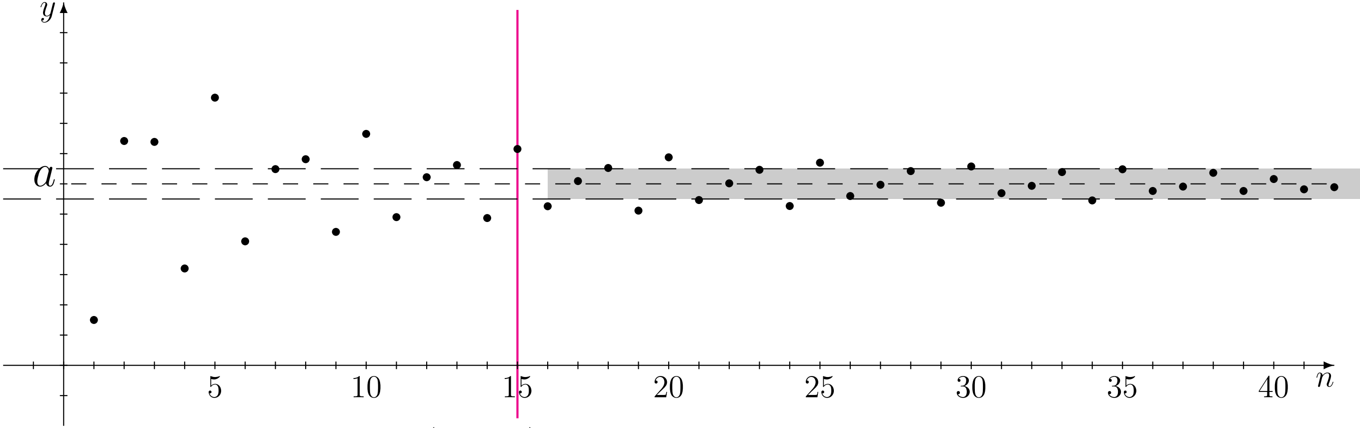
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном ε можно ли выбрать $N = 15$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

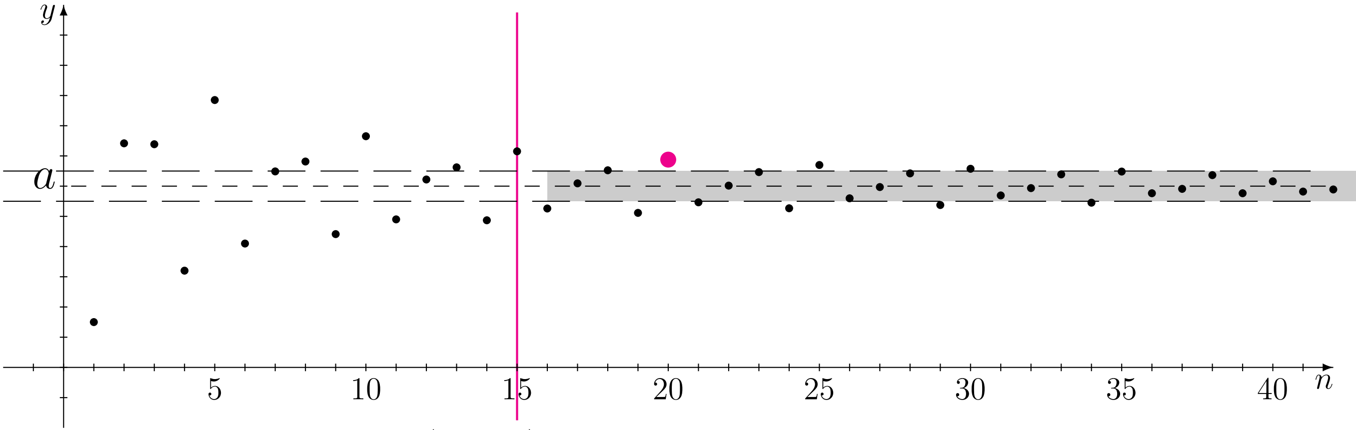
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном ε можно ли выбрать $N = 15$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

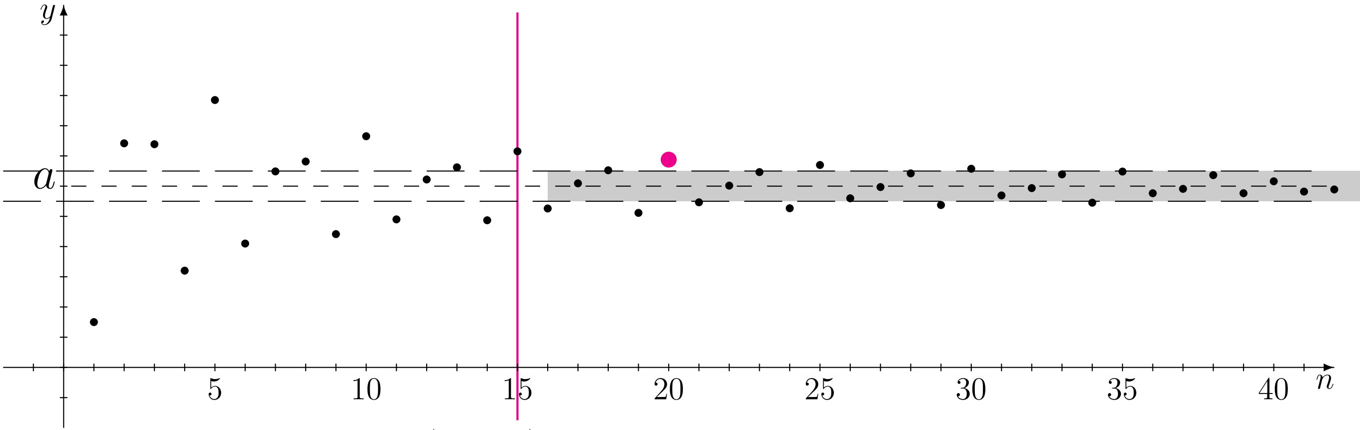
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном ε можно ли выбрать $N = 15$?

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

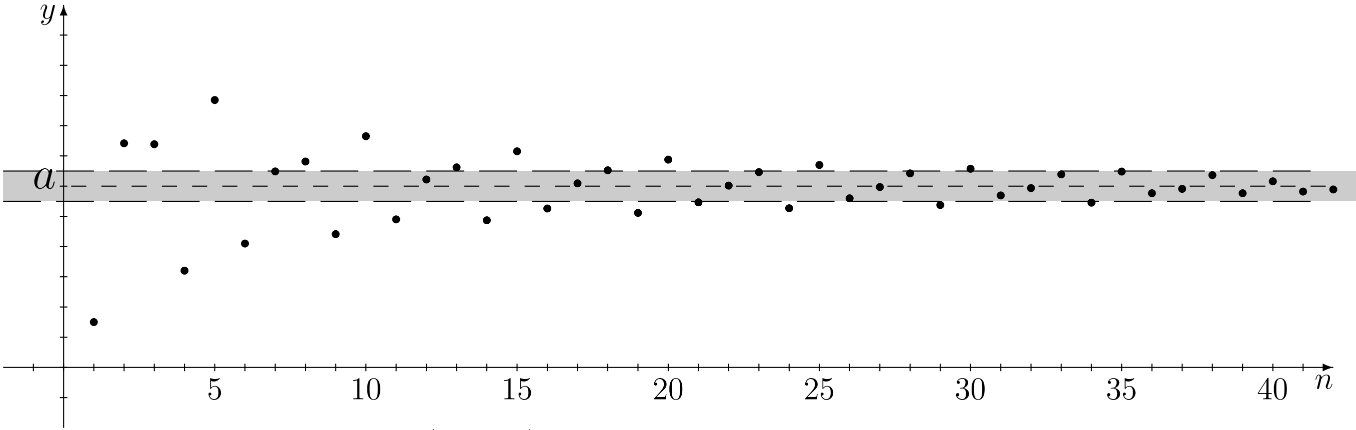
$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

А при данном ε можно ли выбрать $N = 15$?

Нельзя.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

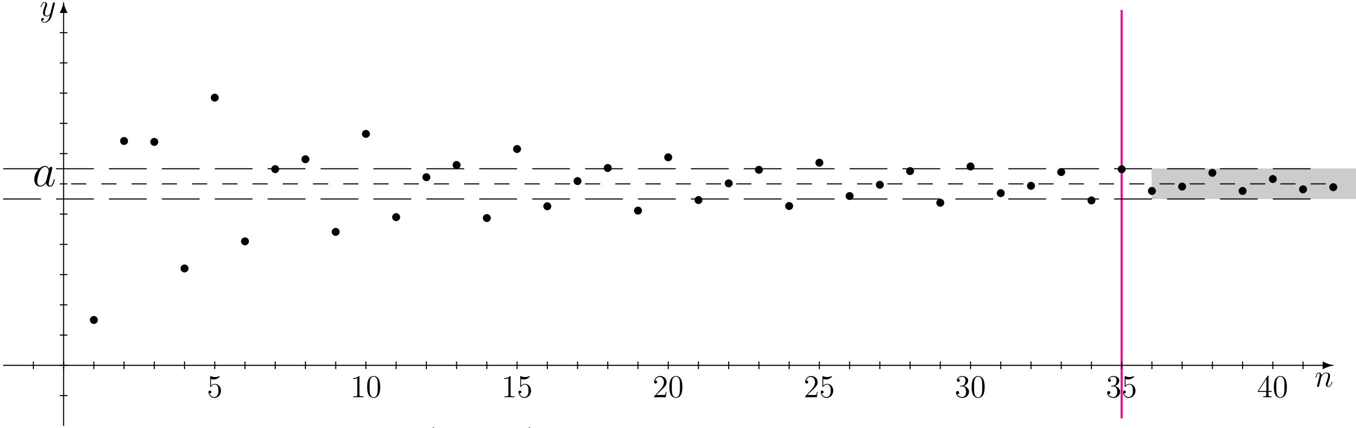
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Следует выбрать, как минимум, $N =$

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

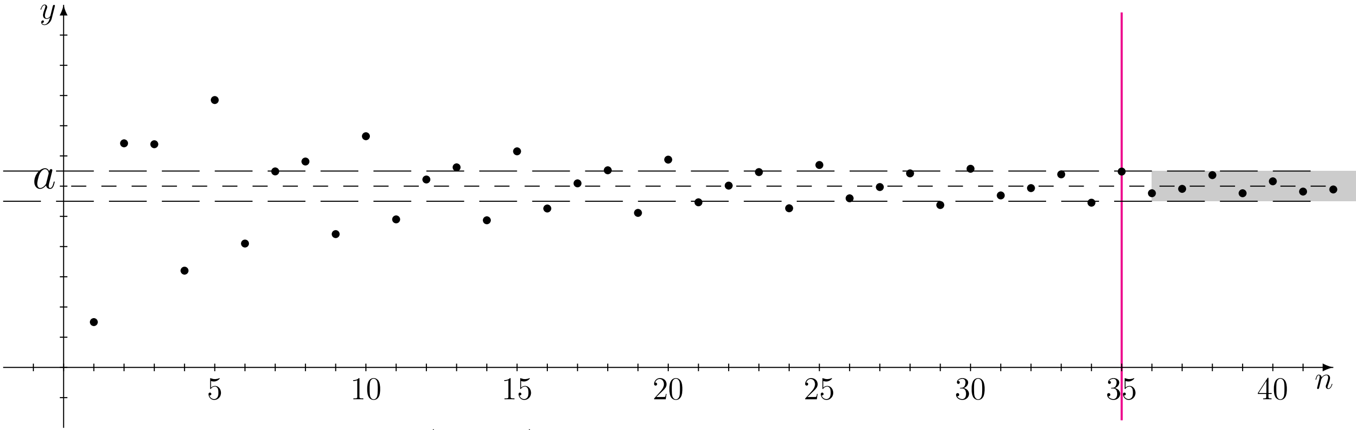
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Следует выбрать, как минимум, $N =$

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

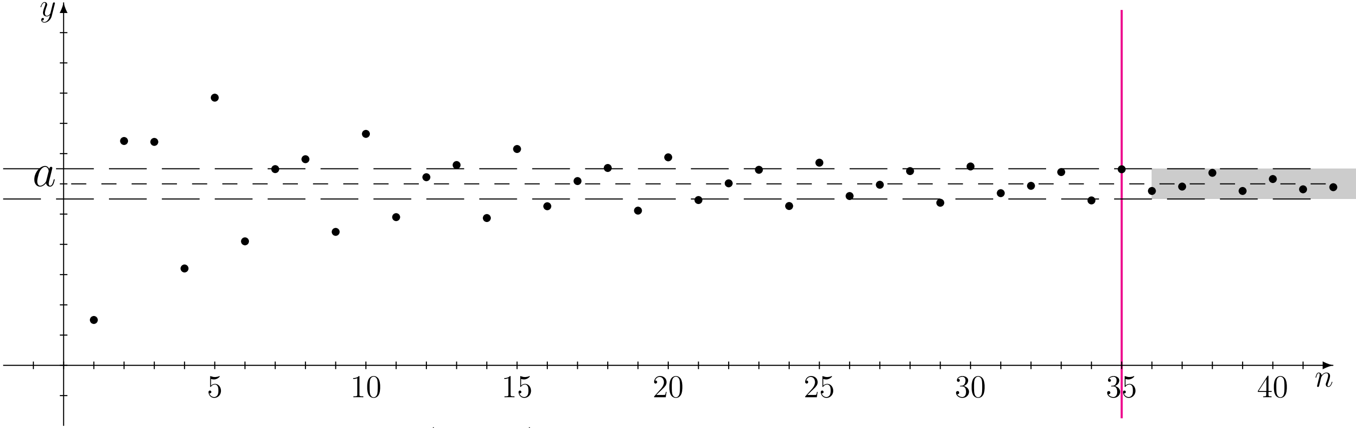
Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем какое-нибудь значение ε и изобразим область $|y - a| < \varepsilon$.

Следует выбрать, как минимум, $N = 35$.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



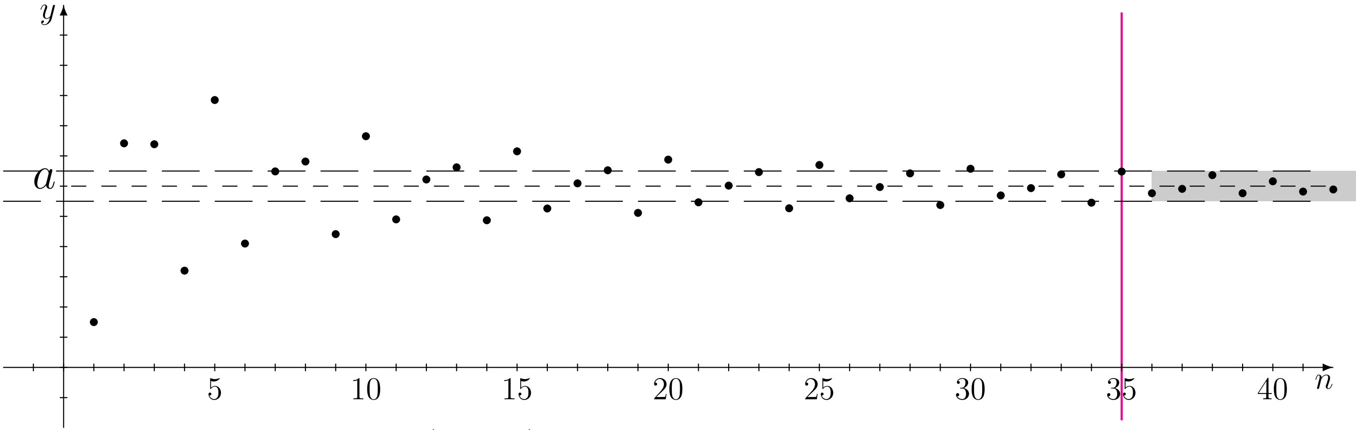
Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Осталось уточнить, как выбирается ε.

III.2.1. Получение определения предела последовательности



Изображены точки (n, a_n). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можно сказать: «с ростом n значения a_n приближаются к a».

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

Осталось уточнить, как выбирается ε.

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что все члены последовательности x_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

«Слишком много букаф...»

Точнее...

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что все члены последовательности x_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

«Слишком много букаф...»

Точнее, слишком много слов естественного языка!

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Неравенство означает, что расстояние между числами x_n и a (как точками числовой прямой) меньше ε, поэтому смысл определения предела последовательности в следующем:
каким бы малым ни взять положительное число ε, расстояние от членов последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого, до числа a будет меньше, чем ε.

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так:

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или так:

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число* a *называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или так: $x_n \to a$.

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или так: $x_n \to a$.

Сама последовательность в этом случае называется **сходящейся** (к числу a).

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или так: $x_n \to a$.

Сама последовательность в этом случае называется **сходящейся** (к числу a).

Рассмотрим пример?

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 2. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* **бесконечно малой**, *если она сходится к* 0*:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \text{т.е.} \quad x_n \to 0. \tag{2}$$

III.2.2. Определение конечного предела последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

В качестве предела последовательности можно рассматривать не только числа, используя **понятие окрестности**.

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 3. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к $+\infty$, т.е. $x_n \to +\infty$), если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что все члены последовательности x_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $x_n > \varepsilon$.*

Слишком много слов естественного языка...

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 3. *Говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *имеет пределом* $+\infty$, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *или, другими словами, последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к* $+\infty$, *т.е.* $x_n \to +\infty$*), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > \varepsilon. \tag{3}$$

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 3. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к $+\infty$, т.е. $x_n \to +\infty$), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > \varepsilon. \tag{3}$$

Аналогично определяется пределы $-\infty$ и ∞.

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $-\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к $-\infty$, т.е. $x_n \to -\infty$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $x_n < -\varepsilon$.*

Слишком много слов естественного языка...

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $-\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к $-\infty$, т.е. $x_n \to -\infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n < -\varepsilon. \tag{4}$$

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 5. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом ∞, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к ∞, т.е. $x_n \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n| > \varepsilon$.*

Слишком много слов естественного языка...

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 5. *Последовательность* $\{x_n\}$ *имеет пределом* ∞, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, *или, другими словами, последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к* ∞, *т.е.* $x_n \to \infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| > \varepsilon. \tag{5}$$

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 5. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом ∞, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к ∞, т.е. $x_n \to \infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| > \varepsilon. \tag{5}$$

Из последних определений следует, что последовательность, имеющая пределом $+\infty$ или $-\infty$, автоматически имеет пределом и ∞.

III.2.3. Определение бесконечных пределов последовательности

Определение 1. *Число a называют* **пределом последовательности** $\{x_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 5. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом ∞, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, или, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ стремится к ∞, т.е. $x_n \to \infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| > \varepsilon. \tag{5}$$

Последовательность, имеющая пределом ∞, $+\infty$ или $-\infty$, называется **бесконечно большой**.

III.3. Предел функции в точке

Попытаемся более-менее самостоятельно перенести понятие предела последовательности на случай произвольной числовой функции.

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела...

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

О чем надо сейчас думать?

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

В первую очередь мы должны решить, как зададим эту функцию.

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

Обычно функция задается

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

Обычно функция задается
формулой,

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

Обычно функция задается
формулой, таблицей значений и/или

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

Возьмём произвольную функцию.

Обычно функция задается
формулой, таблицей значений и/или **графиком**.

III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотренное нами **определение последовательности** обобщается до понятия предела функции.

Для получения определения вновь применим приём конкретизации.

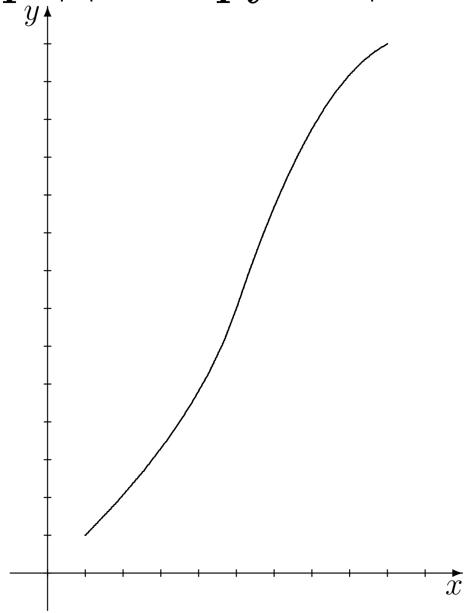
Возьмём произвольную функцию.

Обычно функция задается
формулой, таблицей значений и/или **графиком**.

Выберем «наиболее визуальный» способ: задание **графиком**.

III.3.1. Получение определения предела функции

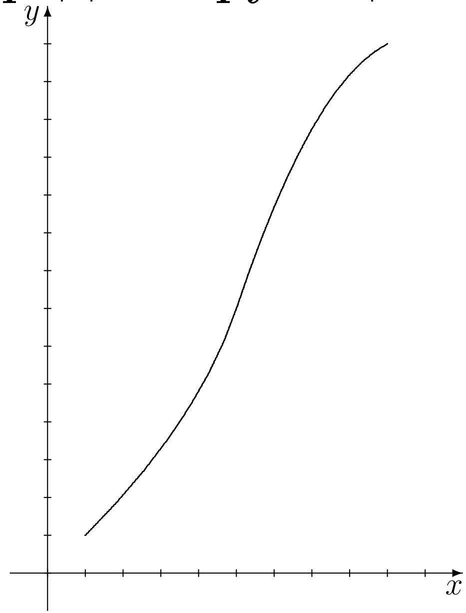
Изобразим график некоторой функции f.



III.3.1. Получение определения предела функции

Изобразим график некоторой функции f.

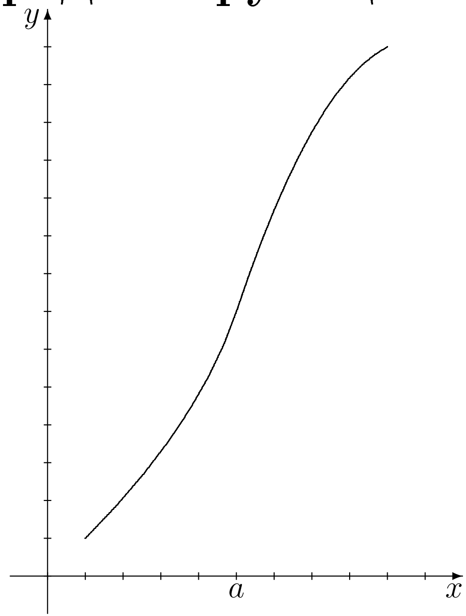
Выберем число a, в любой окрестности которого имеются точки из области определения функции f.



III.3.1. Получение определения предела функции

Изобразим график некоторой функции f.

Выберем число a, в любой окрестности которого имеются точки из области определения функции f.

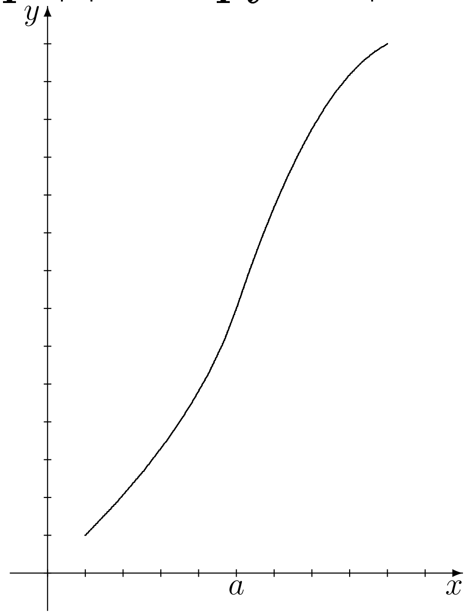


III.3.1. Получение определения предела функции

Изобразим график некоторой функции f.

Выберем число a, в любой окрестности которого имеются точки из области определения функции f.

Пусть A — предел функции f при $x \to a$.

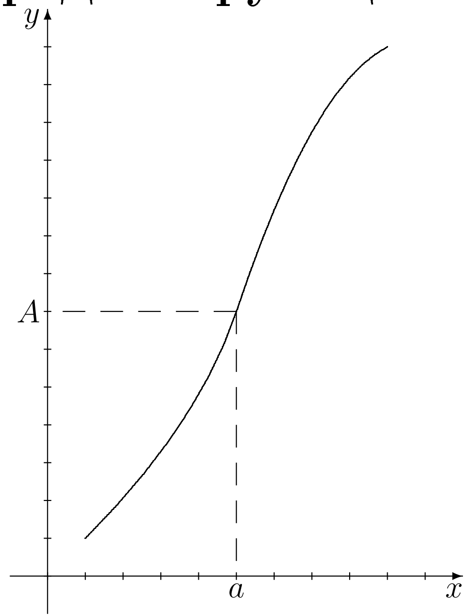


III.3.1. Получение определения предела функции

Изобразим график некоторой функции f.

Выберем число a, в любой окрестности которого имеются точки из области определения функции f.

Пусть A — предел функции f при $x \to a$.



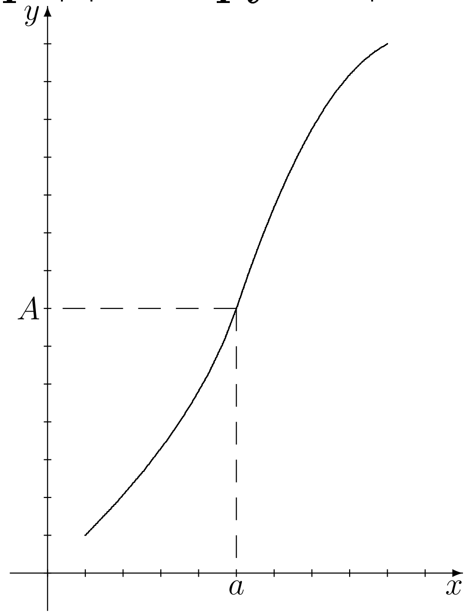
III.3.1. Получение определения предела функции

Изобразим график некоторой функции f.

Выберем число a, в любой окрестности которого имеются точки из области определения функции f.

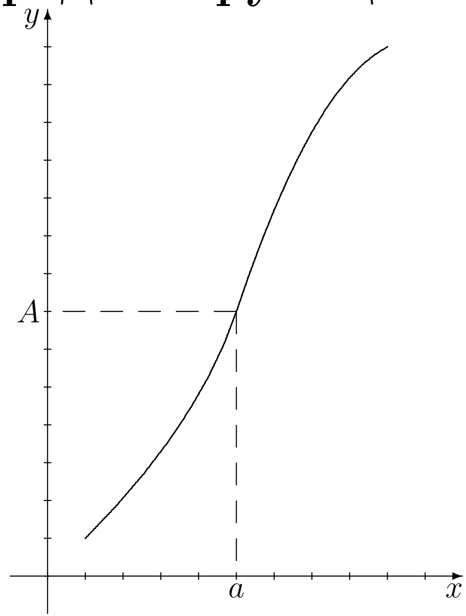
Пусть A — предел функции f при $x \to a$.

Обратите внимание, что значение $f(a)$ может быть не определено или $f(a)$ может быть определено, но отличаться от A.



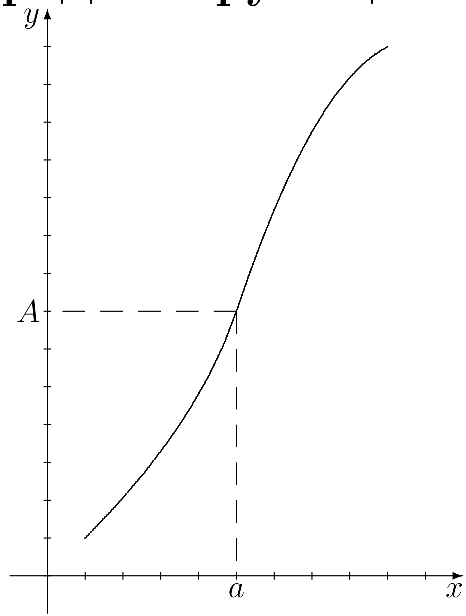
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



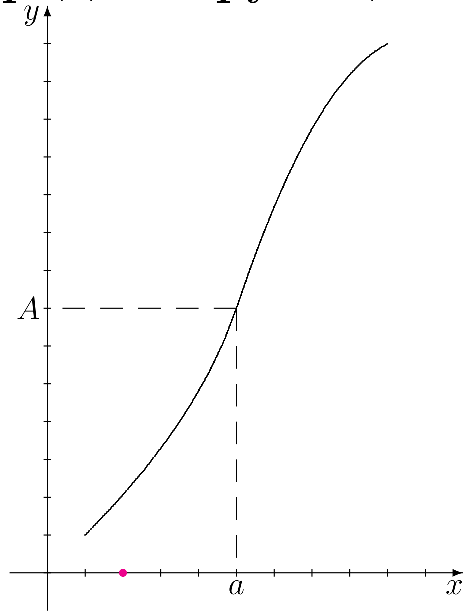
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



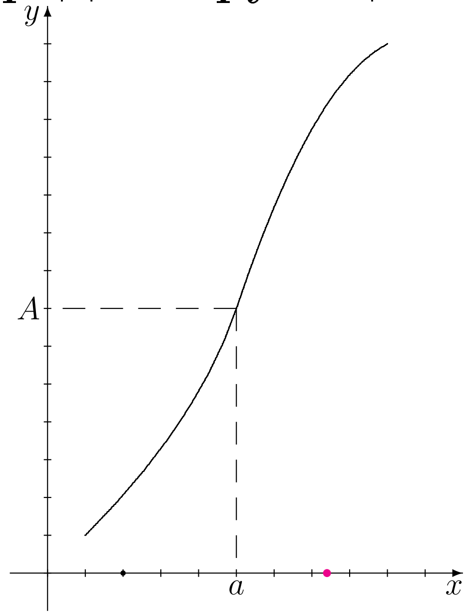
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



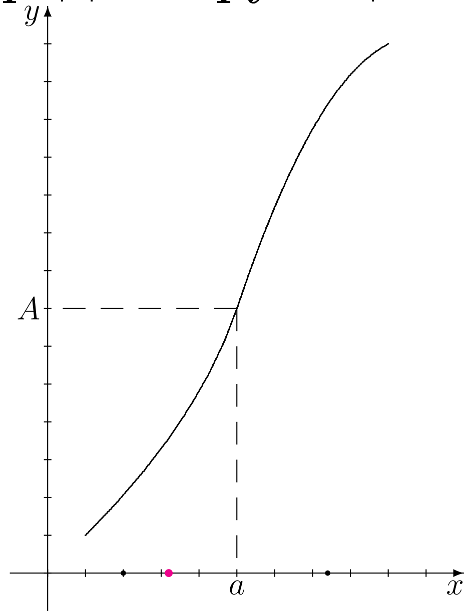
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



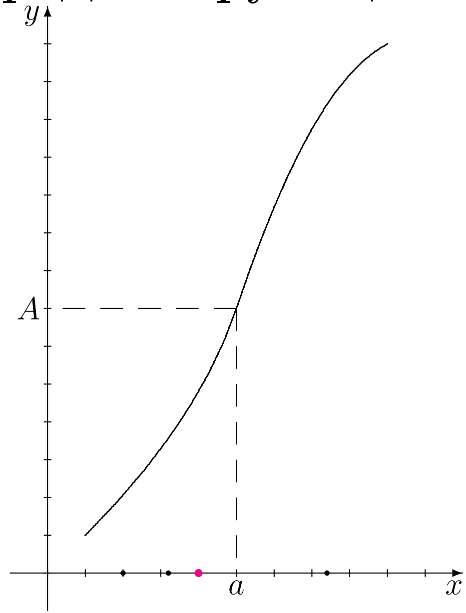
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



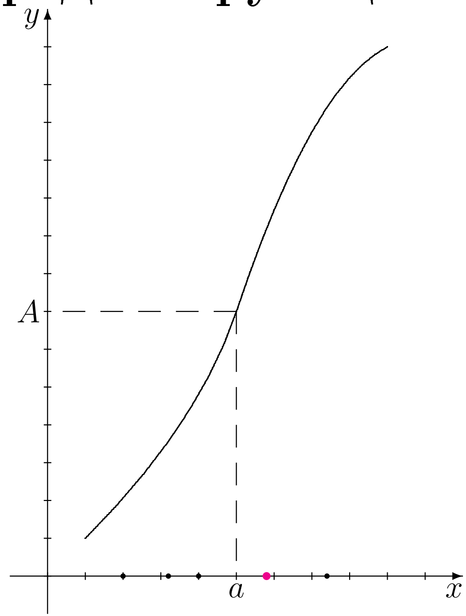
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



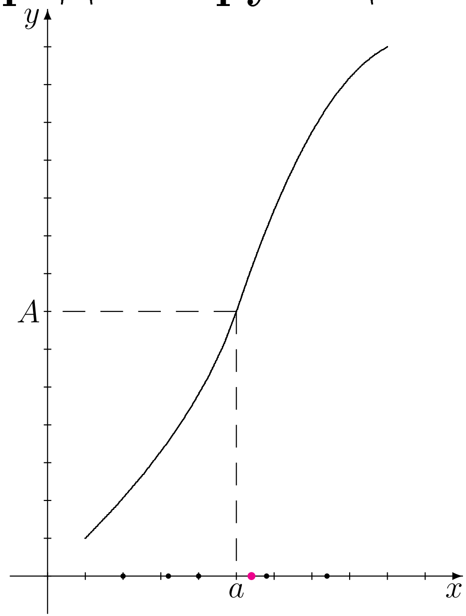
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



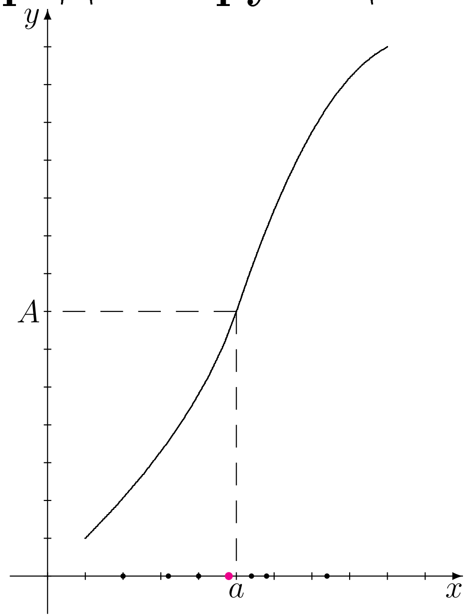
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



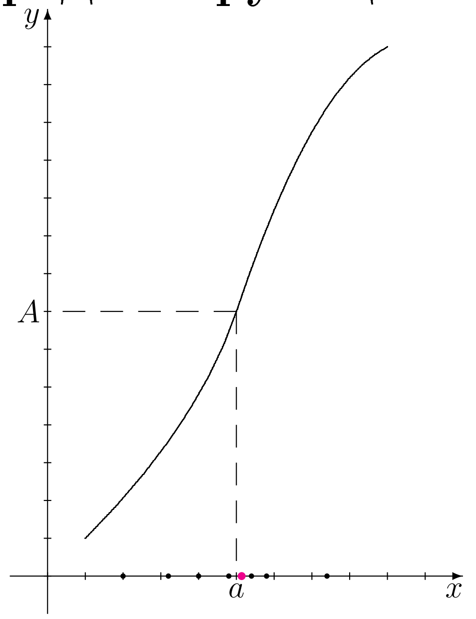
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



III.3.1. Получение определения предела функции

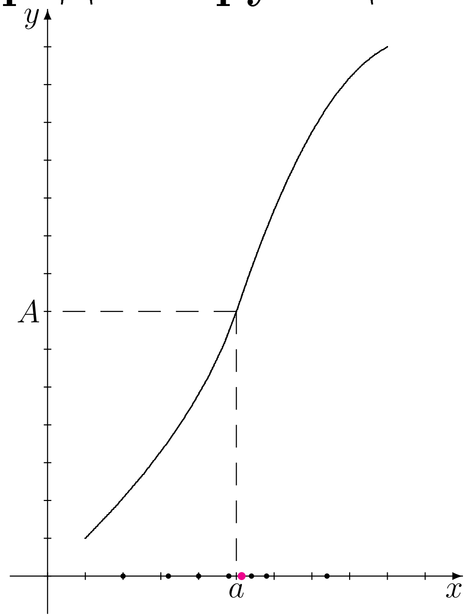
Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

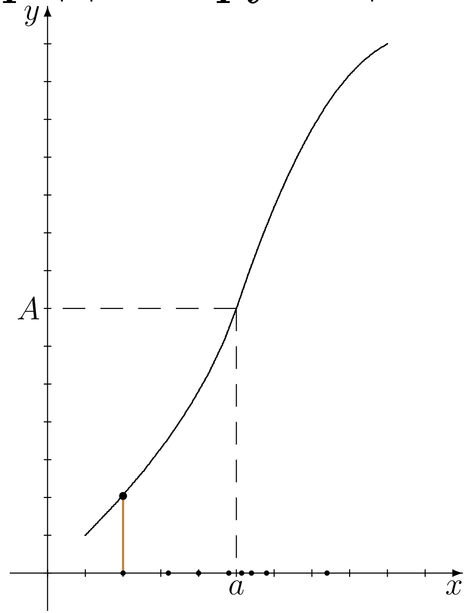
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

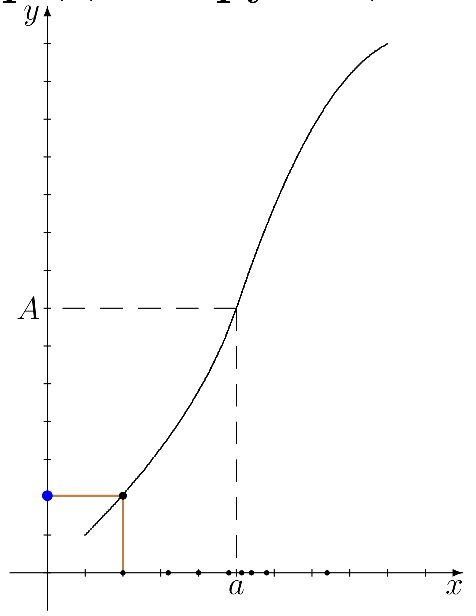
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

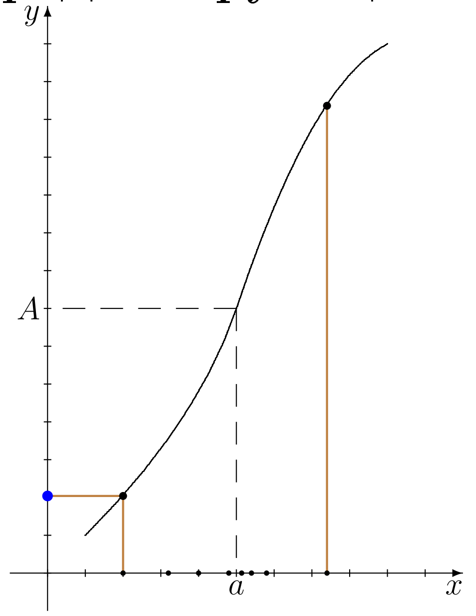
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

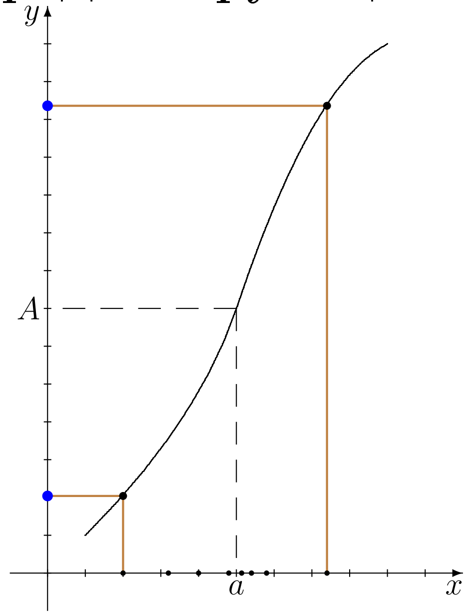
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

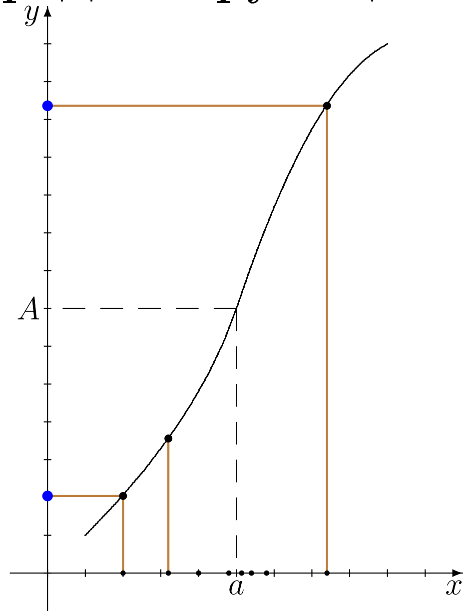
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

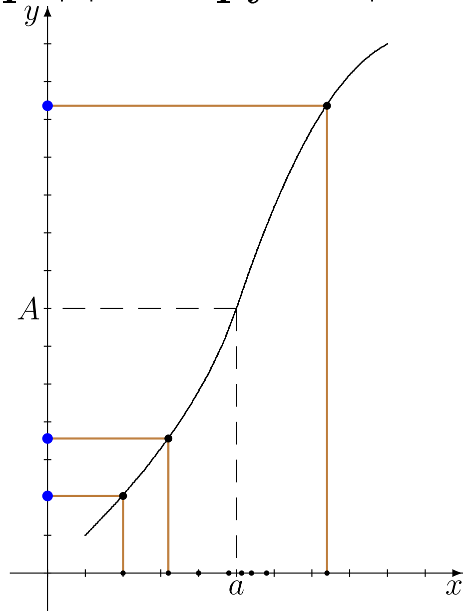
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

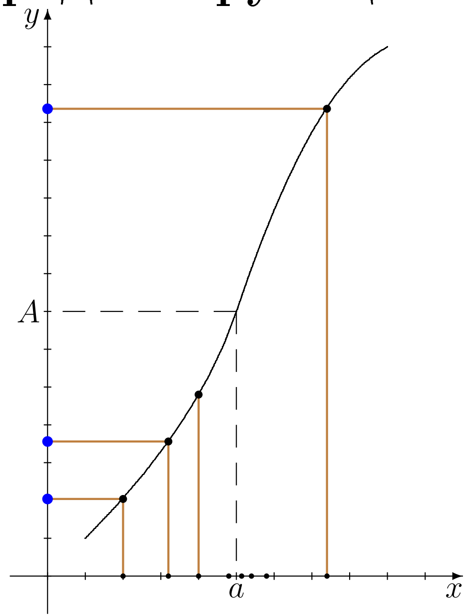
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

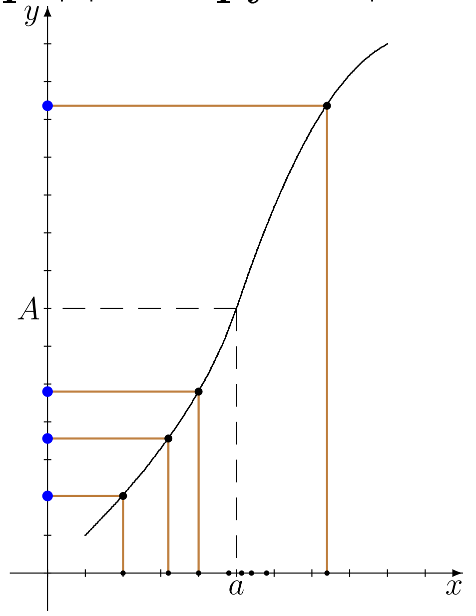
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

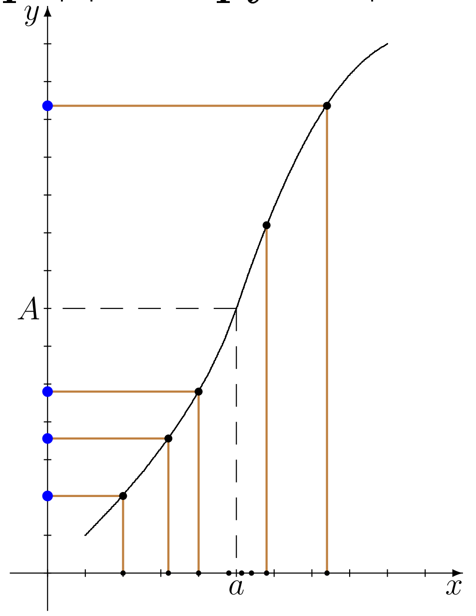
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

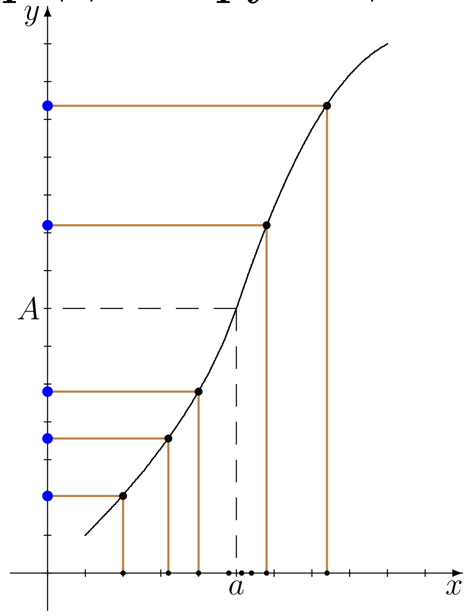
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

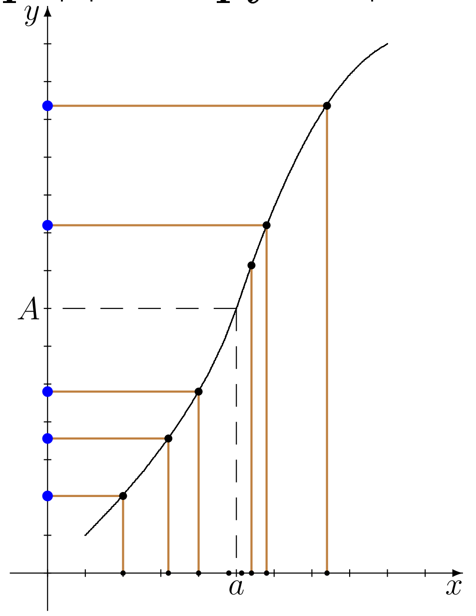
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

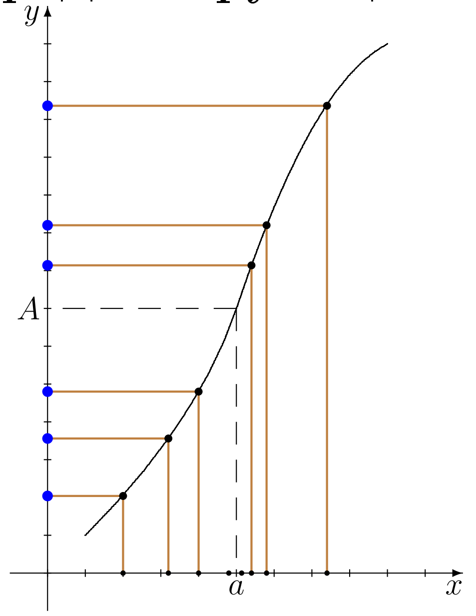
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

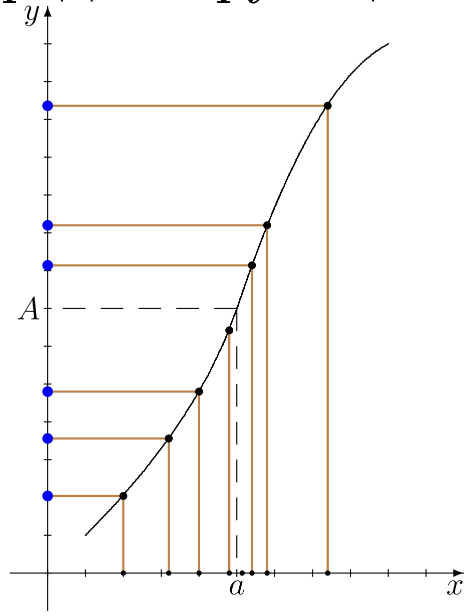
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

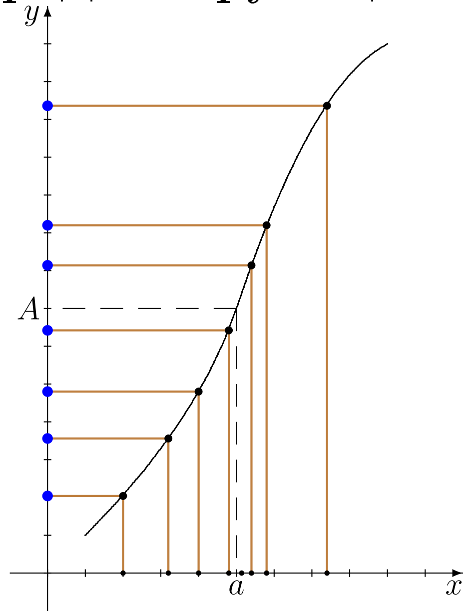
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

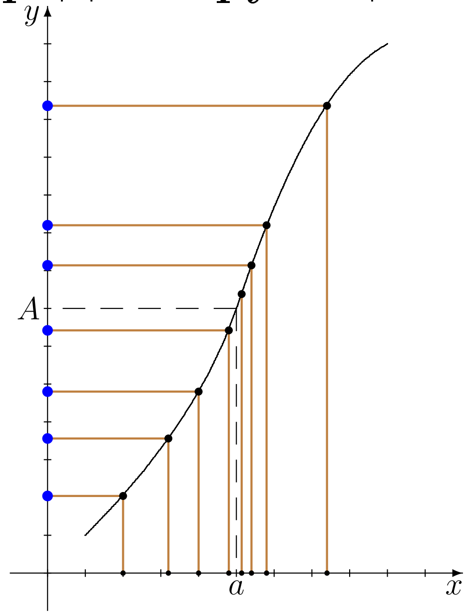
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

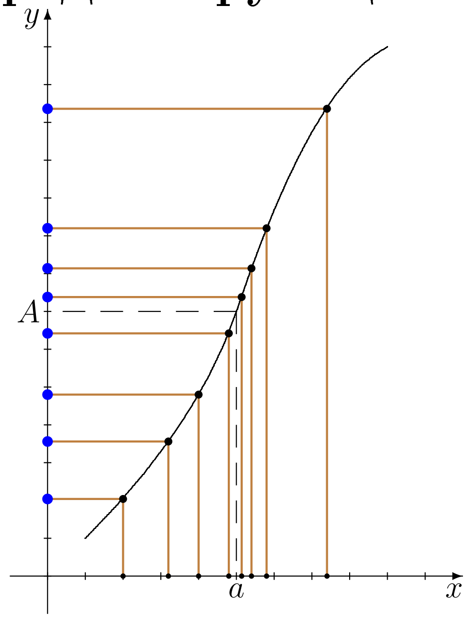
Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.



III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.

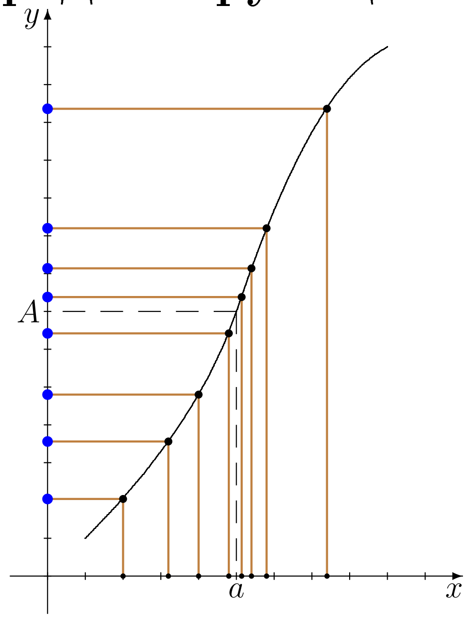


III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.

Естественно считать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в случае, когда при $a_n \to a$ последовательность $\{f(a_n)\}$ сходится к a.



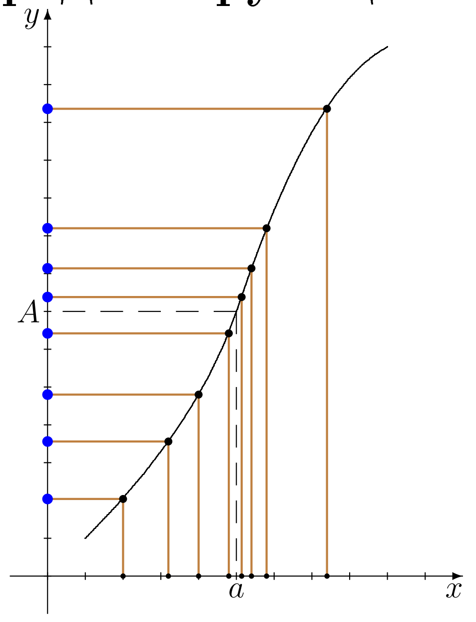
III.3.1. Получение определения предела функции

Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.

Естественно считать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в случае, когда при $a_n \to a$ последовательность $\{f(a_n)\}$ сходится к a.

Такая трактовка предела функции является основой **определения предела по Гейне.**



III.3.1. Получение определения предела функции

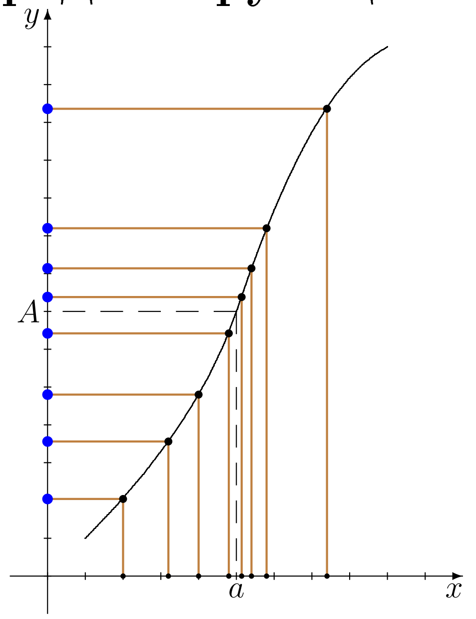
Рассмотрим последовательность значений аргумента, сходящуюся к a.

Посмотрим, к чему сходится последовательность $\{f(a_n)\}$.

Естественно считать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в случае, когда при $a_n \to a$ последовательность $\{f(a_n)\}$ сходится к a.

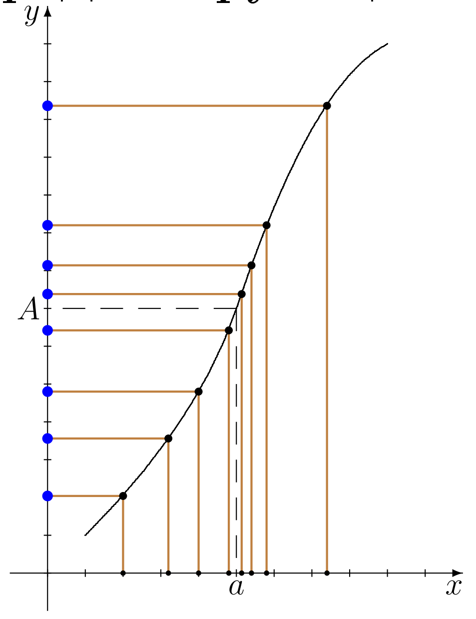
Такая трактовка предела функции является основой **определения предела по Гейне.**

Попытаемся сформулировать определение «на языке окрестностей».



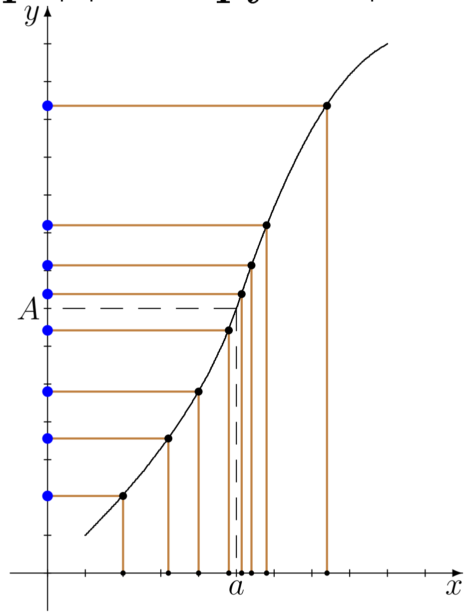
III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to A.$$



III.3.1. Получение определения предела функции

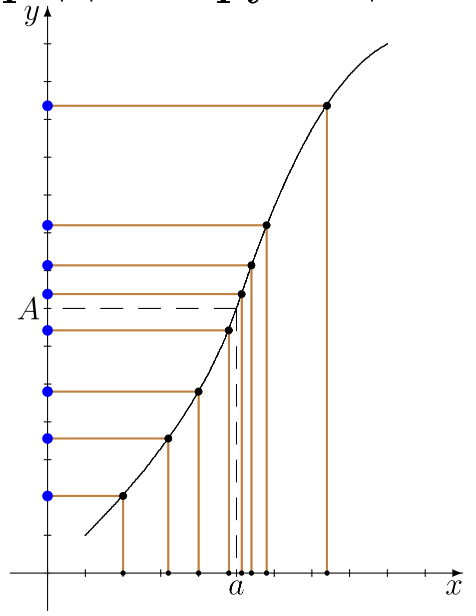
$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f\left(x_n\right) \to A.$$



В этом выражении надо обратить особое внимание на...

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

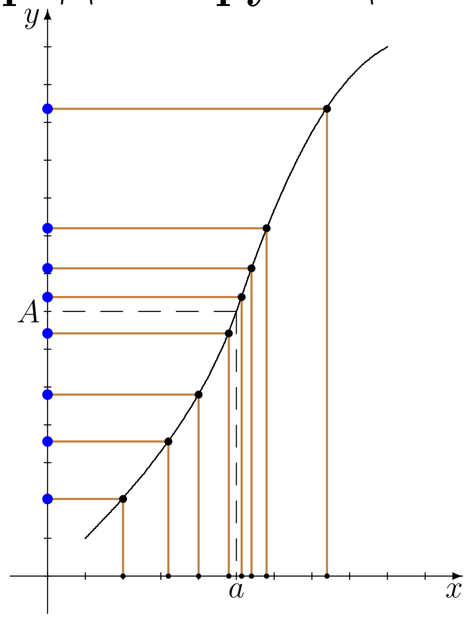


В этом выражении надо обратить особое внимание на...

III.3.1. Получение определения предела функции

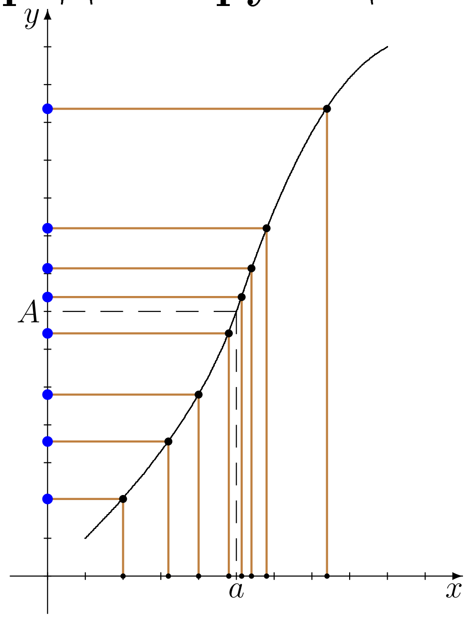
$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

В этом выражении надо обратить особое внимание на заключение.



III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

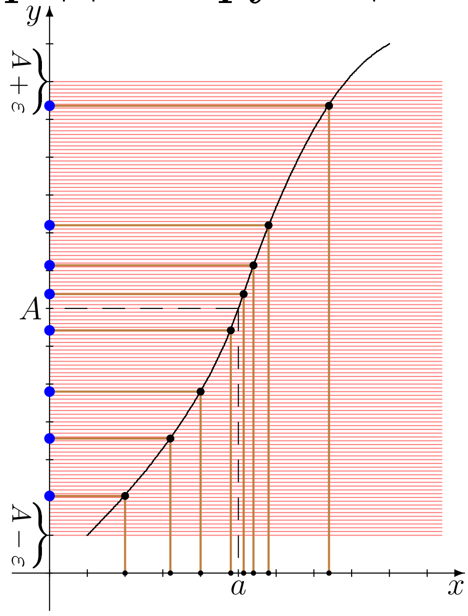


Возьмем **окрестность** точки A.

III.3.1. Получение определения предела функции

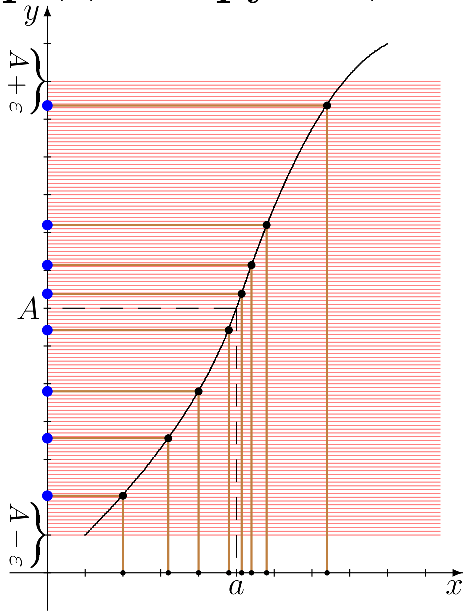
$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

Возьмем **окрестность** точки A.



III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

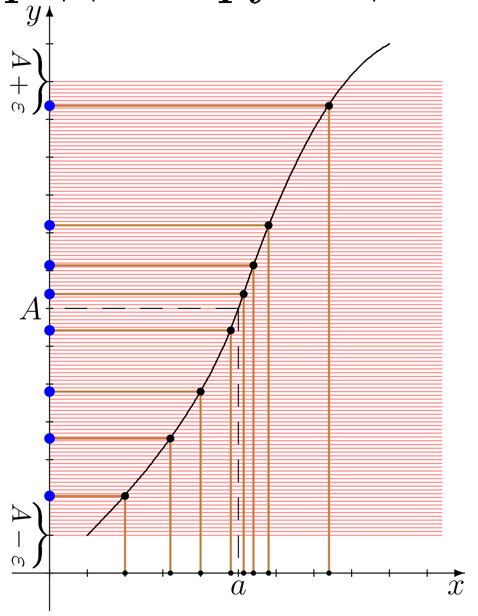


Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f\left(x_n\right)$ к условию на x_n.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$



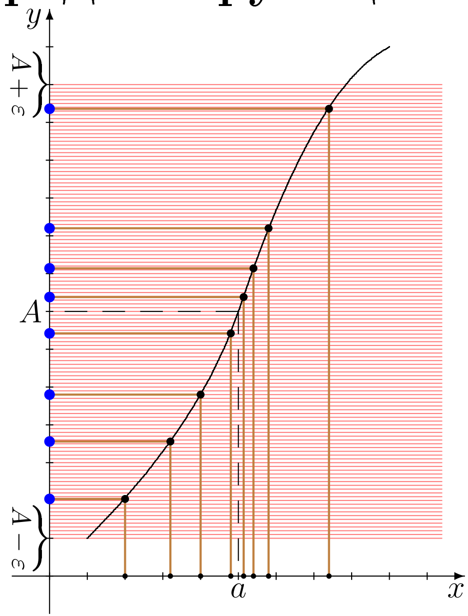
Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$



Возьмем **окрестность** точки A.

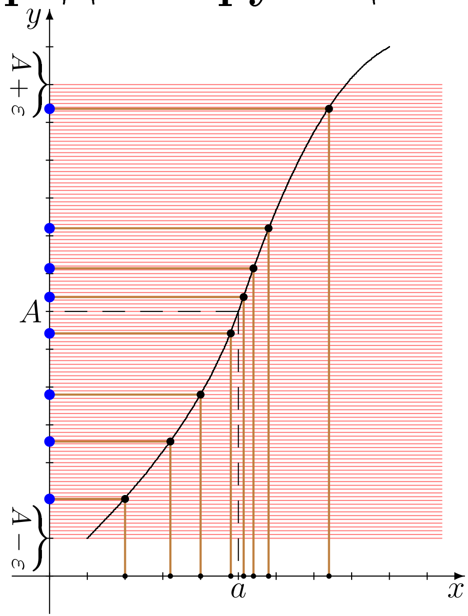
Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$



Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

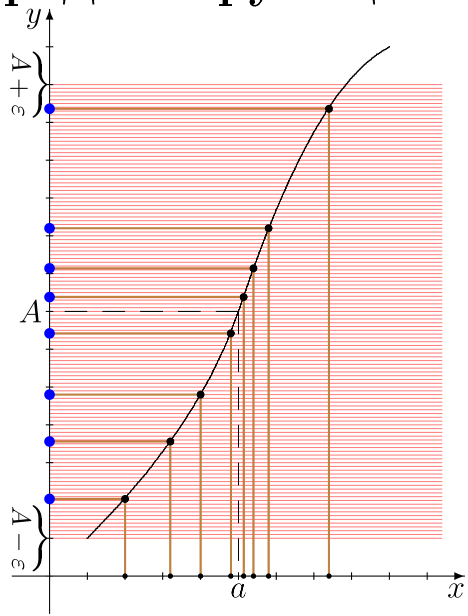
попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

Это бла-бла-бла. Скажем это на языке равенств и неравенств.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$|x-a| < \delta$$



Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

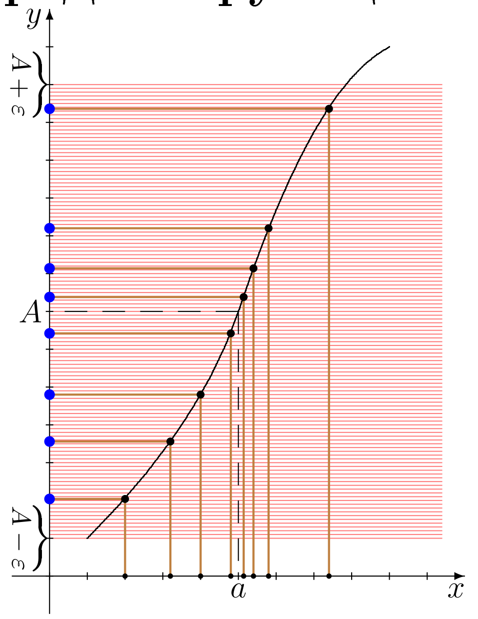
попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

Это бла-бла-бла. Скажем это на языке равенств и неравенств.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$|x-a| < \delta \qquad\qquad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

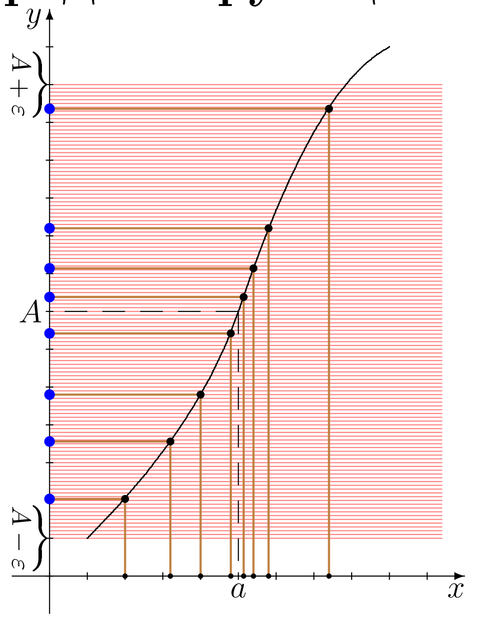
попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

Это бла-бла-бла. Скажем это на языке равенств и неравенств.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

Это бла-бла-бла. Скажем это на языке равенств и неравенств.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

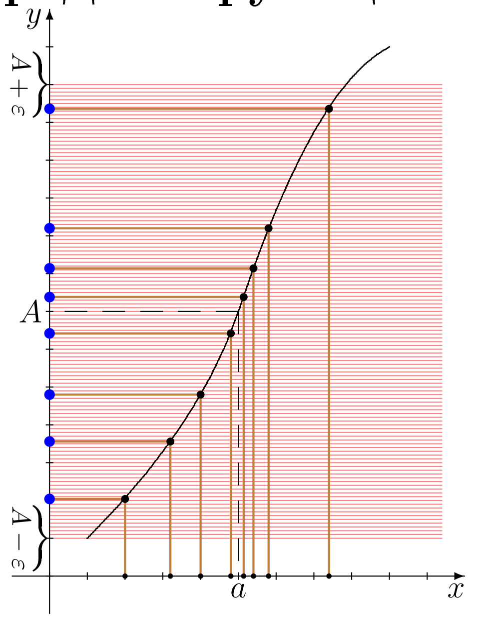
Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

При вычислении предела значение $f(a)$ не рассматривается.



III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

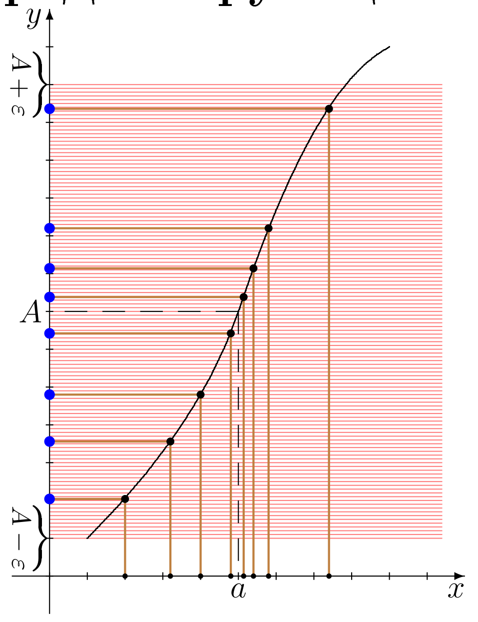
Возьмем **окрестность** точки A.

Мы должны свести условие на последовательность $f(x_n)$ к условию на x_n.

Значит, надо взять такую окрестность числа a, чтобы

попадание x_n в эту окрестность означало попадание $f(x_n)$ в выбранную ранее окрестность.

При вычислении предела значение $f(a)$ не рассматривается.

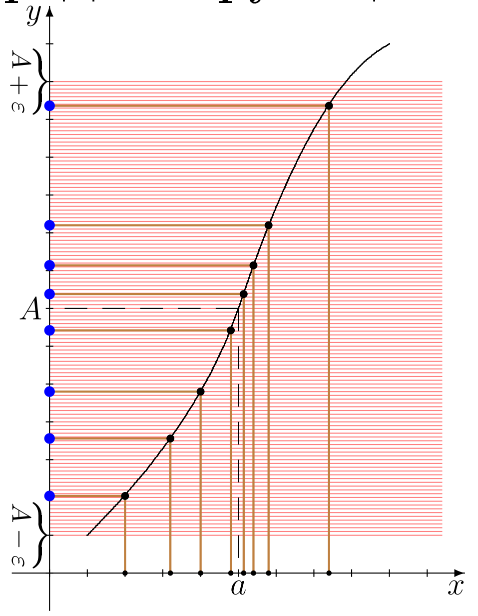


III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

$$0 <|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

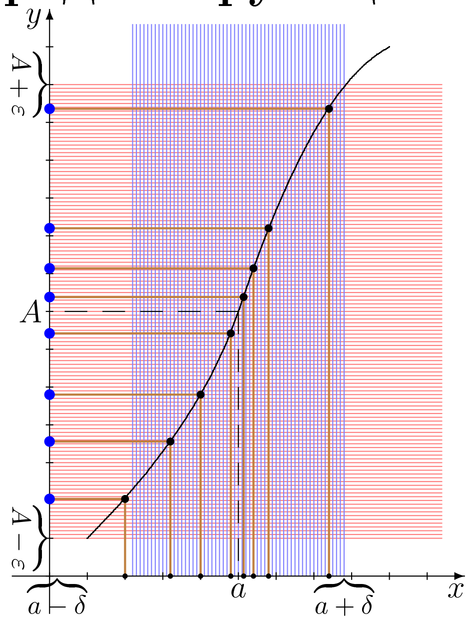


III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

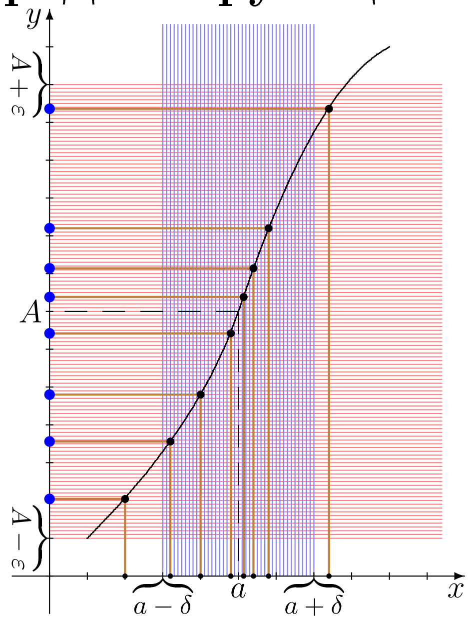


III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \overbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

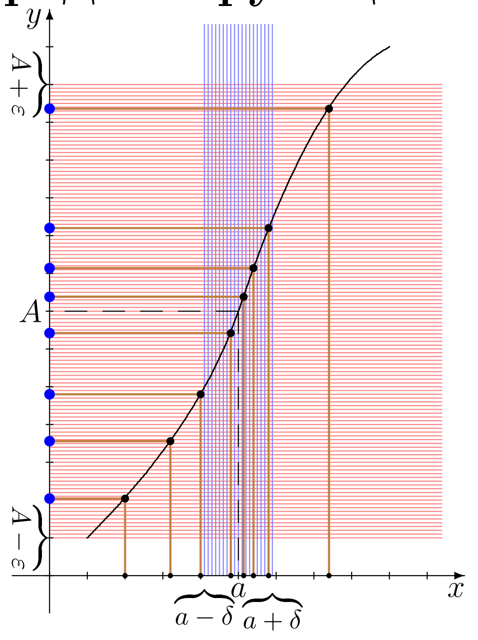


III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

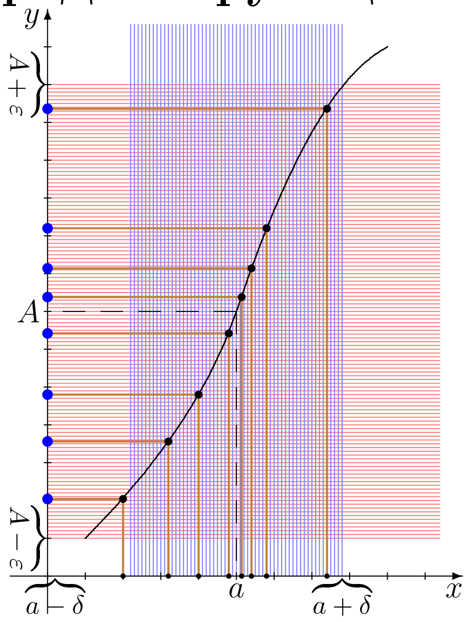
Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.



III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



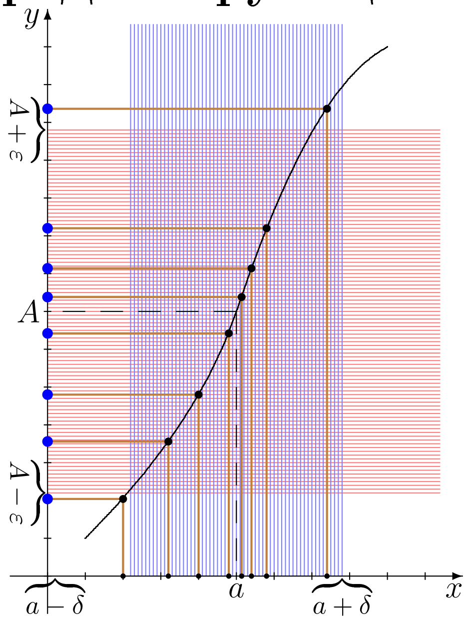
Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

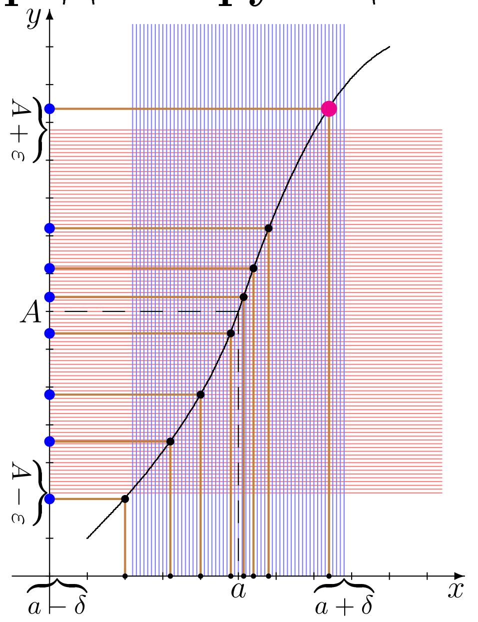
III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.



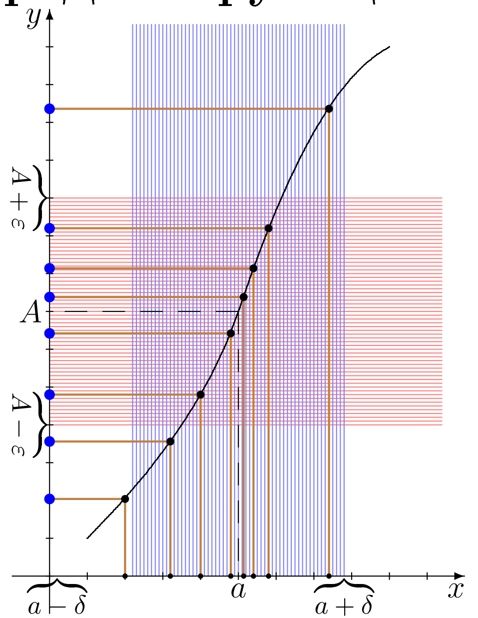
III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.



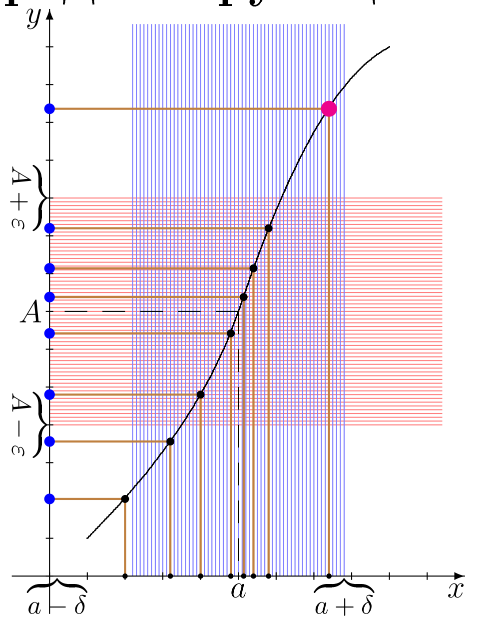
III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.



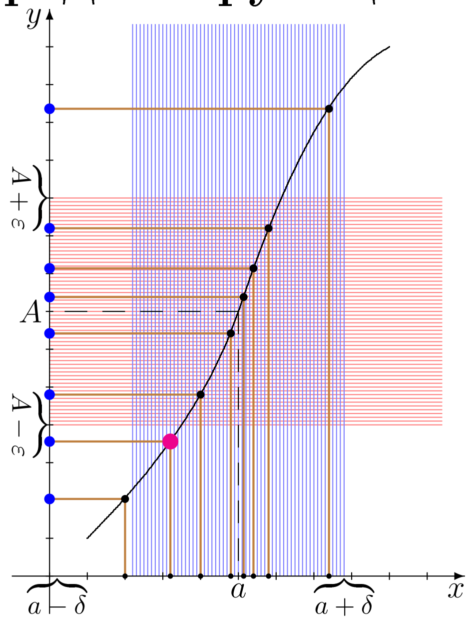
III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

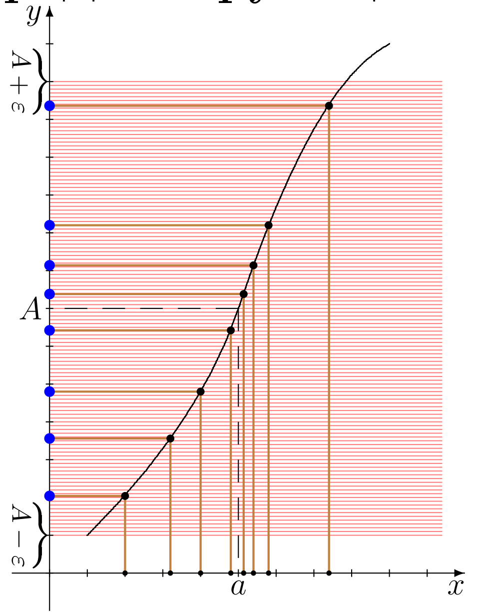
Но при уменьшении ε формула может стать ложной.



III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.

III.3.1. Получение определения предела функции

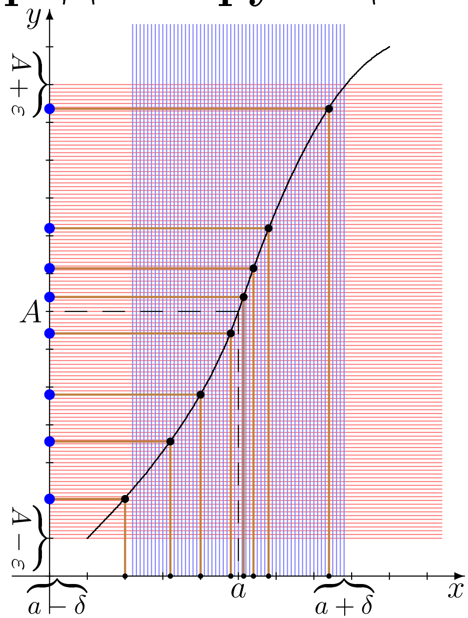
$$\underbrace{x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f\left(x_n\right) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.



III.3.1. Получение определения предела функции

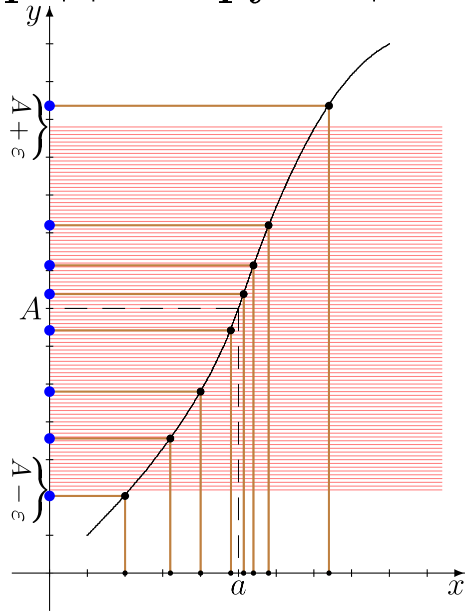
$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.



III.3.1. Получение определения предела функции

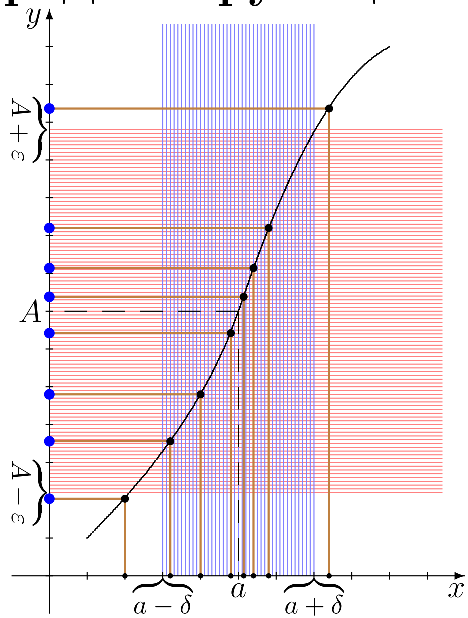
$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

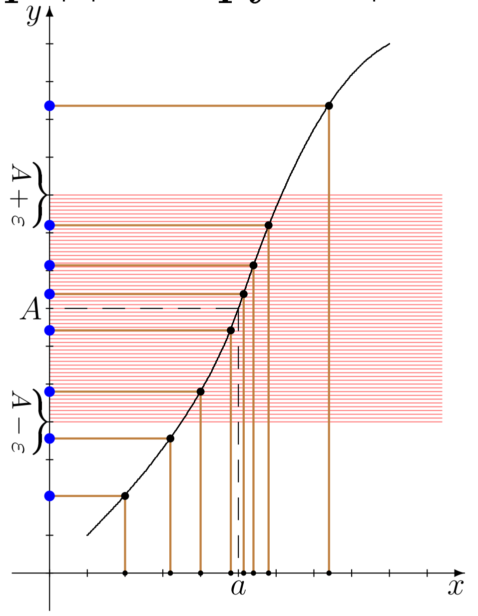
Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.



III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f\left(x_n\right) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

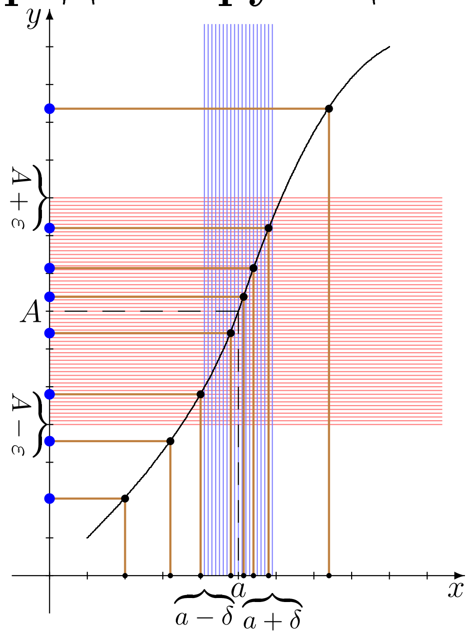
Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \to A.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.

III.3.1. Получение определения предела функции

$$\underbrace{x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f\left(x_n\right) \to A.}$$

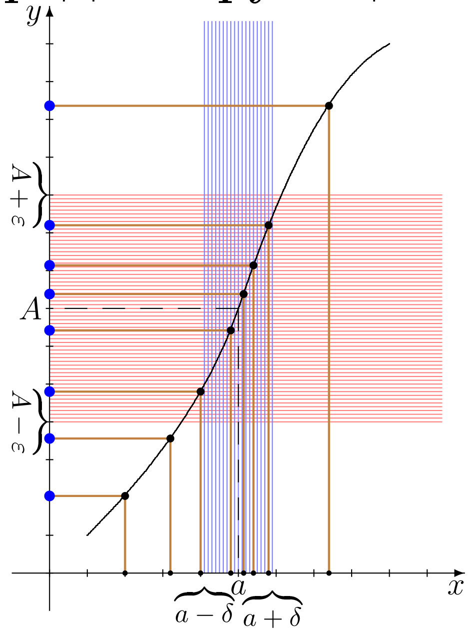
$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если формула была верна при выбранных ε и δ, то при уменьшении δ формула остаётся истинной.

Но при уменьшении ε формула может стать ложной.

Иными словами, значение δ необходимо определять, исходя из значения ε.

Подведём итог.



III.3.2. Определение предела функции в точке по Гейне

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при $x \to a$ (по Гейне), если*
для любой последовательности $x_n \in \mathbf{D(f)}$, где $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq a \quad$ последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Слишком много слов естественного языка...

III.3.2. Определение предела функции в точке по Гейне

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathbf{D}(\mathbf{f}), \\ a \neq x_n \to a \end{array}\right. \Rightarrow f\left(x_n\right) \to A. \tag{6}$$

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{array}\right. \Rightarrow f\left(x_n\right) \to A. \tag{6}$$

Генрих
Эдуард
Гейне
(1821-1881)

Огюстен
Луи
Коши
(1789-1857)

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{array}\right. \Rightarrow \ f\left(x_n\right) \to A. \tag{6}$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Коши), если*

для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех значений $x \in$, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right| < \varepsilon$.

Слишком много слов естественного языка...

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при $x \to a$ (по Гейне), если*

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{array}\right. \Rightarrow \ f\left(x_n\right) \to A. \qquad (6)$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при $x \to a$ (по Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (7)$$

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при $x \to a$ (по Гейне), если*

$$\begin{cases} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{cases} \Rightarrow \; f\left(x_n\right) \to A. \tag{6}$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при $x \to a$ (по Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{7}$$

Можно показать, что оба эти определения эквивалентны, т.е. функция имеет предел A по Гейне тогда и только тогда, когда она имеет предел по Коши.

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{array}\right. \Rightarrow\ f\left(x_n\right) \to A. \qquad (6)$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (7)$$

Рассмотрим пример?

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\begin{cases} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{cases} \Rightarrow \ f\left(x_n\right) \to A. \tag{6}$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{7}$$

С помощью **понятия окрестности** естественным образом определяются бесконечные пределы:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty...$$

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\begin{cases} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{cases} \Rightarrow \ f\left(x_n\right) \to A. \qquad (6)$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (7)$$

С помощью **понятия окрестности** естественным образом определяются и пределы в бесконечности:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

III.3.3. Определение предела функции в точке по Коши

Определение 6. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Гейне), если*

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathbf{D(f)}, \\ a \neq x_n \to a \end{array}\right. \Rightarrow \; f\left(x_n\right) \to A. \tag{6}$$

Определение 7. *Говорят, что число A является* **пределом функции** f *при* $x \to a$ *(по Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{7}$$

Рассмотрим пример определений пределов в бесконечности и бесконечных пределов?

III.4. Функции, бесконечно малые и бесконечно большие в точке

Определение 8. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Тогда*
1) функция f называется **бесконечно малой** *в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$;*
2) функция f называется **бесконечно большой** *в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.*

III.4.1. Сравнение бесконечно малых

Определение 9. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α в* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно малой не менее высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

III.4.1. Сравнение бесконечно малых

Определение 9. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α в* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно малой не менее высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Определение 10. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то функции α и β называются* **эквивалентными в окрестности** *точки a, если α является бесконечно малой не менее высокого порядка, чем β, и β является бесконечно малой не менее высокого порядка, чем α.*

III.4.1. Сравнение бесконечно малых

Определение 9. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α в* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно малой не менее высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Тот факт, что α — бесконечно малая функция в окрестности точки a, большего порядка, чем β, записывают формулой $\alpha = o(\beta)$.

Тот факт, что α — бесконечно малая функция в окрестности точки a, не меньшего порядка, чем β, причём α и β, записывают формулой $\alpha = O(\beta)$.

III.4.1. Сравнение бесконечно малых

Определение 9. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α в* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно малой не менее высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Тот факт, что α — бесконечно малая функция в окрестности точки a, большего порядка, чем β, записывают формулой $\alpha = o(\beta)$.

Тот факт, что α — бесконечно малая функция в окрестности точки a, не меньшего порядка, чем β, причём α и β, записывают формулой $\alpha = O(\beta)$.

Иными словами, бесконечно малые α и β **эквивалентны в окрестности** точки a, если $\alpha = O(\beta)$ и $\beta = O(\alpha)$.

III.4.2. Сравнение бесконечно больших

Определение 9. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α в* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно малой не менее высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Определение 11. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно большими*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно большой более высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

III.4.3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Определение 9. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно малыми*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α в* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно малой не менее высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Определение 11. *Пусть a — это число, ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если функции α и β являются* ***бесконечно большими*** *в* ***окрестности*** *точки a, то α* ***окрестности*** *точки a называется* **бесконечно большой более высокого порядка**, *чем β, если* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$.

Эта же терминология применяется и для сравнения **бесконечно малых последовательностей** и **бесконечно больших последовательностей**.

III.5. Свойства предела функции

Мы сформулируем их для предела функции в конечной точке.

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. От противного.

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \\ \end{array} \right.$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \\ \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \\ \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

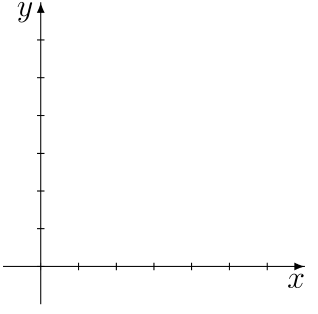
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

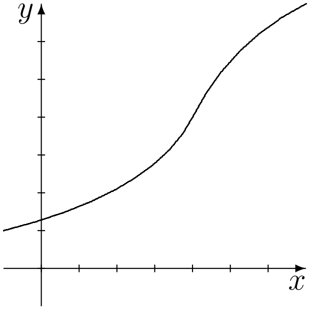


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

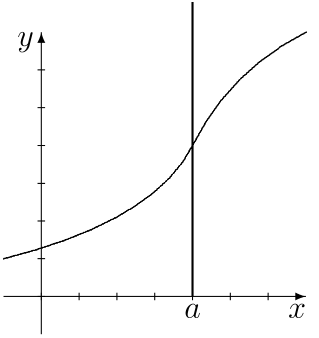


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

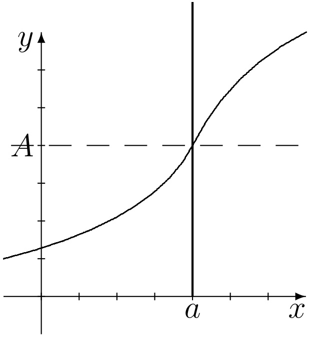


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

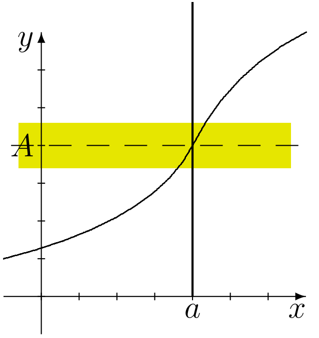


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

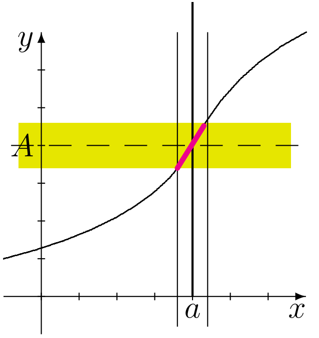


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$



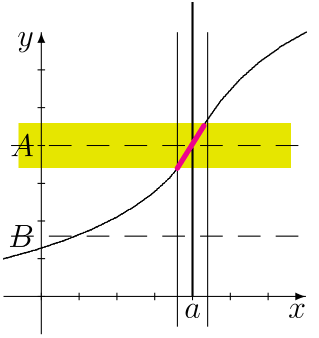
III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x-a| < \delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y-A| < \varepsilon$.



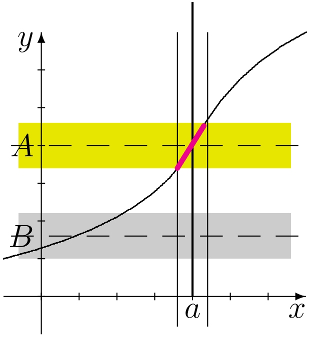
III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x-a| < \delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y - A| < \varepsilon$.



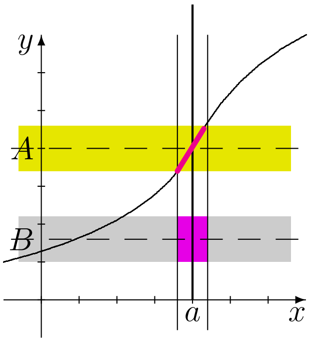
III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x - a| < \delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y - A| < \varepsilon$.



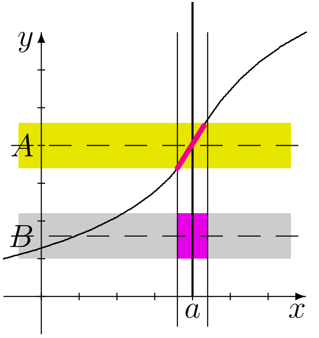
III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x-a|<\delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y-A|<\varepsilon$. Но тогда этот кусочек графика не может попасть внутрь горизонтальной «полоски» $|y-B|<\varepsilon$.

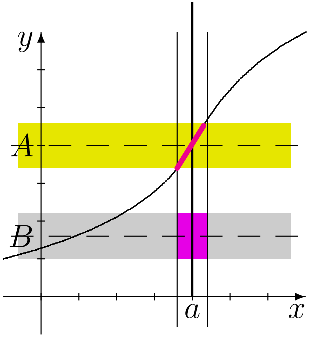


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$



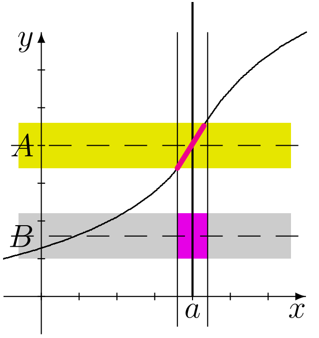
Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x-a|<\delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y-A|<\varepsilon$. Но тогда этот кусочек графика не может попасть внутрь горизонтальной «полоски» $|y-B|<\varepsilon$. Противоречие! Свойство доказано?

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$



Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x-a| < \delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y - A| < \varepsilon$. Но тогда этот кусочек графика не может попасть внутрь горизонтальной «полоски» $|y - B| < \varepsilon$. Но это бла-бла-бла...

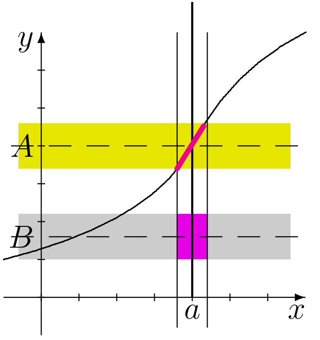
III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

Первая формула означает, что для данного ε и выбранного δ часть графика функции f, вырезанная вертикальной «полоской» $|x-a|<\delta$, находится внутри горизонтальной «полоски» $|y-A|<\varepsilon$. Но тогда этот кусочек графика не может попасть внутрь горизонтальной «полоски» $|y-B|<\varepsilon$. Формализуем рассуждения.



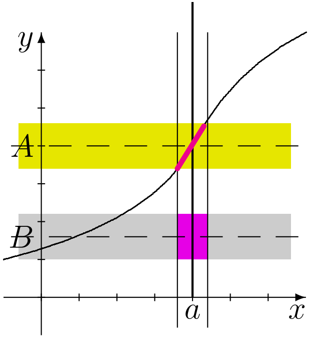
III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда



III.5.1. Свойство единственности предела

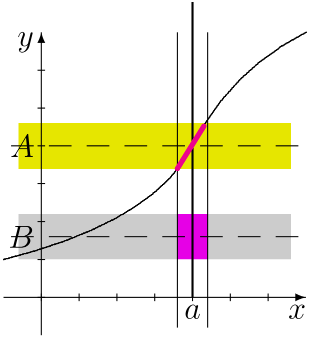
Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$> |f(x) - B| =$



III.5.1. Свойство единственности предела

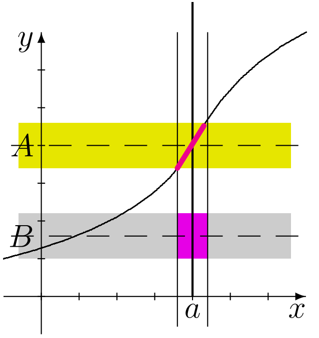
Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| =$



III.5.1. Свойство единственности предела

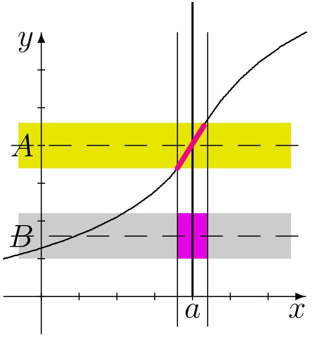
Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x)-B| = |f(x)-A+A-B|$



III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

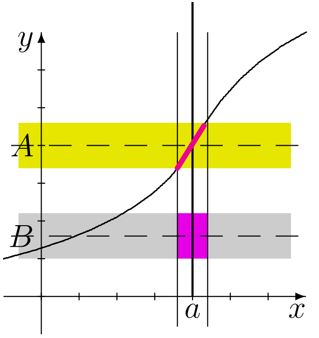
Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x)-B| = |f(x)-A+A-B| \overset{\leqslant}{\underset{\geqslant ?}{}}$

$\overset{\leqslant}{\underset{? \geqslant}{}} |A-B| - |f(x)-A|$



III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

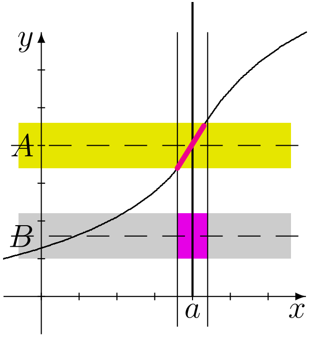
Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A-B| - |f(x) - A|$

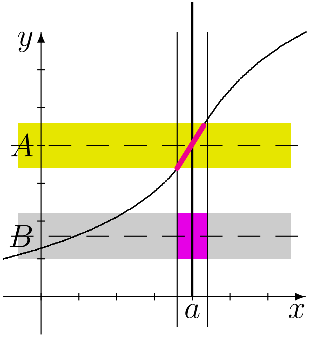


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$



Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A - B| - |f(x) - A| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon =$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

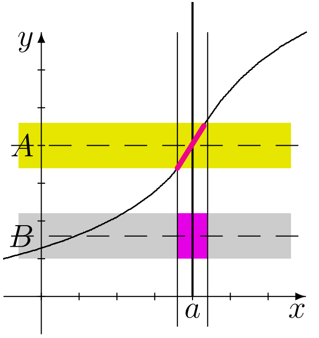
Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A-B| - |f(x) - A| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$



III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

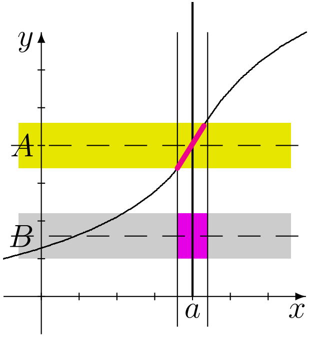
$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon=\dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon>|f(x)-B|=|f(x)-A+A-B|\geqslant$

$\geqslant|A-B|-|f(x)-A|\geqslant 3\varepsilon-\varepsilon=2\varepsilon.$

$=\varepsilon-\varepsilon>2\varepsilon-\varepsilon=$



III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

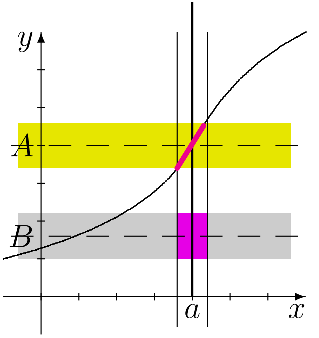
$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon, \\ A\neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon=\dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon>|f(x)-B|=|f(x)-A+A-B|\geqslant$

$\geqslant|A-B|-|f(x)-A|\geqslant 3\varepsilon-\varepsilon=2\varepsilon.$

$0=\varepsilon-\varepsilon>2\varepsilon-\varepsilon=$



III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

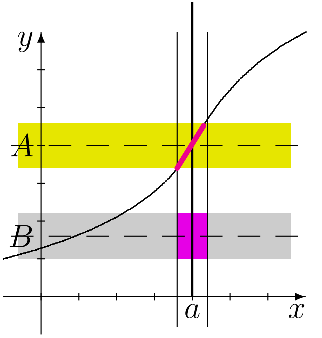
$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A - B| - |f(x) - A| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$

$0 = \varepsilon - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$

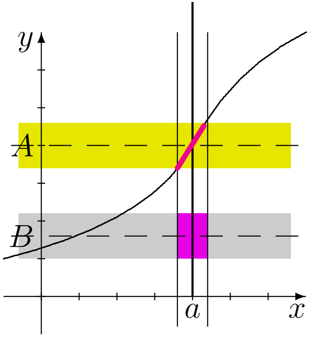


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$



Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A-B| - |f(x) - A| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$

$0 = \varepsilon - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0,$

III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

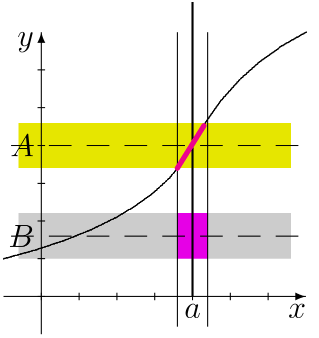
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A - B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A - B| - |f(x) - A| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$

$0 = \varepsilon - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$, противоречие.

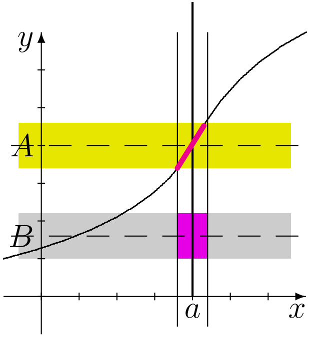


III.5.1. Свойство единственности предела

Утверждение III.1. *Если не различать бесконечности со знаком и без знака, то функция f не может иметь два различных предела в точке a.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon, \\ A \neq B. \end{cases}$$



Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Тогда

$\varepsilon > |f(x) - B| = |f(x) - A + A - B| \geqslant$

$\geqslant |A-B| - |f(x) - A| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$

$0 = \varepsilon - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$, противоречие.

Свойство доказано.

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}} \right. \qquad\qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \\ \\ \end{cases} \qquad\qquad \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \\ \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad \qquad \Big)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \\ \\ \end{array} \right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \\ \end{cases} \quad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad \Big)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad\qquad \Big)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0$$

$$)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$$

$$)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow$$

$$)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \bigl(f(x)+g(x)\bigr)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \bigl(\lambda f(x)+\mu g(x)\bigr) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B|<\varepsilon.)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B|<\varepsilon.)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda A - \mu B| < \varepsilon.)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B|<\varepsilon.)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\bigl(\lambda f(x)+\mu g(x)\bigr)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0\quad \exists\delta'>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta'\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon',\\ \forall\varepsilon''>0\quad \exists\delta''>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta''\Rightarrow|g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}\quad (\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B|<\varepsilon.)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B| = |\lambda f(x)-\lambda A+\mu g(x)-\mu B| \qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda A - \mu B| < \lambda\,|f(x) - A| + \mu\,|g(x) - B| \qquad\qquad)$$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B| < \lambda\,|f(x)-A| + \mu\,|g(x)-B| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon' = \quad$, $\varepsilon'' = \quad$.

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda\lim_{x\to a} f(x) + \mu\lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B| < \lambda\,|f(x)-A| + \mu\,|g(x)-B| \qquad)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\lambda}$, $\varepsilon'' = \qquad .$

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B| < \lambda\,|f(x)-A| + \mu\,|g(x)-B| \qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2\lambda}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2\mu}$.

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x)-B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x) - \lambda A - \mu B| < \lambda\, |f(x)-A| + \mu\, |g(x)-B| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \ )$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\lambda}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2\mu}$.

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ, μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda\lim_{x\to a} f(x) + \mu\lim_{x\to a} g(x), \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B|<\lambda\,|f(x)-A|+\mu\,|g(x)-B|<\varepsilon'+\varepsilon''=\varepsilon.)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2\lambda}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2\mu}$.

III.5.2. Свойство линейности предела

Утверждение III.2. *Если из трёх пределов* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, *два предела существуют и конечны, то третий из них существует и конечен, причём для любых чисел* λ,μ

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda\lim_{x\to a} f(x)+\mu\lim_{x\to a} g(x), \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим только доказательство случая, когда определены и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0\quad \exists\delta'>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta'\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon',\\ \forall\varepsilon''>0\quad \exists\delta''>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta''\Rightarrow|g(x)-B|<\varepsilon'',\end{array}\right.\overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}\quad (\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda A-\mu B|<\lambda\,|f(x)-A|+\mu\,|g(x)-B|<\varepsilon'+\varepsilon''=\varepsilon.)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2\lambda}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2\mu}$. Свойство доказано.

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad\qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \tag{9}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \\ \\ \end{cases} \qquad\qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad\qquad \Big)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \\ \end{cases} \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \\ \\ \end{array} \right. \qquad\qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad\qquad \Big)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \tag{9}$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \\ \\ \end{array}\right. \quad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \\ \\ \end{array}\right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \\ \end{array} \right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0$$

$$)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$$

$$)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x$$

$$)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|<\varepsilon.)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - A\cdot B| < \varepsilon.)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|<\varepsilon.)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|<\varepsilon.)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|<\varepsilon.)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B| = |f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB| \qquad\qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - A\cdot B| < |f(x)|\,|g(x) - B| + B\,|f(x) - A| \qquad)$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x)-B| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - A\cdot B| < |f(x)|\,|g(x)-B| + B\,|f(x)-A| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \qquad\qquad\qquad , \varepsilon'' = \qquad .$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|< |f(x)|\,|g(x)-B|+B\,|f(x)-A| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\max\left\{\varepsilon, \qquad\qquad \right\}$, $\varepsilon''= \qquad .$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0\quad \exists\delta'>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0\quad \exists\delta''>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}\quad (\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|< |f(x)|\,|g(x)-B| + B\,|f(x)-A| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\max\left\{\varepsilon, \qquad\qquad\right\}$, $\varepsilon''= \qquad .$

$$A-\varepsilon'<f(x)<A+\varepsilon'\leqslant A+\varepsilon$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|< |f(x)|\,|g(x)-B| + B\,|f(x)-A| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon''=\qquad$.

$$A-\varepsilon'<f(x)<A+\varepsilon'\leqslant A+\varepsilon$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B| < |f(x)|\,|g(x)-B| + B\,|f(x)-A| \qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$.

$$A-\varepsilon' < f(x) < A+\varepsilon' \leqslant A+\varepsilon$$

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B| < |f(x)|\,|g(x)-B|+B\,|f(x)-A| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$.

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B| < |f(x)|\,|g(x)-B| + B\,|f(x)-A| < \varepsilon'+\varepsilon'' = \quad)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$.

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|< |f(x)|\,|g(x)-B|+B\,|f(x)-A|< \varepsilon'+\varepsilon'' =\varepsilon.)$$

Положим $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon'=\max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$.

III.5.3. Свойство предела произведения функций

Утверждение III.3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,. \qquad (9)$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon', \\ \forall\varepsilon''>0 \quad \exists\delta''>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'' \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x)-A\cdot B|< |f(x)|\,|g(x)-B| + B\,|f(x)-A|< \varepsilon' + \varepsilon'' =\varepsilon.)$$

Положим $\delta = \min\{\delta',\delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon}{2(|A|+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2|B|}$.

Свойство доказано.

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \quad \left(\begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\phantom{\dfrac{a}{b}} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad\qquad \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\phantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \\ \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\vphantom{\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}}} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\qquad \qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad \qquad \qquad \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \right.$$

$$\left. \vphantom{\int_0^1} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \right.$$

$$\left. \vphantom{\int^a_b} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \right.$$

$$\left. \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow \right.$$

$$\left. \phantom{\frac{a}{b}} \right)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad\qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon.\Big)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon.\Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon'>0\quad \exists\delta'>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta'\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon',\\ \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|g(x)-B|<\varepsilon,\end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}\quad \Bigl(\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon.\Bigr)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon.\Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \varepsilon. \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{array} \right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{f(x)B - f(x)g(x) + f(x)g(x) - Ag(x)}{g(x)B} \right| \qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|}\,|g(x) - B| + \frac{1}{|B|}\,|f(x) - A| \qquad \Bigg)$$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigl(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|}\, |g(x) - B| + \frac{1}{|B|}\, |f(x) - A| \qquad \Bigr)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \qquad\qquad\qquad$, $\varepsilon'' = \qquad$.

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)|\cdot|B|}\,|g(x) - B| + \frac{1}{|B|}\,|f(x) - A| \qquad\qquad \Bigg)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon, \qquad\qquad \right\}$, $\varepsilon'' = \qquad .$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Можно считать $\varepsilon < |B|$.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)|\cdot|B|}\,|g(x) - B| + \frac{1}{|B|}\,|f(x) - A| \qquad\qquad)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon, \qquad\qquad\qquad \right\}$, $\varepsilon'' = \qquad .$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (10)$$

Доказательство. Можно считать $\varepsilon < |B|$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} \, |g(x) - B| + \frac{1}{|B|} \, |f(x) - A| \Big)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon, \ \dfrac{\varepsilon(|A| + \varepsilon)}{2(|B| - \varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon'' = \qquad .$

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Можно считать $\varepsilon < |B|$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Bigg(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} \, |g(x) - B| + \frac{1}{|B|} \, |f(x) - A| \qquad \Bigg)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon, \ \dfrac{\varepsilon(|A| + \varepsilon)}{2(|B| - \varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon|B|}{2}$.

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Можно считать $\varepsilon < |B|$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} \, |g(x) - B| + \frac{1}{|B|} \, |f(x) - A| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \quad \Bigg)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon, \ \dfrac{\varepsilon(|A| + \varepsilon)}{2(|B| - \varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon|B|}{2}$.

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Можно считать $\varepsilon < |B|$.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} |g(x) - B| + \frac{1}{|B|} |f(x) - A| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon. \Big)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon, \ \dfrac{\varepsilon(|A| + \varepsilon)}{2(|B| - \varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon |B|}{2}$.

III.5.4. Свойство предела частного функций

Утверждение III.4. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и конечен, причём*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Можно считать $\varepsilon < |B|$. Ура!

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \Big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|f(x)|}{|g(x)| \cdot |B|}\,|g(x) - B| + \frac{1}{|B|}\,|f(x) - A| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.\Big)$$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ для $\varepsilon' = \max\left\{\varepsilon,\ \dfrac{\varepsilon(|A| + \varepsilon)}{2(|B| - \varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon|B|}{2}$.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.
В частности, $a_n \leqslant b_n \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *при условии, что эти пределы существуют и конечны.*

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞. *Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

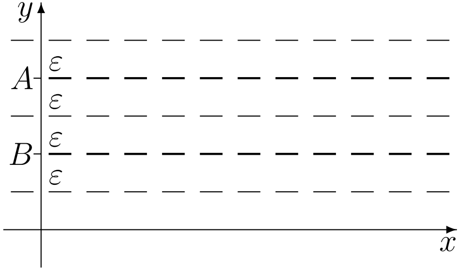
III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.



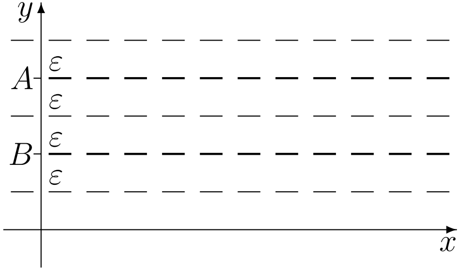
III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.



Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестности $|y - A| < \varepsilon$ и $|y - B| < \varepsilon$ не пересекались.

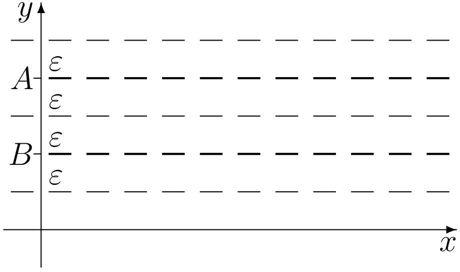
III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.



Например, положим

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестности $|y - A| < \varepsilon$ и $|y - B| < \varepsilon$ не пересекались.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

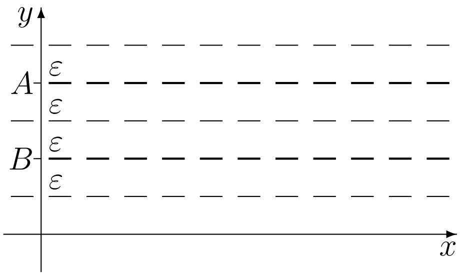
Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

Например, положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестности $|y - A| < \varepsilon$ и $|y - B| < \varepsilon$ не пересекались.



III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

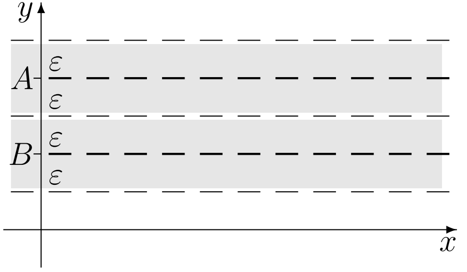
Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

Например, положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестности $|y - A| < \varepsilon$ и $|y - B| < \varepsilon$ не пересекались.



III.5.5. Свойство наследования неравенства

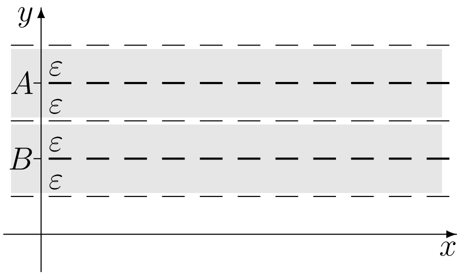
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

Изобразим точку a и график функции f.



III.5.5. Свойство наследования неравенства

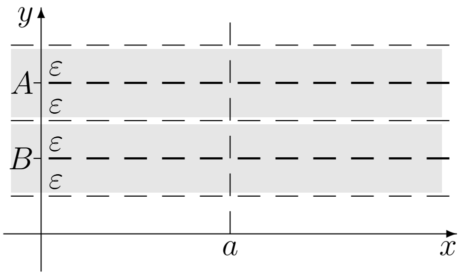
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

Изобразим точку a и график функции f.



III.5.5. Свойство наследования неравенства

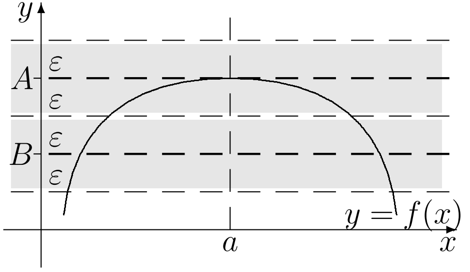
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

Изобразим точку a и график функции f.



III.5.5. Свойство наследования неравенства

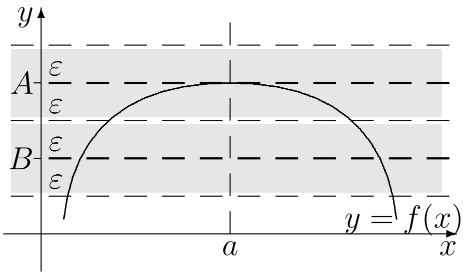
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0$



III.5.5. Свойство наследования неравенства

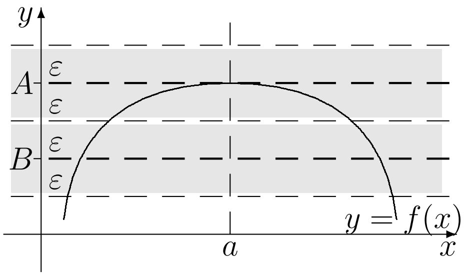
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow$



III.5.5. Свойство наследования неравенства

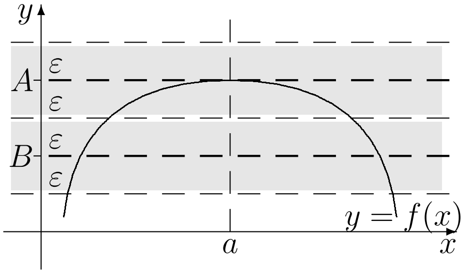
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$



III.5.5. Свойство наследования неравенства

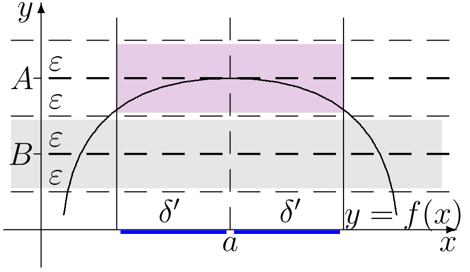
Утверждение **III.5**. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$



III.5.5. Свойство наследования неравенства

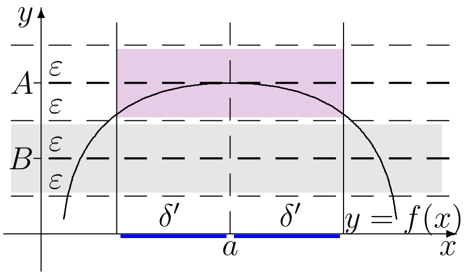
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$



Изобразим график функции g.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

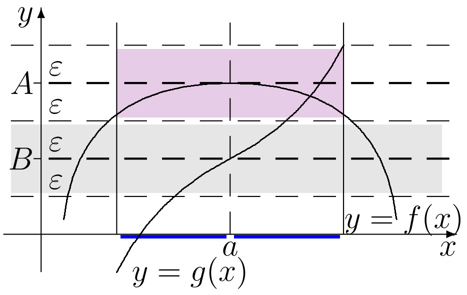
Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$



Изобразим график функции g.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

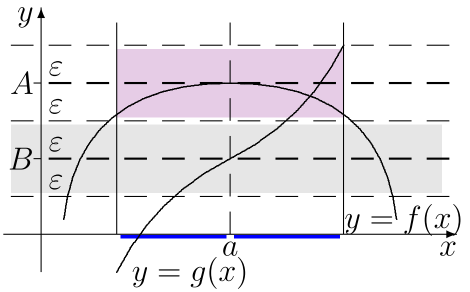
Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists\delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists\delta'' > 0$

Изобразим график функции g.

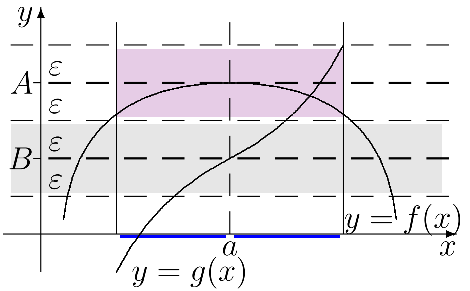


III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.



Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists \delta'' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta'' \ \Rightarrow$

Изобразим график функции g.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

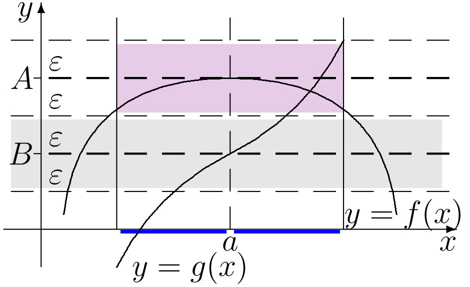
Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists \delta'' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$

Изобразим график функции g.



III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

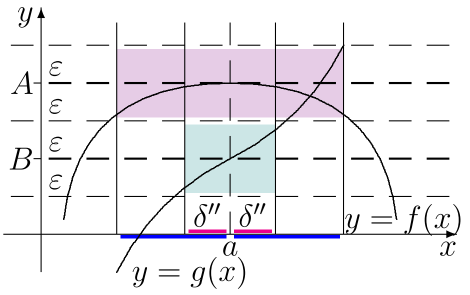
Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$.

$\exists\delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

$\exists\delta'' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$.

Изобразим график функции g.

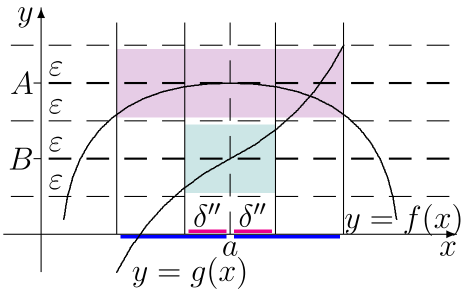


III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.



Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists \delta'' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$

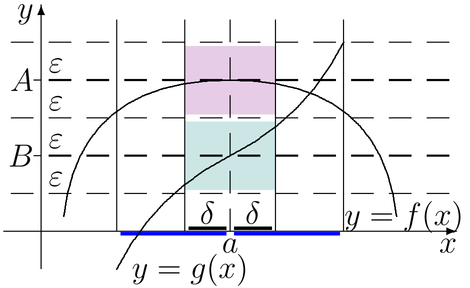
Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Тогда

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.



Допустим, $A > B$.

$\exists\delta' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta' \;\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists\delta'' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta'' \;\Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$

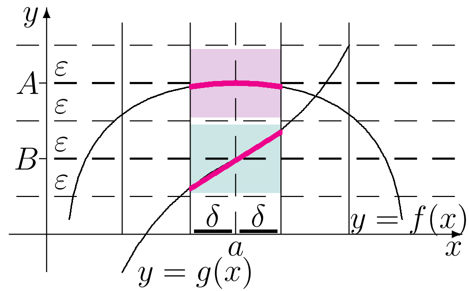
Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Тогда

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.



Допустим, $A > B$.

$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta' \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists \delta'' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta'' \ \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Тогда

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

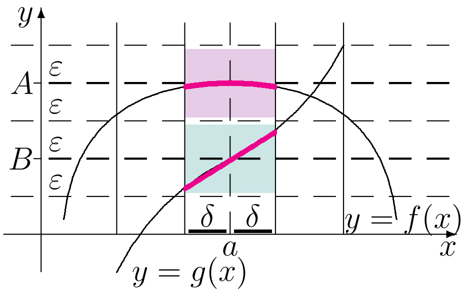
Допустим, $A > B$.

$\exists\delta' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists\delta'' > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Тогда

$0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow f(x) > g(x)$, караул!



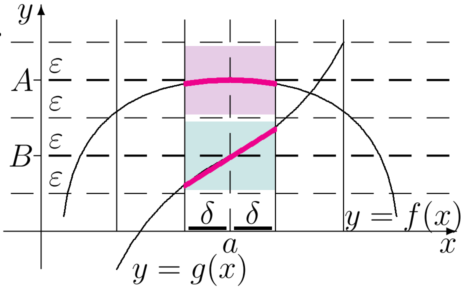
III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой **окрестности** элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство. Докажем это свойство только для случая, когда $a \in \mathbb{R}$.

Другие случаи доказываются аналогично.

Допустим, $A > B$. Оформим доказательство.



$\exists \delta' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\exists \delta'' > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta'' \ \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$

Положим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Тогда

$0 < |x - a| < \delta'' \ \Rightarrow \ f(x) > g(x)$, караул!

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$*, то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall \varepsilon > 0$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon.$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число,* $\pm\infty$ *или* ∞. *Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞. *Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon =$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B-\varepsilon < g(x) < B+\varepsilon.$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$.

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A - B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$g(x) <$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B + \varepsilon =$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B + \varepsilon = B + \frac{A-B}{2} =$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B-\varepsilon < g(x) < B+\varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B+\varepsilon = B + \frac{A-B}{2} =$$

$$= \frac{A+B}{2}$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A - B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B + \varepsilon = B + \frac{A - B}{2} =$$

$$= \frac{A + B}{2} \qquad < f(x) \leqslant g(x),$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A - B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B + \varepsilon = B + \frac{A - B}{2} =$$

$$= \frac{A + B}{2} \quad A - \frac{A - B}{2} < f(x) \leqslant g(x),$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞. *Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента* a *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *то* $A \leqslant B$.

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B + \varepsilon = B + \frac{A-B}{2} =$$

$$= \frac{A+B}{2} = A - \frac{A-B}{2} < f(x) \leqslant g(x),$$

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$g(x) < B + \varepsilon = B + \frac{A-B}{2} =$$
$$= \frac{A+B}{2} = A - \frac{A-B}{2} < f(x) \leqslant g(x),$$ противоречие.

III.5.5. Свойство наследования неравенства

Утверждение III.5. *Пусть a — это число, $\pm\infty$ или ∞. Если в некоторой* ***окрестности*** *элемента a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $A \leqslant B$.*

Доказательство.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$

Пусть $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0.$

Обозначим $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Возьмём x такой, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$g(x) < B + \varepsilon = B + \dfrac{A-B}{2} =$

$= \dfrac{A+B}{2} = A - \dfrac{A-B}{2} < f(x) \leqslant g(x)$, противоречие.

Свойство доказано.

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \\ \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \\ \\ \end{array} \right. \qquad \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \qquad \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \\ \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \\ \\ \end{array} \right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение **III.6**. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon, \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$$\leqslant g(x) \leqslant$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists\delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$$\leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$$A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$$A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant A + \varepsilon.$$

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant A + \varepsilon$.

Значит, $|g(x) - A| < \varepsilon$.

III.5.6. «Лемма о двух милиционерах»

Утверждение III.6. *Если* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon', \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon'', \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.)$$

Положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon, \quad \delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

$A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant A + \varepsilon$.

Значит, $|g(x) - A| < \varepsilon$.

Лемма доказана.

III.5.7. Первый замечательный предел

В качестве применения «леммы о двух милиционерах» рассмотрим так называемый «первый замечательный предел».

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

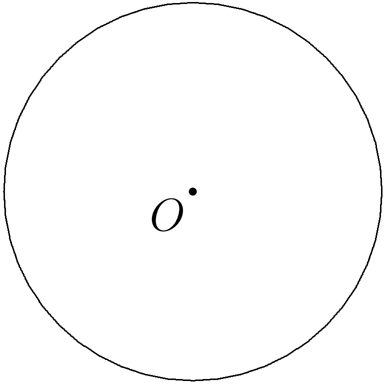
Доказательство.

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Доказательство.

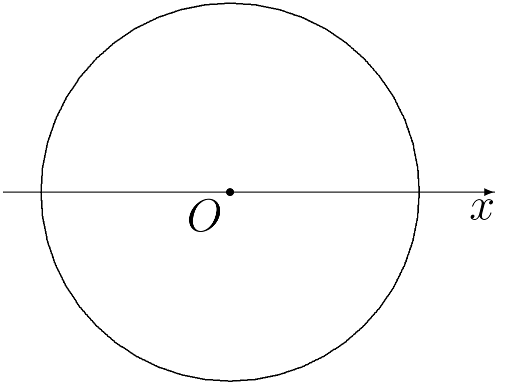


III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Доказательство.

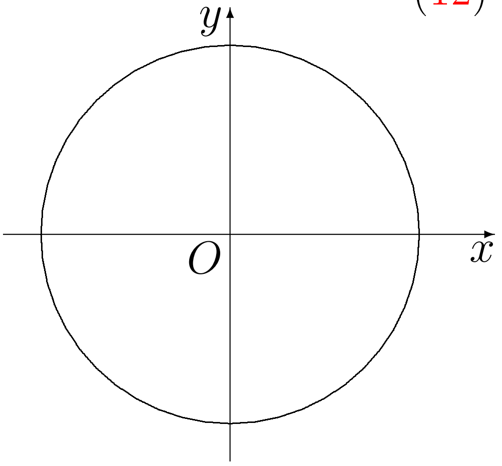


III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12}$$

Доказательство.

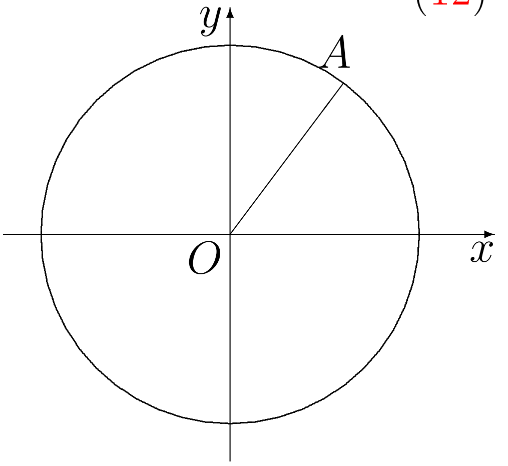


III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Доказательство.

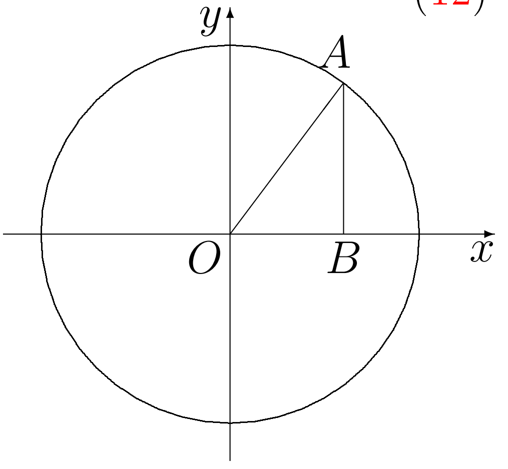


III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12}$$

Доказательство.

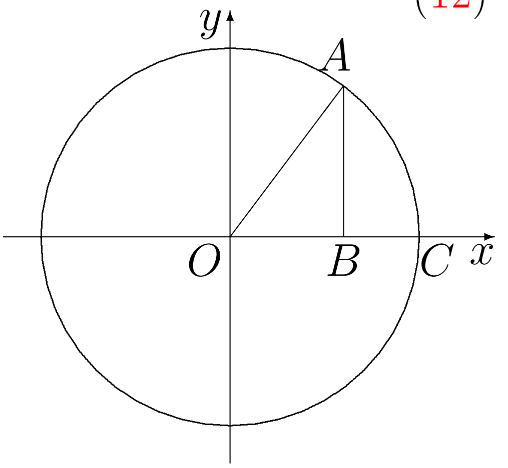


III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Доказательство.



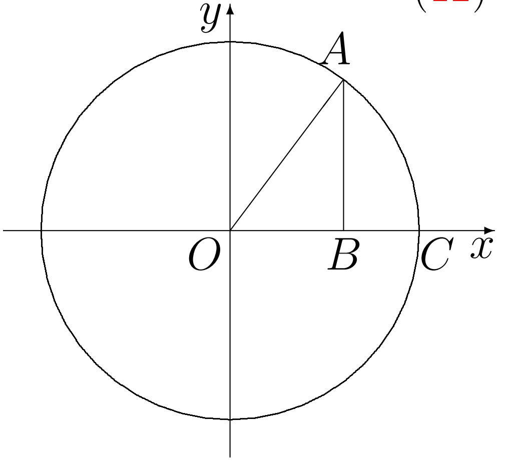
III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Доказательство.

x



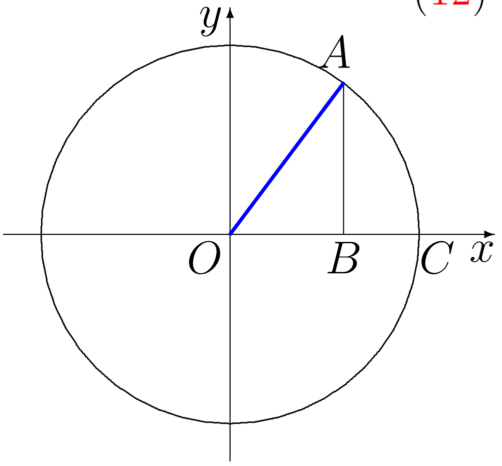
III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$

Доказательство.

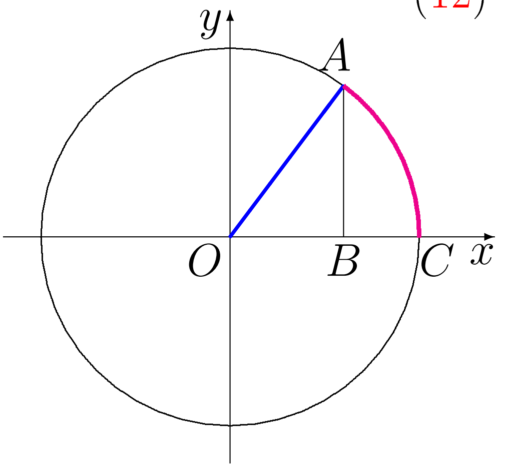
x



III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



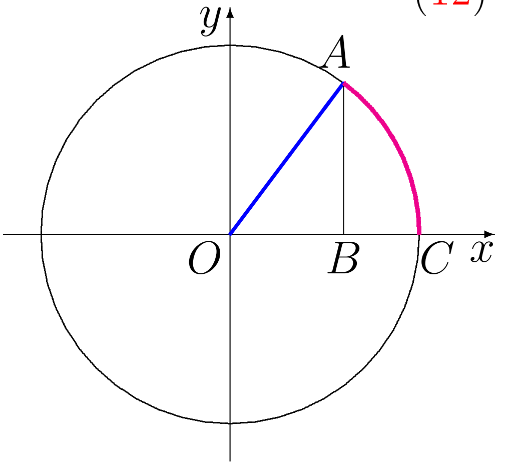
Доказательство.

x

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (12)$$



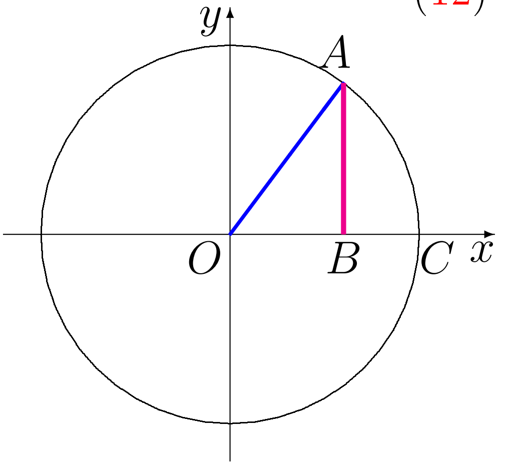
Доказательство.

$\sin x \quad x$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$



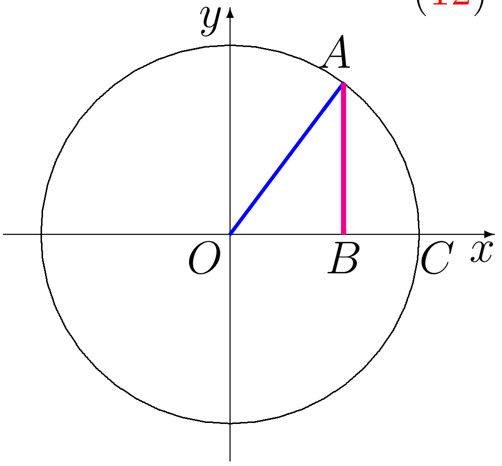
Доказательство.

$\sin x \quad x$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (12)$$



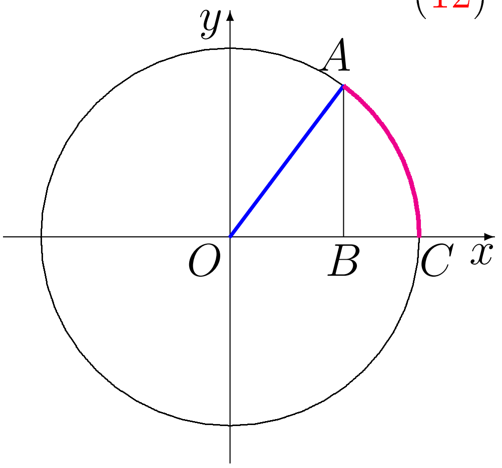
Доказательство.

$\sin x \leqslant x$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$

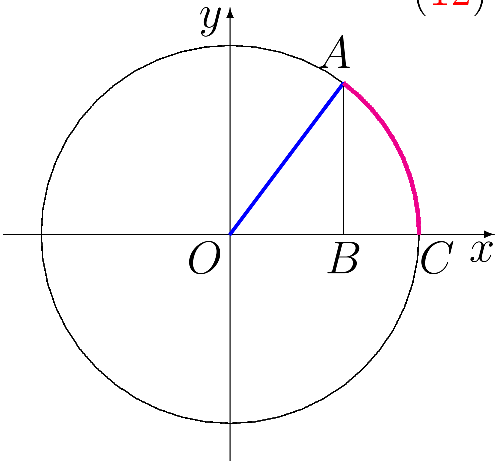


Доказательство.
$\sin x \leqslant x$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.

$\sin x \leqslant x \quad \operatorname{tg} x.$

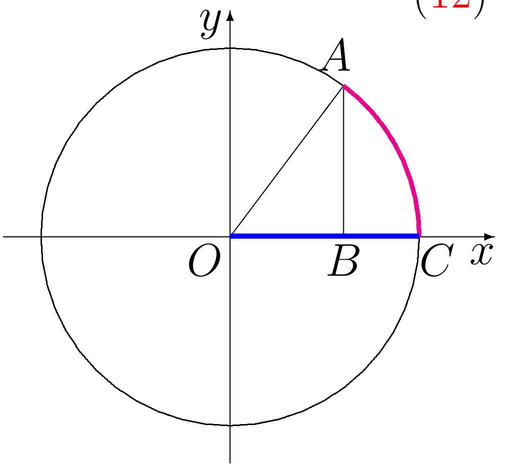
III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$

Доказательство.

$\sin x \leqslant x \quad \operatorname{tg} x.$



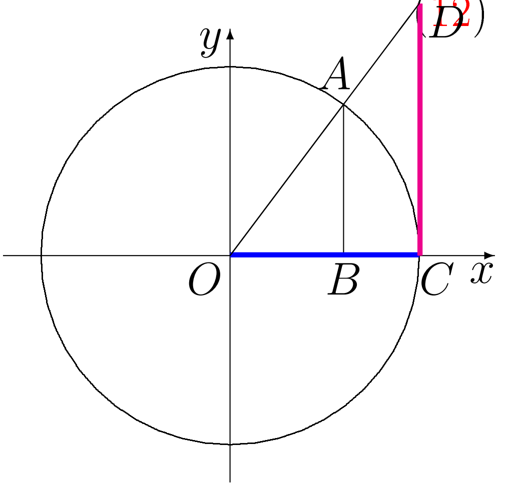
III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$

Доказательство.

$\sin x \leqslant x \quad \operatorname{tg} x.$



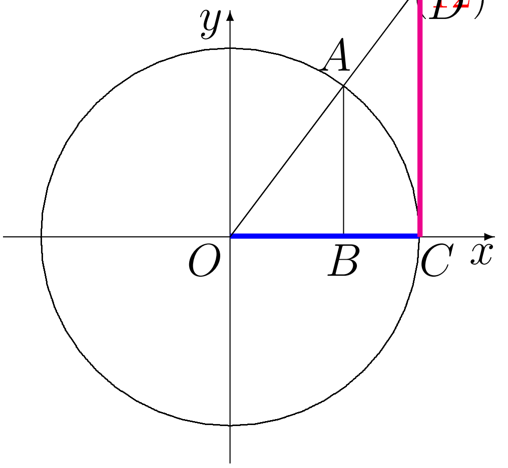
III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \quad (12)$$

Доказательство.

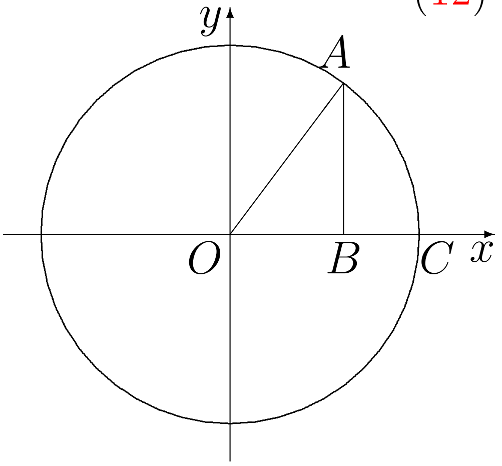
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$



III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12}$$



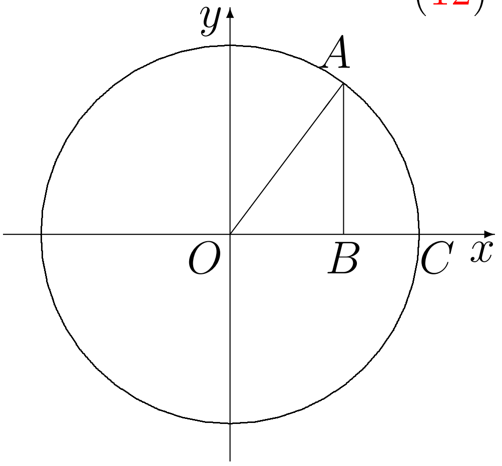
Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (12)$$



Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

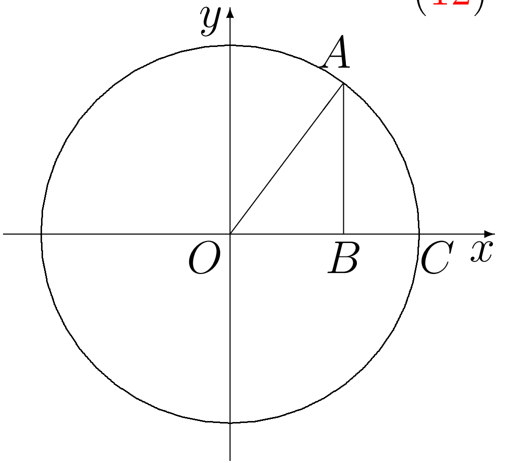
Поэтому

$$\frac{\sin x}{x} \leqslant$$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



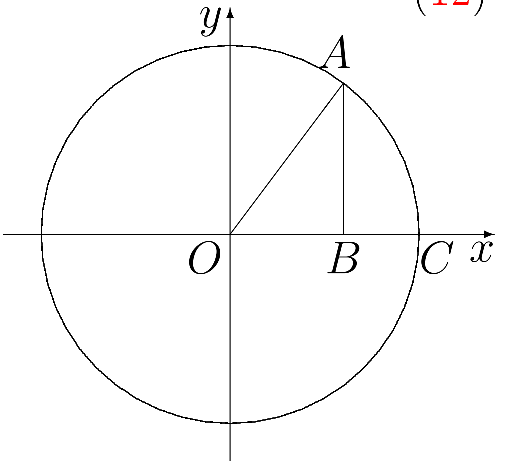
Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$

Поэтому $$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant$$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$



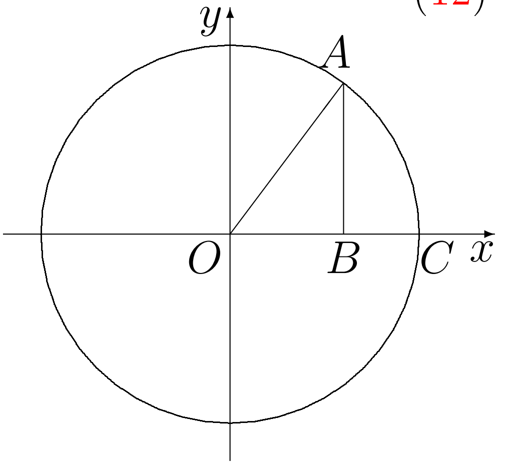
Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{\sin x}{\sin x}$$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.

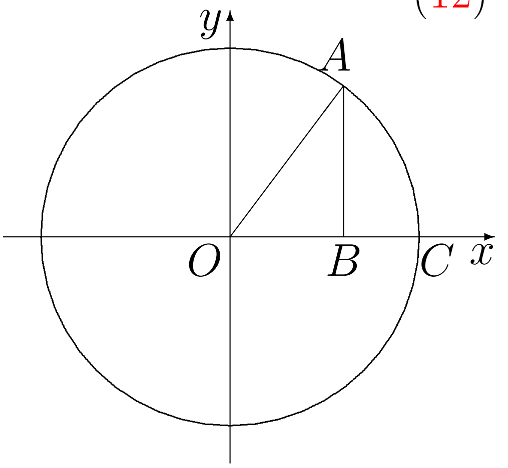
$\sin x\leqslant x\leqslant \operatorname{tg} x.$

Поэтому $\quad =\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant\dfrac{\sin x}{\sin x}$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12}$$



Доказательство.

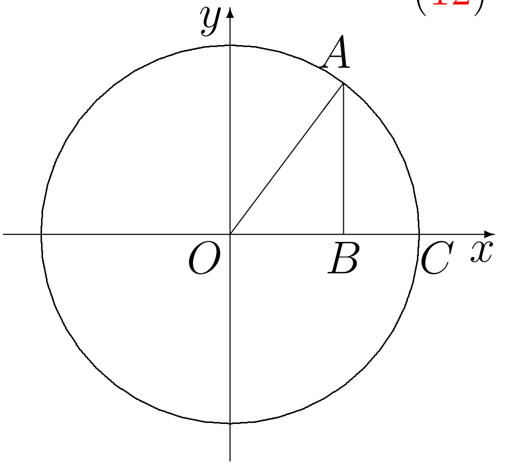
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x}$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



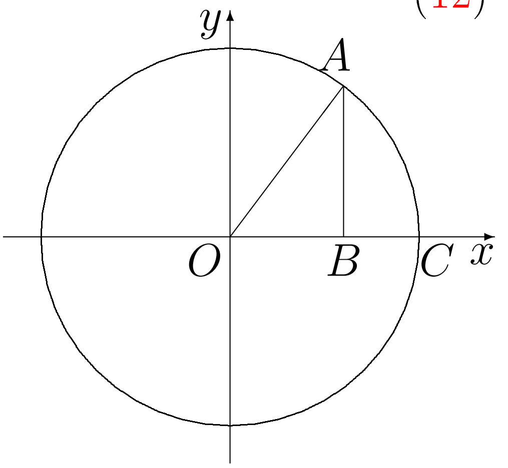
Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} =$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12}$$



Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

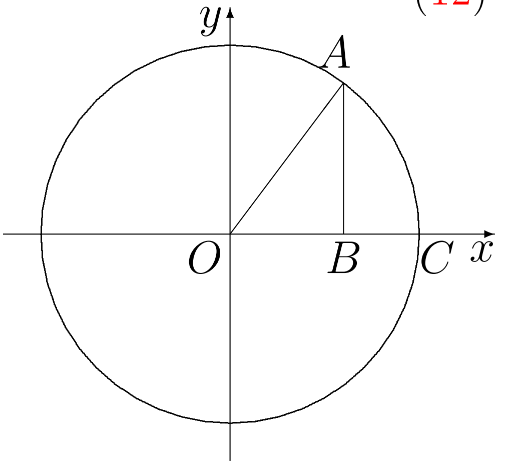
Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$.

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12}$$

Доказательство.



$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x=\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant\dfrac{\sin x}{\sin x}=1.$

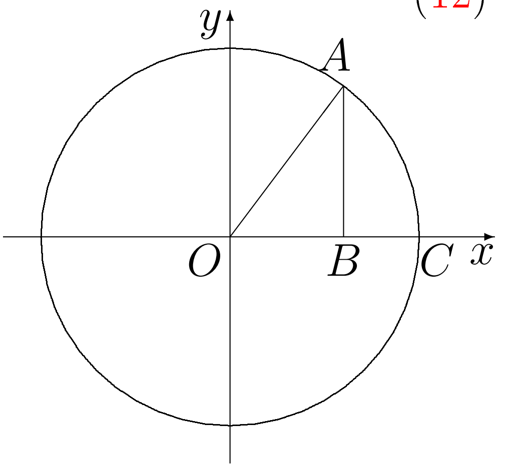
Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.
$\sin x\leqslant x\leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x=\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant\dfrac{\sin x}{\sin x}=1$.

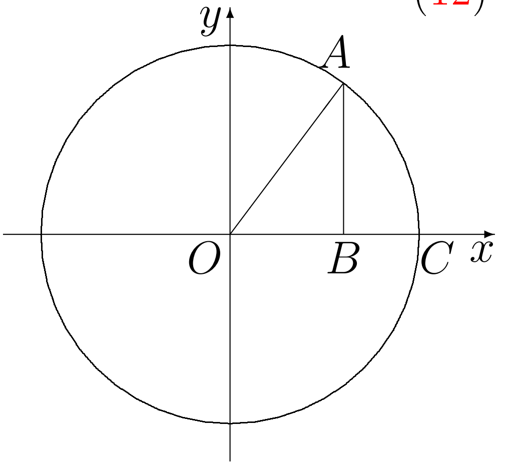
Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$



Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$.

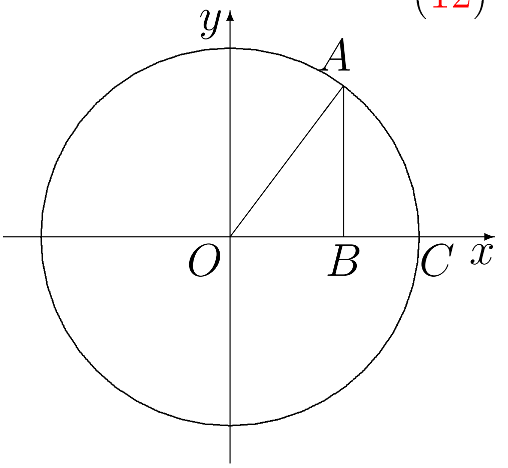
Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 =$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$.

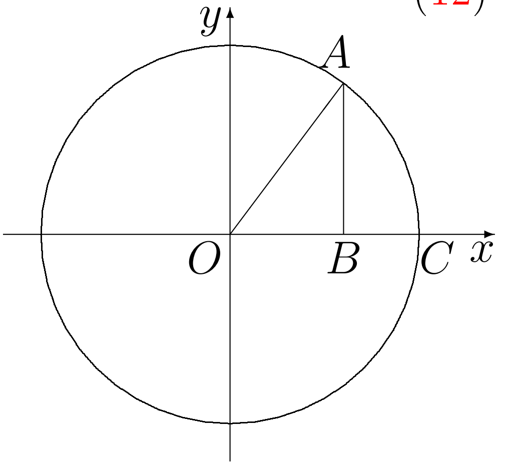
Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1.$

Нетрудно понять, что

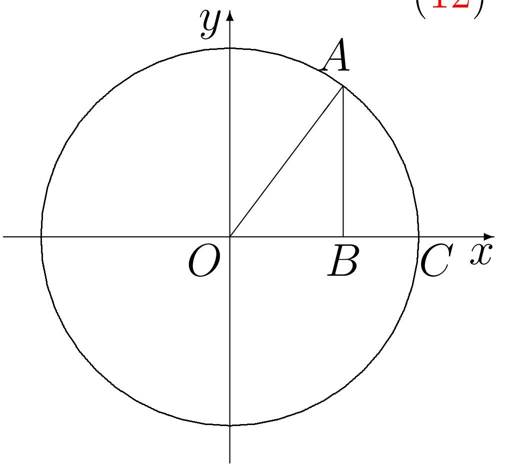
$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

Согласно **лемме о двух милиционерах**

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1.$

Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

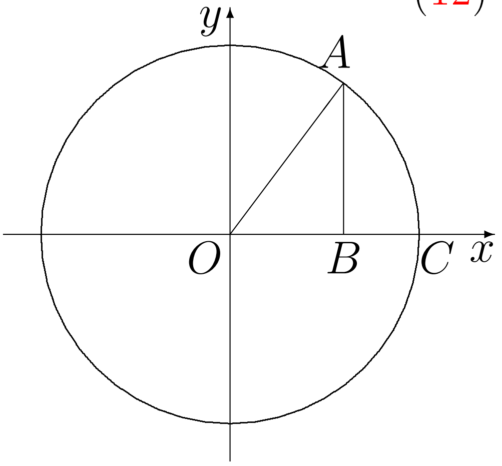
Согласно **лемме о двух милиционерах**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} =$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (12)$$



Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1.$

Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

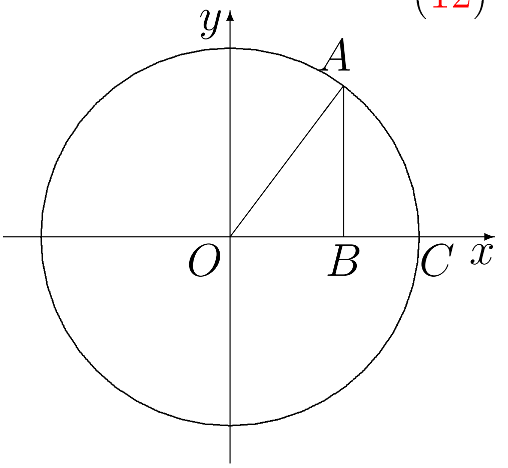
Согласно **лемме о двух милиционерах**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x =$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1.$

Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

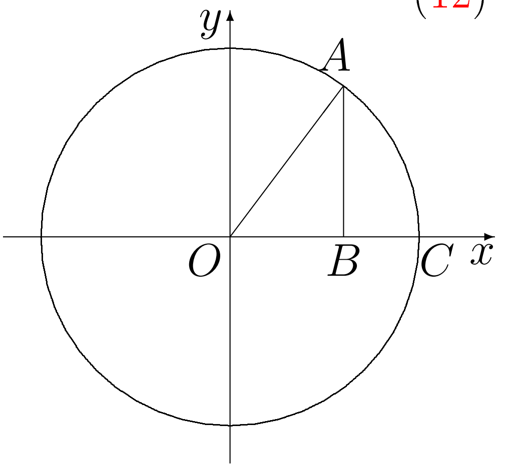
Согласно **лемме о двух милиционерах**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 =$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (12)$$



Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$.

Нетрудно понять, что

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

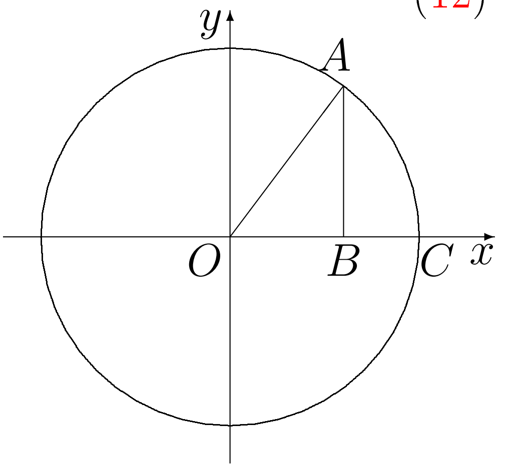
Согласно **лемме о двух милиционерах**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

III.5.7. Первый замечательный предел

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12)$$



Доказательство.
$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поэтому $\cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1.$

Нетрудно понять, что

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Согласно **лемме о двух милиционерах**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Теорема доказана.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Если последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *ограничена, т.е.*

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C, \tag{13}$$

то в ней можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Слишком много слов естественного языка...

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Если* $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$, *то*
$\exists 1 \le n_1 < n_2 < \ldots \qquad \exists A \quad \lim\limits_{m \to \infty} a_{n_m} = A.$

Как-то громоздко... Сформулируем на естественном языке, но более кратко...

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

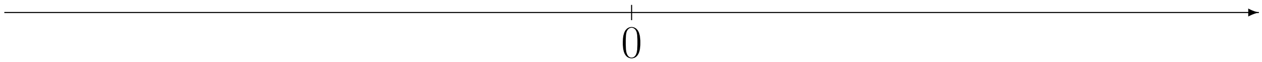
Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



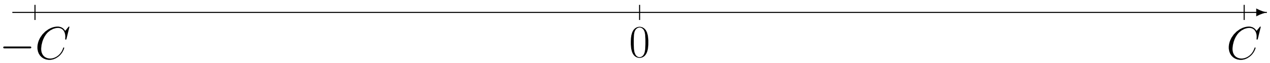
Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



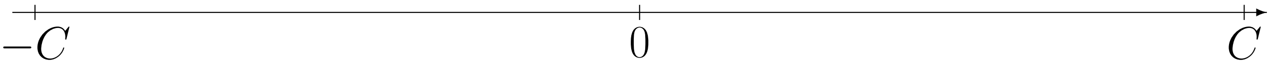
Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

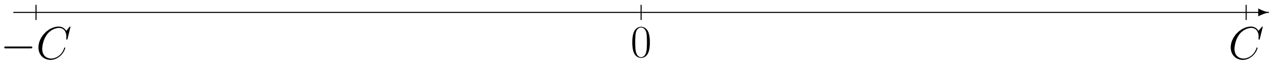
Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

Разделим отрезок $[-C;\ C]$ пополам: $[-C;\ 0]$ и $[0;\ C]$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

Разделим отрезок $[-C;\ C]$ пополам: $[-C;\ 0]$ и $[0;\ C]$.

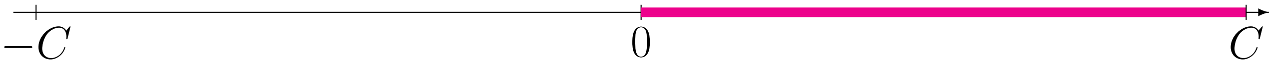
Хотя бы на одном из отрезков $[-C;\ 0]$ или $[0;\ C]$

находится бесконечное число членов последовательности.

Обозначим такой отрезок $[P_1,\ Q_1]$ и выберем на нем элемент a_{n_1}.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

Разделим отрезок $[-C;\ C]$ пополам: $[-C;\ 0]$ и $[0;\ C]$.

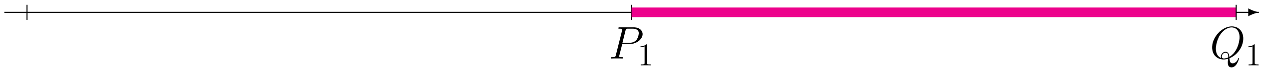
Хотя бы на одном из отрезков $[-C;\ 0]$ или $[0;\ C]$

находится бесконечное число членов последовательности.

Обозначим такой отрезок $[P_1,\ Q_1]$ и выберем на нем элемент a_{n_1}.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

Разделим отрезок $[-C;\ C]$ пополам: $[-C;\ 0]$ и $[0;\ C]$.

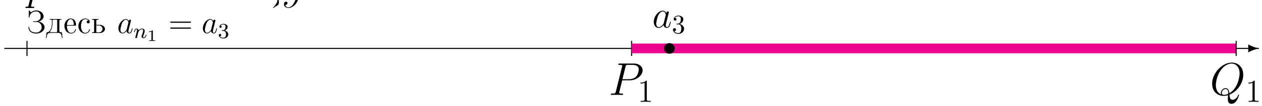
Хотя бы на одном из отрезков $[-C;\ 0]$ или $[0;\ C]$

находится бесконечное число членов последовательности.

Обозначим такой отрезок $[P_1,\ Q_1]$ и выберем на нем элемент a_{n_1}.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Применим метод дихотомии («последовательного деления пополам»).

Имеем $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C$.

Тогда все члены последовательности принадлежат отрезку $[-C;\ C]$.

Разделим отрезок $[-C;\ C]$ пополам: $[-C;\ 0]$ и $[0;\ C]$.

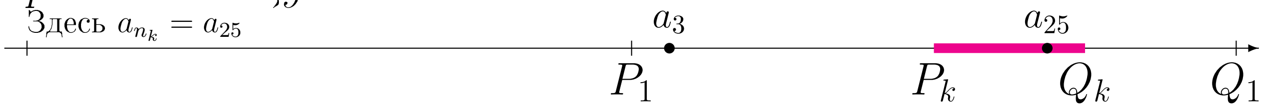
Хотя бы на одном из отрезков $[-C;\ 0]$ или $[0;\ C]$

находится бесконечное число членов последовательности.

Обозначим такой отрезок $[P_1,\ Q_1]$ и выберем на нем элемент a_{n_1}.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

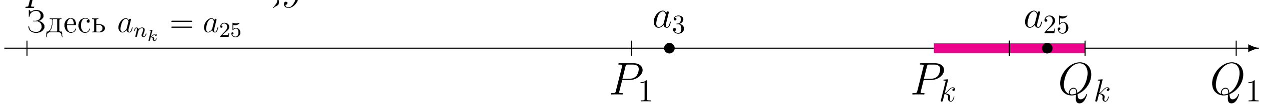
Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Допустим, на шаге k для любого $1 \leqslant m \leqslant k$ уже построены отрезок $[P_k,\ Q_k] \subseteq [P_m,\ Q_m]$ длины $\dfrac{C}{2^m}$, содержащий бесконечное число членов последовательности, и выбраны элементы $a_{n_m} \in [P_m,\ Q_m]$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

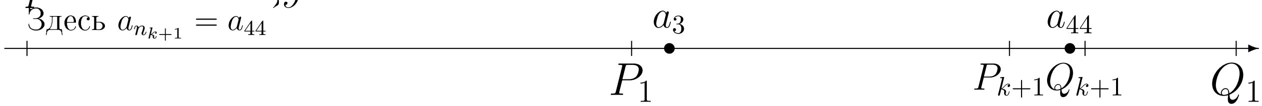


Доказательство. Допустим, на шаге k для любого $1 \leqslant m \leqslant k$ уже построены отрезок $[P_k,\ Q_k] \subseteq [P_m,\ Q_m]$ длины $\dfrac{C}{2^m}$, содержащий бесконечное число членов последовательности, и выбраны элементы $a_{n_m} \in [P_m,\ Q_m]$.

Разделим отрезок $[P_k,\ Q_k]$ длины $\dfrac{C}{2^k}$ пополам.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



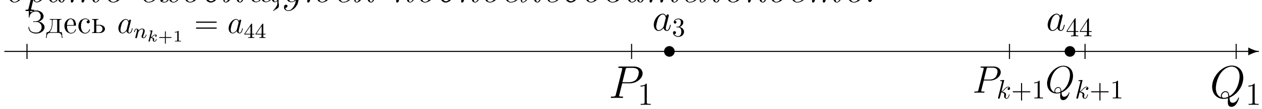
Доказательство. Допустим, на шаге k для любого $1 \leqslant m \leqslant k$ уже построены отрезок $[P_k,\ Q_k] \subseteq [P_m,\ Q_m]$ длины $\dfrac{C}{2^m}$, содержащий бесконечное число членов последовательности, и выбраны элементы $a_{n_m} \in [P_m,\ Q_m]$.

Разделим отрезок $[P_k,\ Q_k]$ длины $\dfrac{C}{2^k}$ пополам.

Хотя бы в одной из полученных половинок содержится бесконечное число членов последовательности, возьмём эту половинку за $[P_{k+1},\ Q_{k+1}]$ и выберем и выберем в ней элемент $a_{n_{k+1}}$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Допустим, на шаге k для любого $1 \leqslant m \leqslant k$ уже построены отрезок $[P_k,\ Q_k] \subseteq [P_m,\ Q_m]$ длины $\dfrac{C}{2^m}$, содержащий бесконечное число членов последовательности, и выбраны элементы $a_{n_m} \in [P_m,\ Q_m]$.

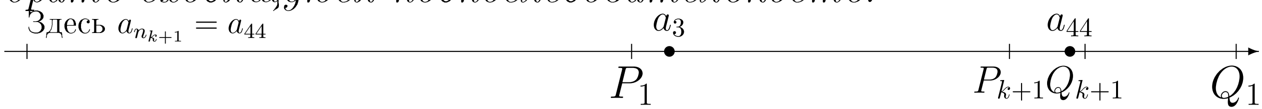
Разделим отрезок $[P_k,\ Q_k]$ длины $\dfrac{C}{2^k}$ пополам.

Хотя бы в одной из полученных половинок содержится бесконечное число членов последовательности, возьмём эту половинку за $[P_{k+1},\ Q_{k+1}]$ и выберем и выберем в ней элемент $a_{n_{k+1}}$.

При этом $Q_{k+1} - P_{k+1} =$

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Допустим, на шаге k для любого $1 \leqslant m \leqslant k$ уже построены отрезок $[P_k,\ Q_k] \subseteq [P_m,\ Q_m]$ длины $\dfrac{C}{2^m}$, содержащий бесконечное число членов последовательности, и выбраны элементы $a_{n_m} \in [P_m,\ Q_m]$.

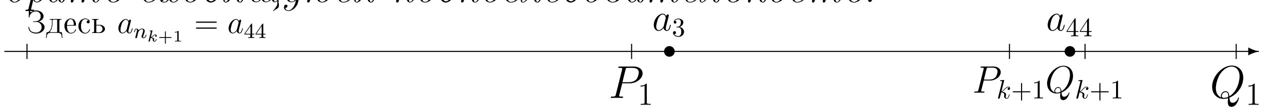
Разделим отрезок $[P_k,\ Q_k]$ длины $\dfrac{C}{2^k}$ пополам.

Хотя бы в одной из полученных половинок содержится бесконечное число членов последовательности, возьмём эту половинку за $[P_{k+1},\ Q_{k+1}]$ и выберем и выберем в ней элемент $a_{n_{k+1}}$.

При этом $Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C/2^k}{2} =$

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Допустим, на шаге k для любого $1 \leqslant m \leqslant k$ уже построены отрезок $[P_k,\ Q_k] \subseteq [P_m,\ Q_m]$ длины $\dfrac{C}{2^m}$, содержащий бесконечное число членов последовательности, и выбраны элементы $a_{n_m} \in [P_m,\ Q_m]$.

Разделим отрезок $[P_k,\ Q_k]$ длины $\dfrac{C}{2^k}$ пополам.

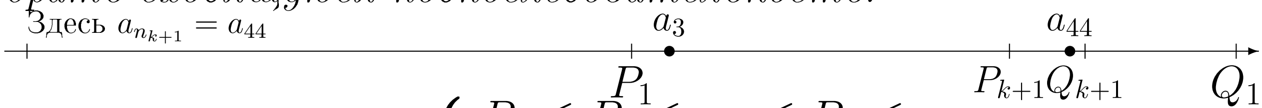
Хотя бы в одной из полученных половинок содержится бесконечное число членов последовательности, возьмём эту половинку за $[P_{k+1},\ Q_{k+1}]$ и выберем и выберем в ней элемент $a_{n_{k+1}}$.

При этом $Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C/2^k}{2} = \dfrac{C}{2^{k+1}}$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

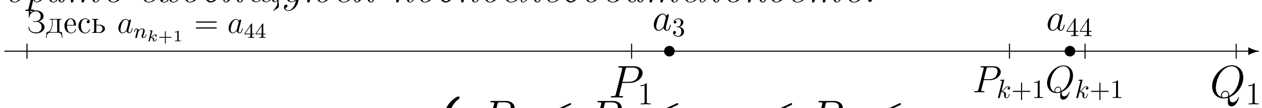
Здесь $a_{n_{k+1}} = a_{44}$



Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$ $Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}},$

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

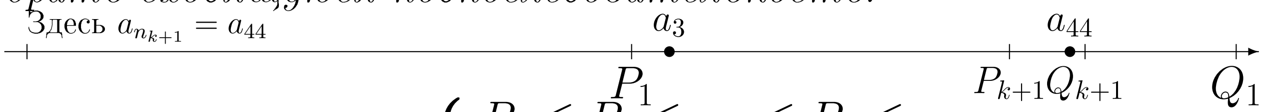


Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$ $\quad Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}},$

Последовательность $\{P_k\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, значит, она имеет предел: $\lim\limits_{k \to \infty} P_k = A$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



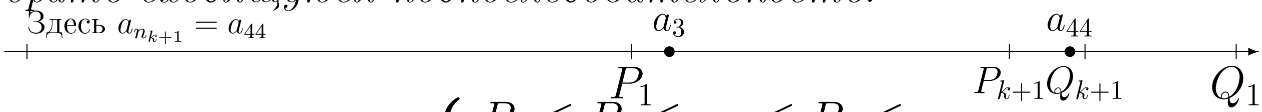
Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$ $Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}}$,

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = A$,

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Здесь $a_{n_{k+1}} = a_{44}$



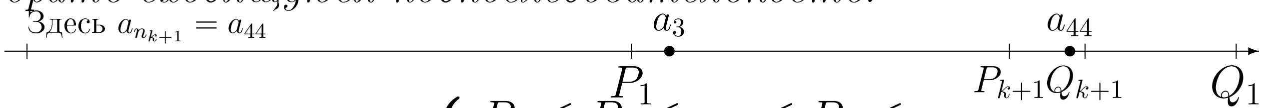
Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$ $\quad Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}},$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = A,$

Последовательность $\{Q_k\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, **значит**, она имеет предел: $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = B.$

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

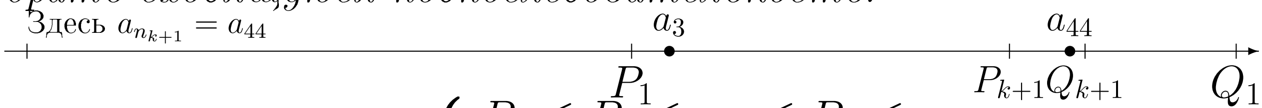


Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$ $Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}},$

$$\lim_{k\to\infty} P_k = A, \quad \lim_{k\to\infty} Q_k = B.$$

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



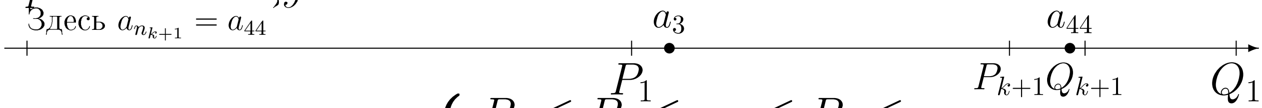
Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \qquad Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}}, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = A, \quad \lim\limits_{k\to\infty} Q_k = B.$

Имеем $0 \leqslant (B - A) \leqslant (Q_k - P_k)$, значит, по **свойству наследования неравенства** $0 \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}(B - A) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}(Q_k - P_k) = 0$, откуда $A = B$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



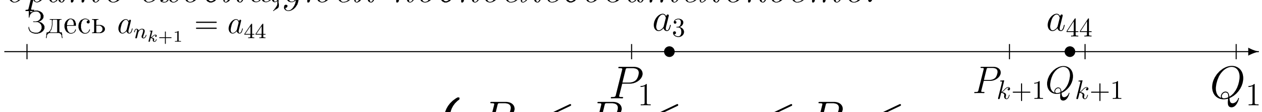
Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \qquad Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}}, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = A = \lim\limits_{k\to\infty} Q_k.$

Имеем $0 \leqslant (B - A) \leqslant (Q_k - P_k)$, значит, по **свойству наследования неравенства** $0 \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}(B - A) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}(Q_k - P_k) = 0$, откуда $A = B$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. $\begin{cases} P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_k \leqslant \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \\ Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots \geqslant Q_k \geqslant \ldots \end{cases}$ $Q_{k+1} - P_{k+1} = \dfrac{C}{2^{k+1}}$,

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = A = \lim\limits_{k\to\infty} Q_k$.

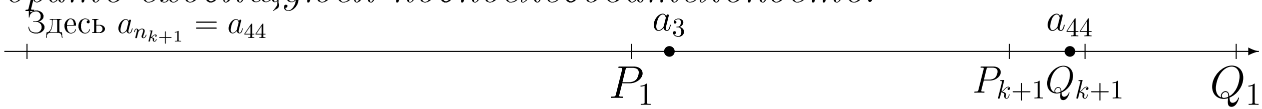
Имеем $P_k \leqslant a_{n_k} \leqslant Q_k$, и $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = A = \lim\limits_{k\to\infty} Q_k$ значит,

по **лемме о двух милиционерах** $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Имеем $0 \leqslant (B - A) \leqslant (Q_k - P_k)$, значит, по **свойству наследования неравенства** $0 \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}(B - A) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}(Q_k - P_k) = 0$, откуда $A = B$.

III.5.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. *Из ограниченной последовательности всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*



Доказательство. Значит, $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ является искомой подпоследовательностью.

Лемма доказана.

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Замечание. Последовательность, удовлетворяющая свойству (14), называется **сходящейся**.

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Замечание. Последовательность, удовлетворяющая свойству (14), называется **сходящейся**.

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$\forall\varepsilon' > 0$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \left(m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N}$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ \left(m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon'\right).$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' =$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

$|a_m - a_n| =$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leqslant$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \left(m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon'\right).$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| <$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N' \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon').$$

В последней формуле положим $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для $n > N$ и $m > N$ имеем

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть (14) выполняется.

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

Сначала надо понять, чему равен предел A.

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

Сначала надо понять, чему равен предел A.

Естественно применить теорему **Больцано-Вейерштрасса.**

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

Последовательность ограниченная, поскольку

$\forall m > N \quad a_n - \varepsilon < a_m < a_n + \varepsilon.$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

Последовательность ограниченная, поскольку

$\forall m > N \quad a_n - \varepsilon < a_m < a_n + \varepsilon.$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** существует сходящаяся подпоследовательность, обозначим ее предел через A.

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \left(m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N}$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \ \Rightarrow$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall \varepsilon' > 0$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N}$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \left(m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left(k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon''\right).$

Надо доказать, что

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \ \Rightarrow$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \ \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$$

Надо доказать, что

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \ \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$,

$N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ \left(m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left(k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon''\right).$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(p > N' \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon'\right).$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \Rightarrow \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right. \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} |a_n - A| = \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \left(m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left(k > N'' \ \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon''\right).$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(p > N' \ \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon'\right).$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_n - A| = \\ \\ \end{array} \right.$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon) \,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \ \Rightarrow \big|a_{n_k} - A\big| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \ \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$,

$N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_n - A| = \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \ \Rightarrow \big|a_{n_k} - A\big| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \ \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$,

$N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \ \begin{cases} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1} - A| < \varepsilon'' = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_n - A| = \\ \\ \end{cases}$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n,m\in\mathbb{N}\ \left(m>n>N \ \Rightarrow\ |a_m-a_n|<\varepsilon\right). \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon''>0 \quad \exists N''\in\mathbb{N} \quad \forall k\in\mathbb{N} \quad \left(k>N'' \ \Rightarrow \left|a_{n_k}-A\right|<\varepsilon''\right).$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon'>0 \quad \exists N'\in\mathbb{N} \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \left(p>N' \ \Rightarrow |a_p-A|<\varepsilon'\right).$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon''=\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N'=\max\{n_{N''+1},N\}$. Тогда

$$n>N' \ \Rightarrow \ \begin{cases} |a_n-a_{N''+1}|<\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1}-A|<\varepsilon''=\dfrac{\varepsilon'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_n-A|= \\ \\ \end{cases}$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ \left(m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left(k > N'' \ \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon''\right).$

Надо доказать, что

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(p > N' \ \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon'\right).$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1} - A| < \varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon'}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |a_n - A| = |a_n - a_{N''+1} + a_{N''+1} - A| \leqslant \\ \\ \end{array}\right.$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \left(m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left(k > N'' \ \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon''\right).$

Надо доказать, что

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(p > N' \ \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon'\right).$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \ \begin{cases} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1} - A| < \varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon'}{2} \end{cases} \ \Rightarrow \begin{cases} |a_n - A| = |a_n - a_{N''+1} + a_{N''+1} - A| \leqslant \\ \leqslant |a_n - a_{N''+1}| + |a_{N''+1} - A| < \end{cases}$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \ \begin{cases} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1} - A| < \varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_n - A| = |a_n - a_{N''+1} + a_{N''+1} - A| \leqslant \\ \leqslant |a_n - a_{N''+1}| + |a_{N''+1} - A| < \\ < \dfrac{\varepsilon'}{2} + \dfrac{\varepsilon'}{2} = \end{cases}$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m > n > N \ \Rightarrow \ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \Rightarrow \begin{cases} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1} - A| < \varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_n - A| = |a_n - a_{N''+1} + a_{N''+1} - A| \leqslant \\ \leqslant |a_n - a_{N''+1}| + |a_{N''+1} - A| < \\ < \dfrac{\varepsilon'}{2} + \dfrac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'. \end{cases}$$

III.5.9. Критерий Коши сходимости последоват-ти

Теорема 3. *Равносильны утверждения* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n > N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть выполняется (14).

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$

$\forall\varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k > N'' \Rightarrow \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon'').$

Надо доказать, что

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p > N' \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon').$

Положим в последней формуле и в (14) $\varepsilon'' = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, $N' = \max\{n_{N''+1}, N\}$. Тогда

$$n > N' \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_n - a_{N''+1}| < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}, \\ |a_{N''+1} - A| < \varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon'}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_n - A| = |a_n - a_{N''+1} + a_{N''+1} - A| \leqslant \\ \leqslant |a_n - a_{N''+1}| + |a_{N''+1} - A| < \\ < \dfrac{\varepsilon'}{2} + \dfrac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'. \end{array} \right.$$

Теорема доказана.

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7. *Если функция f в окрестности точки a является* ***бесконечно малой*** *и не обращается в этой окрестности в 0 (кроме, быть может, точки a, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ в этой окрестности является* ***бесконечно большой****.*

Слишком много слов естественного языка...

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\\ \exists\sigma>0\quad 0<|x-a|<\sigma\ \Rightarrow\ f(x)\neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty. \quad (15)$$

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x - a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x - a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x - a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство.

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x - a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$\forall \varepsilon > 0$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists\sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists\sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists\sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| >$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon'}$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon'} \geqslant \varepsilon.$$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon'} \geqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \quad , \quad \delta =$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists\sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon'} \geqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \dfrac{1}{\varepsilon}, \quad \delta =$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon'} \geqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \dfrac{1}{\varepsilon}, \quad \delta = \delta'.$

III.5.10. Свойство предела функции, обратной к бесконечно малой

Утверждение III.7.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\\ \exists\sigma>0 \quad 0<|x-a|<\sigma \;\Rightarrow\; f(x)\neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall\varepsilon'>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta'\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon'.$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\varepsilon.$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon'}\geqslant\varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon'=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\quad\delta=\delta'$. Свойство доказано.

III.5.11. Свойство предела функции, обратной к бесконечно большой

Утверждение III.7.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\\ \exists\sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Утверждение III.8. *Если функция f в окрестности точки a является* ***бесконечно большой****, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ в этой окрестности является* ***бесконечно малой****.*

Слишком много слов естественного языка...

III.5.11. Свойство предела функции, обратной к бесконечно большой

Утверждение III.7.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \\ \exists \sigma > 0 \quad 0 < |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \quad (15)$$

Утверждение III.8.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0. \quad (16)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству свойства III.7.

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. *Если в окрестности точки a функция f является* ***бесконечно малой****, а функция g —* ***ограниченной****, то в данной окрестности функция $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ является бесконечно малой.*

Слишком много слов естественного языка...

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \qquad (17)$$

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \, \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Хочется:

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \,\exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство.

$\Bigg\{$

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство.

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство.

$\Bigg\{$

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство.

$$\Bigg\{$$

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство.

$\Bigg\{$

Хочется:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9.
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \; \Rightarrow \; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9.
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \\ \end{cases}$$
Хочется:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \lim_{n\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \\ \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon. \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists\sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x) \cdot g(x)| =$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| <$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon' \cdot M$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon'\cdot M \leqslant \varepsilon.$$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0 \; \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon' \cdot M \leqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \qquad , \quad \delta =$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon'\cdot M \leqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}, \quad \delta =$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\; \exists\sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0\; \exists\sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon'\cdot M \leqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}$, $\quad \delta = \min\{\sigma,$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow \ |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon'\cdot M \leqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}, \quad \delta = \min\left\{\sigma,\ \delta'\right\}.$

III.5.12. Свойства предела произведения бесконечно малой на ограниченную

Утверждение III.9. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to a} f(x) = 0, \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'. \\ \exists M > 0\ \exists \sigma > 0 \quad |x-a| < \sigma \ \Rightarrow\ |g(x)| < M. \end{cases}$$

Хочется:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon.$$

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \varepsilon'\cdot M \leqslant \varepsilon.$$

Итак, достаточно взять $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}, \quad \delta = \min\{\sigma, \delta'\}$.

Свойство доказано.

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. По определению предела для произвольного положительного ε найдется **окрестность** U точки a такая, что

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. По определению предела для произвольного положительного ε найдется **окрестность** U точки a такая, что
$x \in U \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, откуда

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. По определению предела для произвольного положительного ε найдется **окрестность** U точки a такая, что

$x \in U \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, откуда $\qquad < f(x) <$

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. По определению предела для произвольного положительного ε найдется **окрестность** U точки a такая, что

$x \in U \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, откуда $A - \varepsilon < f(x) <$

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. По определению предела для произвольного положительного ε найдется **окрестность** U точки a такая, что
$x \in U \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, откуда $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

III.5.13. Свойство ограниченности функции, имеющей конечный предел

Утверждение III.10. *Пусть a — это число, ∞, $-\infty$ или $+\infty$. Если функция в* ***окрестности*** *a имеет* ***конечный предел****, то f является* ***ограниченной*** *в этой окрестности. В частности, если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. По определению предела для произвольного положительного ε найдется **окрестность** U точки a такая, что
$x \in U \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, откуда $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Свойство доказано.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *неубывающая и ограничена сверху, то она сходится.*

Слишком много слов естественного языка...

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \;\Rightarrow\; a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

В данном случае математическая формализация оказалась более длинной и менее «прозрачной», понятной.

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n \to \infty} a_n = A. \qquad (18)$$

В данном случае математическая формализация оказалась более длинной и менее «прозрачной», понятной.

Но зато она упрощает поиск доказательства.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \tag{18}$$

Доказательство.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \ \Rightarrow \ a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \;\Rightarrow\; a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \ \Rightarrow \ a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall\varepsilon > 0$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \ \Rightarrow \ a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \tag{18}$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N.$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N.$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N.$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \qquad\qquad a_N \leqslant a_n$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

откуда

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

откуда $\quad < a_n - M$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

откуда $-\varepsilon < a_n - M$

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

откуда $-\varepsilon < a_n - M < 0$,

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

откуда $-\varepsilon < a_n - M < 0$, следовательно, $|a_n - M| < \varepsilon$.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Доказательство. M называется **верхней гранью** множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Среди всех *верхних граней* M множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выберем наименьшую.

Минимальность M означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M - \varepsilon < a_N$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < M$,

откуда $-\varepsilon < a_n - M < 0$, следовательно, $|a_n - M| < \varepsilon$.

Свойство доказано.

III.5.14. О пределе монотонной ограниченной последовательности

Утверждение III.11.

$$\begin{cases} \forall n, m \quad n < m \ \Rightarrow \ a_n \leqslant a_m, \\ \exists M > 0 \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant M \end{cases} \Rightarrow \quad \exists A \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A. \qquad (18)$$

Аналогично доказывается, что если последовательность $\{a_n\}$ невозрастающая и ограничена снизу (т.е. существует такое число m, что для всех номеров n выполняется неравенство $x_n \geq m$), то она сходится.

III.5.15. Свойство суммы бесконечно большой функции и ограниченной функции

Утверждение III.12. *Если функция f является* ***бесконечно большой*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), а функция g —* ***ограниченная*** *в* ***окрестности*** *точки a последовательностей является бесконечно большой последовательностью.*

III.5.15. Свойство суммы бесконечно большой функции и ограниченной функции

Утверждение III.12. *Если функция f является* ***бесконечно большой*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), а функция g —* ***ограниченная*** *в* ***окрестности*** *точки a последовательностей является бесконечно большой последовательностью.*

Это свойство нетрудно переформулировать для последовательности.

III.5.15. Свойство суммы бесконечно большой функции и ограниченной функции

Утверждение III.12. *Если функция f является* ***бесконечно большой*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), а функция g —* ***ограниченная*** *в* ***окрестности*** *точки a последовательностей является бесконечно большой последовательностью.*

Утверждение III.13. *Сумма* ***бесконечно большой*** *и ограниченной (в частности, сходящейся) последовательностей является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

III.5.15. Свойство суммы бесконечно большой функции и ограниченной функции

Утверждение III.12. *Если функция f является* ***бесконечно большой*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), а функция g —* ***ограниченная*** *в* ***окрестности*** *точки a последовательностей является бесконечно большой последовательностью.*

Утверждение III.13. *Сумма* ***бесконечно большой*** *и ограниченной (в частности, сходящейся) последовательностей является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство. Это очевидные следствия из определений.

III.5.16. Свойство суммы бесконечно больших функций

Утверждение III.14. *Сумма двух функций f и g, **бесконечно больших** в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), причем в некоторой **окрестности** точки a эти функции имеют **одинаковый знак**, то их сумма является функцией, бесконечно большой в некоторой окрестности точки a и имеет в этой окрестности тот же знак, что и f, и g.*

III.5.16. Свойство суммы бесконечно больших функций

Утверждение III.14. *Сумма двух функций f и g,* ***бесконечно больших*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), причем в некоторой* ***окрестности*** *точки a эти функции имеют* ***одинаковый знак****, то их сумма является функцией, бесконечно большой в некоторой окрестности точки a и имеет в этой окрестности тот же знак, что и f, и g.*

Аналогичное свойство нетрудно переформулировать для последовательностей.

III.5.16. Свойство суммы бесконечно больших функций

Утверждение III.14. *Сумма двух функций f и g,* ***бесконечно больших*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), причем в некоторой* ***окрестности*** *точки a эти функции имеют* ***одинаковый знак****, то их сумма является функцией, бесконечно большой в некоторой окрестности точки a и имеет в этой окрестности тот же знак, что и f, и g.*

Утверждение III.15. *Сумма двух* ***бесконечно больших последовательностей одинакового знака*** *является бесконечно большой последовательностью того же знака.*

Доказательство.

III.5.16. Свойство суммы бесконечно больших функций

Утверждение III.14. *Сумма двух функций f и g,* ***бесконечно больших*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью), причем в некоторой* ***окрестности*** *точки a эти функции имеют* ***одинаковый знак****, то их сумма является функцией, бесконечно большой в некоторой окрестности точки a и имеет в этой окрестности тот же знак, что и f, и g.*

Утверждение III.15. *Сумма двух* ***бесконечно больших последовательностей одинакового знака*** *является бесконечно большой последовательностью того же знака.*

Доказательство. Очевидное следствие из определений.

Напомним, что в математике слово «очевидно» является синонимом фразы «легко могу доказать».

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Сначала мы привели формулировку для последовательностей.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Утверждение III.17. *Произведение функции f **бесконечно большой** в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью) и такой функции g, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, является функцией, **бесконечно большой** в окрестности точки a.*

Перейдем к следующему свойству или к доказательству?

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Утверждение III.17. *Произведение функции f* ***бесконечно большой*** *в окрестности точки a (где a может быть не только числом, но и бесконечностью) и такой функции g, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, является функцией,* ***бесконечно большой*** *в окрестности точки a.*

Докажем это свойство только для последовательностей.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство. Перепишем условие с «бла-бла-наречия» на математический язык.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N & \\ & \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \\ \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \end{cases} \qquad\qquad \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon, \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| =$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| >$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \quad ? \leqslant$$

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \quad ? \leqslant$$

Нам надо, чтобы, начиная с номера N'', все $|b_n|$ были больше некоторого положительного числа.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \quad ? \leqslant$$

Положим $\varepsilon'' = \dfrac{|A|}{2}$.

Нам надо, чтобы, начиная с номера N'', все $|b_n|$ были больше некоторого положительного числа.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение **бесконечно большой последовательности** и последовательности, **сходящейся к ненулевому числу,** является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \frac{\varepsilon''}{2} \leqslant$$

Положим $\varepsilon'' = \dfrac{|A|}{2}$.

Нам надо, чтобы, начиная с номера N'', все $|b_n|$ были больше некоторого положительного числа.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \frac{\varepsilon''}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon'' = \dfrac{|A|}{2}$.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \frac{\varepsilon''}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon'' = \dfrac{|A|}{2}$.

Значит, достаточно положить $\varepsilon' = \dfrac{2\varepsilon}{|A|}, \quad N = \max\{N', N''\}$.

III.5.17. Свойство произведения бесконечно большой функций на функцию, имеющую ненулевой предел

Утверждение III.16. *Произведение* ***бесконечно большой последовательности*** *и последовательности,* ***сходящейся к ненулевому числу,*** *является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' \quad \forall n > N' \quad |a_n| > \varepsilon', \\ \exists A \neq 0 \quad \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' \quad \forall n > N'' \quad |b_n - A| < \varepsilon'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n \cdot b_n| > \varepsilon.$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| > \varepsilon' \cdot \frac{\varepsilon''}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon'' = \dfrac{|A|}{2}$. Свойство доказано.

Значит, достаточно положить $\varepsilon' = \dfrac{2\varepsilon}{|A|}, \quad N = \max\{N', N''\}$.

III.5.18. Свойство произведения двух бесконечно больших функций

Утверждение III.18. *Произведение двух функций, **бесконечно больших** в окрестности точки a, является функцией, **бесконечно большой** в окрестности точки a.*

Слишком много слов естественного языка...

III.5.18. Свойство произведения двух бесконечно больших функций

Утверждение III.18.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty. \tag{19}$$

Доказательство.

III.5.18. Свойство произведения двух бесконечно больших функций

Утверждение III.18.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty. \tag{19}$$

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определений. Докажите самостоятельно.

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
или о левом пределе функции в точке a:
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:
$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a + 0)$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
или о левом пределе функции в точке a:
$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a - 0)$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
или о левом пределе функции в точке a:
$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad -\delta < x - a < 0$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad -\delta < x - a < 0$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad -\delta < x - a < 0 \Rightarrow$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

III.6. Односторонние пределы

Иногда в задачах, требующих применения теории пределов, в **определении предела**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

рассматриваются только $x > a$ или $x < a$, т.е. вместо **окрестности** точки a рассматриваются **левая** или **правая полуокрестности**.

В этих случаях говорят о правом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

или о левом пределе функции в точке a:

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Аналогично определяются бесконечные правосторонний и левосторонний пределы.

III.6. Односторонние пределы

Понятно, что в концевых точках промежутка X предел функции с такой областью определения автоматически становится односторонним (правым или левым – в зависимости от того, правым или левым концом промежутка является эта точка).

III.6. Односторонние пределы

Понятно, что в концевых точках промежутка X предел функции с такой областью определения автоматически становится односторонним (правым или левым – в зависимости от того, правым или левым концом промежутка является эта точка).

Поэтому о существовании обоих односторонних пределов имеет смысл говорить для внутренних точек промежутка.

III.7. Теорема о связи между пределом и односторонними пределами

Теорема 4. *Для существования* ***предела функции в точке*** *необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой* ***односторонние пределы функции*** *в этой точке.*

Доказательство.

III.7. Теорема о связи между пределом и односторонними пределами

Теорема 4. *Для существования **предела функции в точке** необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой **односторонние пределы функции** в этой точке.*

Доказательство. Очевидное следствие из определений и свойств модуля числа.

III.8. Непрерывность функции

Наиболее интересными для изучения являются случаи, в каком-либо смысле «экстремальными», см. **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций.**

III.8. Непрерывность функции

Наиболее интересными для изучения являются случаи, в каком-либо смысле «экстремальными», см. **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций.**

С этой точки зрения естественно рассмотреть случай

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ldots$$

III.8. Непрерывность функции

Наиболее интересными для изучения являются случаи, в каком-либо смысле «экстремальными», см. **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций.**

С этой точки зрения естественно рассмотреть случай

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

III.8.1. Непрерывность функции в точке

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

III.8.2. Непрерывность линейной комбинации

Определение 12. *Функция* f *называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 5. *Если функции* f *и* g *непрерывны в точке* a, *то для любых чисел* α, β *функция* $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство.

III.8.2. Непрерывность линейной комбинации

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Теорема 5. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то для любых чисел α, β функция $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Это непосредственное следствие из **свойств предела.**

III.8.3. Непрерывность произведения функций

Определение 12. *Функция* f *называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Теорема 6. *Если функции* f *и* g *непрерывны в точке* a, *то функция* $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство.

III.8.3. Непрерывность произведения функций

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Теорема 6. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то функция* $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ *непрерывна в точке a.*

Доказательство. Это непосредственное следствие из **свойств предела.**

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция* f *называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Теорема 7. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $f(a)$, *то* ***суперпозиция*** *этих функций* $h(x) = g(f(x))$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство.

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция* f *называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $f(a)$, *то* ***суперпозиция*** *этих функций* $h(x) = g(f(x))$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \qquad\qquad \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция* f *называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $f(a)$, *то* ***суперпозиция*** *этих функций* $h(x) = g(f(x))$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a), \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a), \\ \lim\limits_{y \to f(a)} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a), \\ \lim\limits_{y \to f(a)} g(y) = \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a), \\ \lim\limits_{y\to f(a)} g(y) = g(f(a)), \end{cases} \Rightarrow$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a), \\ \lim\limits_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a)), \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a}$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a), \\ \lim\limits_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a)), \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) =$$

III.8.4. Непрерывность суперпозиции

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, то* ***суперпозиция*** *этих функций $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Утверждение нетрудно доказать, переформулировав его на математическом языке:

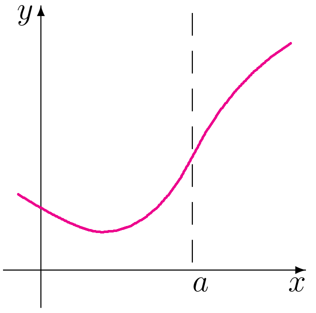
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a), \\ \lim\limits_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a)), \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)).$$

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**

III.9. Классификация точек разрыва функции

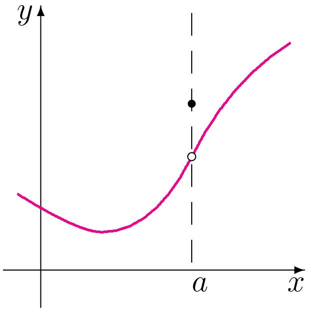
В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**



На рис. изображен график функции, непрерывной в точке a.

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**

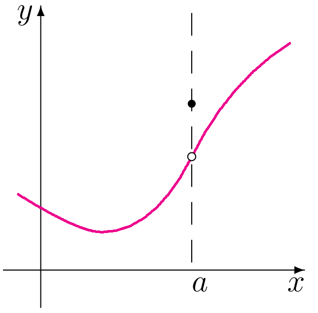


Теперь в точке a наблюдается разрыв.

III.9. Классификация точек разрыва функции

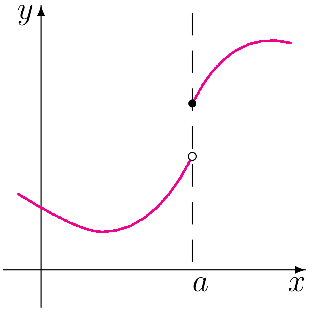
В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**



III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**

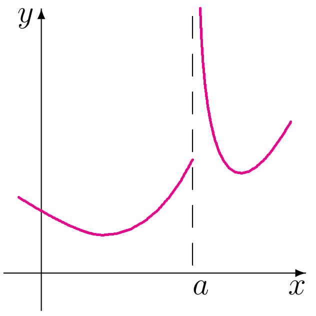


Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, причем $A \neq B$, то a называется **точкой разрыва первого рода.**

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**



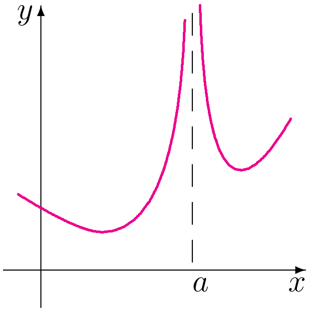
Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**

Если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, причем $A \neq B$, то a называется **точкой разрыва первого рода.**

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ не является числом или не существует, то a называется **точкой разрыва второго рода.**

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**



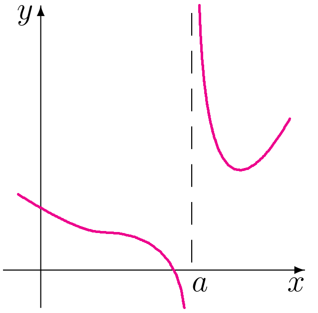
Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, причем $A \neq B$, то a называется **точкой разрыва первого рода.**

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не является числом или не существует, то a называется **точкой разрыва второго рода.**

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**



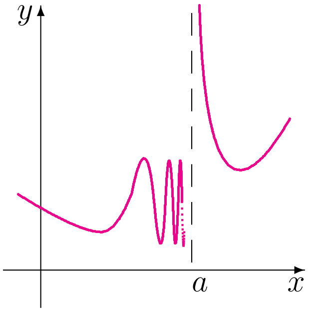
Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, причем $A \neq B$, то a называется **точкой разрыва первого рода.**

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не является числом или не существует, то a называется **точкой разрыва второго рода.**

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**



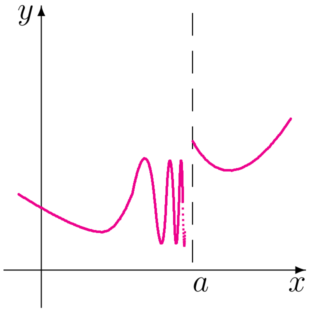
Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, причем $A \neq B$, то a называется **точкой разрыва первого рода.**

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не является числом или не существует, то a называется **точкой разрыва второго рода.**

III.9. Классификация точек разрыва функции

В случае, когда для $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, число a называется **точкой разрыва.**



Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется **точкой устранимого разрыва.**

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, причем $A \neq B$, то a называется **точкой разрыва первого рода.**

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не является числом или не существует, то a называется **точкой разрыва второго рода.**

III.10. Непрерывность функции на множестве

Определение 12. *Функция f называется* **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Определение 13. *Функция f называется* **непрерывной в на множестве** $M \subseteq D(f)$*, если она непрерывна в любой точке из этого множества:*

$$\forall a \in M \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{21}$$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Применим метод «от противного».

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.
Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$.

В силу **непрерывности функции** f на отрезке $[a;\ b]$...

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

В силу **непрерывности функции** f на отрезке $[a;\ b]$...

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.
Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.
Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.
$\forall \varepsilon > 0$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.
Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.
Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x\in[a,b]\quad |f(x)|\leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists x_n\in[a;\ b]\quad f(x_n)>n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}=c\in[a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right)=f(c)$.

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-c|<\delta\quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(c)|<\varepsilon.$

$\exists M\in\mathbb{N}$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M$$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x\in[a,b]\quad |f(x)|\leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists x_n\in[a;\ b]\quad f(x_n)>n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}=c\in[a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right)=f(c)$.

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad \forall x\quad 0<|x-c|<\delta\quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(c)|<\varepsilon.$

$\exists M\in\mathbb{N}\quad\forall m>M\quad |x_{n_m}-c|<\delta.$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C.$

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b].$ $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = f(c).$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$

$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad |x_{n_m} - c| < \delta.$

$\forall \varepsilon > 0$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C.$

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c).$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad |x_{n_m} - c| < \delta.$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N}$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad |x_{n_m} - c| < \delta.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M$$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C>0$, что $\forall x\in[a,b] \quad |f(x)|\leqslant C$.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n\in\mathbb{N} \quad \exists x_n\in[a;\ b] \quad f(x_n)>n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}=c\in[a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right)=f(c)$.

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad 0<|x-c|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

$$\exists M\in\mathbb{N} \quad \forall m>M \quad |x_{n_m}-c|<\delta.$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists M\in\mathbb{N} \quad \forall m>M \quad \left|f\left(x_{n_m}\right)-f(c)\right|<\varepsilon.$$

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad |x_{n_m} - c| < \delta.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad \left|f\left(x_{n_m}\right) - f(c)\right| < \varepsilon.$$

Тогда $n_m < f\left(x_{n_m}\right) < f(c) + \varepsilon$, что противоречит неограниченности чисел n_m.

III.10.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;\ b] \quad f(x_n) > n$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = c \in [a;\ b]$. $\qquad \lim\limits_{m\to\infty} f\left(x_{n_m}\right) = f(c)$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad |x_{n_m} - c| < \delta$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m > M \quad |f\left(x_{n_m}\right) - f(c)| < \varepsilon$.

Тогда $n_m < f\left(x_{n_m}\right) < f(c) + \varepsilon$, что противоречит неограниченности чисел n_m. Теорема доказана.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения* M *и наименьшего значения* m, *т.е. существуют точки* $\alpha, \beta \in [a, b]$ *такие, что* $\quad \forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения* M *и наименьшего значения* m, *т.е. существуют точки* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство.

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения* M *и наименьшего значения* m, *т.е. существуют точки* $\alpha, \beta \in [a, b]$ *такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство.

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ \quad \middle| \qquad \right\}$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство.

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, \qquad\qquad \right\}$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство.

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\Big\{ f(x) \,\Big|\, a \leqslant x \leqslant b \Big\}$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\quad \forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство.

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a,b]$ такие, что* $\quad \forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a;\ b] \\ \end{array} \right.$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M$.

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$ и любое ме́ньшее число не обладает этим свойством.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$ и любое ме́ньшее число не обладает этим свойством.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M$.

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\Big\{ f(x) \,\Big|\, a \leqslant x \leqslant b \Big\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$ и любое ме́ньшее число не обладает этим свойством.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a,b]$ такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$ и любое ме́ньшее число не обладает этим свойством.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$ и любое ме́ньшее число не обладает этим свойством.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

Обозначим через M **точную верхнюю грань множества** значений, т.е. множества $\left\{ f(x) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$.

Иными словами, M не меньше любого значения функции f на $[a;\ b]$ и любое ме́ньшее число не обладает этим свойством.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $$f(c_n) > M - \frac{1}{n}.$$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M \geqslant f(c_n) > M - \dfrac{1}{n}.$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M \geqslant f(c_n) > M - \dfrac{1}{n}.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : \quad \lim\limits_{m\to\infty} c_{n_m} = \beta.$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M \geqslant f(c_n) > M - \dfrac{1}{n}.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}: \quad \lim\limits_{m\to\infty} c_{n_m} = \beta.$

Тогда $\quad \geqslant \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) >$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M$.

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M \geqslant f(c_n) > M - \dfrac{1}{n}$.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}: \quad \lim\limits_{m\to\infty} c_{n_m} = \beta$.

Тогда $M \geqslant \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) >$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что* $\forall x\in[a,b] \quad m=f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)=M$.

Доказательство. $\begin{cases} \forall x\in[a;\ b] \quad f(x)<M, \\ \forall K \quad K<M \quad\Rightarrow\quad \exists c\in[a;\ b] \quad f(c)>K. \end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M\geqslant f(c_n)>M-\dfrac{1}{n}$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}: \quad \lim\limits_{m\to\infty} c_{n_m}=\beta$.

Тогда $M\geqslant \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right)>\lim\limits_{m\to\infty}\left(M-\dfrac{1}{n}\right)=$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что* $\forall x\in[a,b]\quad m=f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)=M.$

Доказательство. $\begin{cases}\forall x\in[a;\ b]\quad f(x)<M,\\ \forall K\quad K<M\quad\Rightarrow\quad\exists c\in[a;\ b]\quad f(c)>K.\end{cases}$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M\geqslant f(c_n)>M-\dfrac{1}{n}.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}:\quad \lim\limits_{m\to\infty}c_{n_m}=\beta.$

Тогда $M\geqslant \lim\limits_{m\to\infty}f\left(c_{n_m}\right)>\lim\limits_{m\to\infty}\left(M-\dfrac{1}{n}\right)=M.$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a,b]$ такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M$.

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$$\lim_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) =$$

Для каждого n выберем c_n с условием $M \geqslant f(c_n) > M - \dfrac{1}{n}$.

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{m\to\infty} c_{n_m} = \beta$.

Тогда $M \geqslant \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) > \lim\limits_{m\to\infty} \left(M - \dfrac{1}{n}\right) = M$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$$\lim_{m \to \infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M \geqslant f(c_n) > M - \dfrac{1}{n}.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}: \quad \lim\limits_{m \to \infty} c_{n_m} = \beta.$

Тогда $M \geqslant \lim\limits_{m \to \infty} f\left(c_{n_m}\right) > \lim\limits_{m \to \infty} \left(M - \dfrac{1}{n}\right) = M.$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что* $\forall x\in[a,b]\quad m=f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)=M.$

Доказательство. $\begin{cases}\forall x\in[a;\ b]\quad f(x)<M,\\ \forall K\quad K<M\quad\Rightarrow\quad\exists c\in[a;\ b]\quad f(c)>K.\end{cases}$

$f\left(\beta\right)=\lim\limits_{m\to\infty}f\left(c_{n_m}\right)=M.$

Для каждого n выберем c_n с условием $\quad M\geqslant f(c_n)>M-\dfrac{1}{n}.$

По **теореме Больцано-Вейерштрасса** найдется сходящаяся подпоследовательность $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}:\quad\lim\limits_{m\to\infty}c_{n_m}=\beta.$

Тогда $M\geqslant\lim\limits_{m\to\infty}f\left(c_{n_m}\right)>\lim\limits_{m\to\infty}\left(M-\dfrac{1}{n}\right)=M.$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m \to \infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения* M *и наименьшего значения* m, *т.е. существуют точки* $\alpha, \beta \in [a, b]$ *такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M$.

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения* M *и наименьшего значения* m, *т.е. существуют точки* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$f(\beta) = \lim\limits_{m\to\infty} f(c_{n_m}) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a,b]$ такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

Иными словами, $\exists \alpha \in [a;\ b]$ $\qquad g(\alpha) =$

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что* $\forall x\in[a,b]\quad m=f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)=M.$

Доказательство. $\begin{cases}\forall x\in[a;\ b] \quad f(x)<M,\\ \forall K \quad K<M \quad\Rightarrow\quad \exists c\in[a;\ b] \quad f(c)>K.\end{cases}$

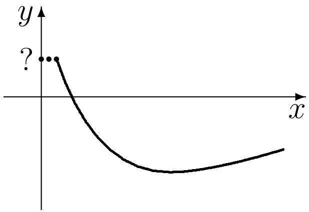
$f\left(\beta\right)=\lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right)=M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x)=-f(x)$.

Иными словами, $\exists\alpha\in[a;\ b]$ $\qquad g(\alpha)=$

(точная верхняя грань).



III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta \in [a,b]$ такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

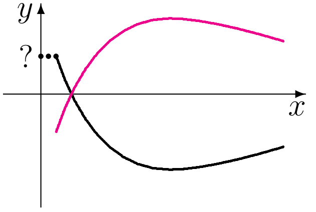
$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

Иными словами, $\exists \alpha \in [a;\ b]$ $\qquad g(\alpha) =$

(точная верхняя грань).



III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что* $\forall x\in[a,b] \quad m=f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)=M.$

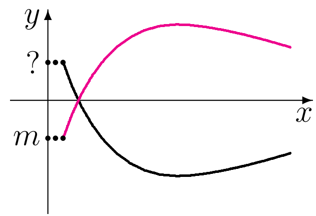
Доказательство. $\begin{cases}\forall x\in[a;\ b] \quad f(x)<M,\\ \forall K \quad K<M \quad\Rightarrow\quad \exists c\in[a;\ b] \quad f(c)>K.\end{cases}$

$f\left(\beta\right)=\lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right)=M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x)=-f(x)$.

Иными словами, $\exists\alpha\in[a;\ b]$ $\qquad g(\alpha)=$
(точная верхняя грань).



III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta \in [a,b]$ такие, что* $\forall x \in [a,b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

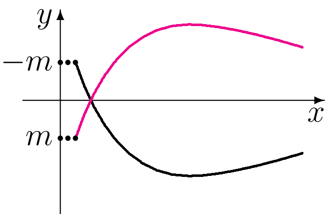
$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

Иными словами, $\exists \alpha \in [a;\ b]$ $\qquad g(\alpha) =$

(точная верхняя грань).



III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что* $\forall x\in[a,b] \quad m=f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)=M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x\in[a;\ b] \quad f(x)<M, \\ \forall K \quad K<M \quad \Rightarrow \quad \exists c\in[a;\ b] \quad f(c)>K. \end{cases}$

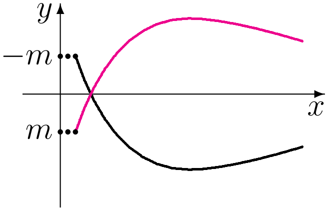
$f\left(\beta\right)=\lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right)=M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x)=-f(x)$.

Иными словами, $\exists\alpha\in[a;\ b]$ $\qquad g(\alpha)=-m.$

(точная верхняя грань).



III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

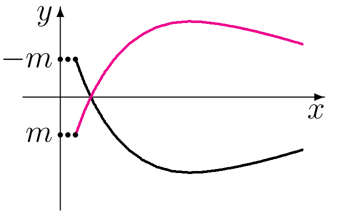
$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m \to \infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

Иными словами, $\exists \alpha \in [a;\ b] \quad -f(\alpha) = g(\alpha) = -m.$

(точная верхняя грань).



III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$f\left(\beta\right) = \lim\limits_{m\to\infty} f\left(c_{n_m}\right) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

Иными словами, $\exists \alpha \in [a;\ b] \quad -f(\alpha) = g(\alpha) = -m.$

Значит, $f(\alpha) = m$, то есть нижняя граница тоже достигается.

III.10.2. Теорема Вейерштрасса

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что* $\forall x \in [a, b] \quad m = f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta) = M.$

Доказательство. $\begin{cases} \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) < M, \\ \forall K \quad K < M \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a;\ b] \quad f(c) > K. \end{cases}$

$f(\beta) = \lim\limits_{m \to \infty} f(c_{n_m}) = M.$ Значит, M достигается.

Итак, мы доказали, что верхняя граница достигается.

Значит, верхняя граница достигается и для функции $g(x) = -f(x)$.

Иными словами, $\exists \alpha \in [a;\ b] \quad -f(\alpha) = g(\alpha) = -m.$

Значит, $f(\alpha) = m$, то есть нижняя граница тоже достигается.

Теорема доказана.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Почему «общность рассуждений» не теряется?

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Почему «общность рассуждений» не теряется?

В противном случае вместо функции $y = f(x)$ можно рассмотреть бы $g(x) = -f(x)$, и

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Почему «общность рассуждений» не теряется?

В противном случае вместо функции $y = f(x)$ можно рассмотреть бы $g(x) = -f(x)$, и воспользоваться тем, что утверждение $g(x) = 0$ равносильно утверждению $f(x) = 0$.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

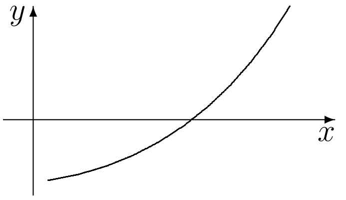
Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии — постепенного «деления пополам».

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



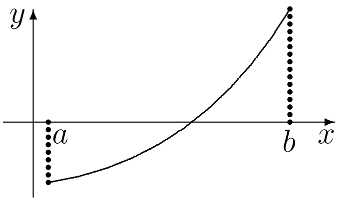
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии — постепенного «деления пополам».

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

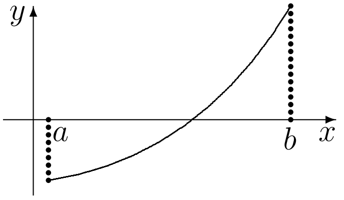
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.



Применим метод дихотомии — постепенного «деления пополам».

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

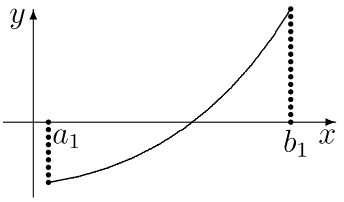


Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.
Применим метод дихотомии.

Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b.$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



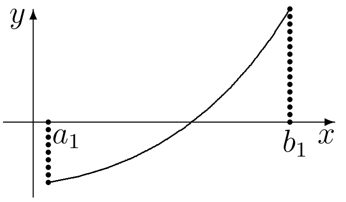
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии.

Введём обозначения: $\quad a_1 = a, \quad b_1 = b.$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi)=0$.*



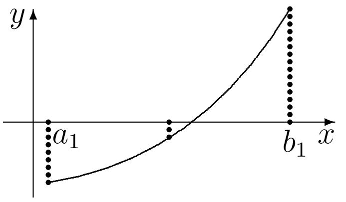
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a)<0<f(b)$.
Применим метод дихотомии.

Введём обозначения: $a_1=a, \quad b_1=b.$

Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, то теорема доказана.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.
Применим метод дихотомии.

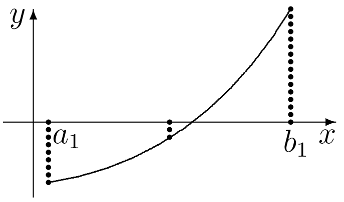
Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b.$

Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, то теорема доказана.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi)=0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a)<0<f(b)$.
Применим метод дихотомии.

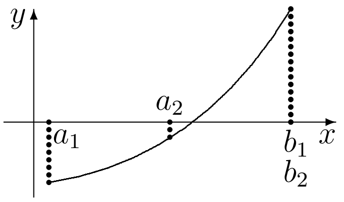


Введём обозначения: $a_1=a,\quad b_1=b.$

Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$ положим $a_2=\dfrac{a+b}{2},\ b_2=b_1$ а если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$ положим $a_2=a_1,\ b_2=\dfrac{a+b}{2}$.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



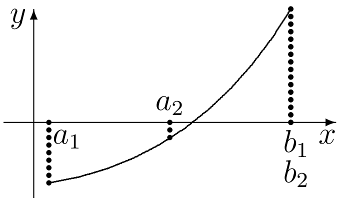
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.
Применим метод дихотомии.

Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b.$

Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ положим $a_2 = \dfrac{a+b}{2},\ b_2 = b_1$ а если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ положим $a_2 = a_1,\ b_2 = \dfrac{a+b}{2}.$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии.

Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b.$

Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ положим $a_2 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_2 = b_1$ а если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ положим $a_2 = a_1$, $b_2 = \dfrac{a+b}{2}$.

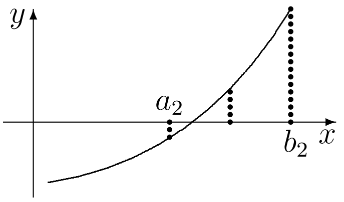
Продолжим этот процесс.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии.



Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b.$

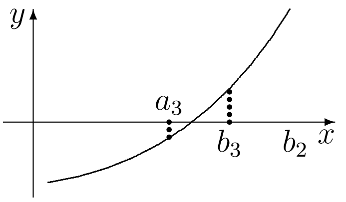
Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ положим $a_2 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_2 = b_1$ а если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ положим $a_2 = a_1$, $b_2 = \dfrac{a+b}{2}$.

Продолжим этот процесс.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.
Применим метод дихотомии.



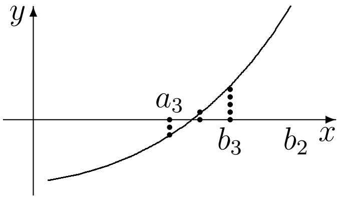
Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b$.

Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ положим $a_2 = \frac{a+b}{2}$, $b_2 = b_1$ а если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ положим $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a+b}{2}$.

Продолжим этот процесс.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии.

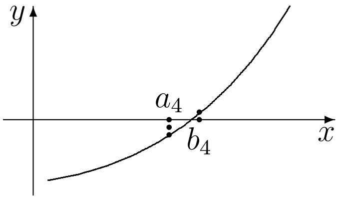
Введём обозначения: $a_1 = a, \quad b_1 = b.$

Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ положим $a_2 = \dfrac{a+b}{2},\ b_2 = b_1$ а если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ положим $a_2 = a_1,\ b_2 = \dfrac{a+b}{2}$.

Продолжим этот процесс.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi)=0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a)<0<f(b)$.
Применим метод дихотомии.

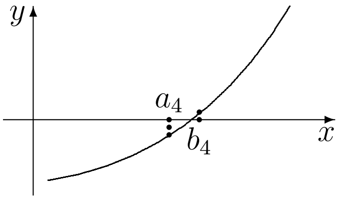
Введём обозначения: $a_1=a, \quad b_1=b$.
Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$ положим $a_2=\dfrac{a+b}{2},\ b_2=b_1$ а если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$ положим $a_2=a_1,\ b_2=\dfrac{a+b}{2}$.
Продолжим этот процесс.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Применим метод дихотомии.



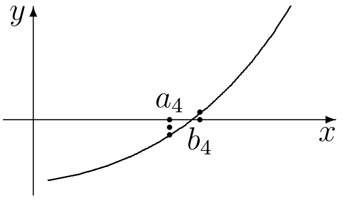
Получили монотонно возрастающую последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ и монотонно убывающую последовательность $\{b_n\}_1^\infty$.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi)=0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a)<0<f(b)$.

Применим метод дихотомии.

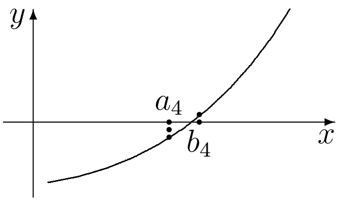


Получили монотонно возрастающую последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ и монотонно убывающую последовательность $\{b_n\}_1^\infty$.

Значит, у этих последовательностей есть предел, причем один и тот же, так как $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

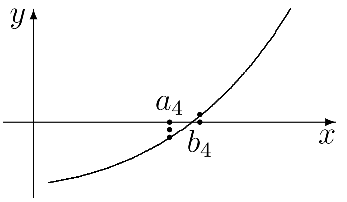
Получили монотонно возрастающую последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ и монотонно убывающую последовательность $\{b_n\}_1^\infty$.

Значит, у этих последовательностей есть предел, причем один и тот же, так как $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

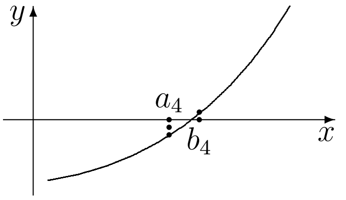


Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

$$= f(\xi) =$$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



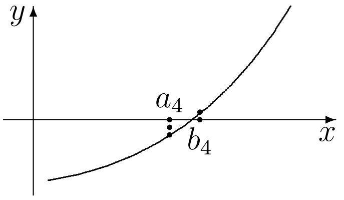
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) =$$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi)=0$.*



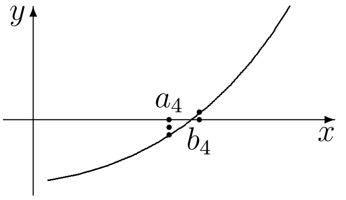
Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a)<0<f(b)$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi)=0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a)<0<f(b)$.

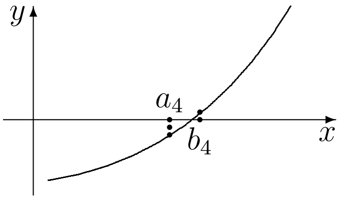
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

$$0 \geqslant \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.



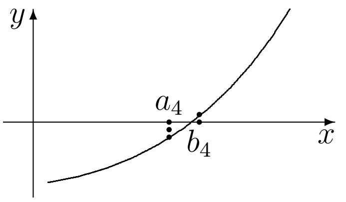
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

$$0 \geqslant \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0.$$

Следовательно, $f(\xi) = 0$.

III.10.3. Теорема о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.*



Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a;\ b]$.

$$0 \geqslant \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0.$$

Следовательно, $f(\xi) = 0$. Теорема доказана.

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она принимает на* (a, b) *все промежуточные значения между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Если $p = f(a)$ или $p = f(b)$, то $c =$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Если $p = f(a)$ или $p = f(b)$, то $c = a$ или

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Если $p = f(a)$ или $p = f(b)$, то $c = a$ или $c = b$.

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она принимает на* (a, b) *все промежуточные значения между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) =$ и $g(b) =$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она принимает на* (a, b) *все промежуточные значения между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) =$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она принимает на* (a, b) *все промежуточные значения между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

По **теореме о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке,**

$\exists c \in [a;\ b]$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

По **теореме о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке,**

$\exists c \in [a;\ b] \qquad = g(c) = 0$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

По **теореме о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке,**

$\exists c \in [a;\ b] \quad f(c) - p = g(c) = 0$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

По **теореме о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке,**

$\exists c \in [a;\ b] \quad f(c) - p = g(c) = 0 \Rightarrow$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

По **теореме о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке,**

$\exists c \in [a;\ b] \quad f(c) - p = g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = p.$

III.10.4. Теорема Больцано-Коши

Теорема 11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство.

Возьмём число p между $f(a)$ и $f(b)$.

Надо найти такое число $c \in [a;\ b]$, что $p = f(c)$.

Пусть $f(a) < p < f(b)$ или $f(b) < p < f(a)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - p$. Тогда

числа $g(a) = f(a) - p$ и $g(b) = f(b) - p$ имеют разные знаки.

По **теореме о существовании нуля функции, непрерывной на отрезке,**

$\exists c \in [a;\ b] \quad f(c) - p = g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = p.$

Теорема доказана.

III.10.5. Существование непрерывной обратной функции

Теорема 12. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta] = [f(a), f(b)]$ существует обратная функция $x = g(y)$, также строго монотонная и непрерывная на отрезке (α, β).*

III.11. Пределы и формульное задание функции

Есть 3 типовых способа задания функции:

III.11. Пределы и формульное задание функции

Есть 3 типовых способа задания функции:

– формулой;

III.11. Пределы и формульное задание функции

Есть 3 типовых способа задания функции:

– формулой;

– графиком;

III.11. Пределы и формульное задание функции

Есть 3 типовых способа задания функции:

– формулой;

– графиком;

– таблицей значений.

III.11. Пределы и формульное задание функции

Есть 3 типовых способа задания функции:

– формулой;

– графиком;

– таблицей значений.

Приоритетным является задание функции

III.11. Пределы и формульное задание функции

Есть 3 типовых способа задания функции:

– формулой;

– графиком;

– таблицей значений.

Приоритетным является задание функции формулой.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Человечество уже давно обнаружило, что при создании необходимого объекта обычно удобнее собирать его из «готовых деталей», комбинируя их и, при необходимости, изменяя их, приспосабливая к новым задачам.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

Например, в строительстве в качестве базовых элементов выступают

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

Например, в строительстве в качестве базовых элементов выступают кирпичи, бетонные блоки, плиты перекрытия и др.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

Например, в строительстве в качестве базовых элементов выступают кирпичи, бетонные блоки, плиты перекрытия и др.

В экономике к основным элементам относятся

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

Например, в строительстве в качестве базовых элементов выступают кирпичи, бетонные блоки, плиты перекрытия и др.

В экономике к основным элементам относятся процессы создания и использования ресурсов человеком и группами людей, создания продукции и обмена продукцией между людьми и группами людей и т.п.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

В теории функций действительной переменной роль базовых элементов играют основные элементарные функции:

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

В теории функций действительной переменной роль базовых элементов играют основные элементарные функции:
степенная функция: x^a;

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

В теории функций действительной переменной роль базовых элементов играют основные элементарные функции:

степенная функция: x^a;

показательная функция: $a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

В теории функций действительной переменной роль базовых элементов играют основные элементарные функции:
степенная функция: x^a;
показательная функция: $a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;
логарифмическая функция: $\log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

В теории функций действительной переменной роль базовых элементов играют основные элементарные функции:
степенная функция: x^a;
показательная функция: $a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;
логарифмическая функция: $\log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;
тригонометрические функции: $\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x$;

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;

В теории функций действительной переменной роль базовых элементов играют основные элементарные функции:
степенная функция: x^a;
показательная функция: $a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;
логарифмическая функция: $\log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;
тригонометрические функции: $\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x$;
обратные тригонометрические функции: $\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x$.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

Например, в строительстве это

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

Например, в строительстве это методы откалывания частей кирпича, проделывания отверстий в кирпиче и бетоне, типовые способы соединения между собой кирпичей, плит, блоков и т.п.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

Например, в строительстве это методы откалывания частей кирпича. проделывания отверстий в кирпиче и бетоне, типовые способы соединения между собой кирпичей, плит, блоков и т.п.

В экономике это

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

Например, в строительстве это методы откалывания частей кирпича. проделывания отверстий в кирпиче и бетоне, типовые способы соединения между собой кирпичей, плит, блоков и т.п.

В экономике это типовые способы обмена товарами и услугами, организации производства и т.п.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

В теории функций действительной перемененной в этом качестве выступают операции сложения и произведения функций, их вычитания и деления (последнее преобразование, строго говоря, **не является операцией**), а также **суперпозиция** (или композиция) функций.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

– механизма аппроксимирования,

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;
– механизма аппроксимирования,

В строительстве этот механизм представлен

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;
– механизма аппроксимирования,

В строительстве этот механизм представлен строительными нормами и правилами (СНИП), законы и традиции строительства и архитектуры и т.п.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

– механизма аппроксимирования,

В строительстве этот механизм представлен строительными нормами и правилами (СНИП), законы и традиции строительства и архитектуры и т.п.

В экономике к механизму аппроксимирования можно отнести

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:

– совокупности базовых элементов;

– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;

– механизма аппроксимирования,

В строительстве этот механизм представлен строительными нормами и правилами (СНИП), законы и традиции строительства и архитектуры и т.п.

В экономике к механизму аппроксимирования можно отнести экономическое законодательство, юридическую поддержку ведения бизнеса, систему правил и традиций ведения бизнеса.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;
– механизма аппроксимирования,

А вот попытка описать механизм аппроксимирования в теории функций действительной переменной, опираясь на школьные знания, скорее всего даст более чем скромный результат.

III.11.1. Алгебраический подход к заданию функций

Алгебраический подход к созданию объекта представляет собой систему из трех компонентов:
– совокупности базовых элементов;
– совокупности типовых преобразований элементов и правил комбинирования элементов;
– механизма аппроксимирования,

А вот попытка описать механизм аппроксимирования в теории функций действительной переменной, опираясь на школьные знания, скорее всего даст более чем скромный результат.

Одной из наших задач в изучении теории функций действительной переменной является именно развитие механизма аппроксимирования, способов получения приближённого задания функций.

III.11.2. Элементарные функции

Как правило, мы будем задавать функции формулами. Развитие теории функций действительной переменной приведёт к расширению класса функций, которые можно задать формулой, но начнем мы с понятия элементарной функции, получаемого непосредственным применением **алгебраического подхода** на базе школьного курса математики.

III.11.2. Элементарные функции

Определение 14. *Элементарной функцией называется функция, полученная при помощи четырех арифметических операций и операции суперпозиции, примененных конечное число раз к* ***основным элементарным функциям и постоянным****.*

III.11.2. Элементарные функции

Определение 14. *Элементарной функцией называется функция, полученная при помощи четырех арифметических операций и операции суперпозиции, примененных конечное число раз к* ***основным элементарным функциям и постоянным****.*

Основные элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

III.11.2. Элементарные функции

Определение 14. *Элементарной функцией называется функция, полученная при помощи четырех арифметических операций и операции суперпозиции, примененных конечное число раз к* ***основным элементарным функциям и постоянным****.*

Основные элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

Поэтому в силу **линейности предела**, свойства **предела произведения функций** и свойства **непрерывности суперпозиции** непрерывными на своих областях определения являются и все элементарные функции.

III.11.2. Элементарные функции

Определение 14. *Элементарной функцией называется функция, полученная при помощи четырех арифметических операций и операции суперпозиции, примененных конечное число раз к* ***основным элементарным функциям и постоянным****.*

Основные элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

Поэтому в силу **линейности предела**, свойства **предела произведения функций** и свойства **непрерывности суперпозиции** непрерывными на своих областях определения являются и все элементарные функции.

Это означает, что для вычисления предела элементарной функции в точке, принадлежащей ее области определения, достаточно просто вычислить значение функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Например, рассмотрим $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Например, рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$.

Числитель стремится к 0.

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Например, рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$.

Числитель стремится к 0. Но и знаменатель тоже стремится к 0!

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Например, рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$.
Числитель стремится к 0. Но и знаменатель тоже стремится к 0! Предсказать результат, зная лишь тот факт, что числитель и знаменателя являются бесконечно малыми функциями, невозможно.

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1)\left(\sqrt{x}+1\right) =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right) = 4.$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right) =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right) = 0.$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{(x+1)^2-4x}=$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{(x+1)^2-4x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{x^2-2x+1} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{(x+1)^2-4x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{x^2-2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-1} =$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{(x+1)^2-4x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}{x^2-2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-1} = \infty.$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \infty.$$

Итак, из того факта, что пределы числителя и знаменателя равны 0, нельзя сделать вывод о пределе отношения.

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=4.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1-2\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\infty.$$

Итак, из того факта, что пределы числителя и знаменателя равны 0, нельзя сделать вывод о пределе отношения.

Поэтому выражения такого вида называются *неопределенностями.*

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$\dfrac{0}{0}$,

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$,

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty,$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty,$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},$$

III.11.3. «Раскрытие неопределённостей»

Сложности с вычислением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ от **элементарной функции** могут возникнуть в случае, когда предельная точка не принадлежит области определения хотя бы одной из **основных элементарных функций**, входящих в состав формулы $f(x)$ или в качестве a выступает ∞, $-\infty$ или $+\infty$.

Выделяют следующий набор базовых неопределенностей:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0}.$$

Рассмотрим пример?

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. Покажем, что эта последовательность ограниченная и возрастающая.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. Покажем, что эта последовательность ограниченная и возрастающая.

Сначала докажем ограниченность.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином у Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бинному Ньютона**»

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{1/2}{1-(1/2)}=$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{1/2}{1-(1/2)}=3.$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 3.$$

$$= \overbrace{1+n\cdot\frac{1}{n}}^{2}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{n\cdot n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{1/2}{1-(1/2)}=3.$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бинному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «биному Ньютона»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-k}{n}\right) =$$

$$= 2+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k+\dots+\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

Теперь мы готовы доказать, что последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастающая.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n+1}\right) -$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n+1}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n+1}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$\left(1-\dfrac{p}{n+1}\right) > \left(1-\dfrac{p}{n}\right)$, поэтому разность между последующим и предыдущим членами исходной последов-ти положительна.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**бином Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n+1}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$\left(1-\dfrac{p}{n+1}\right) > \left(1-\dfrac{p}{n}\right)$, поэтому разность между последующим и предыдущим членами исходной последов-ти положительна.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

Значит, исходная последовательность возрастает и ограничена сверху.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

Значит, исходная последовательность возрастает и ограничена сверху.

Следовательно, она имеет предел, причем этот предел принадлежит $[2;\ 3]$.

III.11.4. Теорема о корректности числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Доказательство. По «**биному Ньютона**»

$$[2;\ 3] \ni \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

Значит, исходная последовательность возрастает и ограничена сверху.

Следовательно, она имеет предел, причем этот предел принадлежит $[2;\ 3]$.

Теорема доказана.

III.11.5. Определение числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Определение 15. *Предел последовательности* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *называется «числом* e*».*

III.11.5. Определение числа e

Теорема 13. *Последовательность* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, принадлежащий отрезку* $[2;\ 3]$.

Определение 15. *Предел последовательности* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *называется «числом e».*

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=[1^\infty]\approx 2.7182818284590\ldots$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Итак, мы доказали, что

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] \approx 2.7182818284590\ldots$$

Этот предел, т.е. число e, является иррациональным числом.

Оказывается, ситуация не меняется, если предел берётся не только по натуральным числам.

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство.

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$\forall\varepsilon > 0$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N + 1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n + 1$.

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N + 1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n + 1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n\in\mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n >$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N + 1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n + 1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n >$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Значит,

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N + 1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n + 1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Значит,

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right|$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Значит,

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n>N\quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n\in\mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \quad \text{Значит,}$$

$$\leqslant \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Значит,

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - e\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Значит,

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - e\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Сначала рассмотрим $x > 0$.

По определению числа e (второе равенство в условии):

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Возьмём $x > N+1$ и такое число $n\in\mathbb{N}$, чтобы $n < x \leqslant n+1$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ Значит,

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - e\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$ Случай $x > 0$ рассмотрен.

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1} \cdot \left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1} \cdot \left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = e\cdot 1 =$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x}=\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x}=\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

Поэтому

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x =$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x < 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x.$

III.11.6. Второй замечательный предел

Теорема 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

Доказательство. Осталось рассмотреть случай $x<0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Согласно уже рассмотренному утверждению

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Ура!

Рассмотрим пример?

IV. Дифференцирование функции

Начнем с примера (вывод уравнения касательной)?

IV. Дифференцирование функции

Начнем с примера (вывод уравнения касательной)?

Мы получили уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,. \tag{22}$$

IV. Дифференцирование функции

Определение 16. Производной *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *называется предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{23}$$

IV. Дифференцирование функции

Определение 16. Производной *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *называется предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{23}$$

Равенство (23) часто записывают в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{23'}$$

IV. Дифференцирование функции

Определение 16. Производной *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *называется предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{23}$$

Производная функции $f(x)$ является функцией от точки x_0, эта функция обозначается через $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}$.

IV. Дифференцирование функции

Определение 16. Производной *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *называется предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{23}$$

Определение 17. *Говорят, что функция* f *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ *или соответственно интервале* (a, b) *тогда и только тогда, когда* f *дифференцируема в каждой точке этого отрезка или соответственно интервала, то есть в каждой точке этого отрезка или соответственно интервала существует производная этой функции.*

Рассмотрим пример?

IV.1. Таблица производных

Сначала отметим один важный факт, касающийся дифференцирования тригонометрических функций и обратных к ним.

IV.1. Таблица производных

Вы изучили два способа измерения величины угла: **градусное** и **радианное.**

Все формулы для дифференцирования и интегрирования тригонометрических функций и обратных к ним справедливы только для радианного измерения угла!

IV.1. Таблица производных

$$(y^n)' = n \cdot y^{n-1} \cdot y'; \quad (a^y)' = a^y \cdot \ln a \cdot y'; \quad (\log_a y)' = \frac{y'}{y \ln a};$$

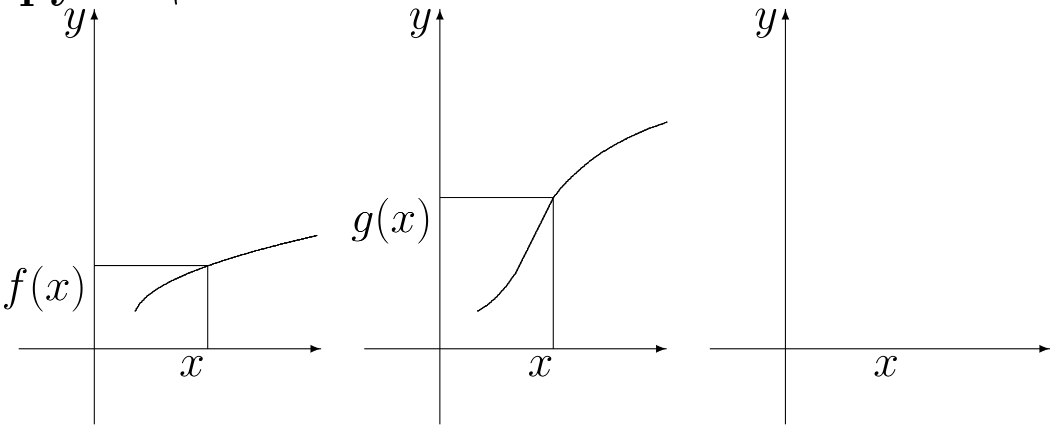
$$(\sin y)' = \cos y \cdot y'; \quad (\cos y)' = -\sin y \cdot y'; \quad (\operatorname{tg} y)' = \frac{y'}{\cos^2 y};$$

$$(ctg(y))' = -\frac{y'}{\sin^2 y}; \quad (\arcsin y)' = \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}; \quad (\arccos y)' = -\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{y'}{1+y^2}; \quad (\operatorname{arcctg} y)' = -\frac{y'}{1+y^2}.$$

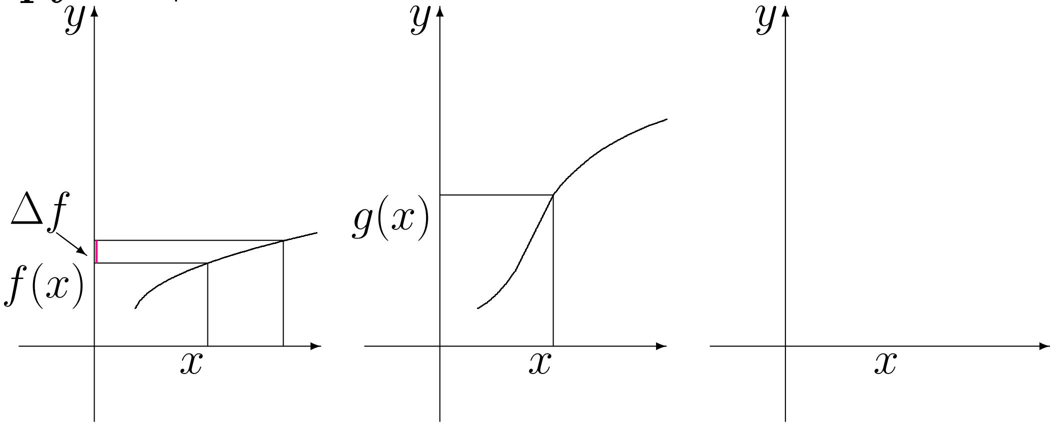
Рассмотрим пример?

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



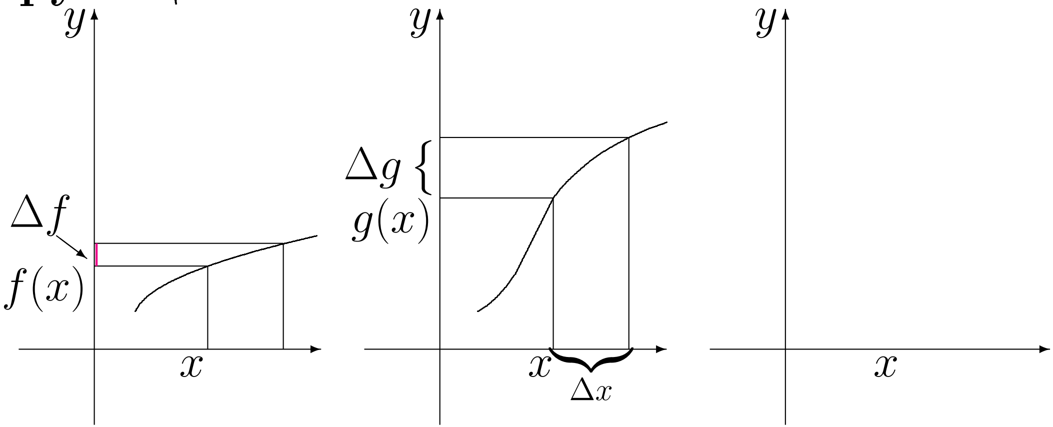
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



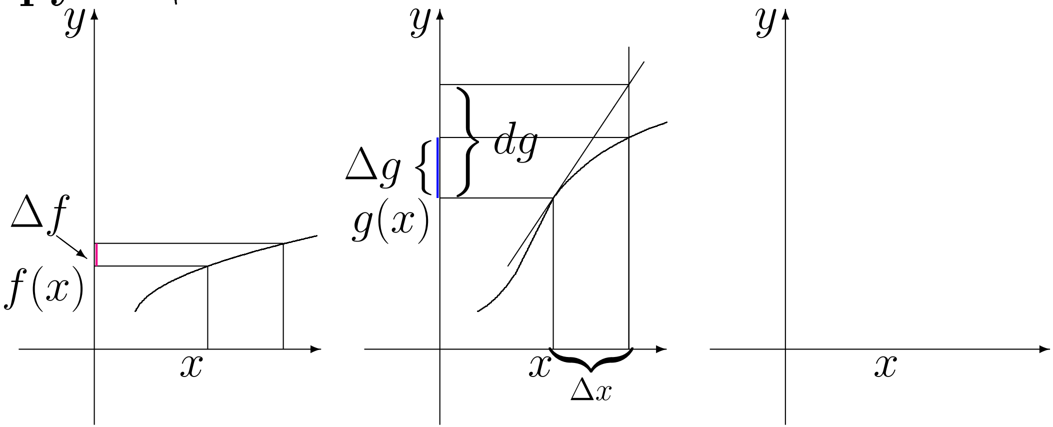
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



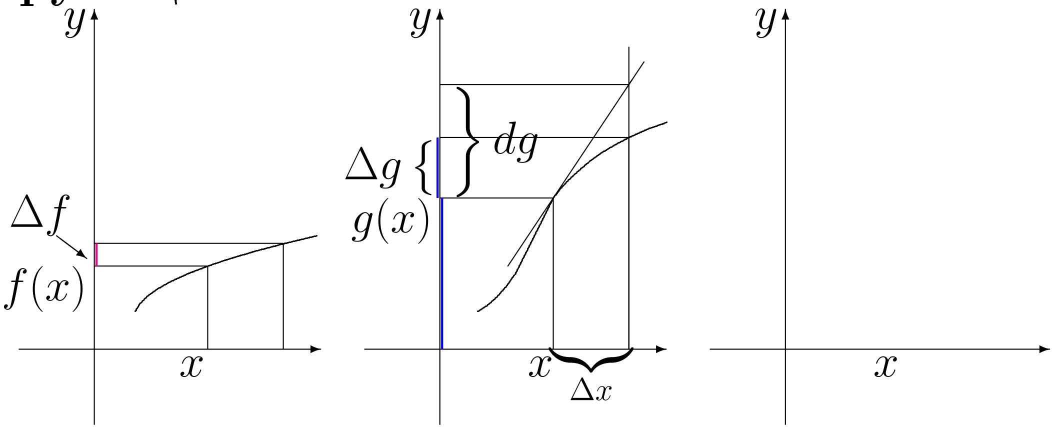
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



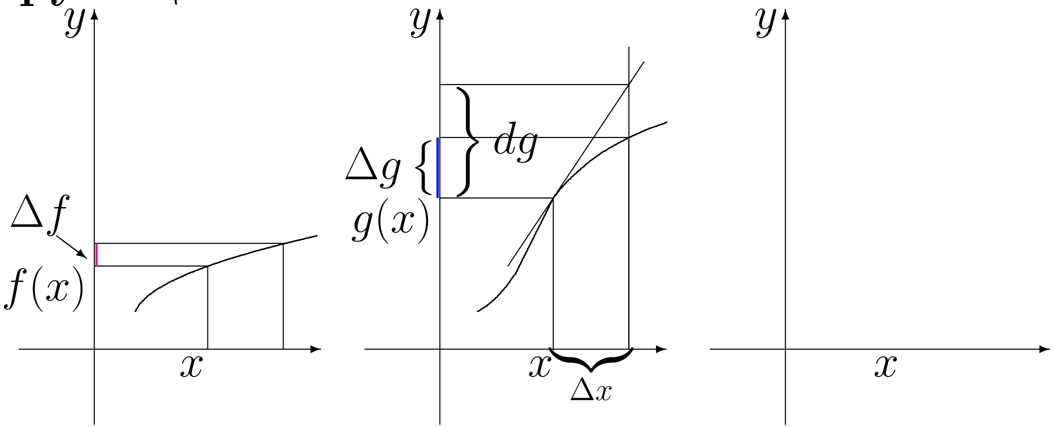
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



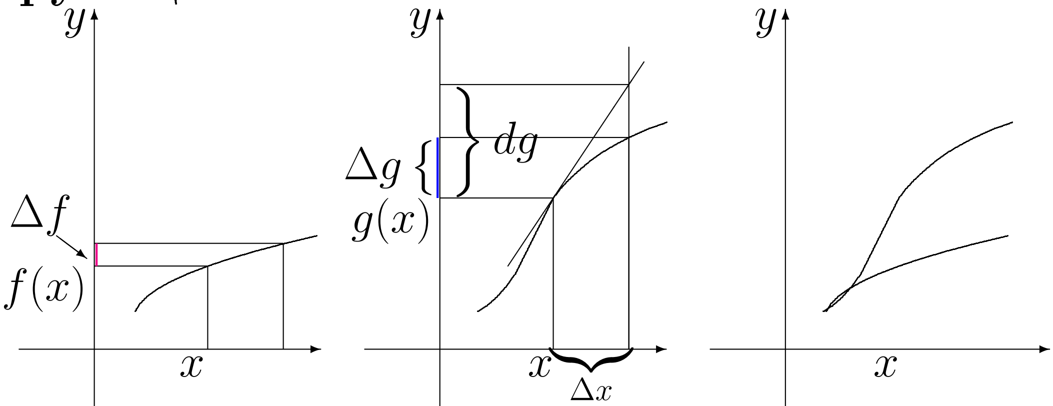
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



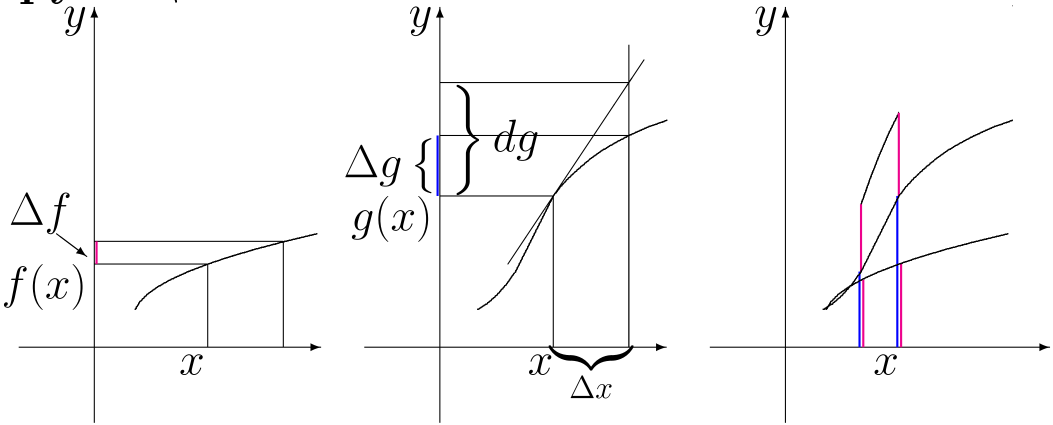
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



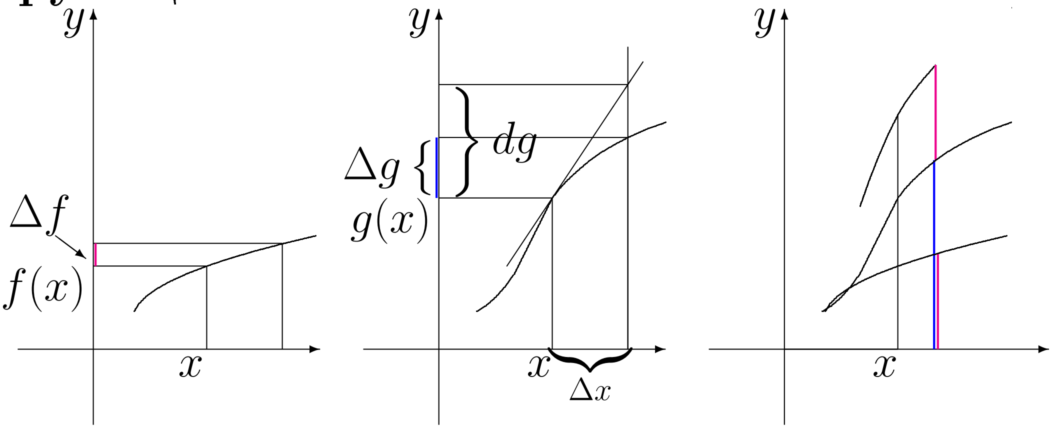
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



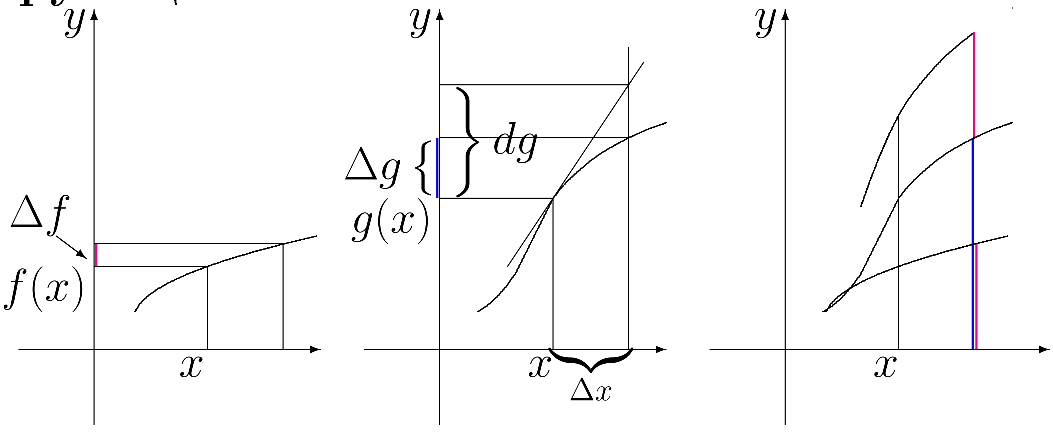
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



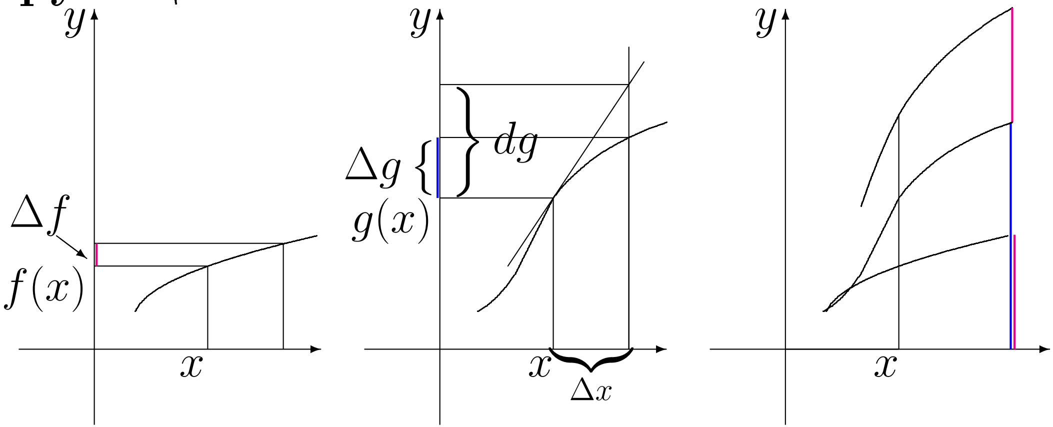
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



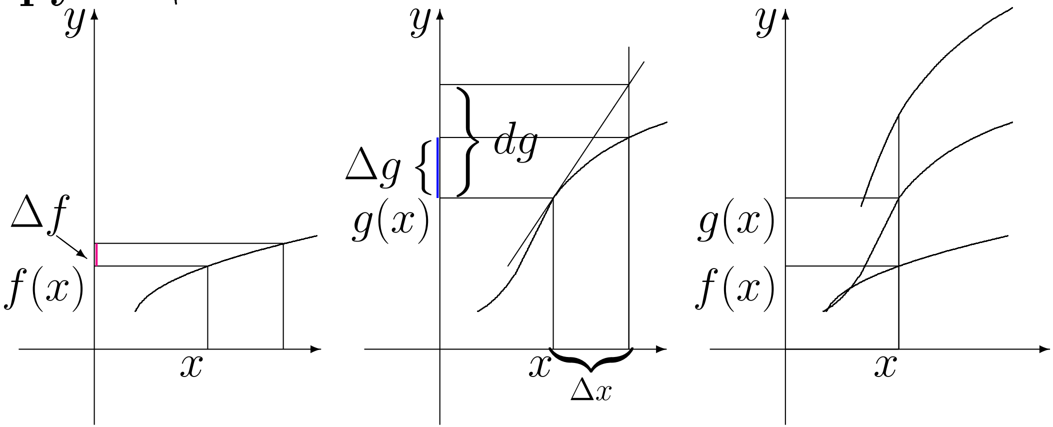
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



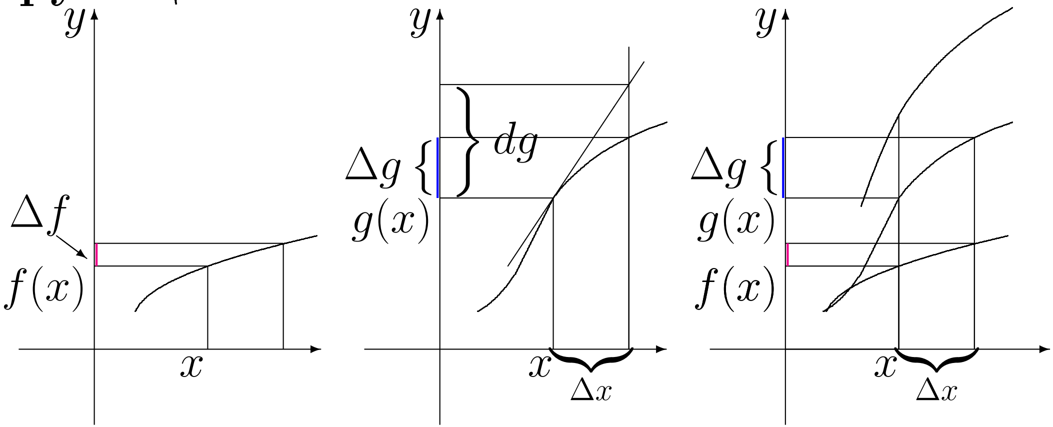
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



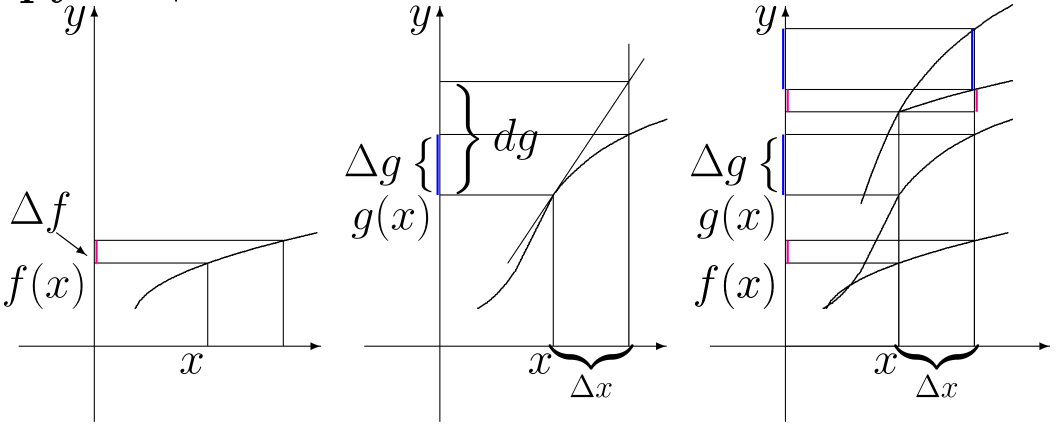
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



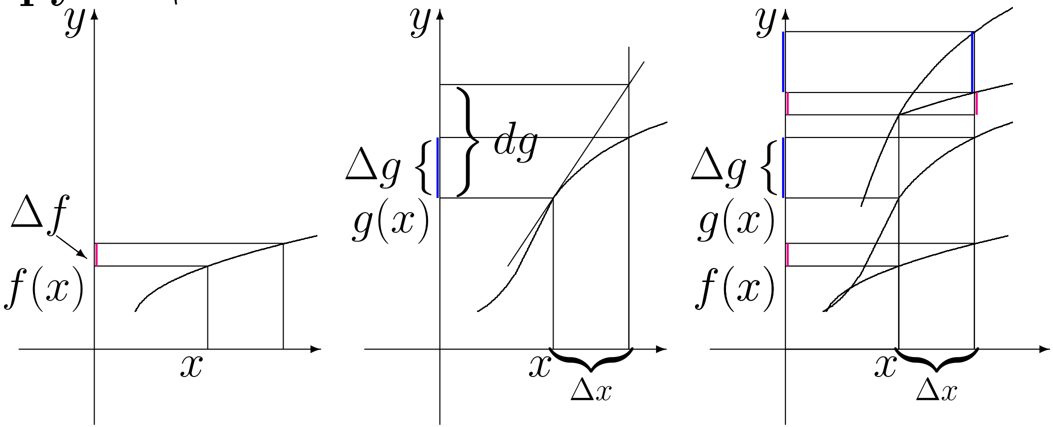
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



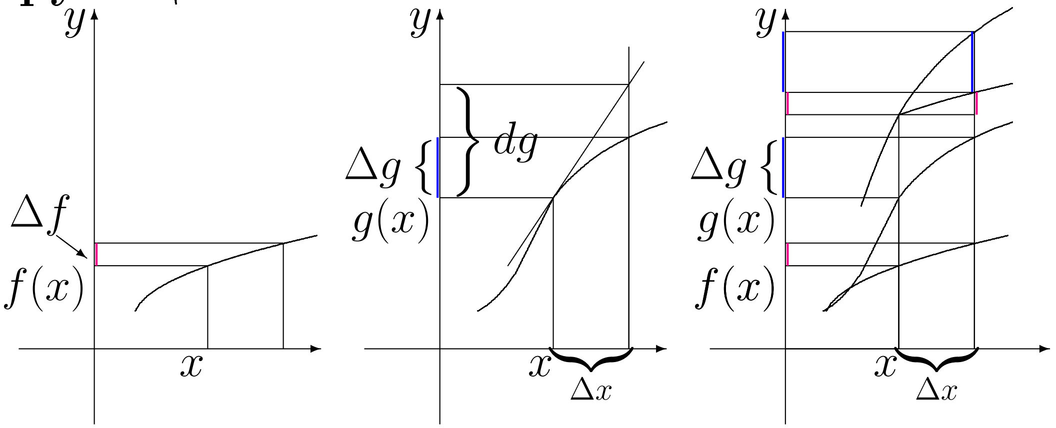
Построим графики функций f и g. Зафиксируем значение аргумента x и приращение аргумента Δx.

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



Из рисунка видно, что $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

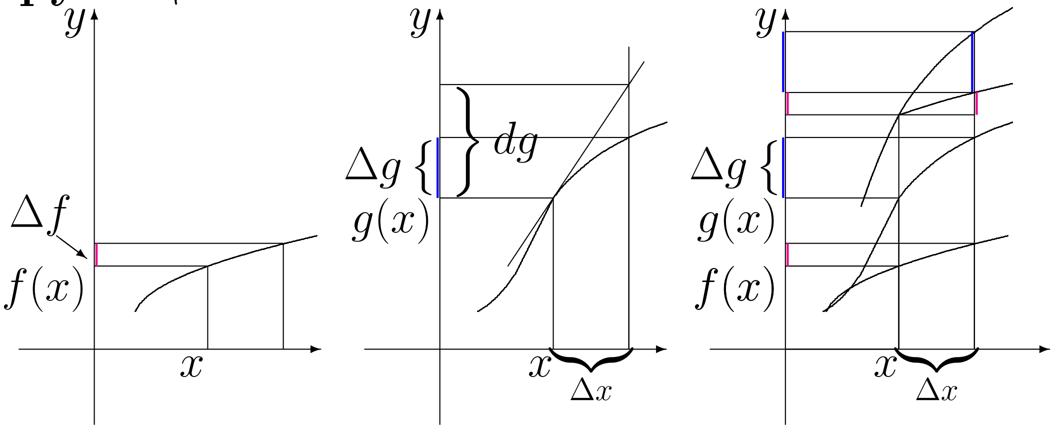
IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



Из рисунка видно, что $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{\Delta x} =$$

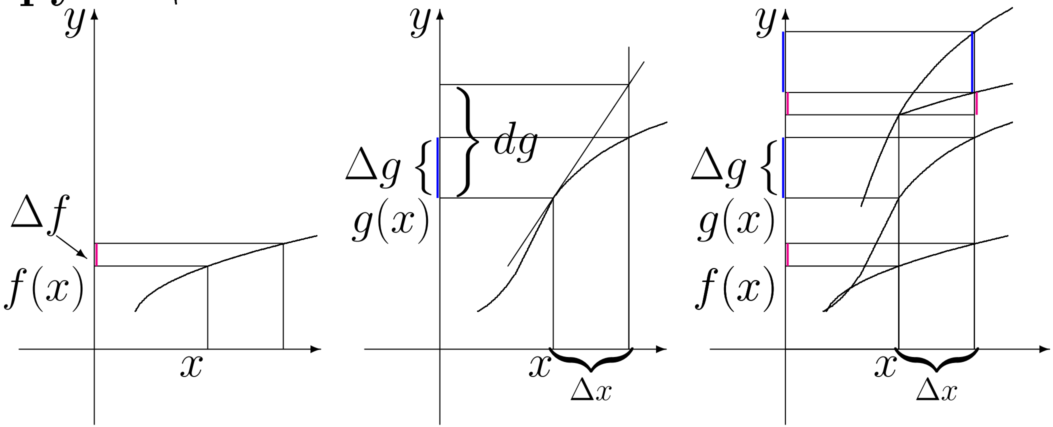
IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



Из рисунка видно, что $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x} =$$

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций

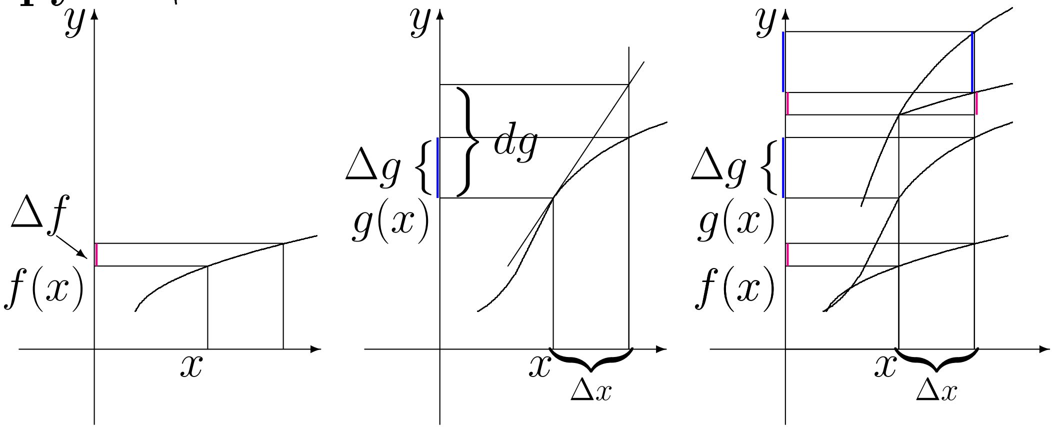


Из рисунка видно, что $\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g$.

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

IV.2. Вывод формулы дифференцирования суммы функций



Из рисунка видно, что $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

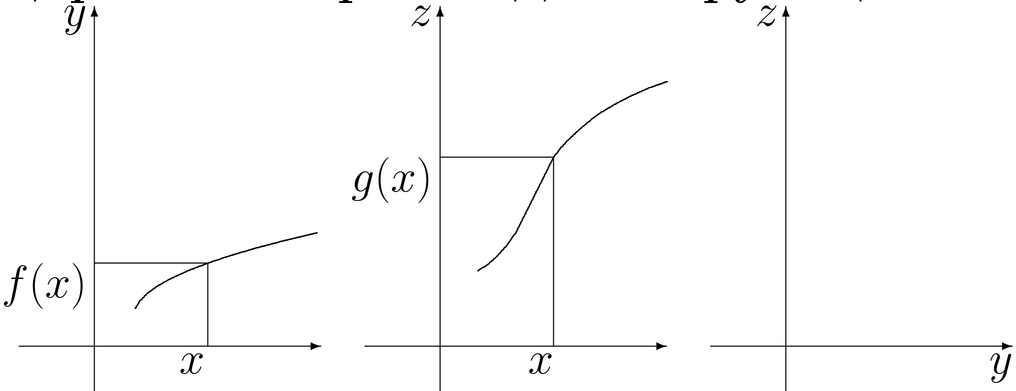
$$\frac{d(f(x)+g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)) - (f(x)+g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

IV.3. Вывод формулы дифференцирования произведения функций

Мы рассмотрим два вывода формулы: геометрический и аналитический.

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций

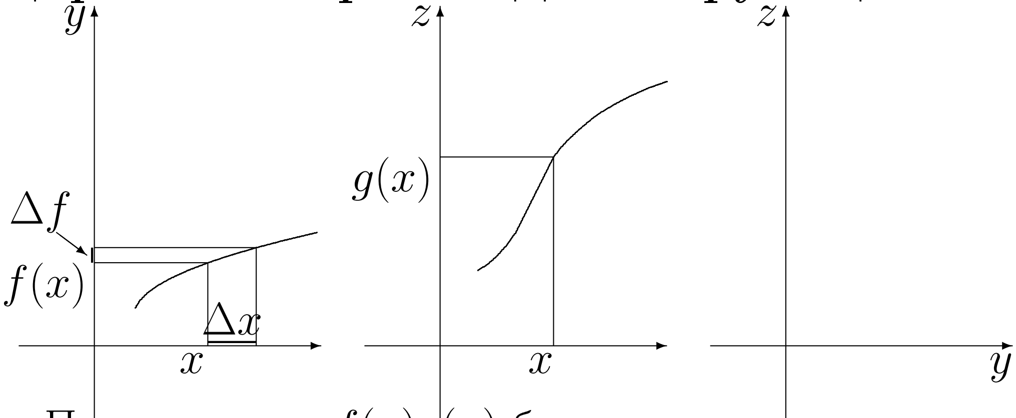


Если $f(x)$ мы понимаем как ориентированную длину ($f(x)$ может быть отрицательным), то произведение $f(x)g(x)$ естественно трактовать как площадь.

Поэтому значения функций f и g будем откладывать на разных осях.

Итак, рассмотрим графики функций $y = f(x)$ и $z = g(x)$.

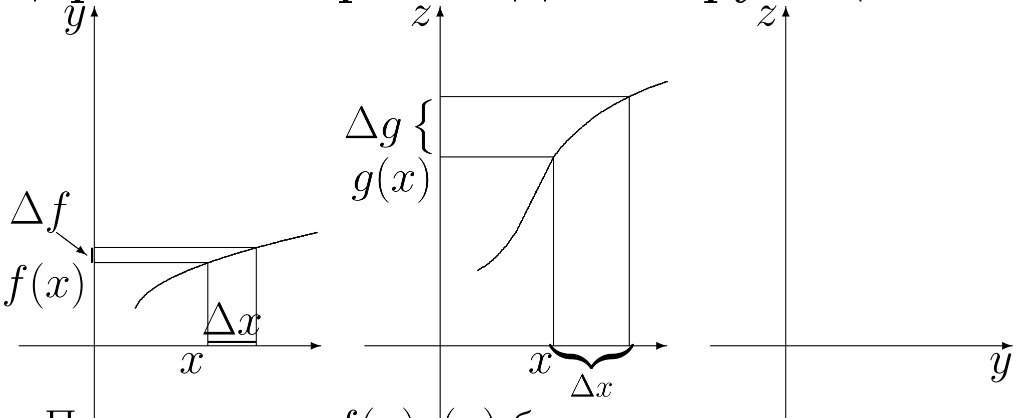
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



Произведение $f(x)g(x)$ будем трактовать как площадь. Поэтому значения функций f и g будем откладывать на разных осях.

Зададим приращение аргумента Δx, $\quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$,

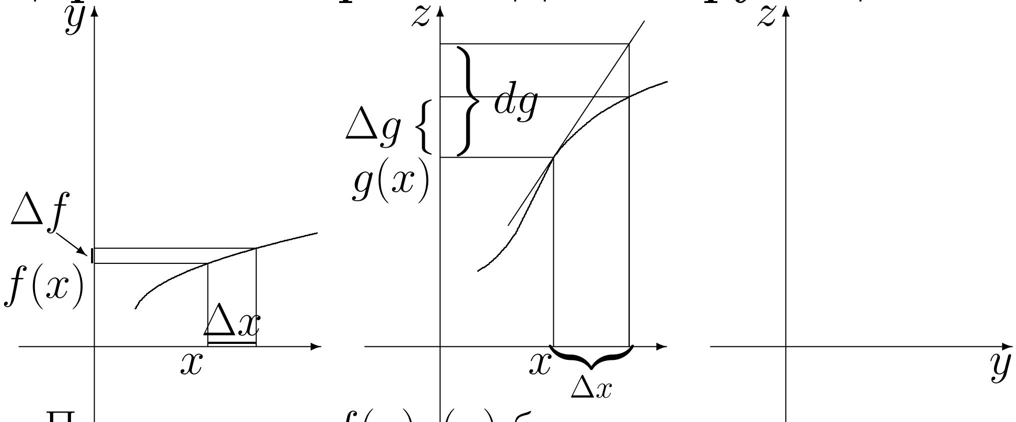
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



Произведение $f(x)g(x)$ будем трактовать как площадь. Поэтому значения функций f и g будем откладывать на разных осях.

Зададим приращение аргумента Δx, $\quad \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$.

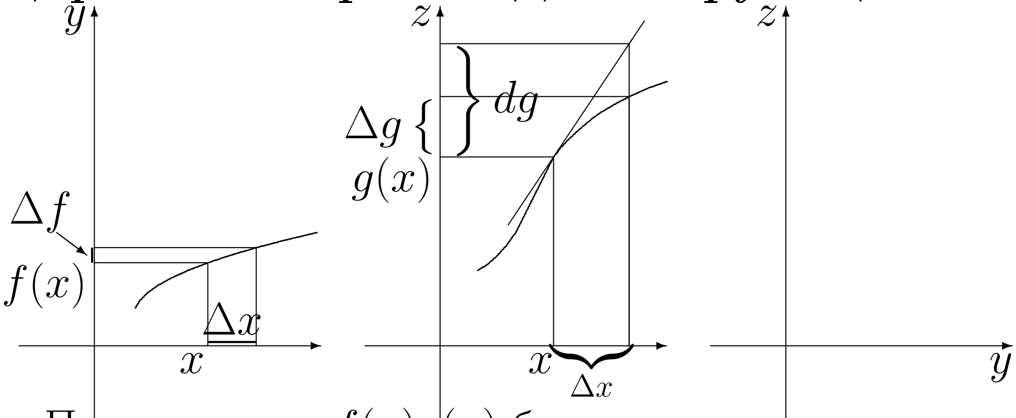
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



Произведение $f(x)g(x)$ будем трактовать как площадь. Поэтому значения функций f и g будем откладывать на разных осях.

Зададим приращение аргумента Δx, $\quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$.

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций

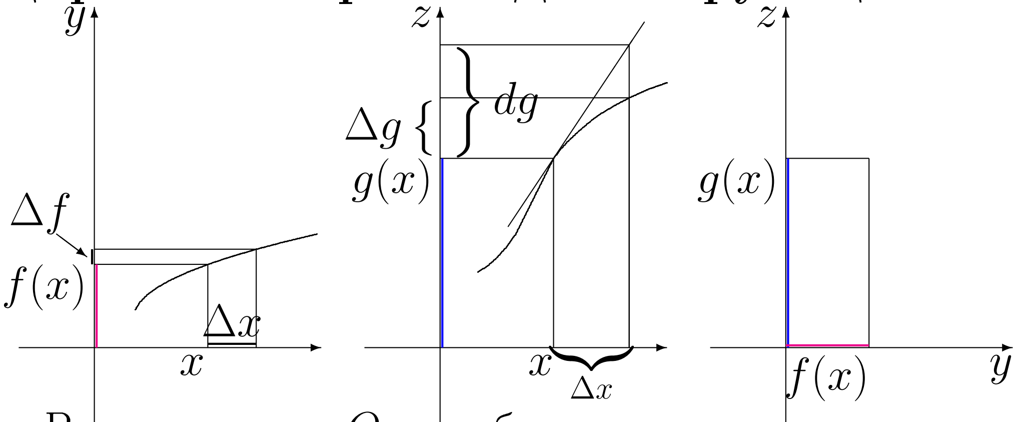


Произведение $f(x)g(x)$ будем трактовать как площадь. Поэтому значения функций f и g будем откладывать на разных осях.

Зададим приращение аргумента Δx, $\quad \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$.

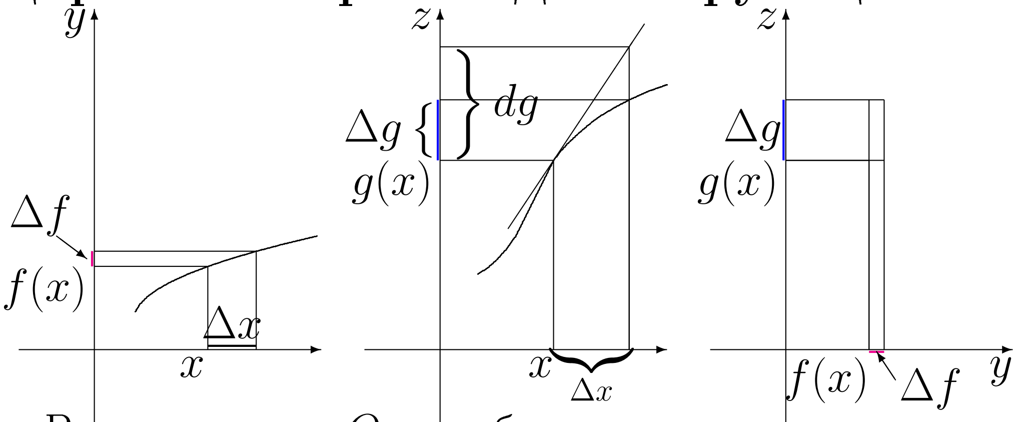
В данном случае Δg сильно отличается от dg, но при малых значениях Δx эта разница «почти исчезнет».

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



В плоскости yOz изобразим прямоугольник, площадь которого равна $f(x)g(x)$.

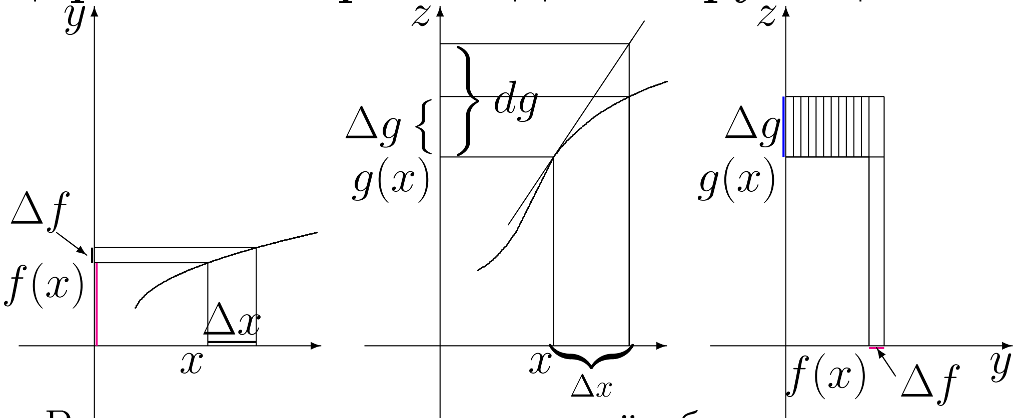
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



В плоскости yOz изобразим прямоугольник, площадь которого равна $f(x)g(x)$.

Площадь большого прямоугольника равна $f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)$.

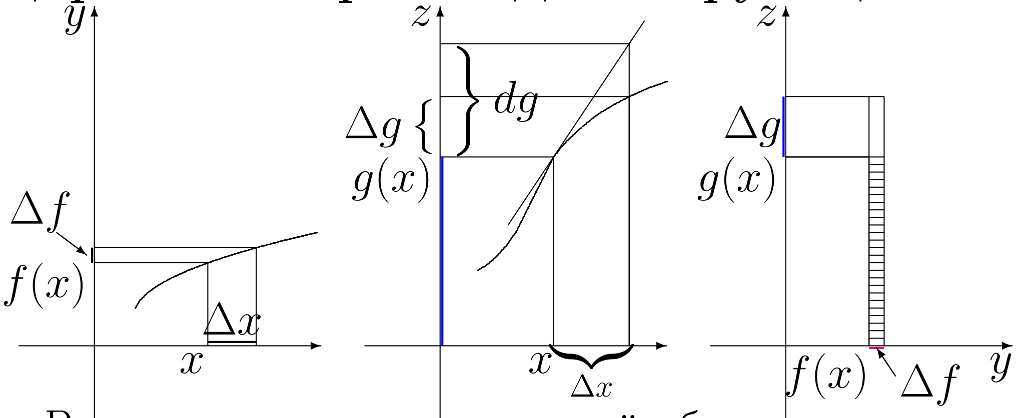
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



Вычисляя разность площадей «большого» и «маленького» прямоугольников, получаем

$$f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g +$$

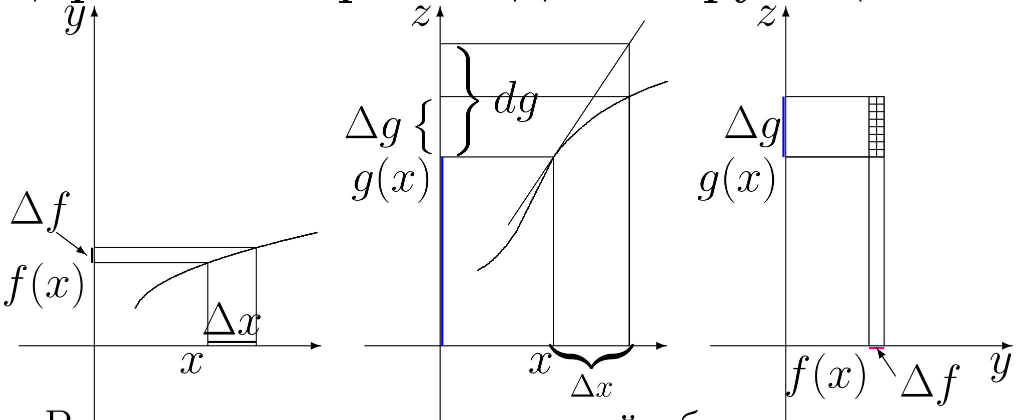
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



Вычисляя разность площадей «большого» и «маленького» прямоугольников, получаем

$$f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g + \Delta f g(x) +$$

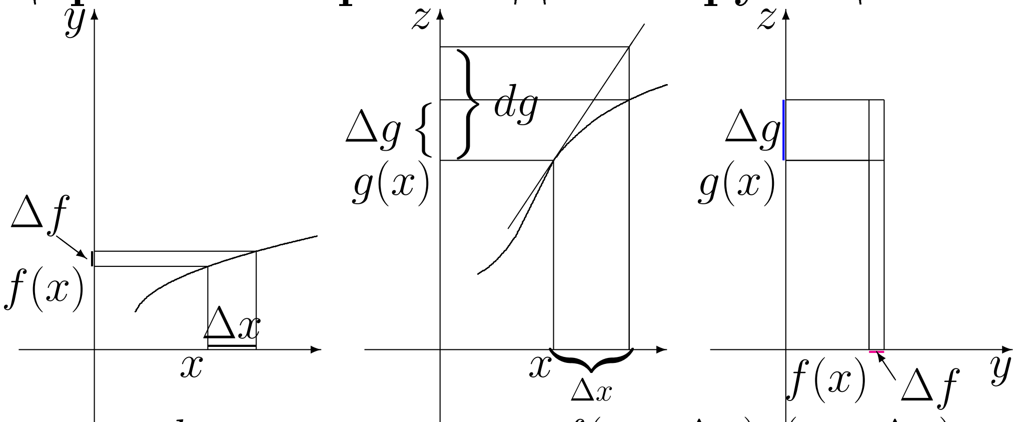
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



Вычисляя разность площадей «большого» и «маленького» прямоугольников, получаем

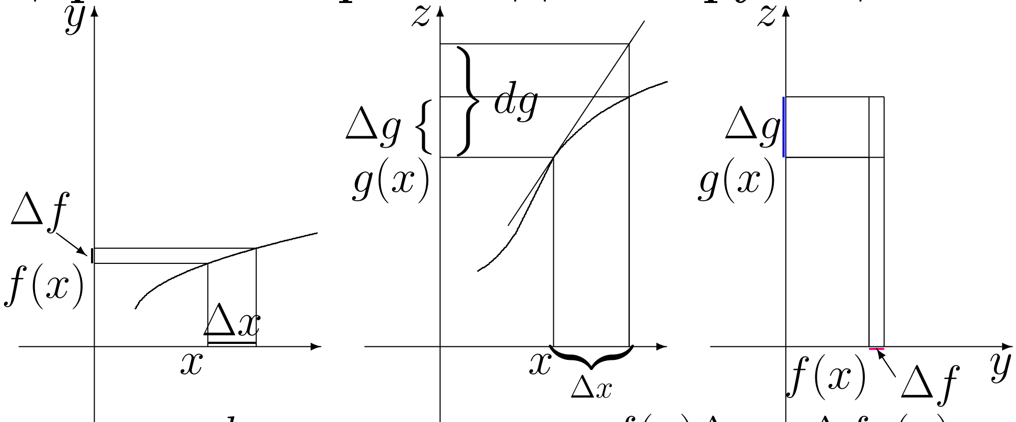
$$f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g + \Delta f g(x) + \Delta f \Delta g.$$

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



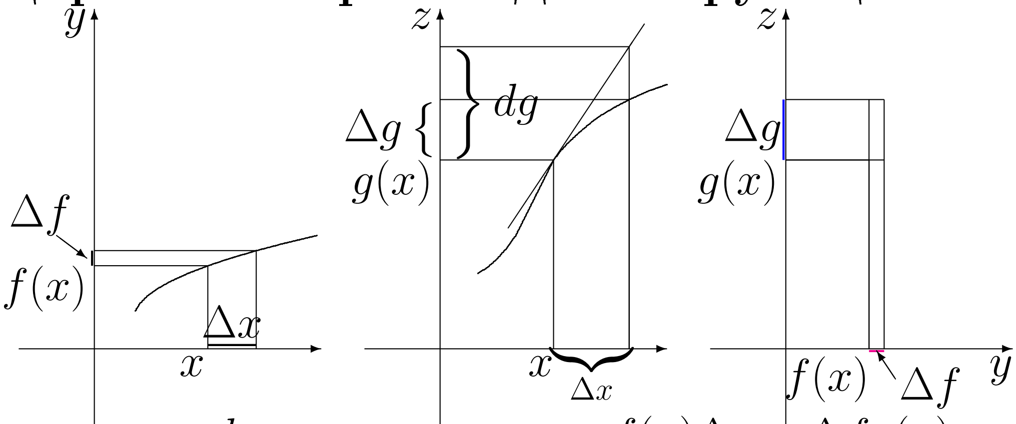
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta g + \Delta f g(x) + \Delta f \Delta g}{\Delta x} =$$

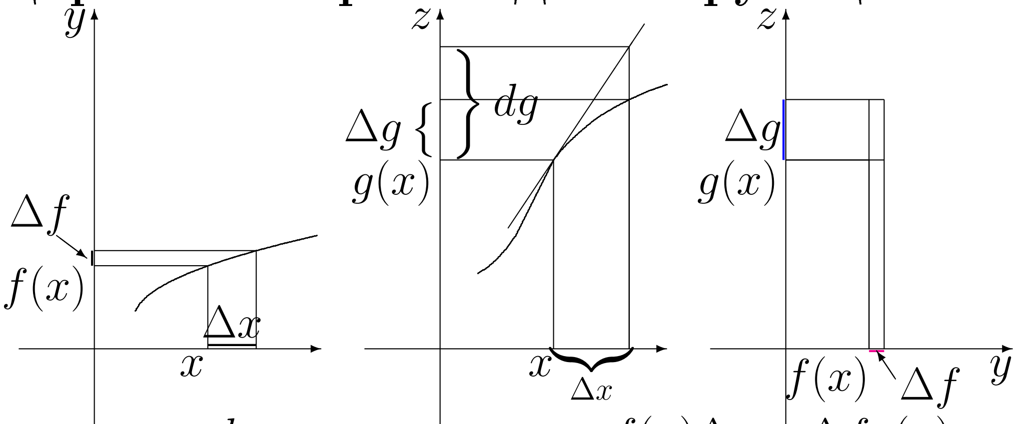
IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta g + \Delta f g(x) + \Delta f \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)(dg + \alpha(\Delta x)) + (df + \beta(\Delta x))g(x) + (df + \beta(\Delta x))(dg + \alpha(\Delta x))}{\Delta x} =$$

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций

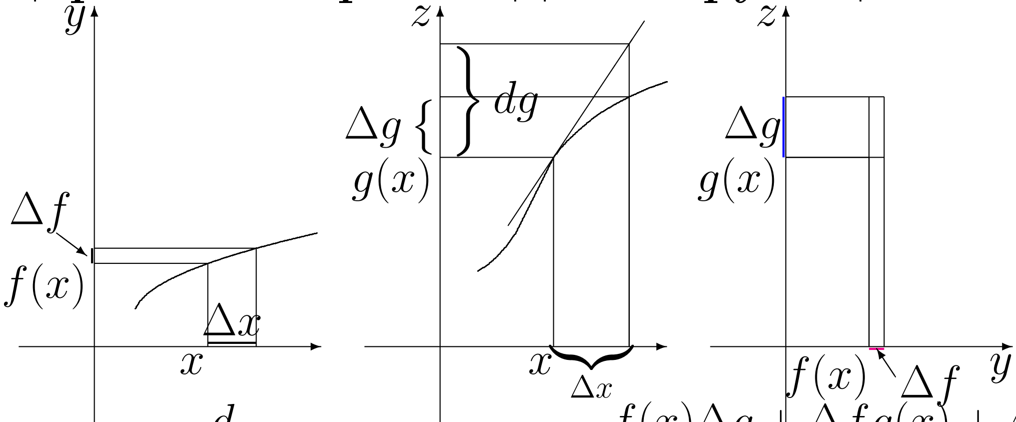


$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta g + \Delta f g(x) + \Delta f \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(dg+\alpha(\Delta x)) + (df+\beta(\Delta x))g(x) + (df+\beta(\Delta x))(dg+\alpha(\Delta x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\,dg + df\,g(x) + f(x)\alpha(\Delta x) + \beta(\Delta x)g(x) + (df+\beta(\Delta x))(dg+\alpha(\Delta x))}{\Delta x} =$$

IV.3.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования произведения функций



$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta g + \Delta f g(x) + \Delta f \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)(dg + \alpha(\Delta x)) + (df + \beta(\Delta x))g(x) + (df + \beta(\Delta x))(dg + \alpha(\Delta x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\, dg + df\, g(x) + f(x)\alpha(\Delta x) + \beta(\Delta x)g(x) + (df + \beta(\Delta x))(dg + \alpha(\Delta x))}{\Delta x} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

IV.3.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) =$$

IV.3.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

IV.3.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

IV.3.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)g(x)}{\Delta x} =$$

IV.3.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} +$$

$$+ \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) g(x) =$$

IV.3.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} +$$

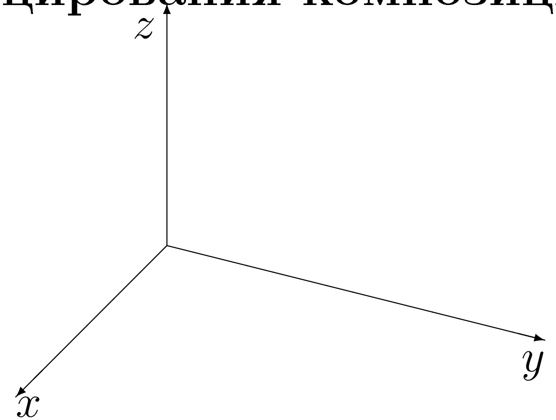
$$+ \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) g(x) =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

IV.4. Вывод формулы дифференцирования композиции функций

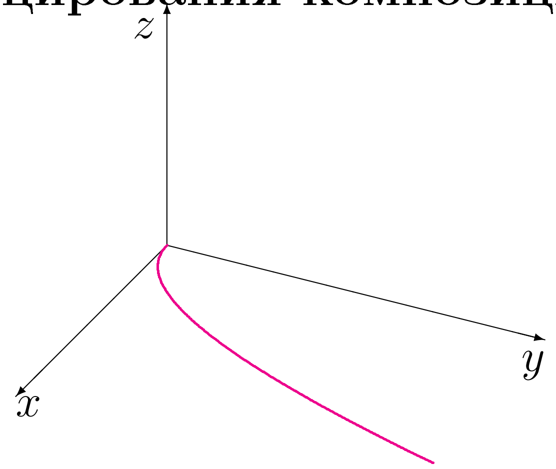
Мы рассмотрим два вывода формулы: геометрический и аналитический.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



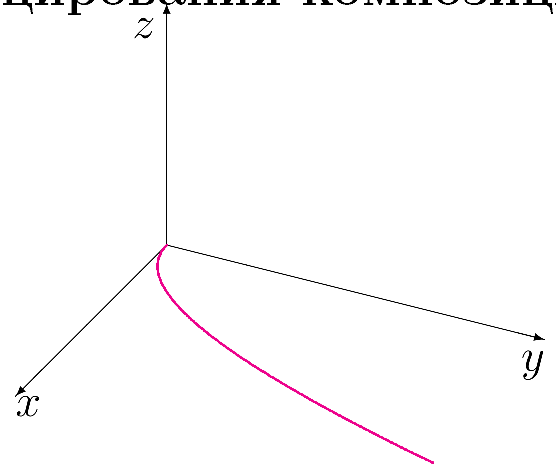
Рассмотрим систему координат $Oxyz$ в пространстве.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



В плоскости $Oxyz$ изобразим график $y = f(x)$.

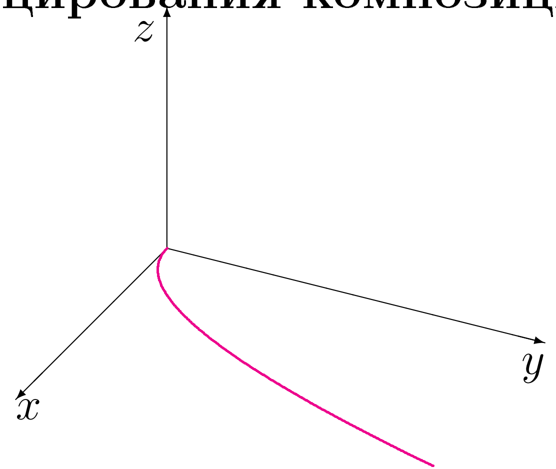
IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



В плоскости $Oxyz$ изобразим график $y = f(x)$.

Если координаты $(x; y; z)$ точки удовлетворяют уравнению $y = f(x)$, то при любом значении z она по-прежнему будет удовлетворять этому уравнению.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций

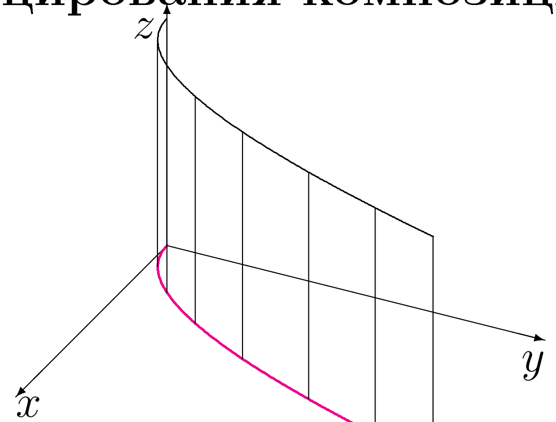


В плоскости $Oxyz$ изобразим график $y = f(x)$.

Если координаты $(x; y; z)$ точки удовлетворяют уравнению $y = f(x)$, то при любом значении z она по-прежнему будет удовлетворять этому уравнению.

Значит, уравнению $y = f(x)$ соответствует

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций

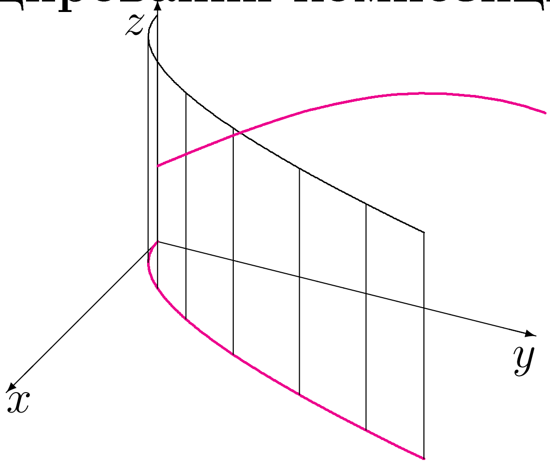


В плоскости $Oxyz$ изобразим график $y = f(x)$.

Если координаты $(x; y; z)$ точки удовлетворяют уравнению $y = f(x)$, то при любом значении z она по-прежнему будет удовлетворять этому уравнению.

Значит, уравнению $y = f(x)$ соответствует *цилиндрическую поверхность*.

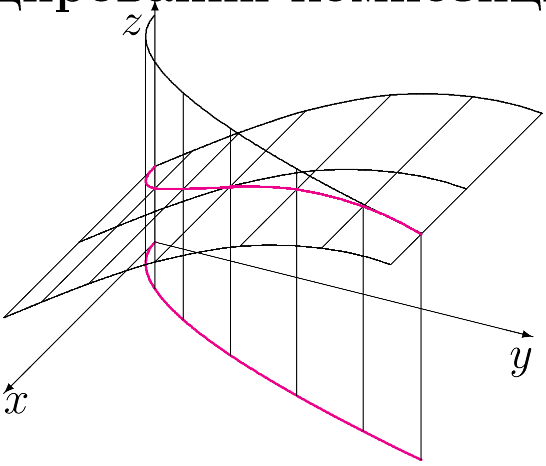
IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



Уравнению $y = f(x)$ соответствует *цилиндрическая поверхность*.

Теперь изобразим график $z = g(y)$.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций

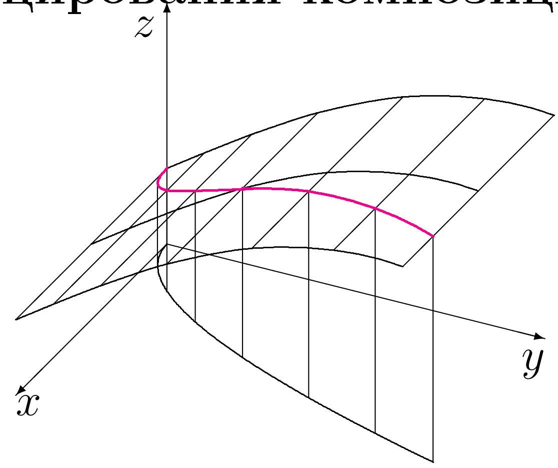


Уравнению $y = f(x)$ соответствует *цилиндрическая поверхность*.

Теперь изобразим график $z = g(y)$.

Аналогично получаем, что уравнению $z = g(y)$ также соответствует *цилиндрическая поверхность*.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций

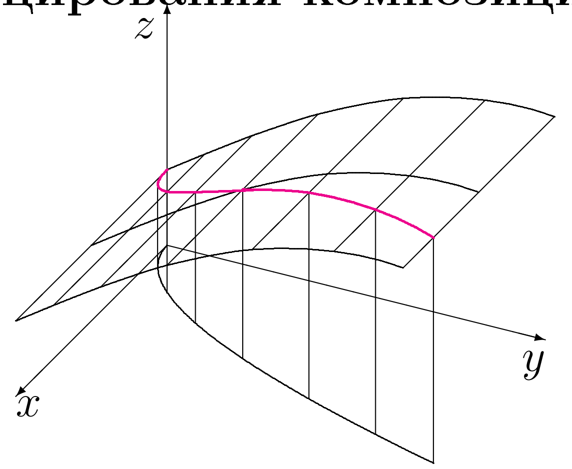


Уравнению $y = f(x)$ соответствует *цилиндрическая поверхность*.

Теперь изобразим график $z = g(y)$.

Аналогично получаем, что уравнению $z = g(y)$ также соответствует *цилиндрическая поверхность*.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



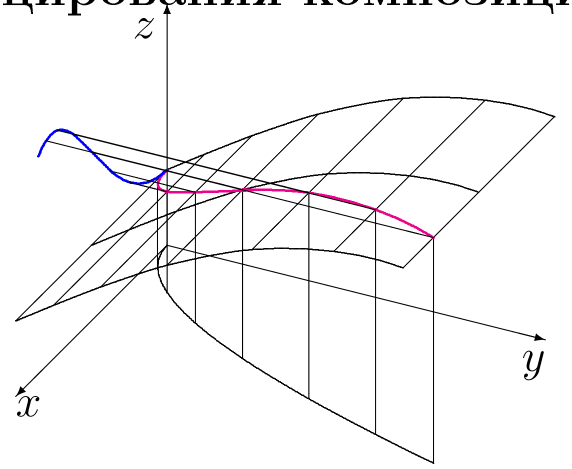
Уравнению $y = f(x)$ соответствует *цилиндрическая поверхность*.

Уравнению $z = g(y)$ также соответствует

цилиндрическая поверхность.

Для того, чтобы построить график функции $h(x) = g(f(x))$, достаточно

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



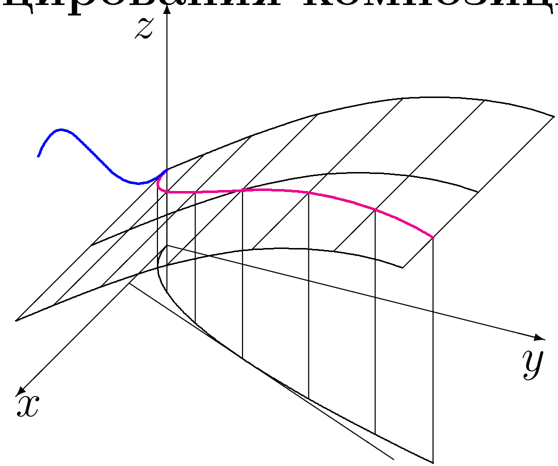
Уравнению $y = f(x)$ соответствует *цилиндрическая поверхность*.

Уравнению $z = g(y)$ также соответствует

цилиндрическая поверхность.

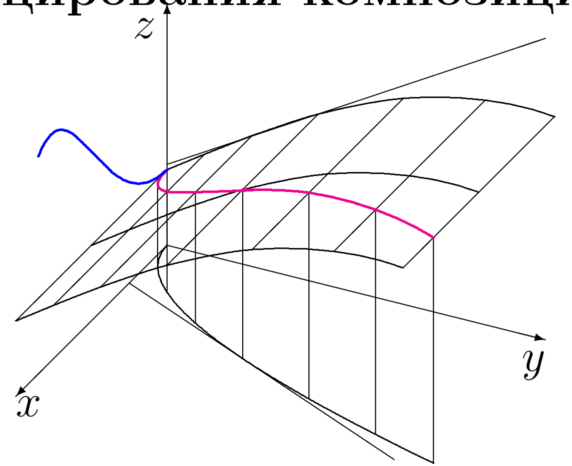
Для того, чтобы построить график функции $h(x) = g(f(x))$, достаточно спроецировать линию $\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(y) \end{cases}$ на плоскость xOz.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



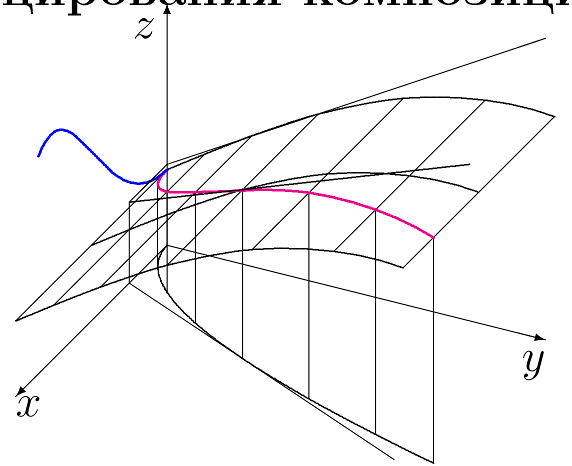
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



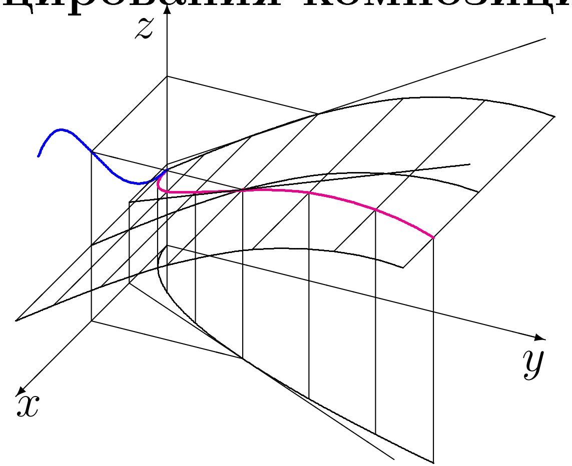
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



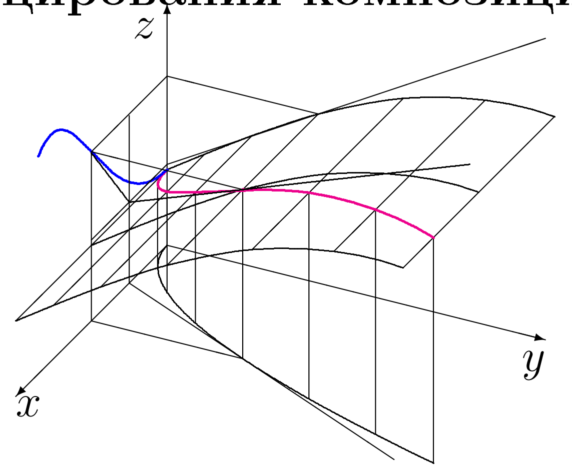
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



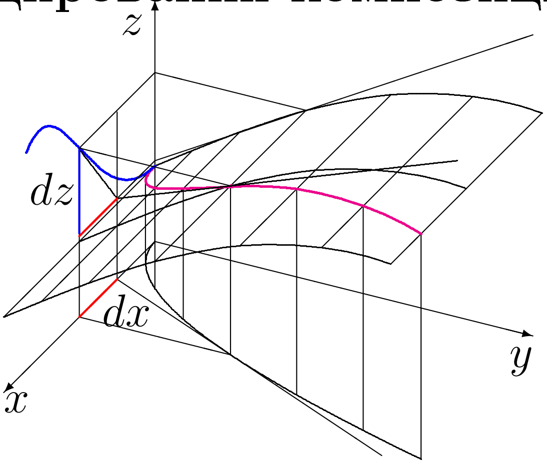
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



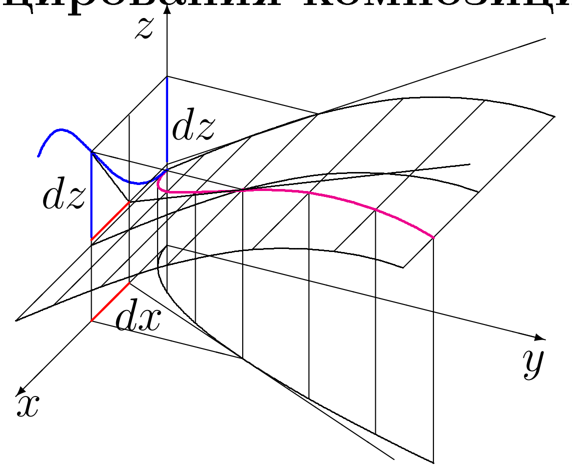
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



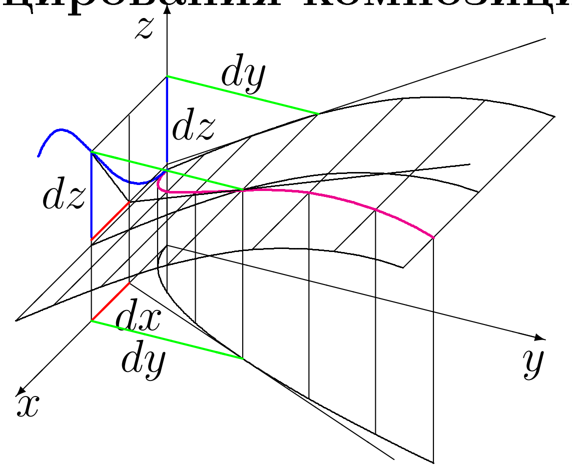
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



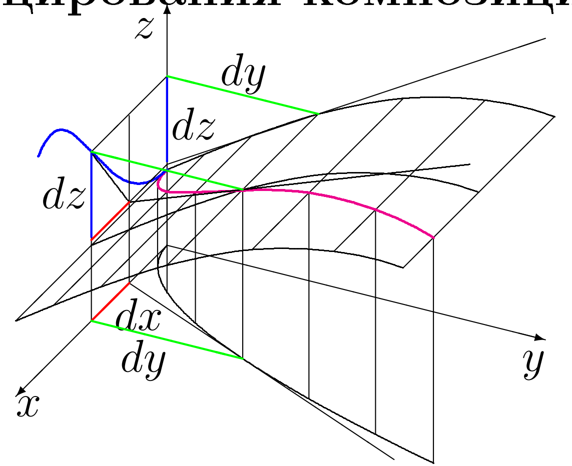
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



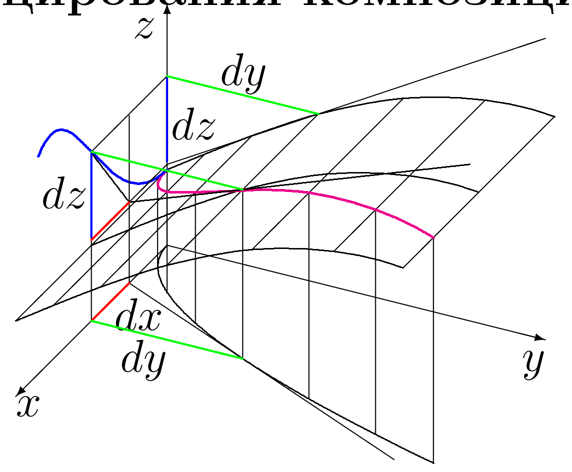
Проведем соответствующие касательные.

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



Пусть $h(x) = g(f(x))$.

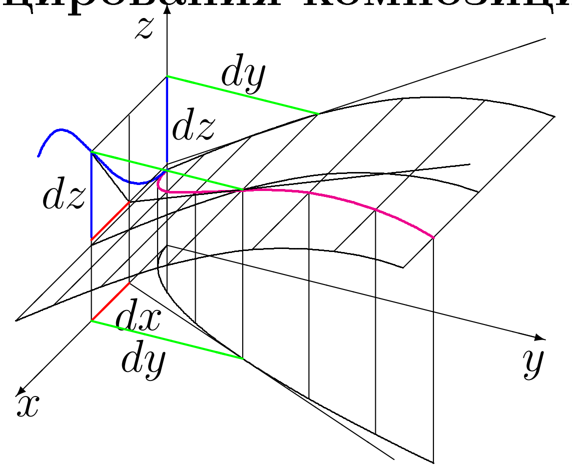
IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$dz = h'(x)\,dx =$

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций

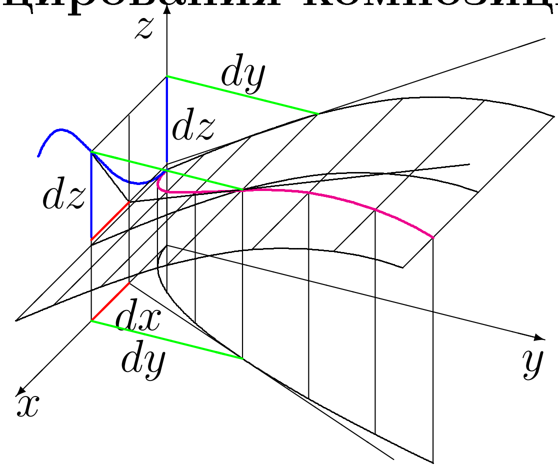


Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$dz = h'(x)\,dx =$

$= g'(y)\Big|_{y=f(x)}\,dy =$

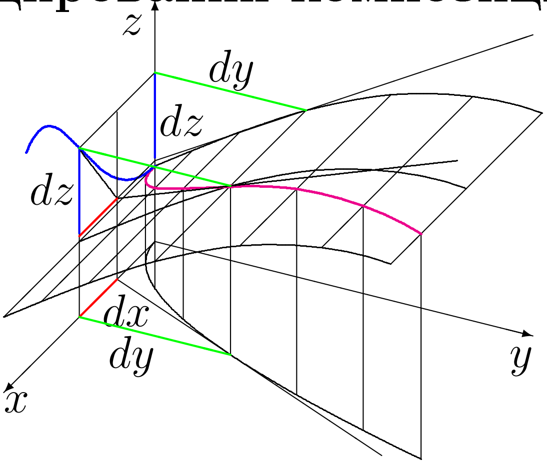
IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$dz = h'(x)\,dx =$$
$$= g'(y)\Big|_{y=f(x)} dy =$$
$$= g'(y)\Big|_{y=f(x)} f'(x)\,dx.$$

IV.4.1. Геометрический вывод формулы дифференцирования композиции функций



Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$dz = h'(x)\,dx =$

$= g'(y)\Big|_{y=f(x)}\,dy =$

$= g'(y)\Big|_{y=f(x)}\,f'(x)\,dx.$

Следовательно,

$h'(x) = g'(y)\Big|_{y=f(x)}\,f'(x)\,dx.$

IV.4.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования композиции функций

Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$h'(x) =$$

IV.4.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования композиции функций

Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(g(f(x)) =$$

IV.4.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования композиции функций

Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(g(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{\Delta x} =$$

IV.4.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования композиции функций

Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(g(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

IV.4.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования композиции функций

Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(g(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

IV.4.2. Аналитический вывод формулы дифференцирования композиции функций

Пусть $h(x) = g(f(x))$.

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(g(f(x)) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= g'(y)\Big|_{y=f(x)} f'(x)\, dx.$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

Полученные знания позволяют без труда получить формулу дифференцирования частного.

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\right)' =$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\right)' = f'(x)\cdot(g(x))^{-1} +$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\right)' = f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \left((g(x))^{-1}\right)' =$$

$$=$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\right)' = f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot\left((g(x))^{-1}\right)' =$$

$$= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot(-1)\left((g(x))^{-2}\right)\cdot g'(x) =$$

$$=$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\right)' = f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \left((g(x))^{-1}\right)' =$$

$$= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot (-1) \left((g(x))^{-2}\right) \cdot g'(x) =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} =$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\right)' = f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot\left((g(x))^{-1}\right)' =$$

$$= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot(-1)\left((g(x))^{-2}\right)\cdot g'(x) =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

IV.5. Вывод формулы производной частного двух функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\right)' = f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot\left((g(x))^{-1}\right)' =$$

$$= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot(-1)\left((g(x))^{-2}\right)\cdot g'(x) =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Итак, $\left(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$

IV.6. Теорема о производной суммы, произведения, частного и суперпозиции (композиции) функций

Теорема 15.

1) $(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x);$

2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$

4) $(g\left(f(x)\right))' = g'(y)\Big|_{y=g(x)} \cdot f'(x).$

Эту теорему мы уже почти доказали (перейдите по гиперссылкам — номерам формул в формулировке), см. также **свойство линейности предела**.

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$f'(x) =$

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$f'(x) =$

$(\ln(f(x)))' =$

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$f'(x) =$

$(\ln(f(x)))' =$

По **формуле дифференцирования суперпозиции функций...**

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$f'(x) =$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)}.$$

По **формуле дифференцирования суперпозиции функций...**

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$f'(x) =$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

По **формуле дифференцирования суперпозиции функций...**

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))' =$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

По **формуле дифференцирования суперпозиции функций...**

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно существенно упростить.

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))' = f(x) \cdot \frac{d\ln(f(x))}{dx}. \tag{24}$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

По **формуле дифференцирования суперпозиции функций...**

IV.7. «Логарифмическое дифференцирование»

В случае, когда дифференцируемая функция представляет собой произведение большого числа слагаемых или задана выражением вида $\alpha(x)^{\beta(x)}$, вычисление производной можно упростить.

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))' = f(x) \cdot \frac{d\ln(f(x))}{dx}. \qquad (24)$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Дифференцирование с использованием формулы (24) называется **логарифмическим дифференцированием**.

Рассмотрим пример?

IV.8. Производная функции, заданной параметрически

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

IV.8. Производная функции, заданной параметрически

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Примерами явного задания функции выражением являются формулы вида $y = x^2 + 2x - 3, \quad f(x) = \sqrt{1 - x}$ и т.п.

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\left\{ \right.$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \\ \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$= \frac{dy}{dt} =$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} =$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} =$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} =$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} =$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:**

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} =$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} =$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Что неправильно в этой формуле?

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Вспомним главный вопрос, который мы должны были задать себе в первую очередь:

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Вспомним главный вопрос, который мы должны были задать себе в первую очередь:

в каком виде представим ответ?

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

В данном случае производную фактически мы вводим как функцию, заданную параметрически!

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Значит, ответ надо представить в виде: $\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}} \right.$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Значит, ответ надо представить в виде: $\begin{cases} x = \\ \dfrac{dy}{dx} = \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}.$

Значит, ответ надо представить в виде: $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Значит, ответ надо представить в виде: $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \end{cases}$

IV.8.1. Вывод формулы для дифференцирования параметрически заданной функции

Зависимость величины y от величины x может быть задана не только явным выражением.

Рассмотрим **параметрическое задание функции:** $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$

Тогда по **формуле дифференцирования суперпозиции (композиции) функций**

$$\beta'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \alpha'(t).$$

Отсюда получаем **формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Значит, ответ надо представить в виде: $\begin{cases} x = \alpha(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}. \end{cases}$

IV.8.2. Теорема о производной параметрически заданной функции

Теорема 16. *Если функция* $y = f(x)$ *задана параметрически:* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ *то производная* $\dfrac{dy}{dx}$ *может быть* ***задана параметрически:***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}. \end{cases} \tag{25}$$

Доказательство. Теорема доказана ранее.

Рассмотрим пример?

IV.8.2. Теорема о производной параметрически заданной функции

Теорема 16. *Если функция* $y = f(x)$ *задана параметрически:* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ *то производная* $\dfrac{dy}{dx}$ *может быть* ***задана параметрически:***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}. \end{cases} \qquad (25)$$

Далее, после изучения функций нескольких переменных, будет рассмотрена **формула дифференцирования функций**, заданных еще одним способом, точнее, так называемых неявно заданных.

V. Применения понятия производной

Мы, как это обычно и делается, будем отождествлять понятия *число* и *точка на числовой прямой*.

V.1. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ численно равна *тангенсу угла* наклона касательной к графику функции f в точке плоскости с координатами $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Уравнение касательной к графику функции f в точке плоскости с координатами $\big(x_0, f(x_0)\big)$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{26}$$

Механический смысл производной: если точка движется по оси и в каждый момент времени t точка на этой оси имеет координату $f(t)$, то $f'(t_0)$ — это значение мгновенной скорости точки в момент времени t_0.

V.2. Достаточное условие монотонности

Теорема 17. *Пусть $f(x)$ дифференцируема при $x = x_0$. Тогда справедливы утверждения:*

1. *если $f'(x_0) > 0$, то в некоторой* ***окрестности точки*** *x_0 функция $f(x)$ монотонно возрастает;*
2. *если $f'(x_0) < 0$, то в некоторой* ***окрестности точки*** *x_0 функция $f(x)$ монотонно убывает.*

V.3. Точка минимума

Определение 18. *Говорят, что в точке x_0 функция f имеет* **локальный минимум** *тогда и только тогда, когда найдется такая* ***ε-окрестность*** $U_\varepsilon(x_0)$ *точки x_0, что, во-первых, функция f определена в этой* ***ε-окрестности****, и, во-вторых,*

$$\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \quad f(x_0) < f(x).$$

V.3. Точка минимума

Определение 18. *Говорят, что в точке x_0 функция f имеет* **локальный минимум** *тогда и только тогда, когда найдется такая* ***ε-окрестность*** $U_\varepsilon(x_0)$ *точки x_0, что, во-первых, функция f определена в этой* ***ε-окрестности****, и, во-вторых,*

$$\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \quad f(x_0) < f(x).$$

Если в этом определении в условии «во-вторых» неравенство $f(x_0) < f(x)$ заменить на $f(x_0) > f(x)$, то точка x_0 будет называться, естественно, точкой **локального максимума** функции $f(x)$.

V.3. Точка минимума

Определение 18. *Говорят, что в точке x_0 функция f имеет* **локальный минимум** *тогда и только тогда, когда найдется такая* ***ε-окрестность*** *$U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, что, во-первых, функция f определена в этой* ***ε-окрестности****, и, во-вторых,*

$$\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \quad f(x_0) < f(x).$$

Иначе говоря, x_0 — точка локального минимума (соответственно максимума) тогда и только тогда, когда существует такое положительное число ε, что для любого x с условием $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$).

V.4. Точка экстремума

Определение 19. *Число* x_0 *называется* **точкой экстремума** *функции* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда это точка локального минимума или локального максимума этой функции.*

V.5. Необходимое условие экстремума

Теорема 18. *Если функция $f(x)$ определена в* ***окрестности*** *числа x_0 и x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

V.5. Необходимое условие экстремума

Теорема 18. *Если функция $f(x)$ определена в* ***окрестности*** *числа x_0 и x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

Определение 20. *Пусть функция f определена и дифференцируема в некоторой* ***окрестности*** *числа x_0, за исключением, быть может, самого числа x_0, причем $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Тогда число x_0 называется* **критической точкой** *функции f.*

Рассмотрим пример?

V.5. Теорема об экстремуме функции на отрезке

Теорема 19. *Если функция f определена в каждой точке отрезка $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, то максимальное и минимальное значение функции f на этом отрезке достигается либо в тех критических точках функции f, которые принадлежат отрезку $[a;b]$, либо на концах отрезка.*

V.6. Выпуклость и вогнутость

Теорема 20. *График функции f называется* **выпуклым** *(выпуклым вверх) на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда для любых не равных между собой чисел x_0 и x из (a, b) имеем*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{27}$$

то есть точка графика с координатами $\big(x, f(x)\big)$ лежит ниже точки с координатами (x, y), принадлежащей касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

V.6. Выпуклость и вогнутость

Теорема 20. *График функции f называется* **выпуклым** *(выпуклым вверх) на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда для любых не равных между собой чисел x_0 и x из (a, b) имеем*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{27}$$

то есть точка графика с координатами $\big(x, f(x)\big)$ лежит ниже точки с координатами (x, y), принадлежащей касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

Если в этом определении неравенство (27) заменить неравенством

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{28}$$

то график функции f называется **вогнутым** (выпуклым вниз) на интервале (a, b).

V.6. Выпуклость и вогнутость

Теорема 20. *График функции f называется* **выпуклым** *(выпуклым вверх) на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда для любых не равных между собой чисел x_0 и x из (a,b) имеем*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{27}$$

то есть точка графика с координатами $\big(x, f(x)\big)$ лежит ниже точки с координатами (x,y), принадлежащей касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

Для вогнутого графика любая точка графика с координатами $\big(x, f(x)\big)$ лежит выше точки с координатами (x,y), принадлежащей касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

V.7. Теоремы о монотонности, выпуклости и вогнутости

Теорема 21. *Если на интервале* (a, b) *функция* f *дифференцируема, то функция* f *возрастает (соответственно убывает) на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $f'(x) > 0$ *(соответственно* $f'(x) < 0$*).*

V.7. Теоремы о монотонности, выпуклости и вогнутости

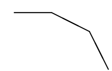
Теорема 21. *Если на интервале* (a, b) *функция* f *дифференцируема, то функция* f *возрастает (соответственно убывает) на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $f'(x) > 0$ *(соответственно* $f'(x) < 0$*).*

Теорема 22. *Если на интервале* (a, b) *функция* f *дважды дифференцируема, то график функции* f *вогнутый (соответственно выпуклый) на* (a, b) *тогда и только тогда, когда для любого* $x \in (a, b)$ *имеет место неравенство* $f''(x) > 0$ *(соответственно* $f''(x) < 0$*).*

V.7. Теоремы о монотонности, выпуклости и вогнутости

Теорема 21. *Если на интервале (a, b) функция f дифференцируема, то функция f возрастает (соответственно убывает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$ (соответственно $f'(x) < 0$).*

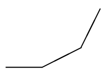
Теорема 22. *Если на интервале (a, b) функция f дважды дифференцируема, то график функции f вогнутый (соответственно выпуклый) на (a, b) тогда и только тогда, когда для любого $x \in (a, b)$ имеет место неравенство $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$).*

Утверждение интуитивно очевидно: если вторая производная в точке x_0 отрицательна, то первая производная убывает. Значит, при смещении точки графика вправо угол наклона касательной к этому графику уменьшается, получается конфигурация типа  (изображены «кусочки» касательных), то есть график функции в **окрестности** точки x_0 — выпуклый (выпуклый вверх).

V.7. Теоремы о монотонности, выпуклости и вогнутости

Теорема 21. *Если на интервале (a, b) функция f дифференцируема, то функция f возрастает (соответственно убывает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$ (соответственно $f'(x) < 0$).*

Теорема 22. *Если на интервале (a, b) функция f дважды дифференцируема, то график функции f вогнутый (соответственно выпуклый) на (a, b) тогда и только тогда, когда для любого $x \in (a, b)$ имеет место неравенство $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$).*

Если же вторая производная в точке x_0 положительна, то первая производная возрастает. Значит, при смещении точки графика вправо угол наклона касательной к этому графику растет, получается конфигурация типа  (вновь изображены «кусочки» касательных), то есть график функции в **окрестности** точки x_0 — вогнутый (выпуклый вниз).

V.8. Асимптоты

Мы рассмотрим простейший вариант изучения *асимптотического поведения* функции (или графика функции).

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \tag{29}$$

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \qquad (29)$$

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax - B\right) = 0. \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax - B\right) = 0,$$

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \tag{29}$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - Ax - B) = 0,$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \qquad (29)$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0, \quad \left\{ \right.$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \qquad (29)$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0, \quad \begin{cases} \\ B = \end{cases}$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \qquad (29)$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0, \quad \begin{cases} \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = 0. \end{cases}$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0, \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - Ax - B}{x} = \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = 0. \end{cases}$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0, \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - Ax - B}{x} = 0, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = 0. \end{cases}$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - Ax - B\right) = 0. \tag{29}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - Ax\right). \end{cases} \tag{30}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - Ax - B\right) = 0, \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x) - Ax - B}{x} = 0, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - Ax\right) = 0. \end{cases}$$

Получаем формулы для вычисления коэффициентов наклонных асимптот...

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - Ax - B\right) = 0. \tag{29}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax\right). \end{cases} \tag{30}$$

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции)* f *называется функция (или прямая)* $y = Ax + B$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax - B\right) = 0. \tag{29}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax\right). \end{cases} \tag{30}$$

Аналогично определяются **левая** и **правая** асимптоты:

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \tag{29}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - Ax)\,. \end{cases} \tag{30}$$

Аналогично определяются **левая** и **правая** асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax - B) = 0,$

V.8. Асимптоты

Определение 21. Наклонной асимтотой *функции (или графика функции) f называется функция (или прямая) $y = Ax + B$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0. \tag{29}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ B = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - Ax)\,. \end{cases} \tag{30}$$

Аналогично определяются **левая** и **правая** асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax - B) = 0,$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ B = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax)\,. \end{cases}$$

V.9. Схема исследования функции

1. Найти область определения $D(f)$ и, по возможности, область допустимых значений $E(f)$.

V.9. Схема исследования функции

1. Найти область определения $D(f)$ и, по возможности, область допустимых значений $E(f)$.

2. Проверить функцию на наличие специфических свойств: (не)четность, периодичность.

V.9. Схема исследования функции

1. Найти область определения $D(f)$ и, по возможности, область допустимых значений $E(f)$.

2. Проверить функцию на наличие специфических свойств: (не)четность, периодичность.

3. Вычислить производную функции f, найти все точки $u_0, u_1, \ldots$, в которых производная не определена или равна 0, и концы интервалов, на которых функция f не определена. Построить таблицу для первой производной.

x	$-\infty, u_0$	u_0	(u_0, u_1)	$\ldots$
$f'(x)$	+/-	0/не сущ.	+/-	$\ldots$
$f(x)$	возр./убыв.	min/max/верт.ас.	возр./убыв.	$\ldots$

V.9. Схема исследования функции

4. Вычислить вторую производную функции f, найти все точки $v_0, v_1, \ldots,$ в которых вторая производная не определена или равна 0, и концы интервалов, на которых функция f не определена. Построить таблицу для второй производной.

x	$-\infty, v_0$	v_0	(v_0, v_1)	$\ldots$
$f''(x)$	+/-	0/не сущ.	+/-	$\ldots$
$f(x)$	вып./вогн.	перегиб	вып./вогн.	$\ldots$

V.9. Схема исследования функции

5. Построить график функции. Особо обратить внимание

- на точки, в которых функция не определена. Если предел этой функции при x, стремящемся к этой точке, равен бесконечности, то в этой точке имеем вертикальную асимптоту, то есть вертикальную прямую, которой «прижимается» график функции;

- на точки, в которых производная обращается в бесконечность. Тут может быть вертикальная асимптота (тогда и только тогда, когда это точка из предыдущего пункта) или четыре «исключительных» ситуации:  ;

- на точки, в которых производная не существует. Как правило, в этом случае имеет место описанная выше ситуация, но могут еще быть разные ситуации: «излом» и т.п.

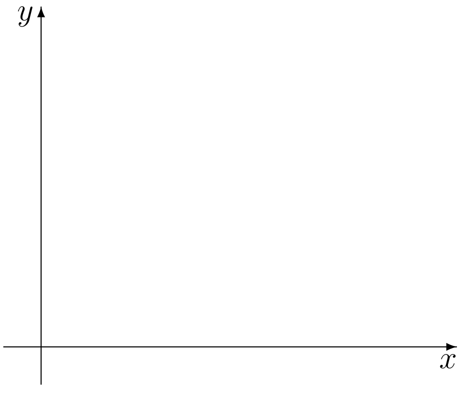
VI. Свойства функций, дифференцируемых на отрезке

Требование непрерывности функции на отрезке оказалось достаточно сильным, чтобы получить из него **весьма глубокие следствия**.

Ясно, что требование существования производной на отрезке является существенно более сильным, с другой стороны, оно обычно выполняется для **элементарных функций**, у которых данный отрезок включается в область определения.

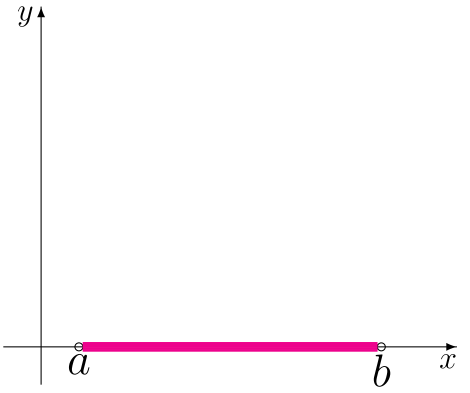
VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.



VI.1. Теорема Ролля (введение)

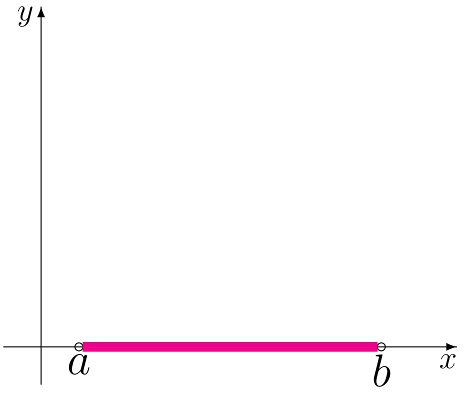
Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.



VI.1. Теорема Ролля (введение)

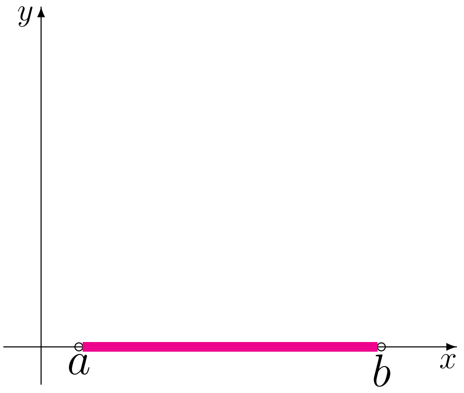
Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.



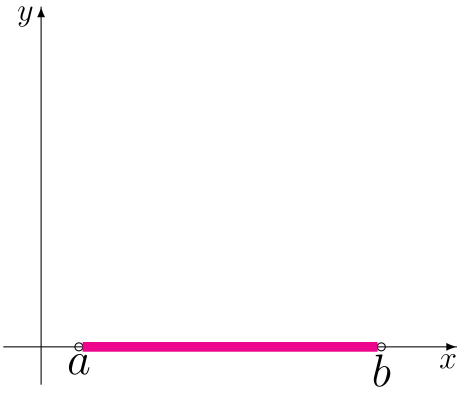
Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**

Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



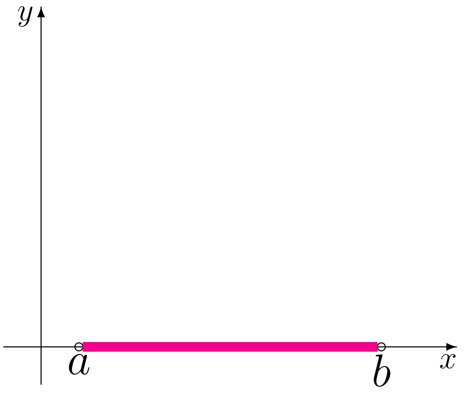
Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.

«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



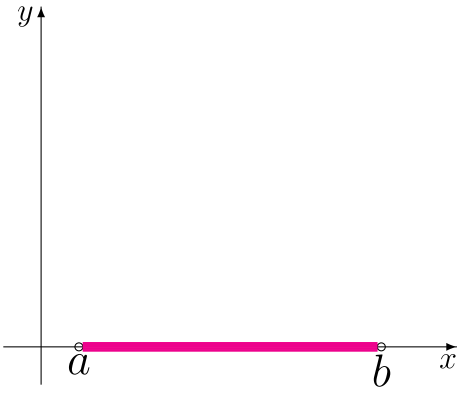
Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.

«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



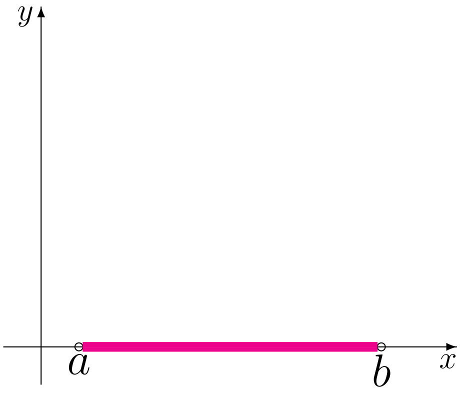
Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.

«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.

«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения

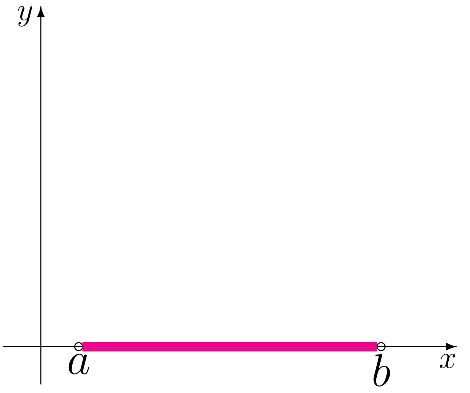
равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

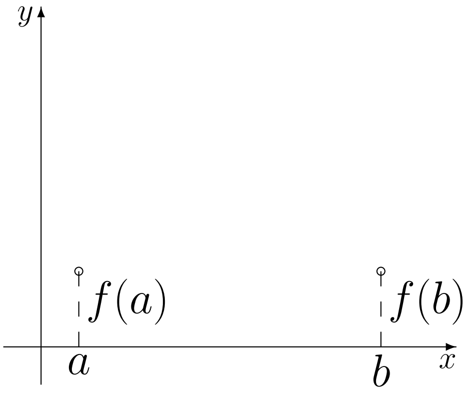
Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения
равны 0 или равны между собой.
Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.



Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**

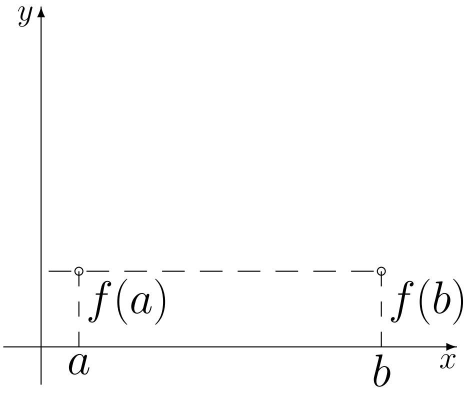
Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения
равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.

«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения

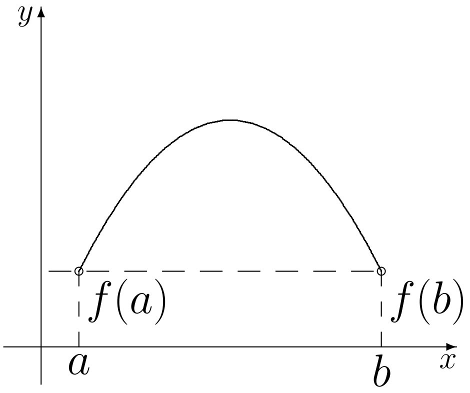
равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Рассмотрим случай, когда функция f имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$.

Наиболее интересны для изучения случаи, в каком-то смысле «экстремальные», см. **базовые исследовательские стратегии.**

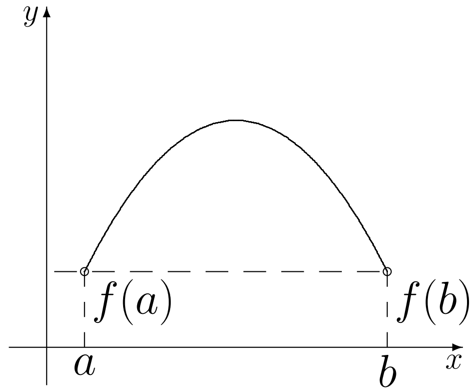


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

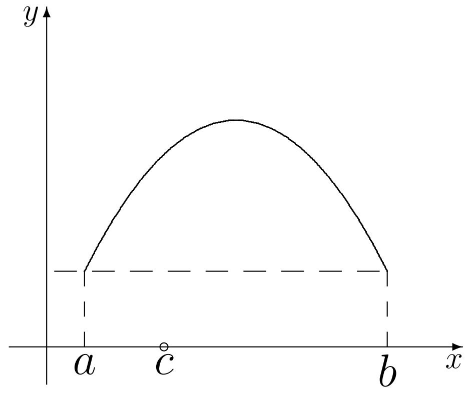
Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения
равны 0 или равны между собой.
Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

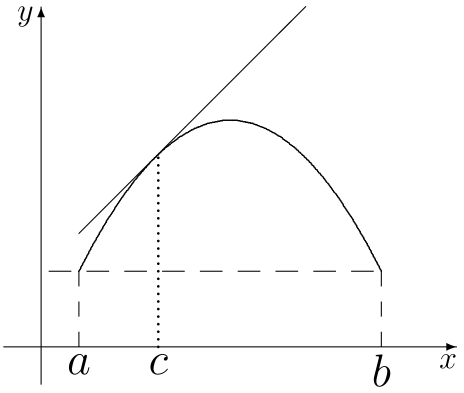


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

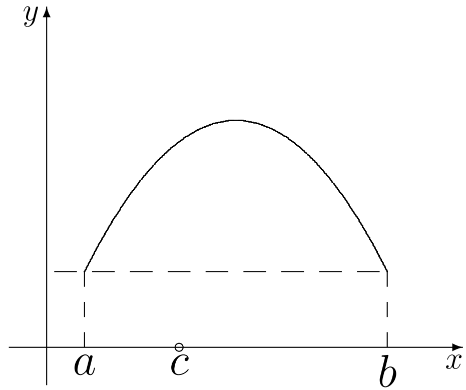
Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.
Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

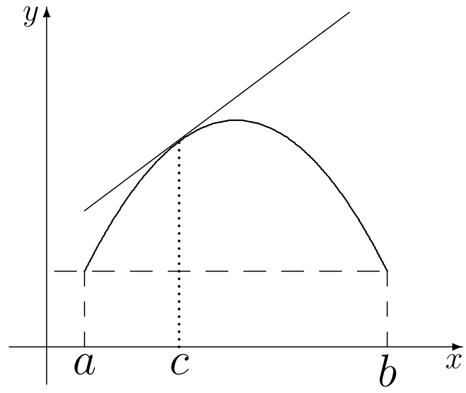


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

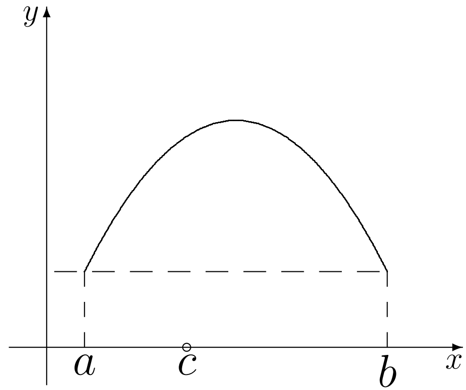


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

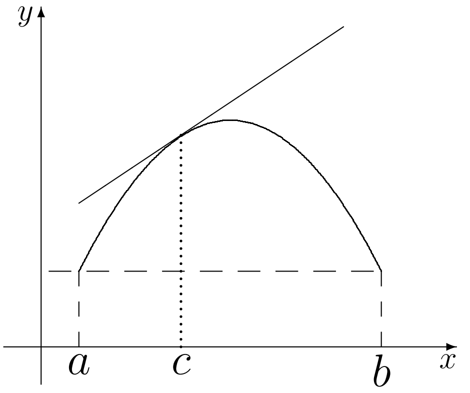


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

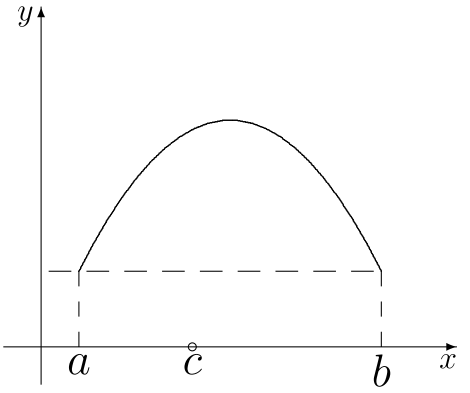


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

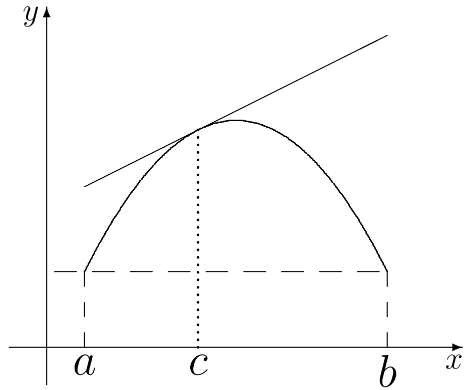


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

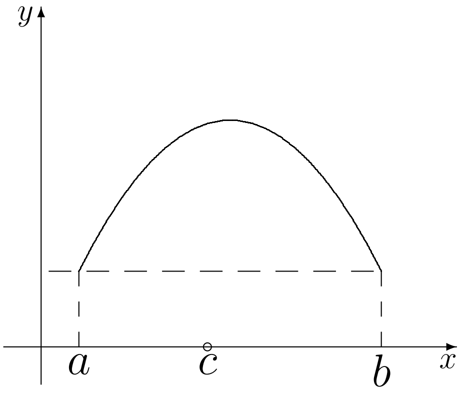


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

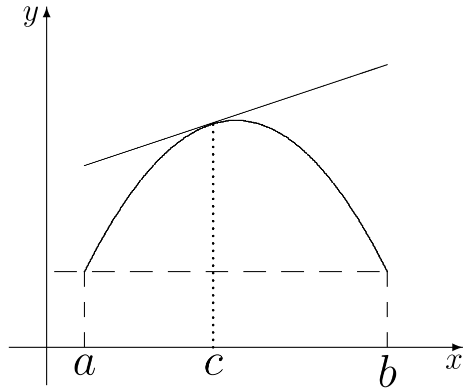


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

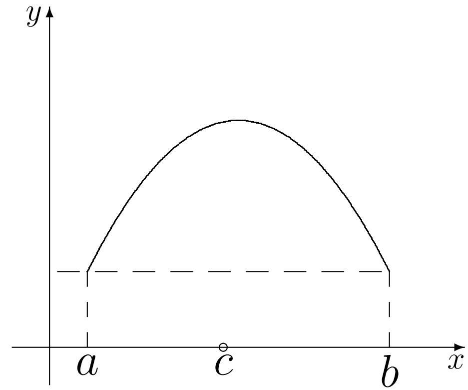
Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.
Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

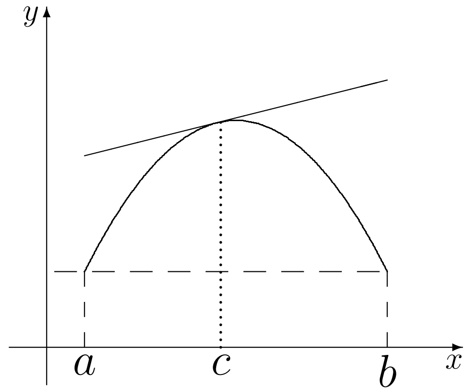


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

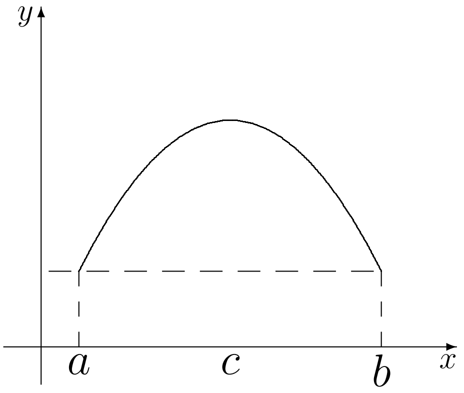
Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.



Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения
равны 0 или равны между собой.
Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

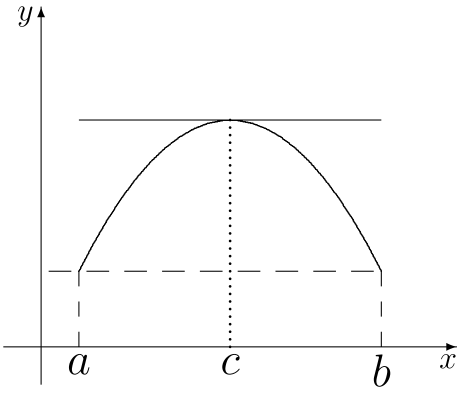


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

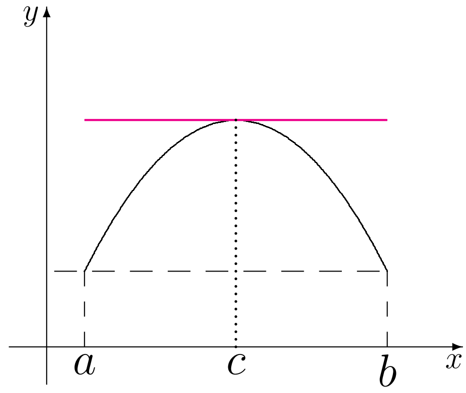


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка. «Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.

Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.
Этот случай является «экстремальным», и, в силу этого, наиболее интересным.

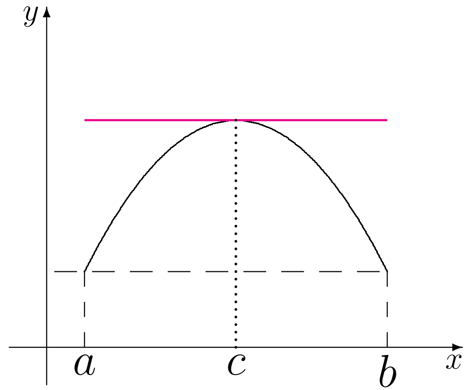


Например, рассмотрим значения функции на концах отрезка.
«Экстремальными» являются случаи, когда эти значения равны 0 или равны между собой.
Рассмотрим ситуацию, когда значения функции на концах отрезка равны между собой.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

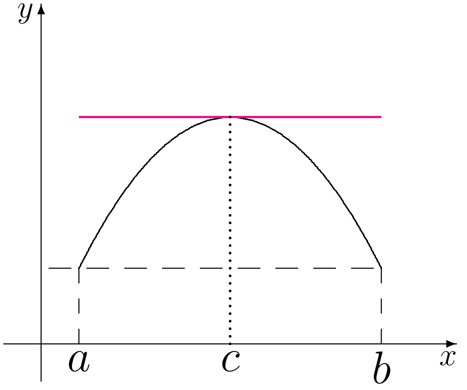
Этот случай является «экстремальным», и, в силу этого, наиболее интересным.



Из рисунка кажется ясным, что в рассматриваемом случае такая точка c обязательно найдётся.

VI.1. Теорема Ролля (введение)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.
Этот случай является «экстремальным», и, в силу этого, наиболее интересным.



Из рисунка кажется ясным, что в рассматриваемом случае такая точка c обязательно найдётся.
Это и является содержанием **теоремы Ролля.**

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если действительнозначная функция действительнозначного аргумента, непрерывная на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируемая на интервале* $(a; b)$, *принимает на концах отрезка равные значения, то на этом интервале найдётся хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.*

Слишком много слов естественного языка...

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *причём* $f(a) = f(b)$, *то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0$.

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причём $f(a) = f(b)$, то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0.$

Мишель Ролль

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причём $f(a) = f(b)$, то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0$.

Доказательство. Если функция **дифференцируема в точке**, то она, очевидно, **непрерывна** в этой точке
(это следует непосредственно из определений).

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$*, причём* $f(a) = f(b)$*, то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0.$

Доказательство. Если функция **дифференцируема в точке**, то она, очевидно, **непрерывна** в этой точке.

Докажите!

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *причём* $f(a) = f(b)$, *то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0.$

Доказательство. Если функция **дифференцируема в точке**, то она, очевидно, **непрерывна** в этой точке.

В силу **теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке** и **теоремы Больцано-Коши** функция f принимает на этом отрезке минимальное и максимальное значения.

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причём $f(a) = f(b)$, то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0.$

Доказательство. Если функция **дифференцируема в точке**, то она, очевидно, **непрерывна** в этой точке.

В силу **теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке** и **теоремы Больцано-Коши** функция f принимает на этом отрезке минимальное и максимальное значения.

Согласно **достаточному условию монотонности** и **необходимому условию экстремума**

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *причём* $f(a) = f(b)$, *то* $\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0.$

Доказательство. Если функция **дифференцируема в точке**, то она, очевидно, **непрерывна** в этой точке.

В силу **теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке** и **теоремы Больцано-Коши** функция f принимает на этом отрезке минимальное и максимальное значения.

Согласно **достаточному условию монотонности** и **необходимому условию экстремума**
$\exists c \in (a;\ b) \quad f'(c) = 0.$

VI.2. Теорема Ролля

Теорема 23. *Если функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, причём $f(a)=f(b)$, то* $\exists c\in(a;\ b)\quad f'(c)=0.$

Доказательство. Если функция **дифференцируема в точке**, то она, очевидно, **непрерывна** в этой точке.

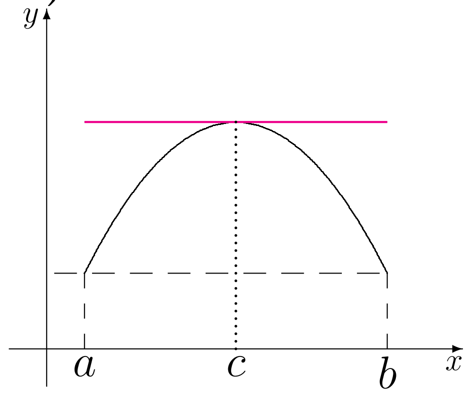
В силу **теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке** и **теоремы Больцано-Коши** функция f принимает на этом отрезке минимальное и максимальное значения.

Согласно **достаточному условию монотонности** и **необходимому условию экстремума**
$\exists c\in(a;\ b)\quad f'(c)=0.$

Теорема доказана.

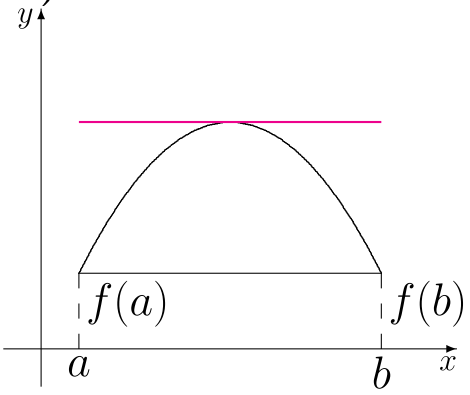
VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Теперь рассмотрим случай, когда значения функции f на краях отрезка отличаются.



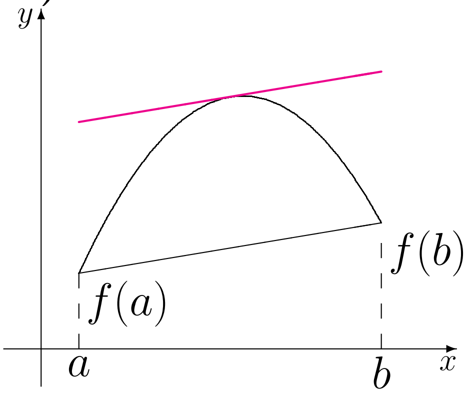
VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Теперь рассмотрим случай, когда значения функции f на краях отрезка отличаются.



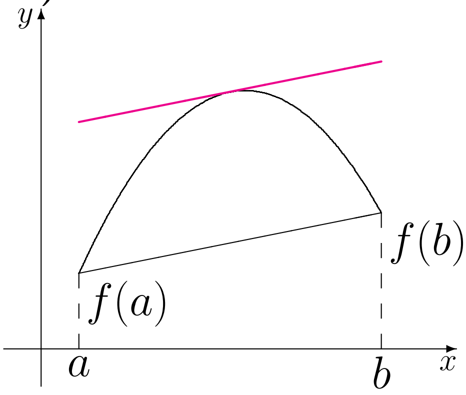
VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Теперь рассмотрим случай, когда значения функции f на краях отрезка отличаются.



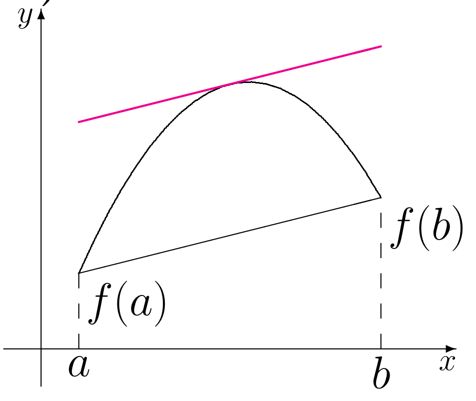
VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Теперь рассмотрим случай, когда значения функции f на краях отрезка отличаются.



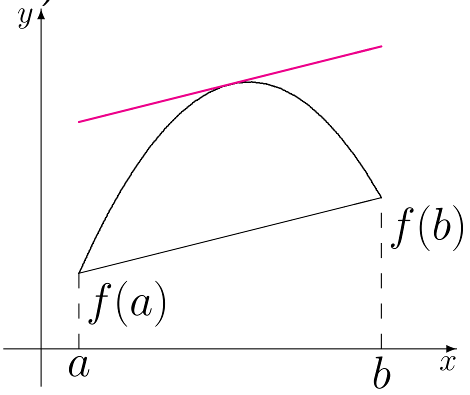
VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Теперь рассмотрим случай, когда значения функции f на краях отрезка отличаются.



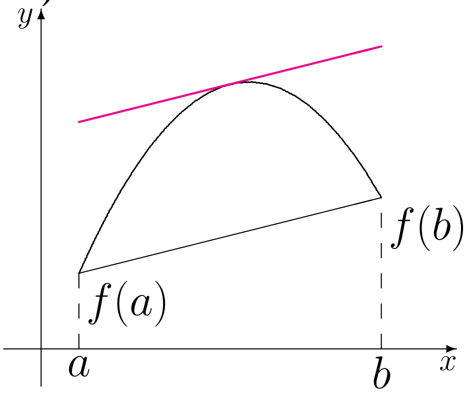
VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a)),\quad (b;\ f(b))$.



VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

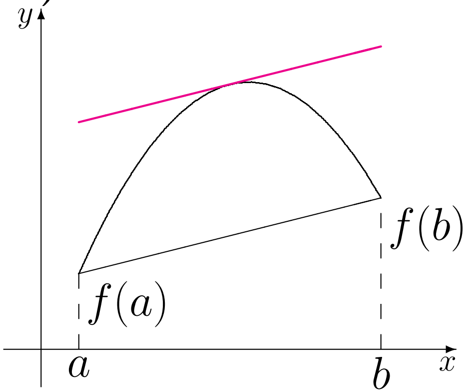
Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a)),\quad (b;\ f(b))$.



Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств:

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

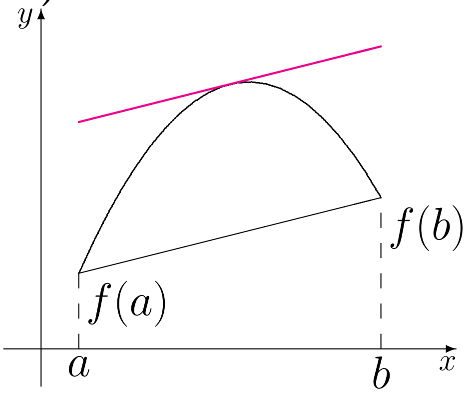
Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $\quad (b;\ f(b))$.



Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $(b;\ f(b))$.

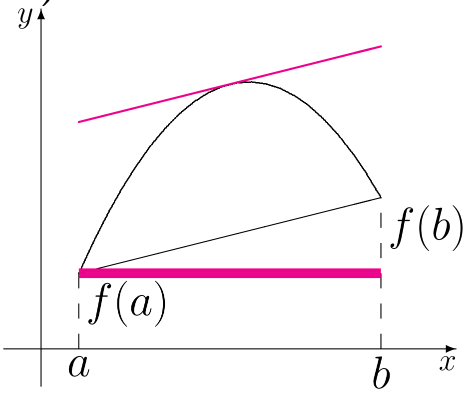


Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен __________.

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $(b;\ f(b))$.

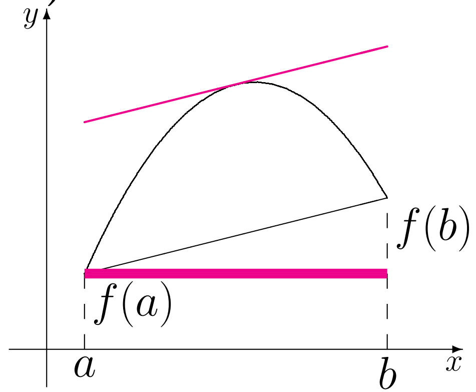


Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен __________.

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $(b;\ f(b))$.

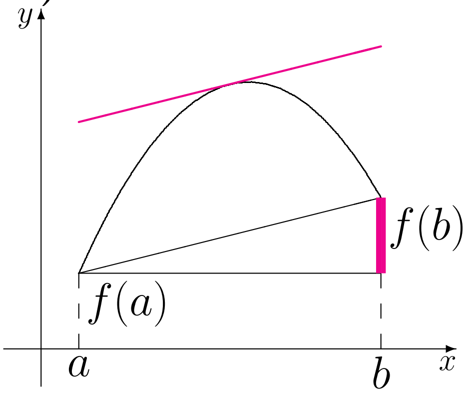


Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен $\dfrac{}{b-a}$.

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $\quad (b;\ f(b))$.

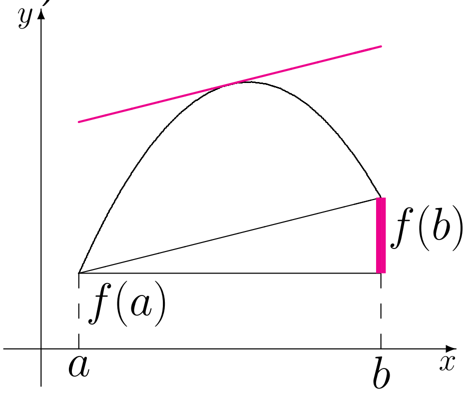


Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен $\dfrac{}{b-a}$.

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $\quad (b;\ f(b))$.

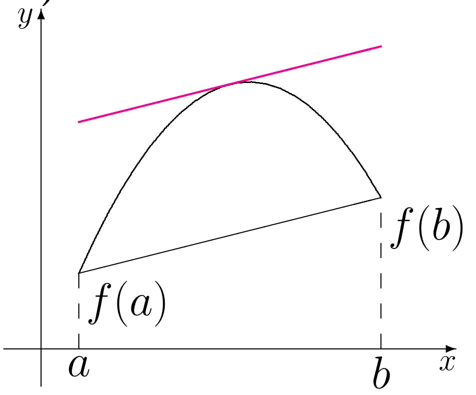


Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $(b;\ f(b))$.



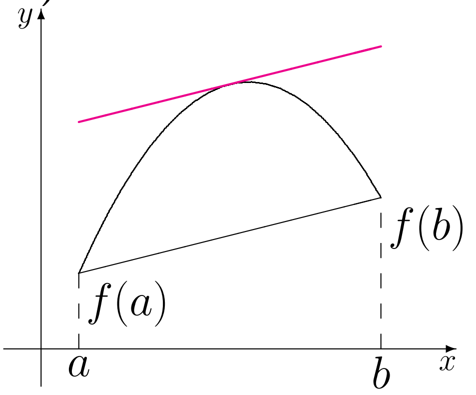
Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Кстати, рисунок подсказал и идею доказательства:

VI.3. Теорема Лагранжа (введение)

Получаем гипотезу: найдется такая точка c отрезка $[a;\ b]$, что касательная к графику функции, проведенная в точке с координатами $(c;\ f(c))$, будет параллельна отрезку, проходящему через точки с координатами $(a;\ f(a))$, $(b;\ f(b))$.



Переведем условие параллельности прямых $y = \alpha x + \beta$ и $y = \gamma x + \delta$ на язык равенств: равенство $\alpha = \gamma$.

Значит, угловой коэффициент $f'(c)$ равен $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Кстати, рисунок подсказал и идею доказательства: надо свести к теореме Ролля с помощью «добавления» к исходной функции f такой линейной функции, чтобы у их суммы значения в точках $x = a$ и $x = b$ совпадали.

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если вещественная функция непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$*, то существует такая точка* c*, что* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Слишком много слов естественного языка...

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Жозеф
Луи
Лагранж

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) =$$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$*, то* $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$g(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x)=f(x)+\alpha(x-a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.*

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$g(x) = f(x) -$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $\qquad = g(a) = g(b) =$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x-a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x-a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) =$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b - a)$,

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b - a)$,

откуда

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b - a)$,

откуда $0 =$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$, *то* $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad (x-a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x)=f(x)+\alpha(x-a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b-a)$,

откуда $\quad 0 = f(b) - f(a) + \alpha(b-a)$,

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b - a)$,

откуда $0 = f(b) - f(a) + \alpha(b - a)$, следовательно,

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$, *то* $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x)=f(x)- \qquad\qquad (x-a).$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x)=f(x)+\alpha(x-a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a)=g(a)=g(b)=f(b)+\alpha(b-a)$,

откуда $0=f(b)-f(a)+\alpha(b-a)$, следовательно,

$\alpha=$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \qquad\qquad (x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b - a)$,

откуда $0 = f(b) - f(a) + \alpha(b - a)$, следовательно,

$$\alpha = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $g(x) = f(x) + \alpha(x - a)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) = g(a) = g(b) = f(b) + \alpha(b - a)$,

откуда $0 = f(b) - f(a) + \alpha(b - a)$, следовательно,

$$\alpha = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$g(a) =$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$g(a) =$ $= g(b)$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$g(a) = f(a) + 0 =$ $\qquad = g(b)$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$g(a) = f(a) + 0 = f(a) \qquad\qquad = g(b)$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a) = f(a) + 0 = f(a) \qquad = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b)$$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a) = f(a) + 0 = f(a) \quad f(b) - (f(b) - f(a)) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b)$$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.*

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a) = f(a) + 0 = f(a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b)$$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$, *то* $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a)=f(a)+0=f(a)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=g(b)$$

Значит, $\exists c\in[a;\ b]$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a) = f(a) + 0 = f(a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b)$$

Значит, $\exists c \in [a;\ b]$ $= g'(c) = 0.$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.*

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a) = f(a) + 0 = f(a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b)$$

Значит, $\exists c \in [a;\ b] \quad f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(c) = 0.$

VI.4. Теорема Лагранжа

Теорема 24. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *то* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Попытаемся свести ее к **теореме Ролля.**

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**:

$$g(a) = f(a) + 0 = f(a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = g(b)$$

Значит, $\exists c \in [a;\ b] \quad f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(c) = 0.$

Теорема Лагранжа доказана.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Огюстен Луи Коши

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции* f *и* g *непрерывны на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируемы на интервале* $(a; b)$, *то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции* f *и* g *непрерывны на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируемы на интервале* $(a;b)$*, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $\qquad\qquad = h(a) = h(b)$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b)$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) =$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c\in(a;\ b)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x)=$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x)=f(x)+\alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a)+\alpha g(a)=h(a)=h(b)=f(b)+\alpha g(b)$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) = f(b) + \alpha g(b)$.

Поэтому $\alpha = -\dfrac{\qquad}{\qquad}$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) = f(b) + \alpha g(b)$.

Поэтому $\quad \alpha = -\dfrac{f(b) - f(a)}{}$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) =$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) = f(b) + \alpha g(b)$.

Поэтому $\quad \alpha = -\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(x) = f(x) -$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.
Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) = f(b) + \alpha g(b)$.
Поэтому $\quad \alpha = -\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \qquad\qquad g(x).$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) = f(b) + \alpha g(b)$.

Поэтому $\alpha = -\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Попробуем подобрать α так, чтобы функция $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$ принимала равные значения на концах отрезка $[a;\ b]$.

Имеем $f(a) + \alpha g(a) = h(a) = h(b) = f(b) + \alpha g(b)$.

Поэтому $\alpha = -\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$h(a) =$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) =$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(a)g(a)-(f(b)g(a)-f(a)g(a))}{g(b)-g(a)} =$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\qquad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - (f(b)g(a) - f(a)g(a))}{g(b) - g(a)} =$$

$$= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(a)g(a)-(f(b)g(a)-f(a)g(a))}{g(b)-g(a)} =$$

$$= \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$= h(b)$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$
Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.
$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(a)g(a)-(f(b)g(a)-f(a)g(a))}{g(b)-g(a)} =$$
$$= \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$
$$= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) = h(b)$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(a)g(a)-(f(b)g(a)-f(a)g(a))}{g(b)-g(a)} =$$

$$= \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\frac{f(b)g(b)-f(b)g(a)-(f(b)g(b)-f(a)g(b))}{g(b)-g(a)} = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) = h(b)$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции* f *и* g *непрерывны на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируемы на интервале* $(a;b)$, *то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - (f(b)g(a) - f(a)g(a))}{g(b)-g(a)} =$$

$$= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} =$$

$$= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - (f(b)g(b) - f(a)g(b))}{g(b)-g(a)} = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) = h(b)$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$
Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**. Значит по **теореме Ролля** найдётся $c \in [a;\ b]$ такой, что

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**. Значит по **теореме Ролля** найдётся $c \in [a;\ b]$ такой, что

$$0 = h'(c) =$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$
Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**. Значит по **теореме Ролля** найдётся $c \in [a;\ b]$ такой, что
$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

VI.5. Теорема Коши

Теорема 25. *Если вещественные функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то* $\exists c \in (a;\ b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Ясно, что функция h удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**. Значит по **теореме Ролля** найдётся $c \in [a;\ b]$ такой, что

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

откуда следует утверждение доказываемой теоремы Коши.

VI.6. Правило Лопиталя

В качестве следствия из **теоремы Коши** получается метод **раскрытия неопределенностей** при вычислении предела, являющимся одним из самых популярных в силу своей простоты и эффективности.

`Маркиз де Л'Опиталь` (1661-1704)

Способ раскрытия такого рода неопределённостей был опубликован в учебнике «Analyse des Infiniment Petits» 1696 г. за авторством Гийома Лопиталя. Метод был сообщён Лопиталю в письме его первооткрывателем Иоганном Бернулли.

`Иоганн I Бернулли` (1667-1748)

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞, f *и* g *дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки* a, *кроме, быть может, точки* a, *причём в этой окрестности для* $x \neq a$ *имеем* $g'(x) \neq 0$, *то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Доказательство проведем только для случая, когда a — это число.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{aligned} &\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ &\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Доказательство проведем только для случая, когда a — это число.

Для $\pm\infty$ и ∞ доказательство проводится с помощью замены $y = \dfrac{1}{x}$.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ \quad, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ \quad, & \text{если } x = a. \end{cases}$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ , & \text{если } x = a. \end{cases}$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

Тогда f^* и g^* дифференцируемы не только в окрестности точки a, но и в точке a.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0], \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (31)$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$ Тогда f^* и g^* дифференцируемы не только в окрестности точки a, но и в точке a. По определению **предела**

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$ Тогда f^* и g^* дифференцируемы не только в окрестности точки a, но и в точке a. По определению **предела**

$$\lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$ Тогда f^* и g^* дифференцируемы не только в окрестности точки a, но и в точке a. По определению **предела**

$$\lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.
Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$
По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)-0}{g^*(x)-0} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\quad \exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - 0}{g^*(x) - 0} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - f^*(0)}{g^*(x) - g^*(0)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - 0}{g^*(x) - 0} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - f^*(0)}{g^*(x) - g^*(0)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - 0}{g^*(x) - 0} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - f^*(0)}{g^*(x) - g^*(0)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{p\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в **окрестности** точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{aligned} &\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ &\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$. Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - 0}{g^*(x) - 0} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x) - f^*(0)}{g^*(x) - g^*(0)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{p\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Сначала докажем для неопределенности $[0/0]$.

Положим $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$ $\quad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$

По теореме **Коши** $\exists p$, лежащий между 0 и x,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)-0}{g^*(x)-0} = \lim_{x\to a} \frac{f^*(x)-f^*(0)}{g^*(x)-g^*(0)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{p\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ Для $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ теорема доказана.

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*,* f *и* g *дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки* a*, кроме, быть может, точки* a*, причём в этой окрестности для* $x \neq a$ *имеем* $g'(x) \neq 0$*, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если* a *— это число,* $\pm\infty$ *или* ∞*,* f *и* g *дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки* a*, кроме, быть может, точки* a*, причём в этой окрестности для* $x \neq a$ *имеем* $g'(x) \neq 0$*, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0], \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0], \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2 \;\Rightarrow$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0], \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (31)$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2 \Rightarrow$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в **окрестности** точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0], \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (31)$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2 \ \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \cdot \frac{1}{A^2} =$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \cdot \frac{1}{A^2} = A.$$

VI.6. Правило Лопиталя

Теорема 26. *Если a — это число, $\pm\infty$ или ∞, f и g дифференцируемы в* ***окрестности*** *точки a, кроме, быть может, точки a, причём в этой окрестности для $x \neq a$ имеем $g'(x) \neq 0$, то*

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [0/0]\,, \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\infty/\infty] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Доказательство. Теперь докажем для неопределенности $[\infty/\infty]$:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \cdot \frac{1}{A^2} = A.$$

Теорема доказана.

VII. Дифференциал

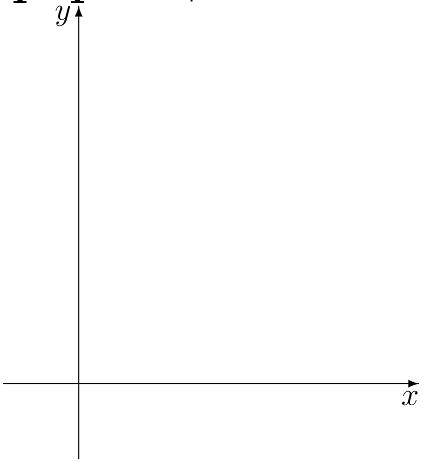
Рассмотрим понятие, благодаря которому изучаемый раздел математики называется «дифференциальным исчислением».

VII.1. Формирование понятия дифференциала

В основе этого понятия лежит идея *линеаризации*.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Начнём формирование понятия «дифференциал» с построения и анализа графической модели функции — её графика.

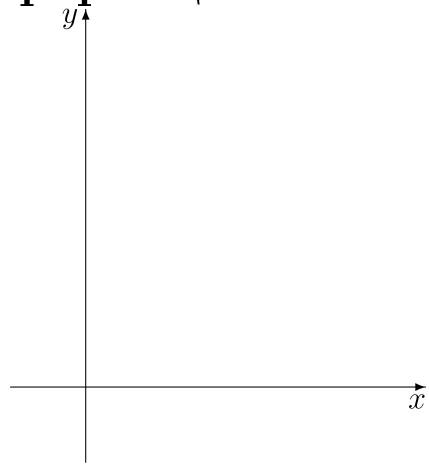


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Начнём формирование понятия «дифференциал» с построения и анализа графической модели функции — её графика.

Начнём формирование понятия «дифференциал» с построения и анализа графической модели функции — её графика.

Возьмем некоторую «гладкую» функцию, изобразим её график.

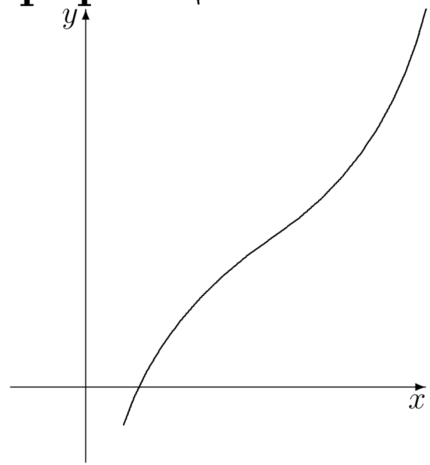


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Начнём формирование понятия «дифференциал» с построения и анализа графической модели функции — её графика.

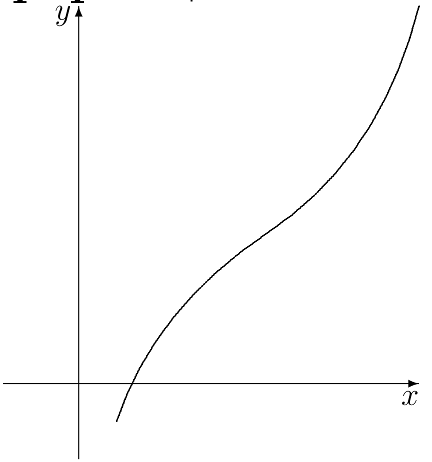
Начнём формирование понятия «дифференциал» с построения и анализа графической модели функции — её графика.

Возьмем некоторую «гладкую» функцию, изобразим её график.



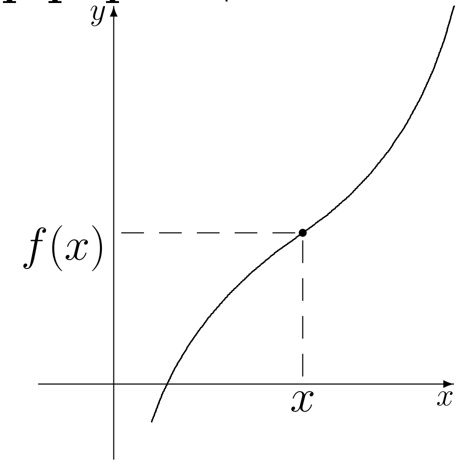
VII.1. Формирование понятия дифференциала

Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.



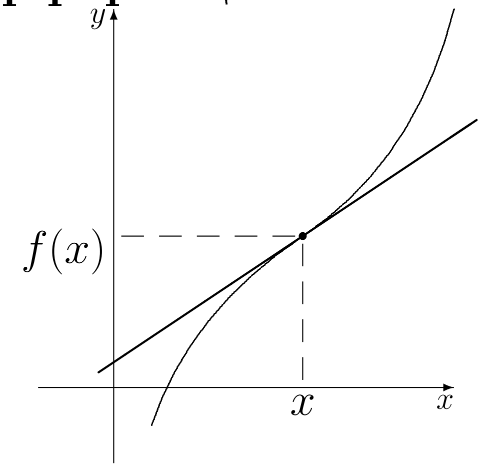
VII.1. Формирование понятия дифференциала

Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.



VII.1. Формирование понятия дифференциала

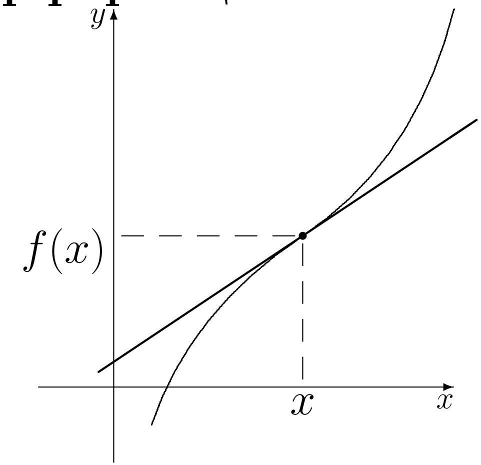
Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.



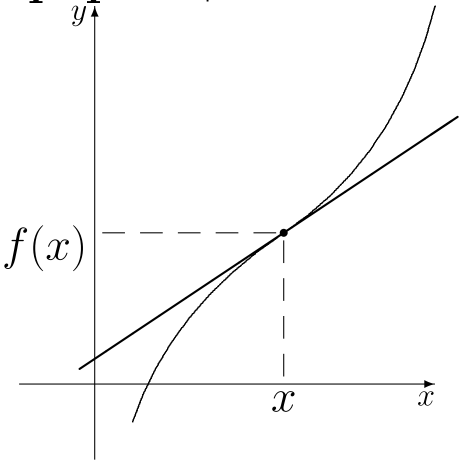
VII.1. Формирование понятия дифференциала

Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.

Нас интересует *локальное* «поведение» функции в окрестности точки с координатами $(x, f(x))$.



VII.1. Формирование понятия дифференциала



Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.

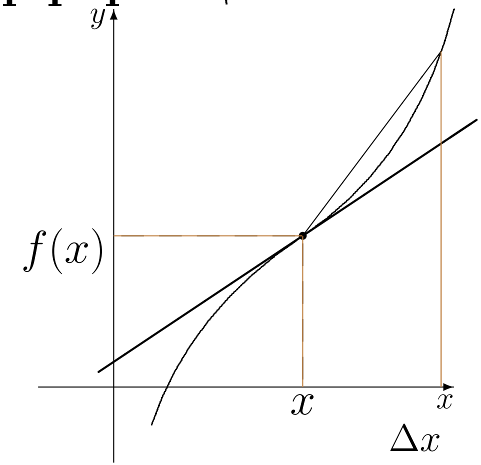
Нас интересует *локальное* «поведение» функции в окрестности точки с координатами $(x, f(x))$.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.

Нас интересует *локальное* «поведение» функции в окрестности точки с координатами $(x, f(x))$.

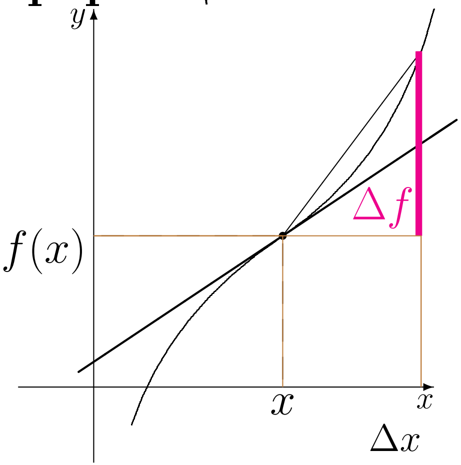


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Выберем значение аргумента, при котором функция дифференцируема.

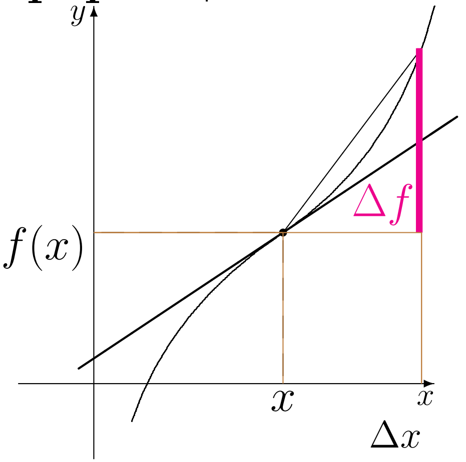
Нас интересует *локальное* «поведение» функции в окрестности точки с координатами $(x, f(x))$.



VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

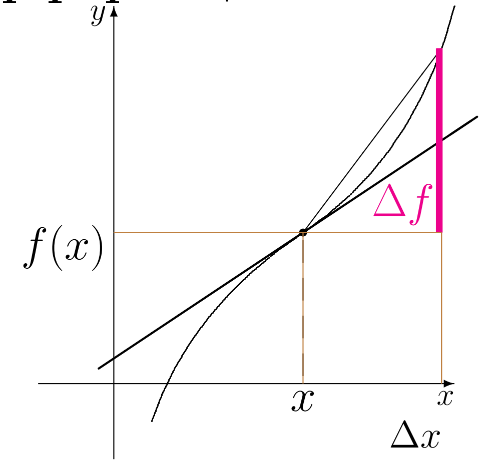
Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**:



VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**:

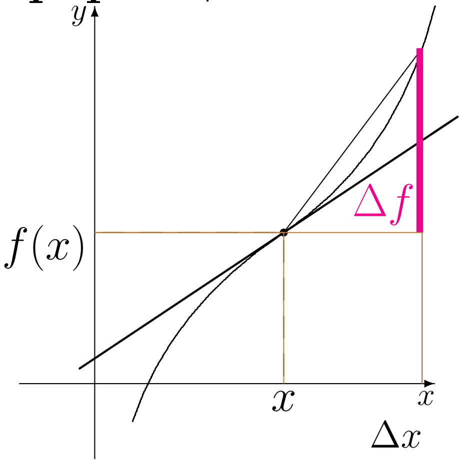


$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ \ ) =$

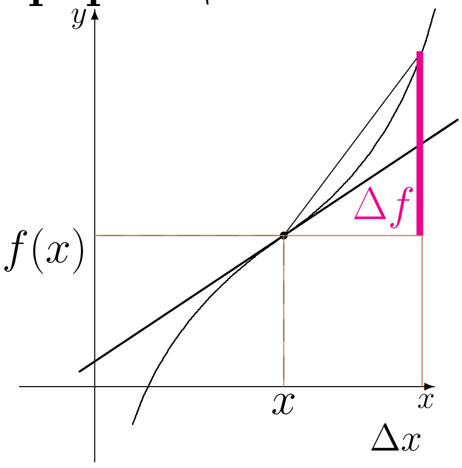


$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\quad) = f(\quad) + f'(\quad)\cdot(\quad - \quad)$.

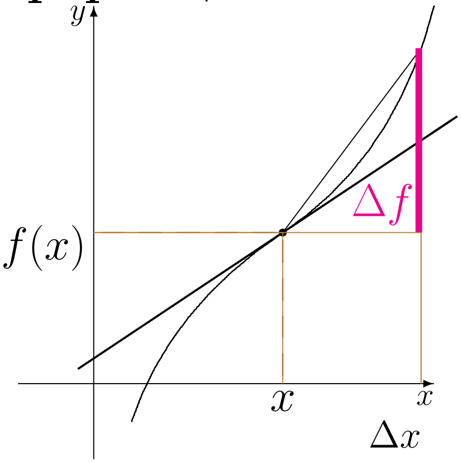


$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ \ ) = f(\ \ ) + f'(\ \ ) \cdot (\ \ - \ \ )$.



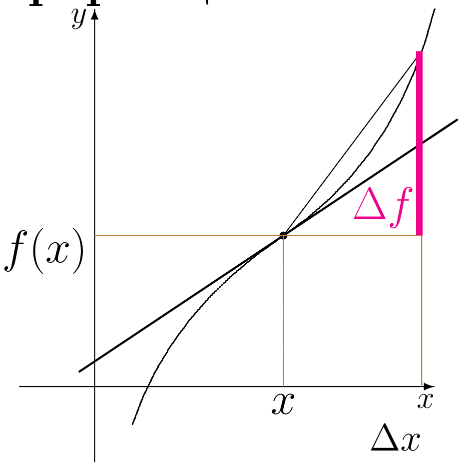
$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

У нас абсцисса точки касания обозначена не через a, а через x.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ ) = f(\ ) + f'(\ ) \cdot (\ - \ )$.



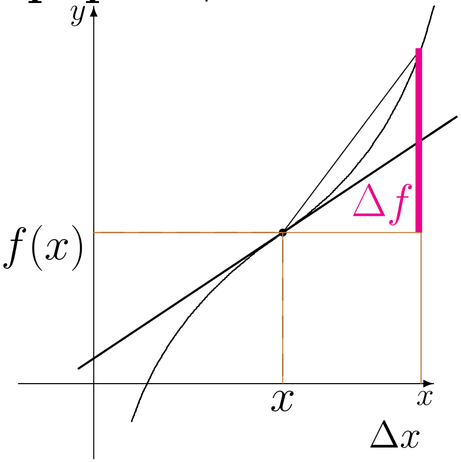
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

У нас абсцисса точки касания обозначена не через a, а через x.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ \ ) = f(x) + f'(\ \ ) \cdot (\ \ - \ \ )$.

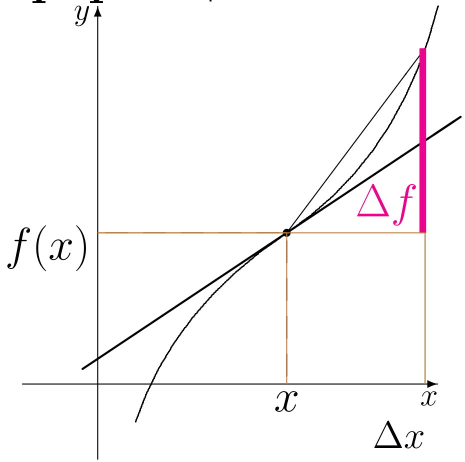


$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

У нас абсцисса точки касания обозначена не через a, а через x.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.



Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\;) = f(x) + f'(x) \cdot (\; - \;)$.

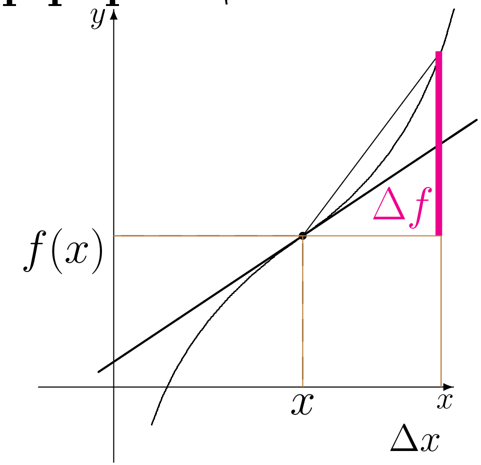
$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

У нас абсцисса точки касания обозначена не через a, а через x.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ ) = f(x) + f'(x) \cdot (\ - x)$.



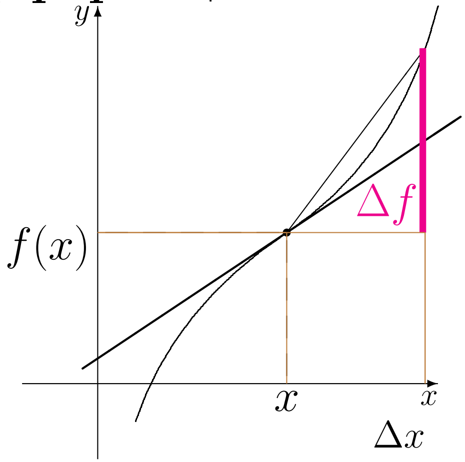
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

У нас абсцисса точки касания обозначена не через a, а через x.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ \ ) = f(x) + f'(x) \cdot (\ \ - x)$.



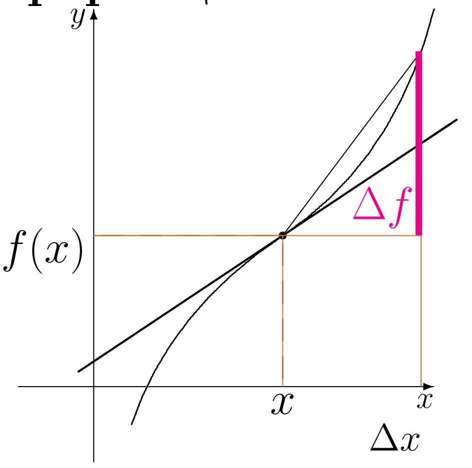
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Поэтому аргумент функции y

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ ) = f(x) + f'(x) \cdot (\ - x)$.

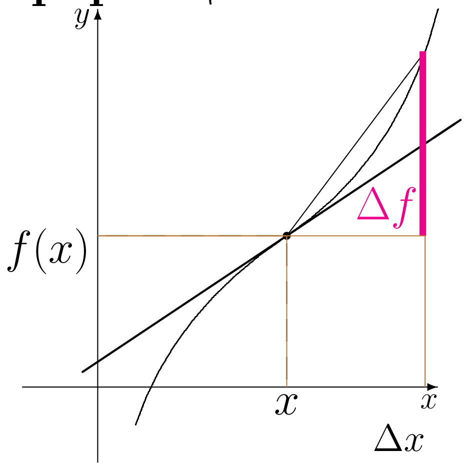


$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$

Поэтому аргумент функции y

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.



Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ ) = f(x) + f'(x) \cdot (\ - x)$.

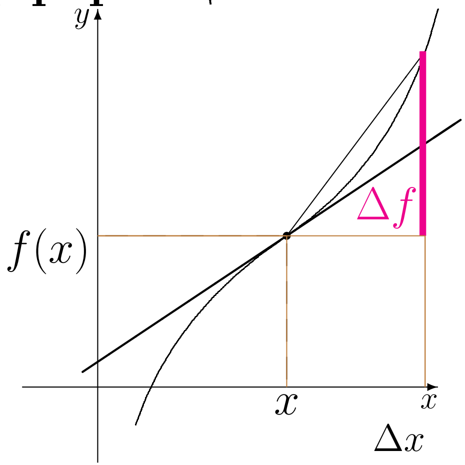
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Поэтому аргумент функции y обозначим другой буквой, например,

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(\ \ ) = f(x) + f'(x)\cdot(\ \ - x)$.



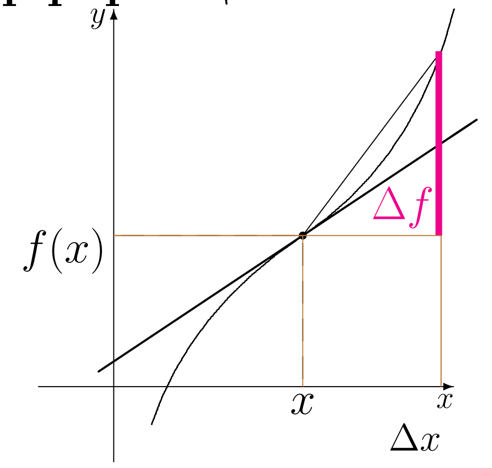
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Поэтому аргумент функции y обозначим другой буквой, например, t.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (\quad - x)$.



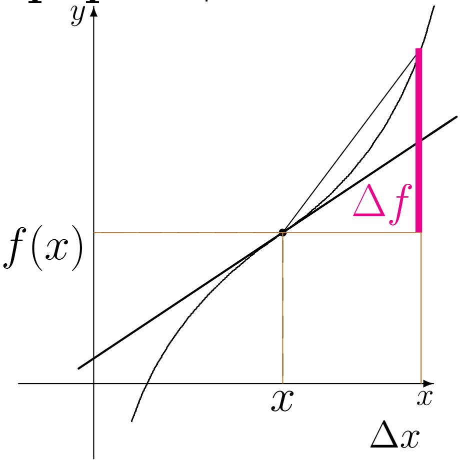
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Поэтому аргумент функции y обозначим другой буквой, например, t.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.



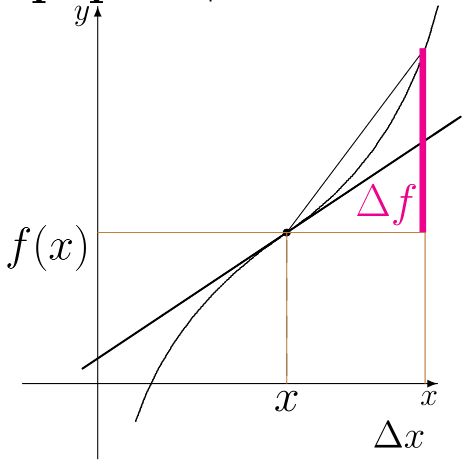
$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Поэтому аргумент функции y обозначим другой буквой, например, t.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

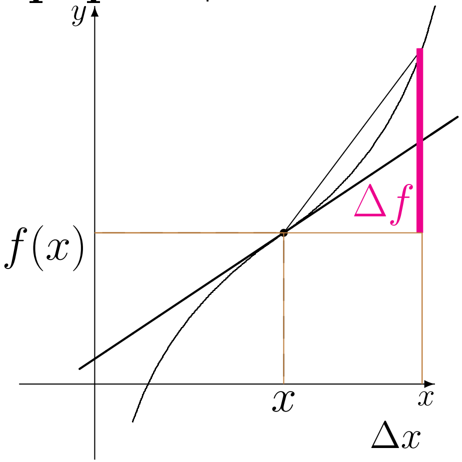


$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

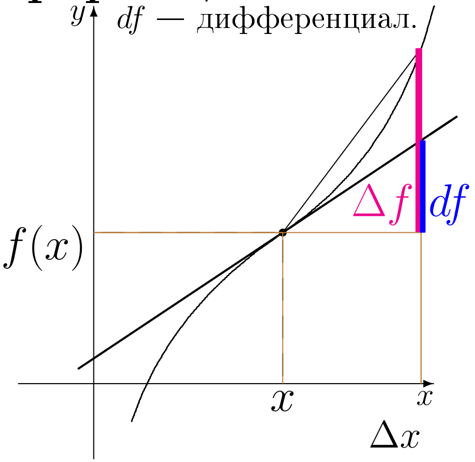
Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.



VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

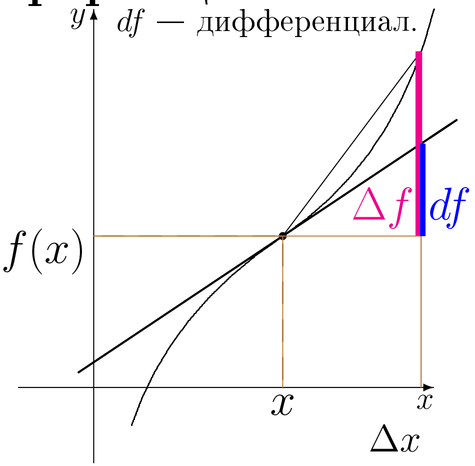


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy =$

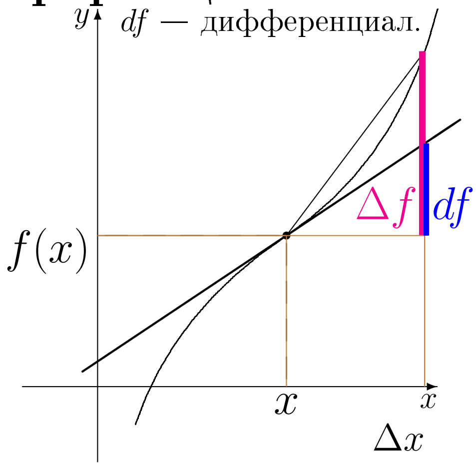


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(\qquad\qquad) - y(\quad) =$

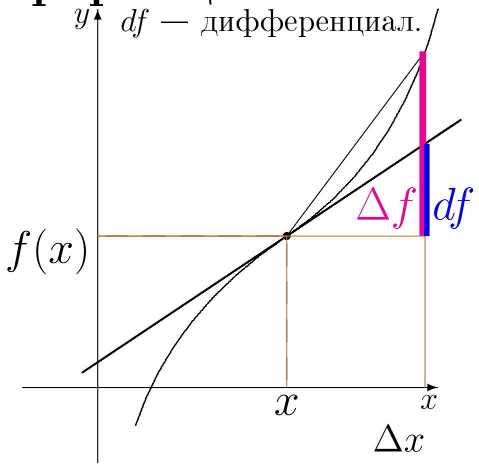


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(\quad) =$

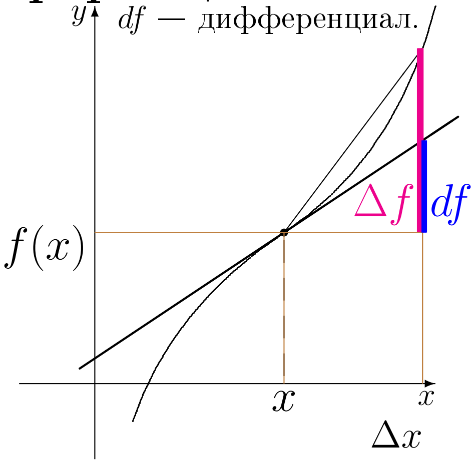


VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$



VII.1. Формирование понятия дифференциала

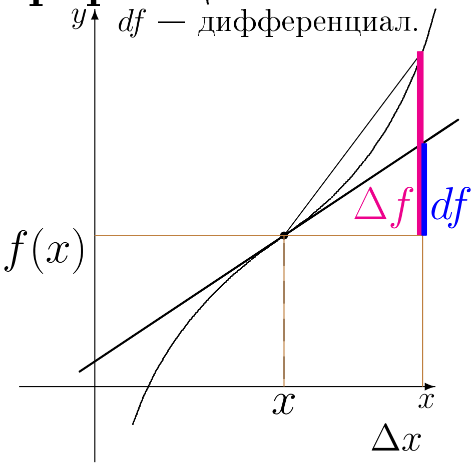
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(\qquad\qquad -x) -$

$-(f(x) + f'(x)(\quad - x)) =$



VII.1. Формирование понятия дифференциала

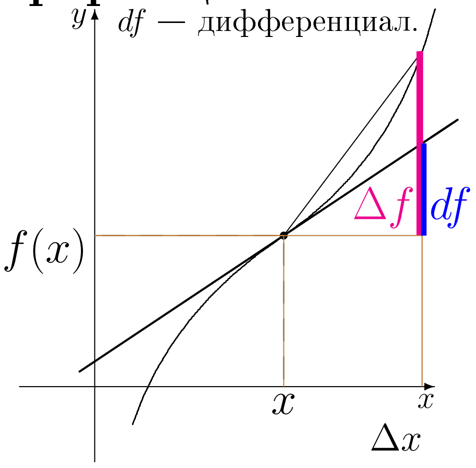
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$-(f(x) + f'(x)(\quad - x)) =$



VII.1. Формирование понятия дифференциала

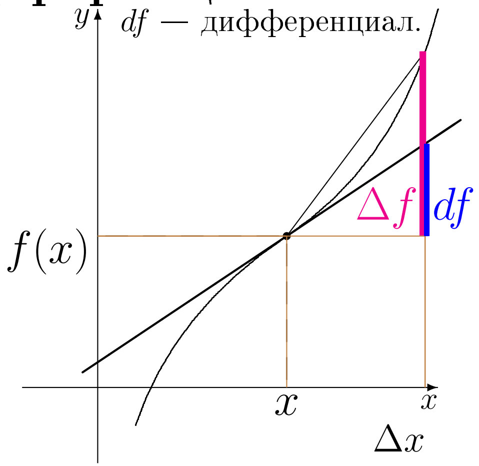
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$- (f(x) + f'(x)(x - x)) =$



VII.1. Формирование понятия дифференциала

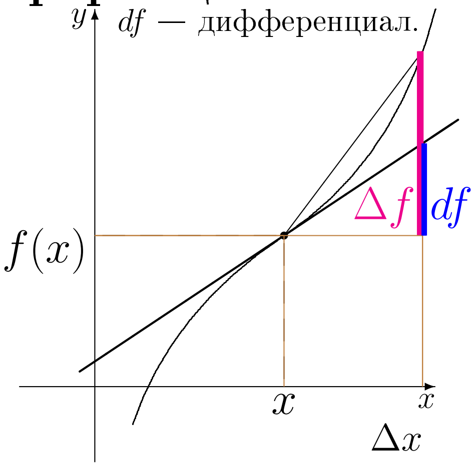
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



VII.1. Формирование понятия дифференциала

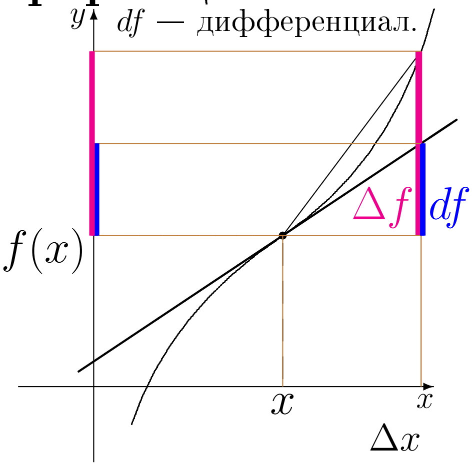
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$

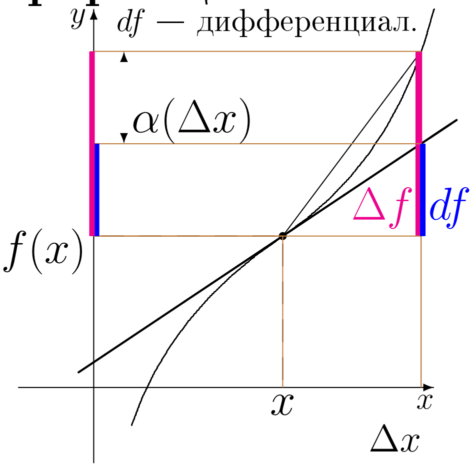


VII.1. Формирование понятия дифференциала

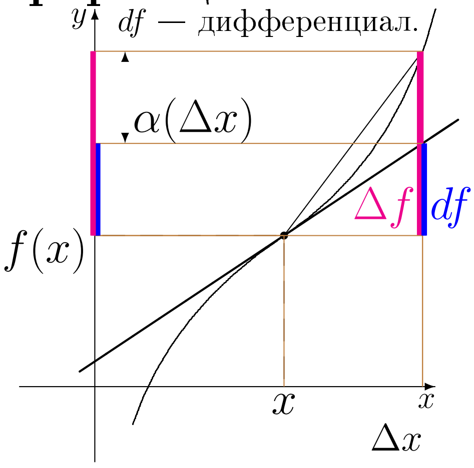
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$$
$$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$$
$$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$$



VII.1. Формирование понятия дифференциала



Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$$
$$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$$
$$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

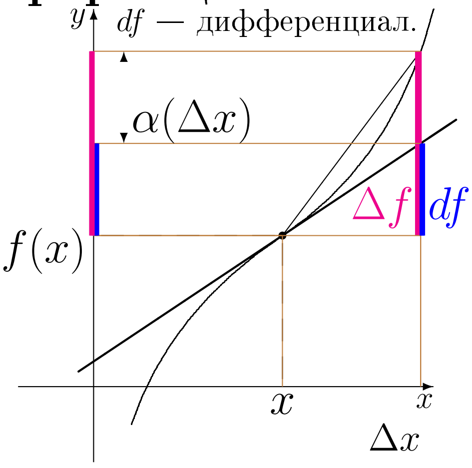
Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x =$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

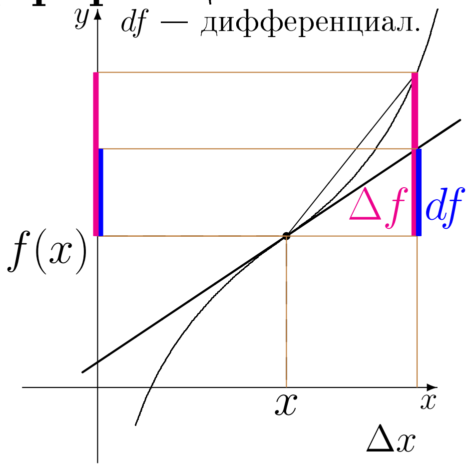
Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x$.



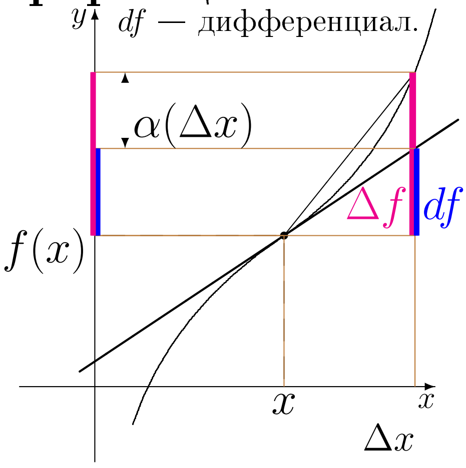
Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



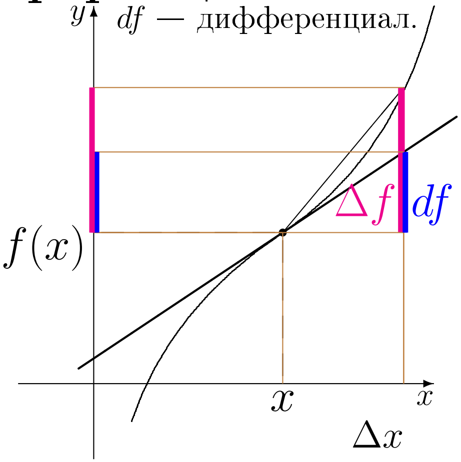
Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

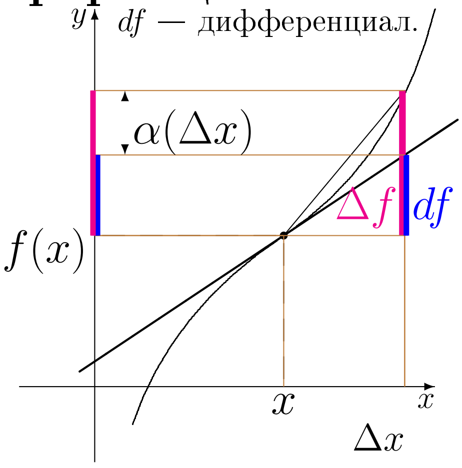
Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала



Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$

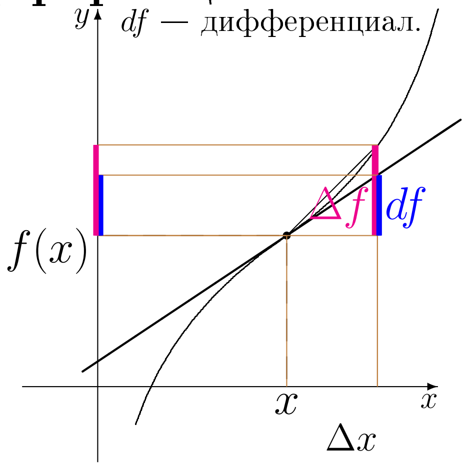
Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha\Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

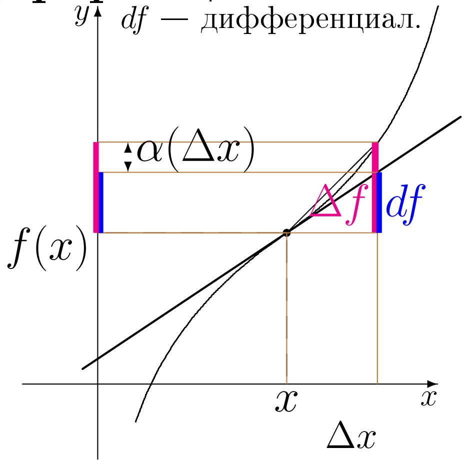
Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала



Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$

$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$

$-(f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$

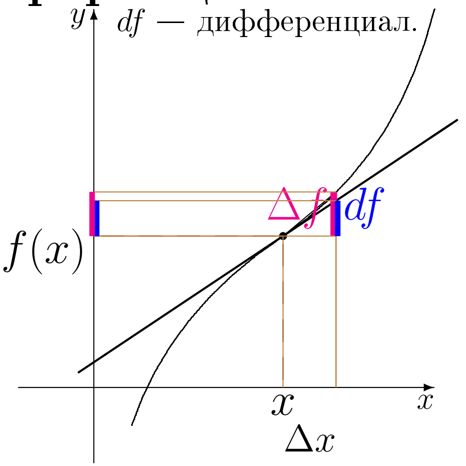
Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

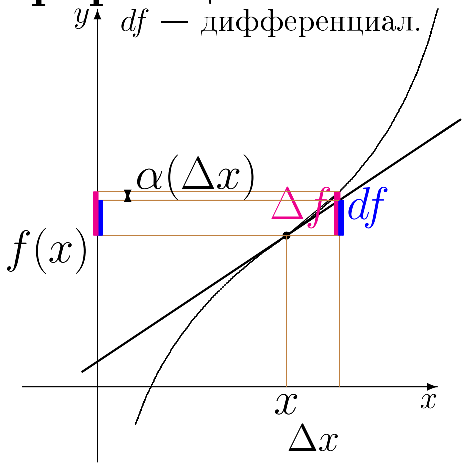
Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала



Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

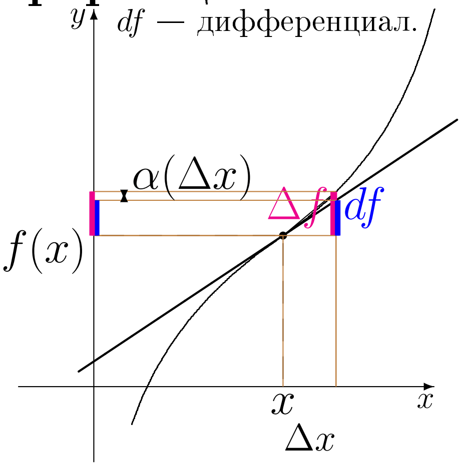
Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$

Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.



Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$$
$$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$$
$$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

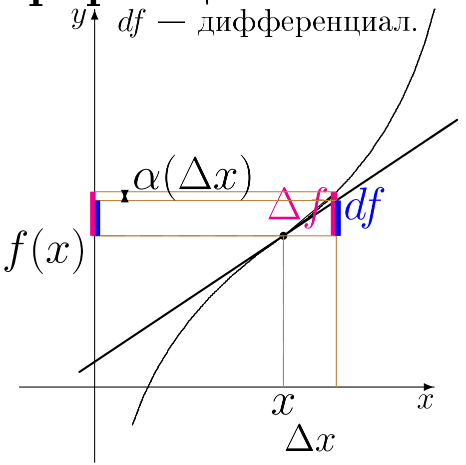
Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

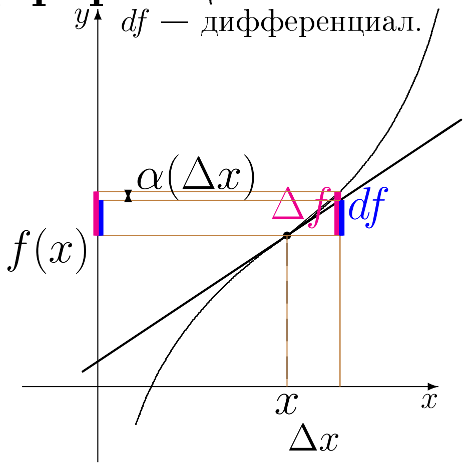
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

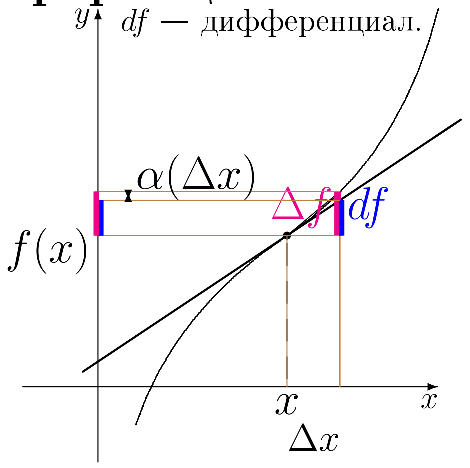
$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$

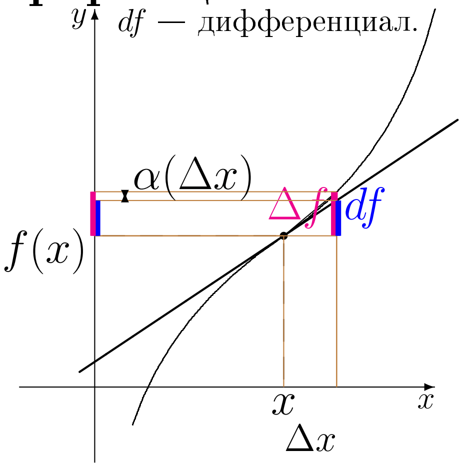


Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} =$$

VII.1. Формирование понятия дифференциала



Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$$
$$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$$
$$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha \Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

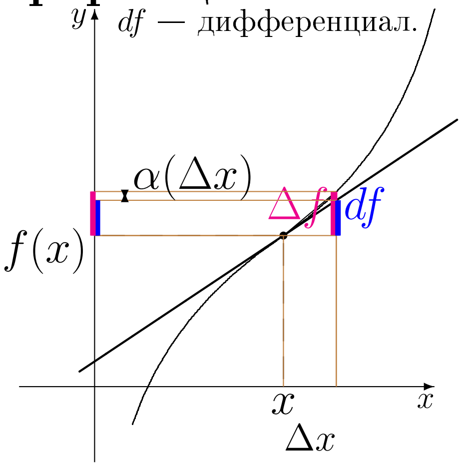
$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x}.$$

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x.$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha\Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

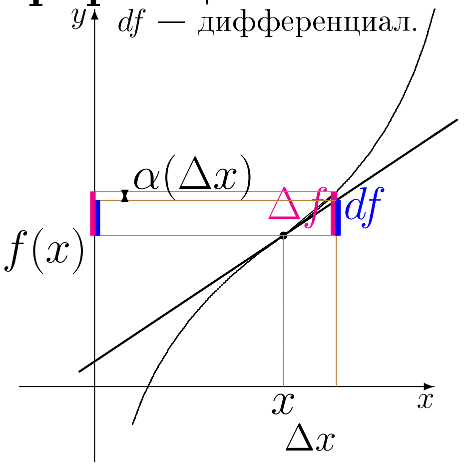
Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x}.$$

Итак, $\Delta f = df + \alpha(x)$, причём

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.



Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x) \cdot (t - x)$.

$df = dy = y(x + \Delta x) - y(x) =$
$= f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x) -$
$- (f(x) + f'(x)(x - x)) = f'(x) \cdot \Delta x$.

Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha\Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x}.$$

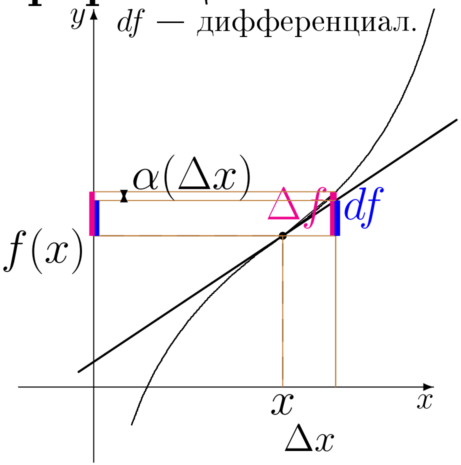
Итак, $\Delta f = df + \alpha(x)$, причём $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

VII.1. Формирование понятия дифференциала

Рассмотрим *приращение* аргумента и *приращение* значения функции.

Сравним приращение функции с приращением приближения этой функции **касательной**: $y(t) = f(x) + f'(x)\cdot(t-x)$.

$$df = dy = y(x+\Delta x) - y(x) =$$
$$= f(x) + f'(x)(x+\Delta x - x) -$$
$$-(f(x) + f'(x)(x-x)) = f'(x)\cdot\Delta x.$$



Посмотрим изменения Δf, df и $\alpha\Delta x = \Delta f - df$ при уменьшении Δx.

Важно, что $\alpha(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx, т.е.

$$0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f - df}{\Delta x}.$$

Итак, $\Delta f = df + \alpha(x)$, причём $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Теперь мы готовы сформулировать определение дифференциала df.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in \mathbf{D(f)}$ называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(\qquad\qquad\qquad) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in$ **D**(**f**) называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x, \qquad\qquad\qquad) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x, \qquad + \qquad) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in$* $\mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x, \quad \Delta p + \qquad) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in$* **D(f)** *называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x, \quad \Delta p + \quad \Delta q) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in \mathbf{D(f)}$ называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x, \alpha \cdot \Delta p + \quad \Delta q) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha \cdot \Delta p + \beta \cdot \Delta q) =$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x, \alpha \cdot \Delta p + \beta \cdot \Delta q) = \quad df(\qquad) + \quad df(\qquad).$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \ \textit{причём} \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha\cdot\Delta p+\beta\cdot\Delta q) = \quad df(x, \quad)+ \quad df(x, \quad).$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha{\cdot}\Delta p{+}\beta{\cdot}\Delta q) = \quad df(x,\Delta p){+} \quad df(x, \quad)$.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha{\cdot}\Delta p{+}\beta{\cdot}\Delta q) = \alpha{\cdot} df(x,\Delta p) +\quad df(x, \quad).$

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha\cdot\Delta p+\beta\cdot\Delta q) =\alpha\cdot df(x,\Delta p)+ \quad df(x,\Delta q)$.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in \mathbf{D(f)}$ называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha\cdot\Delta p+\beta\cdot\Delta q) =\alpha\cdot df(x,\Delta p)+\beta\cdot df(x,\Delta q)$.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in$* **D(f)** *называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha\cdot\Delta p+\beta\cdot\Delta q) = \alpha\cdot df(x,\Delta p)+\beta\cdot df(x,\Delta q)$.

Поэтому говорят ещё, что df — *линейная по* Δx часть $A \cdot \Delta x$ приращения Δf функции f в точке x.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции* f *в точке* $x \in \mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по* Δx *функция* $(A \cdot \Delta x)$, *что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{32}$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ *функции* f *обозначается через* df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha \cdot \Delta p+\beta \cdot \Delta q) = \alpha \cdot df(x,\Delta p)+\beta \cdot df(x,\Delta q)$.

Поэтому говорят ещё, что df — *линейная по* Δx часть $A \cdot \Delta x$ приращения Δf функции f в точке x.

Но следует иметь в виду, что дифференциал $df(x, \Delta x)$ определён для любого значения Δx, даже если $x + \Delta x$ не принадлежит $\mathbf{D(f)}$.

VII.2. Определение дифференциала

Определение 22. Дифференциалом *функции f в точке $x \in$* $\mathbf{D(f)}$ *называется такая линейная по Δx функция $(A \cdot \Delta x)$, что*

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x), \text{ причём } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (32)$$

Дифференциал $A \cdot \Delta x$ функции f обозначается через df.

Функция df зависит от x и Δx: $df(x, \Delta x)$, причём по Δx она является линейной:

$df(x,\alpha{\cdot}\Delta p{+}\beta{\cdot}\Delta q) = \alpha{\cdot}df(x,\Delta p){+}\beta{\cdot}df(x,\Delta q)$.

Поэтому говорят ещё, что df — *линейная по Δx* часть $A \cdot \Delta x$ приращения Δf функции f в точке x.

Но следует иметь в виду, что дифференциал $df(x, \Delta x)$ определён для любого значения Δx, даже если $x + \Delta x$ не принадлежит $\mathbf{D(f)}$.

Поэтому в качестве второго аргумента дифференциала функции обычно берут *дифференциал аргумента dx*, где $dx \in \mathbb{R}$, причём $(x + dx)$ может не включаться в область определения функции f.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D(f)}$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f =$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции* f *в точке* $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ *существует тогда и только тогда, когда в этой точке* x *существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x),$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$, где

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Тогда

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Тогда

$f'(x) =$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D(f)}$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \qquad (43)$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал***. *При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D(f)}$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал***. *При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \qquad (43)$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= A + 0 =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D(f)}$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= A + 0 = A.$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть у функции f существует дифференциал в точке x:

$\Delta f = df + \alpha(x, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$= A + 0 = A$. Значит, производная существует.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D(f)}$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) - f'(x) =$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D(f)}$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \qquad (43)$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Значит, $\Delta f(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$,

причём $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Значит, $\Delta f(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$,

причём $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$. Значит, дифференциал функции f в точке x существует.

VII.3. Связь дифференциала с производной

Теорема 27. ***Производная*** *функции f в точке $a \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке x существует* ***дифференциал****. При этом*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть теперь существует производная функции f в точке x: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим $\alpha(x, \Delta x) = \Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x) - f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Значит, $\Delta f(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x)$,

причём $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$. Значит, дифференциал функции f в точке x существует. Теорема доказана.

VII.4. Производная как отношение дифференциалов

Теорема 28. *Если функция f дифференцирцема в точке x, то*

$$f'(x) = \frac{df(x, dx)}{dx}. \tag{34}$$

Доказательство.

VII.4. Производная как отношение дифференциалов

Теорема 28. *Если функция f дифференцирцема в точке x, то*

$$f'(x) = \frac{df(x, dx)}{dx}. \tag{34}$$

Доказательство. Это очевидное следствие из **теоремы о связи дифференциала с производной**.

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если f и φ — числовые функции, причём в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ существуют производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, и функция g задана формулой $g(t) = f(\varphi(t))$, то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если* f *и* φ *— числовые функции, причём в точках* t_0 *и* $x_0 = \varphi(t_0)$ *существуют производные* $f'(x_0)$ *и* $\varphi'(t_0)$, *и функция* g *задана формулой* $g(t) = f(\varphi(t))$, *то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

$dg(t_0, dt) =$

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если f и φ — числовые функции, причём в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ существуют производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, и функция g задана формулой $g(t) = f(\varphi(t))$, то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

$dg(t_0, dt) = g'(t) \cdot dt =$

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если f и φ — числовые функции, причём в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ существуют производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, и функция g задана формулой $g(t) = f(\varphi(t))$, то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

$dg(t_0, dt) = g'(t) \cdot dt = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \cdot dt =$

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если f и φ — числовые функции, причём в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ существуют производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, и функция g задана формулой $g(t) = f(\varphi(t))$, то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

$dg(t_0, dt) = g'(t) \cdot dt = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \cdot dt = f'(x_0) \cdot d\varphi =$

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если f и φ — числовые функции, причём в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ существуют производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, и функция g задана формулой $g(t) = f(\varphi(t))$, то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

$dg(t_0, dt) = g'(t) \cdot dt = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \cdot dt = f'(x_0) \cdot d\varphi = d\varphi(t_0, dt).$

VII.5. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменной

Теорема 29. *Если f и φ — числовые функции, причём в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ существуют производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, и функция g задана формулой $g(t) = f(\varphi(t))$, то*

$$dg(t_0, dt) = df(x_0, dx), \text{ где } dx = d\varphi(t_0, dt). \tag{35}$$

Доказательство.

$$dg(t_0, dt) = g'(t) \cdot dt = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \cdot dt = f'(x_0) \cdot d\varphi = d\varphi(t_0, dt).$$

Теорема доказана.

VIII. Производные высших порядков

При изучении преобразований объектов одним из естественных результатов применения **стратегии приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** является

VIII. Производные высших порядков

При изучении преобразований объектов одним из естественных результатов применения **стратегии приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** является
кратное применение изучаемого преобразования.

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' =$

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' =$

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx} g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' =$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x +$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' =$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 +$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx} g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 +$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 +$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$

Можно оформить решение иначе:

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$

Можно оформить решение иначе:

$(x \cdot 2^x)'' =$

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$

Можно оформить решение иначе:

$(x \cdot 2^x)'' = \dfrac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) =$

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

Можно оформить решение иначе:

$$(x \cdot 2^x)'' = \frac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x \cdot 2^x)\right) =$$

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx} g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x). \qquad (36)$$

Например,
$(x \cdot 2^x)'' = ((x \cdot 2^x)')' = (2^x + x \cdot 2^x \ln 2)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$
Можно оформить решение иначе:

$$(x \cdot 2^x)'' = \frac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x \cdot 2^x)\right) =$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \big((x \cdot 2^x)'\big)' = \big(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\big)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

Можно оформить решение иначе:

$$(x \cdot 2^x)'' = \frac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x \cdot 2^x)\right) = \frac{d}{dx}(2^x + x \cdot 2^x \ln 2) =$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx} g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \left((x \cdot 2^x)'\right)' = \left(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\right)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

Можно оформить решение иначе:

$$(x \cdot 2^x)'' = \frac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x \cdot 2^x)\right) = \frac{d}{dx}(2^x + x \cdot 2^x \ln 2) =$$

$$= \frac{d}{dx}(2^x) + \frac{d}{dx}(x \cdot 2^x \ln 2) =$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \left((x \cdot 2^x)'\right)' = \left(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\right)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

Можно оформить решение иначе:

$$(x \cdot 2^x)'' = \frac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x \cdot 2^x)\right) = \frac{d}{dx}(2^x + x \cdot 2^x \ln 2) =$$

$$= \frac{d}{dx}(2^x) + \frac{d}{dx}(x \cdot 2^x \ln 2) = 2^x \ln 2 +$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.1. Производная второго порядка

Определение 23. *Если* $g(x) = f'(x)$, *то* **второй производной** $f''(x)$ *называется производная*

$$f''(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x). \qquad (36)$$

Например,

$$(x \cdot 2^x)'' = \left((x \cdot 2^x)'\right)' = \left(2^x + x \cdot 2^x \ln 2\right)' = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

Можно оформить решение иначе:

$$(x \cdot 2^x)'' = \frac{d^2}{dx^2}(x \cdot 2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x \cdot 2^x)\right) = \frac{d}{dx}(2^x + x \cdot 2^x \ln 2) =$$

$$= \frac{d}{dx}(2^x) + \frac{d}{dx}(x \cdot 2^x \ln 2) = 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 + x \cdot 2^x \ln^2 2.$$

По **теореме о производной суммы, произведения и суперпозиции функций...**

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка n *введём индуктивно:*

база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x)$;

шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ *уже определена, то положим*

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \qquad (37)$$

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка *n введём индуктивно:*
база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x);$
шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ уже определена, то положим
$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \tag{37}$$
Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка n *введём индуктивно:*
база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x)$;
шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ *уже определена, то положим*

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \tag{37}$$

Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:
система базовых элементов:

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка n *введём индуктивно:*

база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x)$;

шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ *уже определена, то положим*

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \qquad (37)$$

Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:

система базовых элементов: **основные элементарные функции**;

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка n *введём индуктивно:*
база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x)$;
шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ *уже определена, то положим*

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \tag{37}$$

Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:
система базовых элементов: **основные элементарные функции**;
система типовых преобразований и механизмов комбинирования:

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка n *введём индуктивно:*
база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x);$
шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ *уже определена, то положим*

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \qquad (37)$$

Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:
система базовых элементов: **основные элементарные функции**;
система типовых преобразований и механизмов комбинирования: сумма, разность, произведение и частное функций, **суперпозиция** (композиция) функций;

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка *n введём индуктивно:*
база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x)$;
шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ уже определена, то положим

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \qquad (37)$$

Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:
система базовых элементов: **основные элементарные функции**;
система типовых преобразований и механизмов комбинирования: сумма, разность, произведение и частное функций, **суперпозиция** (композиция) функций;
механизм аппроксимирования:

VIII.2. Производная порядка n

Определение 24. Производную порядка n *введём индуктивно:*
база индукции: $\dfrac{d}{dx}f(x) = f^{1)}(x) = f'(x);$
шаг индукции: если $f^{(n)}(x)$ *уже определена, то положим*

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right). \qquad (37)$$

Достигнутые результаты позволяют осуществить одну из реализаций алгебраического подхода к заданию функций:
система базовых элементов: **основные элементарные функции**;
система типовых преобразований и механизмов комбинирования: сумма, разность, произведение и частное функций, **суперпозиция** (композиция) функций;
механизм аппроксимирования: рассмотрим один из вариантов — формулу Тейлора.

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \tag{38}$$

Доказательство.

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 +$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) +$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots +$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$f'(x) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 +$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) +$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0+p_1 \cdot (x-a)+p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots +p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0+p_1 \cdot 0+p_2 \cdot 0^2+p_3 \cdot 0^3+\ldots+p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1+p_2\cdot 2 \cdot (x-a)+p_3\cdot 3 \cdot (x-a)^2+$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}\cdot(x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}\cdot(x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1\cdot(x-a) + p_2\cdot(x-a)^2 + \ldots + p_n\cdot(x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1\cdot 0 + p_2\cdot 0^2 + p_3\cdot 0^3 + \ldots + p_n\cdot 0^n, \\ f'(a) = \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2\cdot 2\cdot(x-a) + p_3\cdot 3\cdot(x-a)^2 + \ldots + p_n\cdot n\cdot(x-a)^{n-1}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) =$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$

$f''(x) = p_2 +$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1!}} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n!}} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$

$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$

$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) +$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots +$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1!}} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n!}} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$

$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$

$f^{(n)}(x) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

$$f^{(n)}(x) = p_n \cdot n \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

$$f^{(n)}(x) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

$$f^{(n)}(x) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot (x-a) + p_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

$$f^{(n)}(x) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}\cdot(x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}\cdot(x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1\cdot(x-a) + p_2\cdot(x-a)^2 + \ldots + p_n\cdot(x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1\cdot 0 + p_2\cdot 0^2 + p_3\cdot 0^3 + \ldots + p_n\cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2\cdot 2\cdot 0 + p_3\cdot 3\cdot 0^2 + \ldots + p_n\cdot n\cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2\cdot 2 + p_3\cdot 3\cdot 2\cdot 0 + \ldots + p_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1. \end{cases}$$

$$f'(x) = p_1 + p_2\cdot 2\cdot(x-a) + p_3\cdot 3\cdot(x-a)^2 + \ldots + p_n\cdot n\cdot(x-a)^{n-1}.$$

$$f''(x) = p_2 + p_3\cdot 3\cdot 2\cdot(x-a) + \ldots + p_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(x-a)^{n-2}.$$

$$f^{(n)}(x) = p_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$,

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a), \quad f'(a) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$,

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,

$f'''(a) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,

$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a), \quad f'(a) = p_1, \quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2,$

$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 = 3!\, p_3, \quad \ldots,$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ — *многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,

$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 = 3!\,p_3$, $\quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(a) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,

$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 = 3!\,p_3$, $\quad \ldots$, $\quad f^{(n-1)}(a) = (\mathbf{n-1})! \cdot p_{n-1}$,

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,

$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 = 3!\,p_3$, $\quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(a) = (\mathbf{n-1})! \cdot p_{n-1}$,

$f^{(n)}(a) =$

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,
$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 = 3!\,p_3$, $\quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(a) = (\mathbf{n-1})! \cdot p_{n-1}$,
$f^{(n)}(a) = \mathbf{n}! \cdot p_n$.

VIII.3. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 30. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ *— многочлен с коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n. \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-a) + p_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + p_n \cdot (x-a)^n.$$

$$\begin{cases} f(a) = p_0 + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0^2 + p_3 \cdot 0^3 + \ldots + p_n \cdot 0^n, \\ f'(a) = p_1 + p_2 \cdot 2 \cdot 0 + p_3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \ldots + p_n \cdot n \cdot 0^{n-1}, \\ f''(a) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + \ldots + p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(a) = p_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Значит, $p_0 = f(a)$, $\quad f'(a) = p_1$, $\quad f''(a) = 2p_2 = 2!p_2$,
$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot p_3 = 3!\,p_3$, $\quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(a) = (\mathbf{n-1})! \cdot p_{n-1}$,
$f^{(n)}(a) = \mathbf{n}! \cdot p_n$. Теорема доказана.

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

В частности, $\alpha(x)$ — бесконечно малая в окрестности точки a порядка, большего чем $(x-a)^n$, т.е. $\alpha(x) = \mathbf{o}\left((x-a)^n\right)$.

Доказательство.

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём* θ *находится между* a *и* x.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$\alpha(a) =$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) =$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0,$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \qquad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) =$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

По **теореме Лагранжа**

$$\alpha^{(n)}(x) - \alpha^{(n)}(a) =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

По **теореме Лагранжа**

$$\alpha^{(n)}(x) - \alpha^{(n)}(a) = \left(\alpha^{(n)}(\theta)\right)'(x-a) \ \Rightarrow$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

По **теореме Лагранжа**

$$\alpha^{(n)}(x) - \underbrace{\alpha^{(n)}(a)}_{=0} = \Big(\alpha^{(n)}(\theta)\Big)'(x-a) \ \Rightarrow$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

По **теореме Лагранжа**

$$\alpha^{(n)}(x) - \underbrace{\alpha^{(n)}(a)}_{=0} = \underbrace{\Big(\alpha^{(n)}(\theta)\Big)'}_{\alpha^{(n+1)}(\theta)}(x-a) \;\Rightarrow$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

По **теореме Лагранжа**

$$\alpha^{(n)}(x) - \underbrace{\alpha^{(n)}(a)}_{=0} = \underbrace{\Big(\alpha^{(n)}(\theta)\Big)'}_{\alpha^{(n+1)}(\theta)}(x-a) \Rightarrow \alpha^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a).$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow$$

По **теореме Лагранжа**

$$\alpha^{(n)}(x) - \underbrace{\alpha^{(n)}(a)}_{=0} = \underbrace{\Big(\alpha^{(n)}(\theta)\Big)'}_{\alpha^{(n+1)}(\theta)}(x-a) \Rightarrow \alpha^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a).$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2 + C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2 + C$$

$$= \alpha^{(n-1)}(a) = \alpha^{(n)}(\theta) \cdot (a-a)^2 + C =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \qquad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2 + C$$

$$= \alpha^{(n-1)}(a) = \alpha^{(n)}(\theta) \cdot (a-a)^2 + C =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2 + C$$

$$0 = \alpha^{(n-1)}(a) = \alpha^{(n)}(\theta) \cdot (a-a)^2 + C =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2 + C$$

$$0 = \alpha^{(n-1)}(a) = \alpha^{(n)}(\theta) \cdot (a-a)^2 + C = C.$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$

$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \ \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2 + C$

$0 = \alpha^{(n-1)}(a) = \alpha^{(n)}(\theta) \cdot (a-a)^2 + C = C.$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \ \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$0 = \alpha^{(n-1)}(a) = \alpha^{(n)}(\theta) \cdot (a-a)^2 + C = C.$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \qquad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём* θ *находится между* a *и* x.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \ \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \;\Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

$$= \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$

$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

$$= \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

$$0 = \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

$$0 = \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

$$0 = \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C = C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2 + C$$

$$0 = \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C = C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \ \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2, \ldots,$$

$$0 = \alpha^{(n-2)}(a) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (a-a)^2 + C = C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n+1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2, \ldots, \quad \alpha(x) =$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2, \ldots, \quad \alpha(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} + C$$

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2, \ldots, \quad \alpha(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} + C$$

Аналогично получаем, что $C = 0$.

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2, \ldots, \quad \alpha(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Аналогично получаем, что $C = 0$.

VIII.4. Формула Тейлора

Теорема 31. *Если функция f в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n + \alpha(x), \quad (39)$$

где $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \cdot (x-a)^{n+1}$, *причём θ находится между a и x.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!} \cdot (x-a)^1 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!} \cdot (x-a)^n.$$

$$\alpha(a) = \alpha'(a) = \alpha''(a) = \ldots = \alpha^{(n)}(a) = 0, \quad \alpha^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$$\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a) \Rightarrow \alpha^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n+1)}(\theta) \cdot (x-a)^2,$$

$$\alpha^{(n-2)}(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{2} \cdot (x-a)^2, \ldots, \quad \alpha(x) = \frac{\alpha^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Теорема доказана.

IX. Функции нескольких переменных

IX.1. Предел функции нескольких переменных

Определение 25. Конечным пределом *функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *при* $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ *называется число* A *такое, что* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$0 < \sqrt{(x_1 - x_1^o)^2 + \ldots + (x_n - x_n^o)^2} < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon. \tag{40}$$

Этот предел обозначается как $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x_1^o,\ldots,x_n^o)} f(x_1, \ldots, x_n) = A.$

IX.1. Предел функции нескольких переменных

Определение 25. Конечным пределом *функции* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *при* $(x_1, \dots, x_n) \to (x_1^o, \dots, x_n^o)$ *называется число* A *такое, что*
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$0 < \sqrt{(x_1 - x_1^o)^2 + \ldots + (x_n - x_n^o)^2} < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon. \tag{40}$$

Этот предел обозначается как $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^o,\dots,x_n^o)} f(x_1, \dots, x_n) = A.$

Можно трактовать это определение и так: если $(x_1; \dots; x_n)$ стремится к $(x_1^o; \dots; x_n^o)$ по любой траектории $(x_1(t); \dots; x_n(t))$, где $(x_1(t_0); \dots; x_n(t_0)) = (x_1^o; \dots; x_n^o)$, то
$\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(x_1(t); \dots; x_n(t)) = A.$

Рассмотреть пример?

IX.2. Дифференцирование функций нескольких аргументов

Попробуем обобщить результаты в области дифференцирования, полученные для функций одного аргумента.

Рассмотрим пример?

IX.2.1. Частные производные

Определение 26. *Для функции* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ **частной производной по переменной** x_i *называется* $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x_1; x_2; \ldots; x_n) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1; \ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x; x_{i+1}; \ldots; x_n) - f(x_1; \ldots; x_n)}{\Delta x}. \quad (41)$$

IX.2.1. Частные производные

Определение 26. *Для функции* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ **частной производной по переменной** x_i *называется* $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1; x_2; \ldots; x_n) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1; \ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x; x_{i+1}; \ldots; x_n) - f(x_1; \ldots; x_n)}{\Delta x}. \quad (41)$$

Иными словами, вычисление частной производной по переменной x_i состоит в том, что фиксируются значения всех переменных, кроме x_i, после чего осуществляется привычное вычисление производной от полученной функции одной переменной x_i.

Рассмотреть пример?

IX.2.2. Дифференциал ФНП

Определение 27. Дифференциалом функции нескольких переменных $f\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)$ *называется такая функция* $df\left(x_1;x_2;\ldots;x_n;\Delta x_1;\Delta x_2;\ldots;\Delta x_n\right) =$
$= A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$, *что*

$$\Delta f = f\left(x_1+\Delta x_1;\ldots;x_n+\Delta x_n\right) - f\left(x_1;\ldots;x_n\right) =$$
$$= A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + \alpha\left(x_1;x_2;\ldots;x_n;\Delta x_1;\Delta x_2;\ldots;\Delta x_n\right), \quad (42)$$

где $\lim\limits_{(\Delta x_1;\Delta x_2;\ldots;\Delta x_n)\to(0;\ldots;0)} \dfrac{\alpha\left(x_1;x_2;\ldots;x_n;\Delta x_1;\Delta x_2;\ldots;\Delta x_n\right)}{\sqrt{{\Delta x_1}^2+\ldots+{\Delta x_n}^2}} = 0.$

IX.2.2. Дифференциал ФНП

Определение 27. Дифференциалом функции нескольких переменных $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется такая функция* $df(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n) =$
$= A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$, *что*

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1; \ldots; x_n + \Delta x_n) - f(x_1; \ldots; x_n) =$$
$$= A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + \alpha(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n), \qquad (42)$$

где $\lim\limits_{(\Delta x_1;\Delta x_2;\ldots;\Delta x_n)\to(0;\ldots;0)} \dfrac{\alpha(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n)}{\sqrt{\Delta {x_1}^2 + \ldots + \Delta {x_n}^2}} = 0.$

Для дифференциала функции нескольких переменных имеется теорема, аналогичная **теореме о связи дифференциала с производной** для функции одной переменной.

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1;x_2;\ldots;x_n;\Delta x_1;\Delta x_2;\ldots;\Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{43}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n) =$

$$= \frac{\partial f(x_1; x_2; \ldots; x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x_1; x_2; \ldots; x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n. \quad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots) - f(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots)}{\Delta x_i} =$$

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$= A_i +$

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

Из непрерывности f следует непрерывность df, как разности двух непрерывных функций.

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

Из непрерывности f следует непрерывность df, как разности двух непрерывных функций. Поэтому $\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right) = 0$.

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{43}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

Из непрерывности f следует непрерывность df, как разности двух непрерывных функций. Поэтому $\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right) = 0$.

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

По определению α имеем...

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} = A_i + 0 =$$

По определению α имеем...

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} = A_i + 0 = A_i.$$

IX.2.3. Связь дифференциала ФНП с частными производными

Теорема 32. $df\left(x_1; x_2; \ldots; x_n; \Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right) =$

$$= \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (43)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i + \Delta x_i; x_{i+1}; \ldots\right) - f\left(\ldots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \ldots\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i +$$

$$+ \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right) - \alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} =$$

$$= A_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha\left(x_1; \ldots; x_n; 0; \ldots; \Delta x_i; \ldots; 0\right)}{\Delta x_i} = A_i + 0 = A_i.$$

Теорема доказана.

IX.3. Дифференцирование неявно заданной функции

Нередко функцию не удается задать выражением $y = f(x)$.

IX.3. Дифференцирование неявно заданной функции

Нередко функцию не удается задать выражением $y = f(x)$.
Например, эта функция может быть не элементарной.

IX.3. Дифференцирование неявно заданной функции

Нередко функцию не удается задать выражением $y = f(x)$.

Например, эта функция может быть не элементарной.

Другой пример: попробуйте выразить y из равенства $y + 2^y = x$.

IX.3. Дифференцирование неявно заданной функции

Нередко функцию не удается задать выражением $y = f(x)$.
Например, эта функция может быть не элементарной.
Другой пример: попробуйте выразить y из равенства $y + 2^y = x$.
Такие выражения можно представить в виде $F(x, y) = 0$.

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$= \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 =$$

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$= \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

Что неверно?

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

Что неверно?

В каком виде мы должны представить ответ?

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

Что неверно?

В каком виде мы должны представить ответ?

У нас функция задана неявно.

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

Ответ представим в виде: $\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}} \right.$

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

Ответ представим в виде: $\left\{ \begin{array}{l} \\ \dfrac{dy}{dx} = \\ \\ \end{array} \right.$

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

Ответ представим в виде: $\left\{ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \right.$.

IX.3.1. Вывод формулы дифференцирования неявно заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную неявно: $F(x, y) = 0$.

В этом случае $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцируем последнее равенство по x, используя **формулу дифференцирования суперпозиции (композиции) функций:**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \equiv \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Отсюда получаем формулу $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

Ответ представим в виде: $\begin{cases} F(x, y) \equiv 0, \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}. \end{cases}$

IX.3.2. Формула дифференцирования неявно заданной функции

Теорема 33. *Если функция* $y(x)$ *задана неявно уравнением* $F(x, y) = 0$, *то*

$$\begin{cases} F(x, y) \equiv 0, \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}. \end{cases} \tag{44}$$

Доказательство. Формулу мы вывели ранее.

Рассмотреть пример?

X. Неопределённый интеграл

Обычно после обнаружения, введения или изучения преобразования объекта возникает потребность в **обратном преобразовании**, которое по **образу объекта восстанавливает его прообраз**.

X. Неопределённый интеграл

Обычно после обнаружения, введения или изучения преобразования объекта возникает потребность в **обратном преобразовании**, которое по **образу объекта восстанавливает его прообраз**.

Можно ли по производной функции однозначно восстановить саму функцию?

X.1. Первообразная функции

Определение 28. *Функция F,* ***производная*** *от которой совпадает с функцией f, называется* **первообразной для функции f.**

X.1. Первообразная функции

Определение 28. *Функция* F *называется* **первообразной для функции** f, *если* $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = f(x)$.

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство.

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если* f *— функция, непрерывная на* $(a;\, b)$ *и* F, G *— её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию H... Как ее задать?

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\, b)$ и F, G — её **первообразные**, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию H… Как ее задать?

Формулой, графиком, таблицей?

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) =$

Рассмотрим функцию H… Как ее задать?

Формулой, графиком, таблицей?

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x)$,

Рассмотрим функцию H... Как ее задать?

Формулой, графиком, таблицей?

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x)$,

Тогда $\quad H'(x) =$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x)$,

Тогда $\quad H'(x) =$

по **теореме о производной суммы функций**...

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\, b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x)$,

Тогда $\quad H'(x) = G'(x) - F'(x) =$

по **теореме о производной суммы функций**...

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x)$,
Тогда $\quad H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) =$
по **теореме о производной суммы функций**...

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x)$,

Тогда $\quad H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

по **теореме о производной суммы функций**...

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Тогда $\quad H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

по **теореме о производной суммы функций**...

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Докажем методом «от противного».

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) \neq H(\beta_1)$.

Докажем методом «от противного».

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) \neq H(\beta_1)$.

Не теряя общности рассуждений можно конкретизировать знак $\neq$, и взять вместо него $<$ или $>$.

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Не теряя общности рассуждений можно конкретизировать знак $\neq$, и взять вместо него $<$ или $>$.

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Если $$\frac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1},$$

то положим

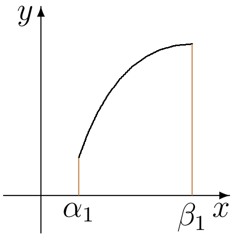
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим

X.2. Первообразные от непрерывной функции

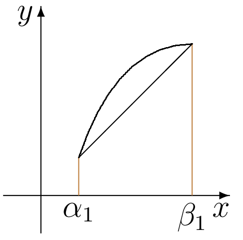
Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\, b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Если $$\frac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1},$$



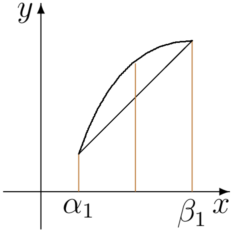
то положим

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$
Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим

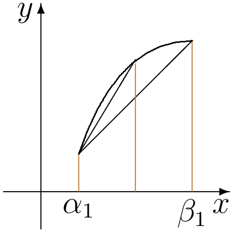
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим

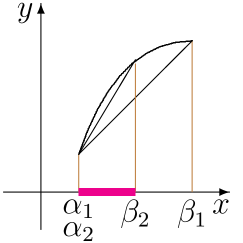
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим

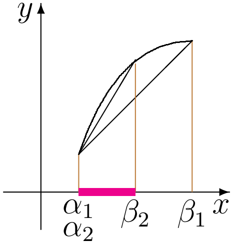
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

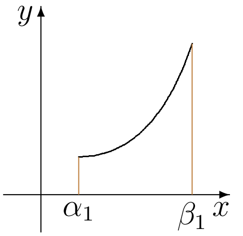
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

в противном случае

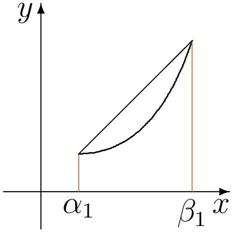
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

в противном случае

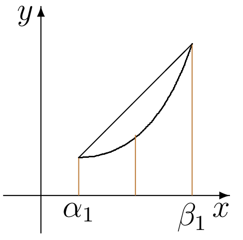
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные***, *то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

в противном случае

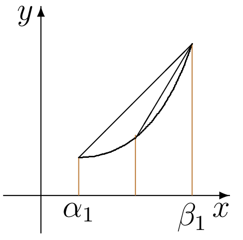
X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

в противном случае

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

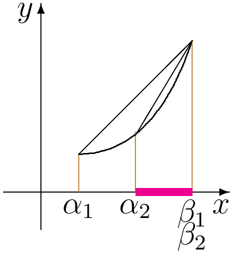
$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$



в противном случае

X.2. Первообразные от непрерывной функции

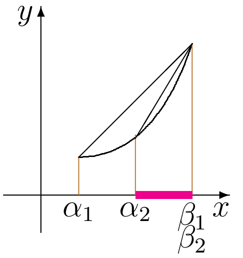
Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,



то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

в противном случае $\begin{cases} \alpha_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \\ \beta_2 = \beta_1. \end{cases}$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

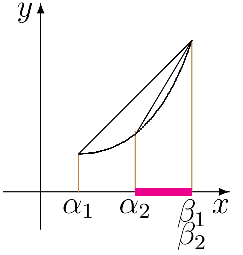
Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где



Если $\dfrac{H\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) - H(\alpha_1)}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - \alpha_1} \geqslant \dfrac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$,

то положим $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \end{cases}$

в противном случае $\begin{cases} \alpha_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2, \\ \beta_2 = \beta_1. \end{cases}$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её **первообразные**, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P.$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

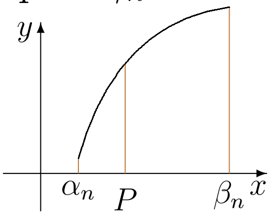
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные***, *то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

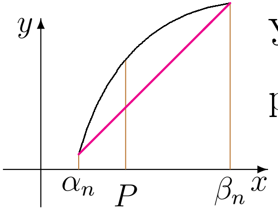
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



Угловой коэффициент равен $\dfrac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

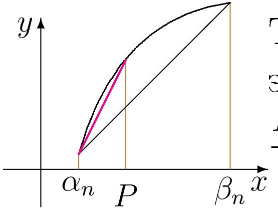
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



Теперь угловой коэффициент равен $\dfrac{H(\alpha_n) - H(P)}{\alpha_n - P}$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

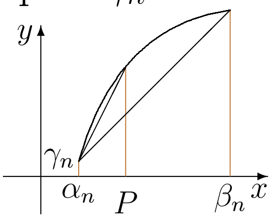
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

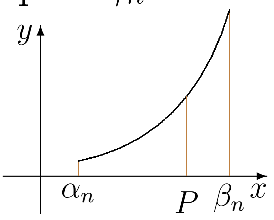
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

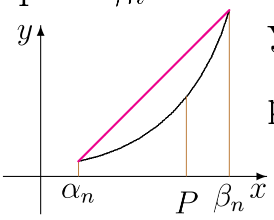
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



Угловой коэффициент равен $\dfrac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

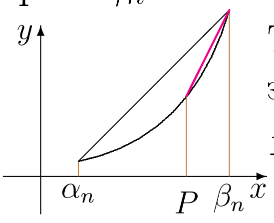
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



Теперь угловой коэффициент равен $\dfrac{H(\beta_n) - H(P)}{\beta_n - P}$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

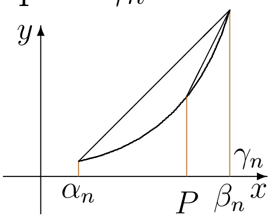
Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \qquad \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$



X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{n_k} = P$.

Для каждого n обозначим через γ_n такое из чисел α_n, β_n, чтобы

$$\frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Значит, в точке $P = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$ имеем

$$0 = H'(P) =$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные***, *то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Значит, в точке $P = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$ имеем

$$0 = H'(P) = \lim_{k\to\infty} \frac{H(\gamma_{n_k}) - P}{\gamma_{n_k} - P}$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные***, *то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Значит, в точке $P = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$ имеем

$$0 = H'(P) = \lim_{k\to\infty} \frac{H(\gamma_{n_k}) - P}{\gamma_{n_k} - P} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{n_k} = P$.

Значит, в точке $P = \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{n_k}$ имеем

$$0 = H'(P) = \lim_{k\to\infty}\frac{H(\gamma_{n_k}) - P}{\gamma_{n_k} - P} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1} > 0,$$

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Значит, в точке $P = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$ имеем

$$0 = H'(P) = \lim_{k\to\infty} \frac{H(\gamma_{n_k}) - P}{\gamma_{n_k} - P} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1} > 0,$$ противоречие.

X.2. Первообразные от непрерывной функции

Теорема 34. *Если f — функция, непрерывная на $(a;\ b)$ и F, G — её* ***первообразные****, то*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + C. \tag{45}$$

Доказательство. $H(x) = G(x) - F(x), \quad H'(x) = 0.$

Пусть для некоторых $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ имеем $H(\alpha_1) < H(\beta_1)$.

Продолжая этот процесс, получим $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad \frac{H(\gamma_n) - H(P)}{\gamma_n - P} \geqslant \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

По теореме **Больцано-Вейерштрасса** из $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = P$.

Значит, в точке $P = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$ имеем

$$0 = H'(P) = \lim_{k\to\infty} \frac{H(\gamma_{n_k}) - P}{\gamma_{n_k} - P} \geqslant \frac{H(\beta_1) - H(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1} > 0, \text{ противоречие.}$$

Теорема доказана.

X.3. Определение неопределённого интеграла

Забавное название, не правда ли?

X.3. Определение неопределённого интеграла

Определение 29. *Совокупность всех первообразных функции f называется* **неопределенным интегралом от** f *и обозначается как* $\int f(x)\,dx$.

X.3. Определение неопределённого интеграла

Определение 29. *Совокупность всех первообразных функции f называется* **неопределенным интегралом от** f *и обозначается как* $\int f(x)\,dx$.

Это определение небезупречно с точки зрения математической корректности, но для наших целей является вполне удовлетворительным.

X.3. Определение неопределённого интеграла

Определение 29. *Совокупность всех первообразных функции f называется* **неопределенным интегралом от f** *и обозначается как* $\int f(x)\,dx$.

Отметим, что если F — первообразная от непрерывной функции f, то обычно пишут
$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ вместо $\int f(x)\,dx = \left\{ F(x) + C \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$.

X.4. Линейность неопределённого интеграла

Из **свойств производной** вытекает, в частности, линейность неопределенного интеграла:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\; dx = \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx, \tag{46}$$

и «правило занесения под знак дифференциала»:

$$\int f\,(g(x))\; g'(x)\, dx = f(g(x)). \tag{47}$$

X.5. Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\displaystyle\int 0dt = C;$

2) $\displaystyle\int t^\alpha\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3) $\displaystyle\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C;$

4) $\displaystyle\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C;$

5) $\displaystyle\int \sin t\, dt = -\cos t + C;$

6) $\displaystyle\int \cos t\, dt = \sin t + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C;$

8) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C;$

9) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C;$

10) $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

11) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{a} + C;$

12) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm a^2}\right| + C$ («длинный логарифм»);

13) $\displaystyle\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + C$ («толстый логарифм»);

14) $\displaystyle\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C;$

X.6. Таблица основных неопределенных интегралов (дополнение)

15) $\displaystyle\int \operatorname{sh} t\, dt = \operatorname{ch} t + C;$ 16) $\displaystyle\int \operatorname{ch} t\, dt = \operatorname{sh} t + C;$

17) $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C;$ 18) $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C.$

X.7. Интегрирование «по частям»

К сожалению, удобной универсальной формулы для интегрирования произведения функций не существует.

Несколько облегчить нашу печаль должен приём, позволяющий во многих случаях упростить вычисление интеграла, называемый «интегрированием по частям».

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' =$$

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x) \cdot v(x) +$$

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Ну, и что?

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу:

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\left(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $u(x)v'(x) \quad = (u(x)\,v(x))' - \; u'(x)\,v(x)$

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $u(x)v'(x) \quad = (u(x)\, v(x))' - \quad u'(x)\, v(x)$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $\int u(x) v'(x) \quad = u(x)\, v(x) \; - \int u'(x)\, v(x)$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

Что неправильно в полученной записи?

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $\int u(x)v'(x) \quad = u(x)\,v(x) \; - \int u'(x)\,v(x)$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

Что неправильно в полученной записи?

Под знаком интеграла должен быть **дифференциал**!

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

Что неправильно в полученной записи?

Под знаком интеграла должен быть **дифференциал**!

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

В итоге получили важную формулу, называемую

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) \ -\int u'(x)\,v(x)\,dx.$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

Что неправильно в полученной записи?

Под знаком интеграла должен быть **дифференциал**!

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

В итоге получили важную формулу, называемую формулой «интегрирования по частям»:

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

Что неправильно в полученной записи?

Под знаком интеграла должен быть **дифференциал**!

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\left(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

В итоге получили важную формулу, называемую формулой «интегрирования по частям»:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{48}$$

Ну, и что?

Преобразуем формулу: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$

Проинтегрируем («навесим червячков»)...

Что неправильно в полученной записи?

Под знаком интеграла должен быть **дифференциал**!

X.7. Интегрирование «по частям»

$$\Big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

В итоге получили важную формулу, называемую формулой «интегрирования по частям»:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{48}$$

Рассмотрим пример?

X.8. Интегрирование заменой переменной

Инвариантность первого интеграла является основой для метода интегрирования заменой переменной:

X.8. Интегрирование заменой переменной

Инвариантность первого интеграла является основой для метода интегрирования заменой переменной:

$$\begin{cases} \int f(x)\,dx = F(x) + C, \\ \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(t) + D \end{cases} \Rightarrow \quad F(x) = \Phi\left(\varphi^{-\mathbf{1}}(\mathbf{x})\right) + E. \quad (49)$$

Рассмотреть пример?

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

В отличие от вычисления производной, для неопределенного интеграла не существует алгоритма его вычисления.

Более того, интеграл от некоторых элементарных функций не является элементарной функцией!

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

Посмотреть, не является ли интеграл табличным, или нельзя ли значительно упростить его вычисление «занесением» какого-либо выражения «под знак дифференциала», пользуясь формулой $f'(x)\,dx = df$.

Рассмотрим пример?

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Если да, то стандартное решение — разложить подынтегральную функцию в сумму многочлена и правильной дробно-рациональной функции:
$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\ldots Q_m(x)^{\beta_m}} =$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\dots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\ldots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\ldots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\dots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$
$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\dots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\dots+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\dots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\dots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\dots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\ldots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{Q_1(x)}+\ldots+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\dots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\dots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\dots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{Q_1(x)}+\dots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{Q_1(x)^{\beta_1}}+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\ldots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$

$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{Q_1(x)}+\ldots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{Q_1(x)^{\beta_1}}+\frac{M_{21}x+N_{21}}{Q_2(x)}+\ldots+$$

где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

Правильная дробно-рациональная функция обычно интегрируется занесением под знак дифференциала и (или) разложением в сумму *простейших* дробно-рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}Q_1(x)^{\beta_1}\ldots Q_m(x)^{\beta_m}} = R(x)+$$
$$+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$
$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{Q_1(x)}+\ldots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{Q_1(x)^{\beta_1}}+\frac{M_{21}x+N_{21}}{Q_2(x)}+\ldots+$$
$$+\frac{M_{m\beta_m}x+N_{m\beta_m}}{Q_m(x)^{\beta_m}},$$ где $Q_i(x)$ — квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами. **Рассмотрим пример?**

X.9. Рекомендуемый порядок вычисления

1. Занести что-то под знак дифференциала?

2. Посмотреть, не является ли подынтегральная функция дробно-рациональной.

3. Осуществить замену переменной или провести **интегрирование «по частям»**.

$$\text{\textit{Замена переменной:}}\quad \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

где функция φ взаимно однозначная дифференцируемая функция.

$$\left\{\begin{matrix}\text{\textit{интегрирование}}\\ \text{\textit{по частям}}\end{matrix}\right.\quad \int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x).$$

X.10. Таблица рекомендуемых замен при вычислении интегралов от тригонометрических функций

При проведении замен для сведения интегралов от тригонометрических функций к интегралам от дробно-рациональных функций обычно используются **следующие формулы**:

1. $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$ 2. $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x.$

3. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$ 4. $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x.$

5. $1 - \sin^2 x = \cos^2 x.$ 6. $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

7. $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ 8. $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

9. $\sin \alpha\mathbf{x} \sin \beta\mathbf{x} = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right).$

10. $\sin \alpha x \cos \beta x = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x\right).$

11. $\cos \alpha x \cos \beta x = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x\right).$

X.10. Таблица рекомендуемых замен при вычислении интегралов от тригонометрических функций

В соответствии с вышеприведенными формулами, для сведения интеграла от тригонометрических функций к интегралу от дробно-рациональной функции обычно используются замены типа:

1. $t = \cos x$. 2. $t = \sin x$. 3. $t = \cos 2x$.

4. $t = \sin 2x$. 5. $t = \operatorname{tg} x$. 6. $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

X.10. Таблица рекомендуемых замен при вычислении интегралов от тригонометрических функций

Если подынтегральное выражение имеет вид отношения двух функций, зависящих от sin и cos различных углов, то часто можно свести вычисление такого интеграла к интегрированию дробно-рациональной функции с помощью сведения числителя и знаменателя к однородным функциям от $\sin kx$ и $\cos kx$ для некоторого k, причем степень однородности числителя на 2 меньше степени однородности знаменателя.

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **однородной степени** α, если выполняется тождество

$$F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \equiv t^\alpha F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим пример?

X.10. Таблица рекомендуемых замен при вычислении интегралов от тригонометрических функций

Если подынтегральное выражение имеет вид отношения двух функций, зависящих от sin и cos различных углов, то часто можно свести вычисление такого интеграла к интегрированию дробно-рациональной функции с помощью сведения числителя и знаменателя к однородным функциям от $\sin kx$ и $\cos kx$ для некоторого k, причем степень однородности числителя на 2 меньше степени однородности знаменателя.

После этого интеграл сводится к дробно-рациональной функции заменой $t = \operatorname{tg} kx$. Добиться представления подынтегральной функции в виде отношения однородных функций от $\sin kx$ и $\cos kx$ обычно удается с помощью формул, выражающих тригонометрические функции через sin и cos меньшего угла, и формулы $1 = \sin^2(kx) + \cos^2(kx)$.

Для иллюстрации приведем выкладки, с помощью которых вычисление $\int \frac{1-\sin 4x}{\cos 4x - \sin^2 2x}dx$

сводится к интегралу от дробно-рациональной функции:

$$\int \frac{1-\sin 4x}{\cos 4x-\sin^2 2x}dx = \int \frac{\left(\cos^2 2x+\sin^2 2x\right)-2\sin 2x\cos 2x}{\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)-\sin^2 2x}dx =$$

$$= \int \frac{\cos^2 2x-2\cos 2x\sin 2x+\sin^2 2x}{\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)\left(\cos^2 2x-2\sin^2 2x\right)}dx =$$

$$\int \frac{1-2\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}^2 2x}{\left(1+\operatorname{tg}^2 2x\right)\left(1-2\operatorname{tg}^2 2x\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}dx = \int \frac{1-2t+t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1-2t^2\right)}dt.$$

X.11. Таблица рекомендуемых замен при вычислении интегралов от функций с иррациональностями

Выражение в подынтегральной функции	Рекомендуемая замена	Некоторые основаны на формулах
1. $\dfrac{1}{(x-a)^n}$	$t = \dfrac{1}{x-a}$	$1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
2. $\sqrt[m]{(x-a)^n}$	$t = \sqrt[m]{x-a}, \quad t^m = x-a$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$
3. $\sqrt[m]{\left(\dfrac{ax-b}{cx-d}\right)^n}$	$t = \sqrt[m]{\dfrac{ax-b}{cx-d}}, \quad t^m = \dfrac{ax-b}{cx-d}$	$1-\sin^2 x = \cos^2 x$
4. $\sqrt{a^2+(x-b)^2}$	$\left\{\begin{array}{l} x-b = a\operatorname{tg} t \\ x-b = a\operatorname{sh} t \end{array}\right.$	$1+\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$
5. $\sqrt{(x-b)^2-a^2}$	$\left\{\begin{array}{l} x-b = \dfrac{a}{\cos t} \\ x-b = a\operatorname{ch} t \end{array}\right.$	$\operatorname{ch}^2 x - 1 = \operatorname{sh}^2 x$
6. $\sqrt{a^2-(x-b)^2}$	$x-b = a\sin t$	

XI. Определенный интеграл

Математический анализ, ранее называемый «анализом посредством бесконечно малых», использует понятие предела как основное. Объекты, которые подвергаются анализу — функции, функционалы, операторы. Функции и другие объекты изучаются методами бесконечно малых, или методами пределов. В курсе математического анализа Вы подробно изучали пределы последовательности (функции от натурального аргумента), пределы функции, понятие производной (по определению производная — это предел).

XI. Определенный интеграл

Понятие предела не лежало в основе дифференциального и интегрального исчисления при его возникновении. Перелом в этом вопросе был сделан «Алгебраическим анализом» Коши (1821) и дальнейшими его публикациями, где впервые была развита теория пределов, послужившая в руках Коши орудием для строгого построения всего математического анализа.

XI. Определенный интеграл

Понятие предела не лежало в основе дифференциального и интегрального исчисления при его возникновении. Перелом в этом вопросе был сделан «Алгебраическим анализом» Коши (1821) и дальнейшими его публикациями, где впервые была развита теория пределов, послужившая в руках Коши орудием для строгого построения всего математического анализа.

В этой главе мы встретимся еще с одним пределом — так называемым определенным интегралом. Далее будут рассмотрены так называемые несобственные интегралы — это тоже пределы; ряды, где сумма ряда также является пределом.

XI. Определенный интеграл

Понятие предела не лежало в основе дифференциального и интегрального исчисления при его возникновении. Перелом в этом вопросе был сделан «Алгебраическим анализом» Коши (1821) и дальнейшими его публикациями, где впервые была развита теория пределов, послужившая в руках Коши орудием для строгого построения всего математического анализа.

К понятию определенного интеграла привели две классические задачи: задача о вычислении площади криволинейной трапеции и задача о массе неоднородного стержня.

Рассмотрим пример?

XI.1. Разбиение отрезка

Определение 30. *Назовем* **разбиением отрезка** $[a; b]$ *множество действительных чисел* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *такое, что*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots, x_n = b.$$

Диаметром разбиения $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *называется число*

$$\Delta = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

XI.1. Разбиение отрезка

Определение 30. *Назовем* **разбиением отрезка** $[a;b]$ *множество действительных чисел* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *такое, что*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots, x_n = b.$$

Диаметром разбиения $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *называется число*

$$\Delta = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Например, $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1,\ 1.2,\ 1.6,\ 1.9,\ 2\}$ — это разбиение отрезка $[1;2]$, причем диаметр этого разбиения равен

$$\Delta = \max_{i \in \{1;2;3;4\}} (x_i - x_{i-1}) = \max\{0.2,\ 0.4,\ 0.3,\ 0.1\} = 0.4.$$

XI.2. Определение определенного интеграла

Определение 31. *Пусть f — функция с областью определения $D(f)$, и существует такое число A, что*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\quad \forall \xi_1 \ldots \xi_n$$

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \\ x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ \xi_i \in D(f) \\ \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1}) < \delta \end{cases} \Rightarrow \left| A - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (50)$$

Тогда число A называется **определенным интегралом** *от функции f по отрезку $[a; b]$. Определенный интеграл от функции f по отрезку $[a; b]$ обозначается через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, при этом число a называется* **нижним пределом интегрирования**, *а число b —* **верхним пределом интегрирования**.

XI.3. Интегральная сумма

Формулу (50) часто записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_i f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})\,, \tag{51}$$

где Δ — диаметр разбиения $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ называется **интегральной суммой**, и поэтому говорят, что *определенный интеграл — это предел интегральных сумм при диаметре разбиения, стремящемся к 0.*

XI.4. История обозначений

Заметим, что символ x в обозначении $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является, говоря языком «математического слэнга», «глухой» переменной[1], то есть итоговое выражение от x не зависит, и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt$ и т.п. Роль переменной x похожа на роль индекса суммирования i в выражениях типа $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$.

[1]Иногда такую переменную называют «немой» переменной. В общем, как печально говорят студенты, x — это «глухая, слепая и немая переменная».

XI.4. История обозначений

Обозначения $\displaystyle\int$ и $\displaystyle\sum$ являются «прямыми родственниками», поскольку интеграл, по определению, — это предел интегральных сумм. Обозначение $\displaystyle\int$ представляет собой искаженную букву s.

XI.4. История обозначений

Обозначения $\displaystyle\int$ и $\displaystyle\sum$ являются «прямыми родственниками», поскольку интеграл, по определению, — это предел интегральных сумм. Обозначение $\displaystyle\int$ представляет собой искаженную букву s.

Символ $\displaystyle\int$ был введен Лейбницем,

XI.4. История обозначений

Обозначения $\displaystyle\int$ и $\displaystyle\sum$ являются «прямыми родственниками», поскольку интеграл, по определению, — это предел интегральных сумм. Обозначение $\displaystyle\int$ представляет собой искаженную букву s.

Символ $\displaystyle\int$ был введен Лейбницем,

обозначение $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ применено Фурье,

XI.4. История обозначений

Обозначения $\displaystyle\int$ и $\displaystyle\sum$ являются «прямыми родственниками», поскольку интеграл, по определению, — это предел интегральных сумм. Обозначение $\displaystyle\int$ представляет собой искаженную букву s.

Символ $\displaystyle\int$ был введен Лейбницем,

обозначение $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ применено Фурье,

а слово «интеграл» было предложено Иоганном Бернулли.

XI.4. История обозначений

Если обозначить числа $x_i - x_{i-1}$ через Δx_i, то получим, согласно формуле (51),

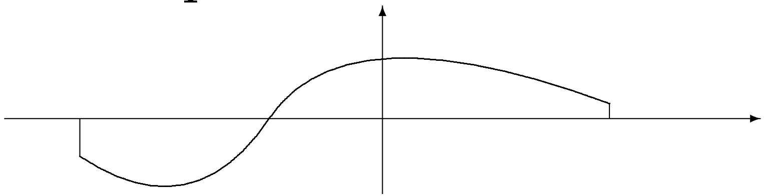
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\Delta x_i| \to 0} \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Можно интерпретировать это так: при переходе к пределу $\sum\limits_k$ «превращается» в $\int\limits_a^b$, поскольку ξ_k в некотором смысле «заполняют» отрезок $[a; b]$. При этом обозначение ξ_k мы заменяем на x, считая, что x «пробегает» весь отрезок, и обозначение Δx_i «превращается» в dx (которое можно интерпретировать, как «приращение значения переменной x»).

XI.5. Интегрируемость функции

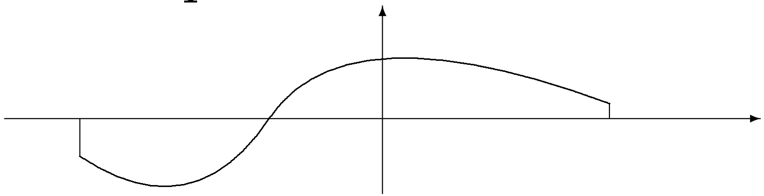
Определение 32. *Функция f называется* **интегрируемой (по Риману) на отрезке** $[a;b]$, *если* ***предел (51)***, *существует, то есть найдется число A со* ***свойством (50).***

XI.6. Геометрическая интерпретация определенного интеграла



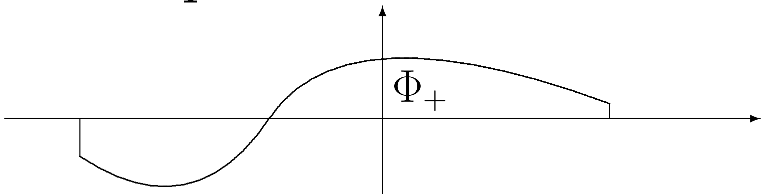
Замечание 1. *Если функция f принимает на отрезке $[a;b]$ не только положительные значения, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *равна*

XI.6. Геометрическая интерпретация определенного интеграла



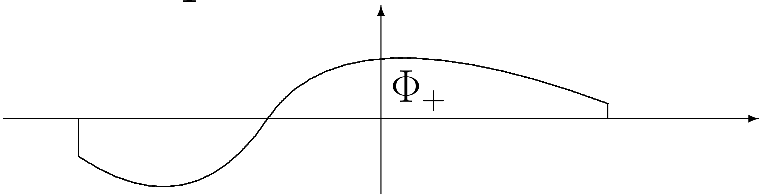
Замечание 1. *Если функция f принимает на отрезке $[a;b]$ не только положительные значения, то* $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *равна разности между площадью фигуры Φ_+, ограниченной осью абсцисс и той частью графика функции f, которая находится* выше *этой оси, и*

XI.6. Геометрическая интерпретация определенного интеграла



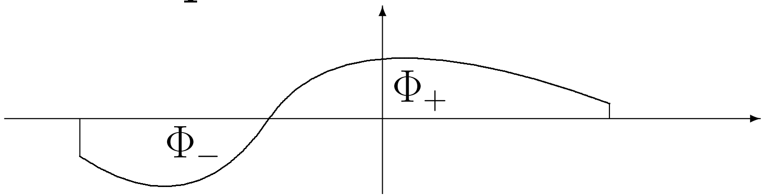
Замечание 1. *Если функция f принимает на отрезке $[a;b]$ не только положительные значения, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равна разности между площадью фигуры Φ_+, ограниченной осью абсцисс и той частью графика функции f, которая находится* выше *этой оси, и*

XI.6. Геометрическая интерпретация определенного интеграла



Замечание 1. *Если функция f принимает на отрезке $[a;b]$ не только положительные значения, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *равна разности между площадью фигуры Φ_+, ограниченной осью абсцисс и той частью графика функции f, которая находится* выше *этой оси, и площадью фигуры Φ_-, ограниченной осью абсцисс и той частью графика функции f, которая находится* ниже *этой оси.*

XI.6. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

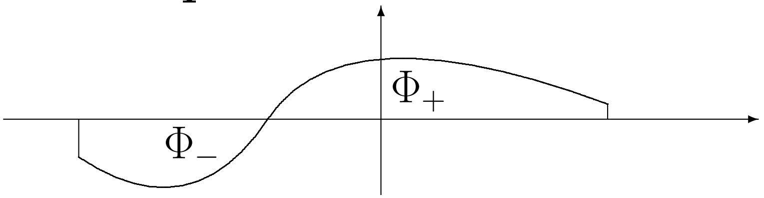


Замечание 1. *Если функция f принимает на отрезке $[a;b]$ не только положительные значения, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *равна*

разности между площадью фигуры Φ_+, ограниченной осью абсцисс и той частью графика функции f, которая находится выше *этой оси, и*

площадью фигуры Φ_-, ограниченной осью абсцисс и той частью графика функции f, которая находится ниже *этой оси.*

XI.6. Геометрическая интерпретация определенного интеграла



Справедливость **замечания 1** следует из **формулы**, достаточно слагаемые сгруппировать следующим образом: в первую группу собрать все слагаемые, для которых $f(\xi_1) \geqslant 0$, а во вторую — все те слагаемые, для которых $f(\xi_i) < 0$.

XI.7. Проблематика темы «определенный интеграл»

Какими проблемами мы будем сейчас заниматься?

XI.7. Проблематика темы «определенный интеграл»

Во-первых, надо понять, всегда ли существует определенный интеграл.

XI.7. Проблематика темы «определенный интеграл»

Во-первых, надо понять, всегда ли существует определенный интеграл.

Предел

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

является «хитрым», поскольку выражение под знаком предела зависит не только (и не столько) от Δ, но и от выбора чисел x_i, ξ_j.

XI.7. Проблематика темы «определенный интеграл»

Во-первых, надо понять, всегда ли существует определенный интеграл.

Поскольку трудно ожидать, что «хитрый» предел

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

существует для любой функции f, то нам следует разобраться, насколько «обременительным» для функции является условие существования этого предела, то есть насколько широким является класс интегрируемых функций.

XI.7. Проблематика темы «определенный интеграл»

Во-первых, надо понять, всегда ли существует определенный интеграл.

Во-вторых, нам следует научиться вычислять определенный интеграл, изучить его свойства, установить связи с другими понятиями, например, с неопределенным интегралом.

XI.8. Пример функции, не интегрируемой (по Риману)

Сначала ответим на вопрос, для любой ли функции существует определенный интеграл. Пример не интегрируемой ни на одном из отрезков функции: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

XI.8. Пример функции, не интегрируемой (по Риману)

Сначала ответим на вопрос, для любой ли функции существует определенный интеграл. Пример не интегрируемой ни на одном из отрезков функции: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

В самом деле, если в интегральной сумме выбирать ξ_i только иррациональными числами (это можно сделать), то такая интегральная сумма будет равна 0.

XI.8. Пример функции, не интегрируемой (по Риману)

Сначала ответим на вопрос, для любой ли функции существует определенный интеграл. Пример не интегрируемой ни на одном из отрезков функции: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

В самом деле, если в интегральной сумме выбирать ξ_i только иррациональными числами (это можно сделать), то такая интегральная сумма будет равна 0.

Если же ξ_i выбирать только рациональными, интегральная сумма равна $(b - a)$. При этом уменьшение диаметра разбиения «не помогает», поэтому предела нет.

XI.8. Пример функции, не интегрируемой (по Риману)

Сначала ответим на вопрос, для любой ли функции существует определенный интеграл. Пример не интегрируемой ни на одном из отрезков функции: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

В самом деле, если в интегральной сумме выбирать ξ_i только иррациональными числами (это можно сделать), то такая интегральная сумма будет равна 0.

Если же ξ_i выбирать только рациональными, интегральная сумма равна $(b - a)$. При этом уменьшение диаметра разбиения «не помогает», поэтому предела нет.

XI.8. Пример функции, не интегрируемой (по Риману)

Сначала ответим на вопрос, для любой ли функции существует определенный интеграл. Пример не интегрируемой ни на одном из отрезков функции: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

Класс интегрируемых по Риману функций, в некотором смысле, необозрим. Поэтому мы остановимся только на указании некоторых важных подклассов. Доказательство интегрируемости этих функций основано на понятиях *верхней и нижней сумм Дарбу*, которые мы сейчас обсудим.

XI.9. Суммы Дарбу

Определение 33. *Пусть функция* f *ограничена*[2] *на отрезке* $[a;b]$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *— разбиение отрезка* $[a;b]$, *обозначим через* m_i *и, соответственно,* M_i *— точную нижнюю и, соответственно, точную верхнюю границу значений функции* f *на отрезке* $[x_{i-1}; x_i]$. *Тогда число*

$$s\left(x_0, \ldots, x_n\right) = \sum_{k=1}^{n} m_i \left(x_i - x_{i-1}\right) \tag{52}$$

называется **нижней суммой Дарбу**, *и число*

$$S\left(x_0, \ldots, x_n\right) = \sum_{k=1}^{n} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right) \tag{53}$$

— верхней суммой Дарбу.

Рассмотрим пример?

---

[2] То есть $\exists M > 0 \; \forall x \quad x \in [a;b] \Rightarrow |f(x)| < M$.

XI.10. Критерий существования определенного интеграла

Теорема 35. *Интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *существует тогда и только тогда, когда функция* f *ограничена и* $\lim\limits_{\Delta\to 0}(S-s)=0$, *то есть*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x_0,\ldots,x_n\quad\begin{cases} a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\\ \max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}}|x_k-x_{k-1}|<\delta\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |S(x_0,\ldots,x_n)-s(x_0,\ldots,x_n)|<\varepsilon. \tag{54}$$

XI.10. Критерий существования определенного интеграла

Теорема 35. *Интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *существует тогда и только тогда, когда функция* f *ограничена и* $\lim\limits_{\Delta\to 0}(S-s)=0$*, то есть*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x_0,\ldots,x_n \quad \begin{cases} a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b \\ \max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}}|x_k-x_{k-1}|<\delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|S\left(x_0,\ldots,x_n\right)-s\left(x_0,\ldots,x_n\right)\right|<\varepsilon. \qquad (54)$$

Доказательство этой теоремы мы опустим. Отметим лишь доказанную ниже **теорему об ограниченности интегрируемой функции**.

XI.10. Критерий существования определенного интеграла

Оказалось, что интегрируемыми являются такие важные, с практической точки зрения, классы функций как непрерывные функции и функции, ограниченные на $[a; b]$ и при этом имеющие на $[a; b]$ лишь конечное число точек разрыва.

XI.11. Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Теорема 36. *Если функция $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, то она интегрируема.*

XI.11. Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Теорема 36. *Если функция $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, то она интегрируема.*

Доказательство этой теоремы мы проведем с использованием теоремы Кантора, поэтому оно **приведено ниже**.

XI.12. Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывной функции

Функция называется **кусочно-непрерывной** на $[a; b]$, если она имеет на $[a; b]$ лишь конечное число точек разрыва первого рода. Таким образом, в данной теореме доказывается несколько более общий факт, чем отражено в ее названии, так как, например, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ удовлетворяет на $[0; 1]$ условиям этой теоремы (и, следовательно, интегрируема), но в точке $x = 0$ она имеет разрыв второго рода.

XI.12. Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывной функции

Теорема 37. *Если ограниченная на* $[a; b]$ *функция* f *имеет на отрезке* $[a; b]$ *лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

Функция называется **кусочно-непрерывной** на $[a; b]$, если она имеет на $[a; b]$ лишь конечное число точек разрыва первого рода. Таким образом, в данной теореме доказывается несколько более общий факт, чем отражено в ее названии, так как, например, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ удовлетворяет на $[0; 1]$ условиям этой теоремы (и, следовательно, интегрируема), но в точке $x = 0$ она имеет разрыв второго рода.

XI.13. Теорема об интегрируемости монотонной функции

Теорема 37. *Если ограниченная на* $[a; b]$ *функция* f *имеет на отрезке* $[a; b]$ *лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

Теорема 38. *Монотонная ограниченная на* $[a, b]$ *функция интегрируема.*

XI.13. Теорема об интегрируемости монотонной функции

Теорема 37. *Если ограниченная на* $[a; b]$ *функция* f *имеет на отрезке* $[a; b]$ *лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

Теорема 38. *Монотонная ограниченная на* $[a, b]$ *функция интегрируема.*

Доказательство этих теорем мы приводить не будем.

XI.14. Свойства определенного интеграла

Доказательства многих из этих свойств мы не приводим, так как эти свойства следуют непосредственно из определений. Каждая из них легко доказывается, например, с использованием рекомендаций раздела **«если надо что-то доказать»**.

XI.14.1. Свойства определенного интеграла: линейность интеграла

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то для любых действительных чисел λ, μ функция $\lambda f + \mu g$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Следовательно, функция F каждой интегрируемой на отрезке $[a;b]$ функции f, ставящая в соответствие число $F(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, является линейной функцией: $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$.

XI.14.2. Свойства определенного интеграла: нечувствительность к изменениям в отдельных точках

Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и на отрезке $[a;b]$ функция g принимает те же значения, что и функция f, кроме конечного числа точек отрезка $[a;b]$, то есть

$$\exists t_1, t_2, \ldots, t_k \in [a;b] \quad \forall x \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ x \notin \{t_1, \ldots, t_k\} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x),$$

то функция g интегрируема на $[a;b]$, причем $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Иначе говоря, определенный интеграл «не чувствует» изменения значения функции в отдельной точке.

XI.14.3. Свойства определенного интеграла: перестановка пределов интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

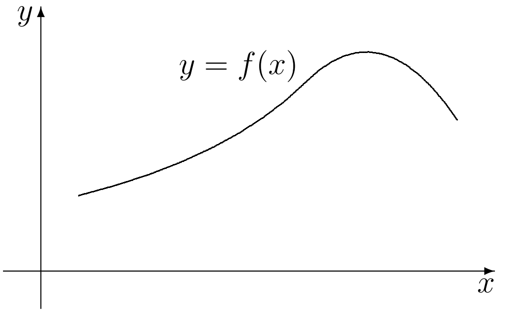
Название происходит от слова add — складывать.

XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

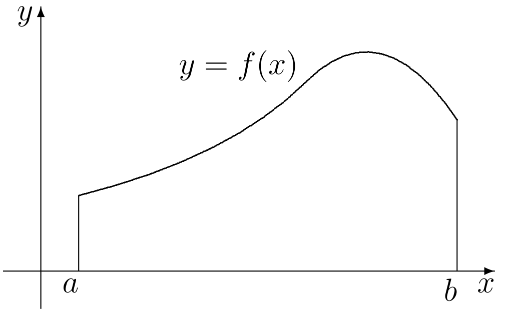
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то



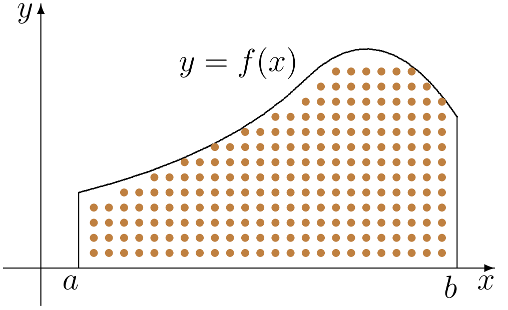
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то



XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

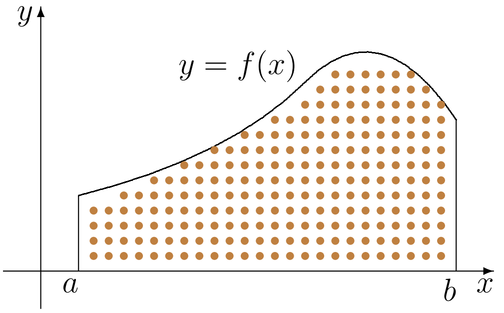
Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то



XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

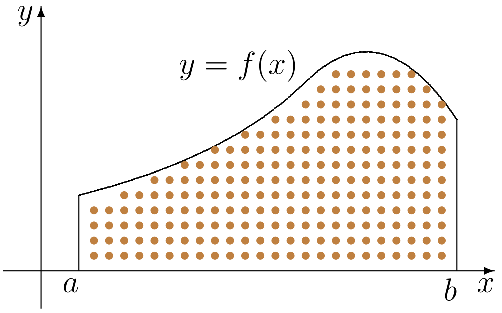


XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx =$$

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.



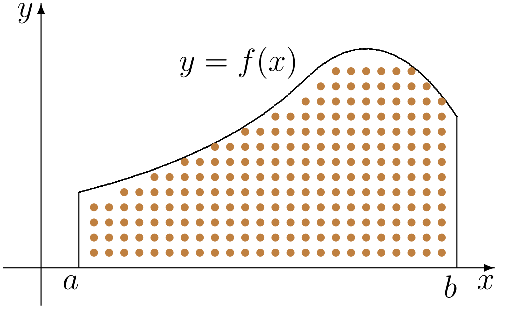
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

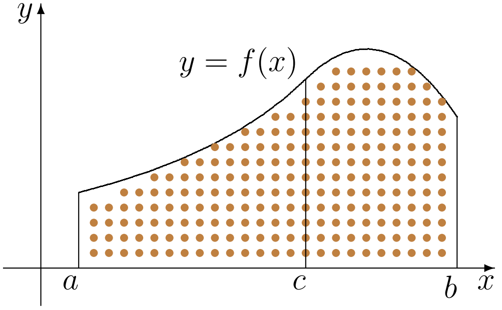
«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.



XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$



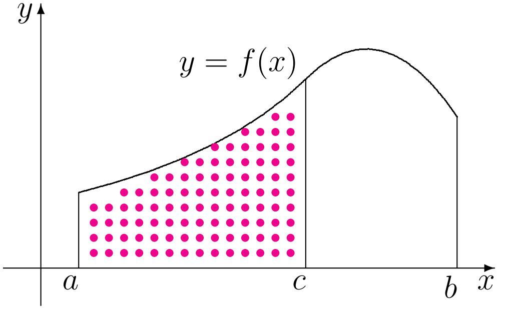
Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.

XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$



Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.

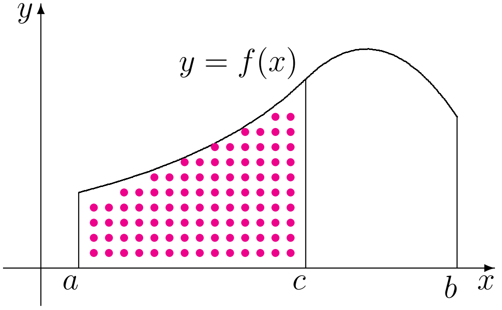
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx +$$

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.



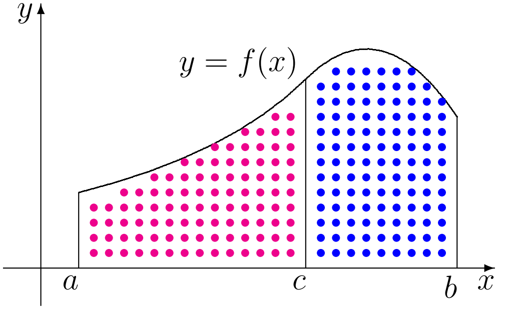
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx +$$

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.



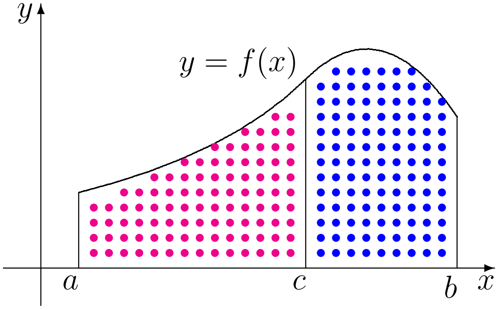
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \qquad (55)$$

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.



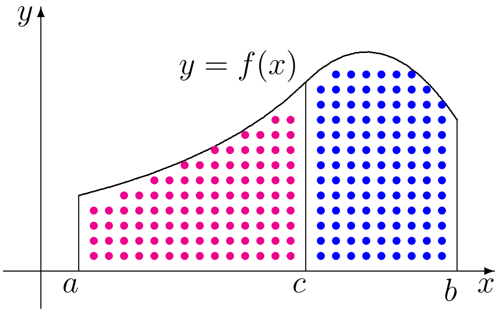
XI.14.4. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \qquad (55)$$

Площадь этой фигуры можно представить в виде интеграла.

«Разрежем» эту фигуру на части с помощью прямой $x = c$.



На самом деле равенство (55) выполняется, если хотя бы два из этих трех интегралов существуют.

XI.14.5. Свойства определенного интеграла: интеграл от неотрицательной функции

Если f интегрируема на $[a; b]$, где $a < b$, и для любого x из $[a, b]$ имеет место неравенство $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$.

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \ldots \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

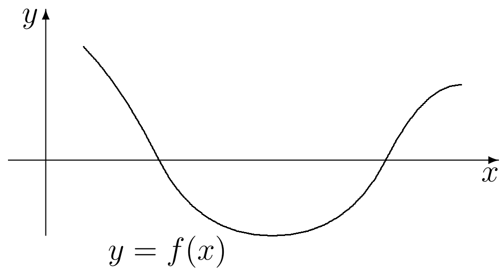
Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Проиллюстрируем рисунком.

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

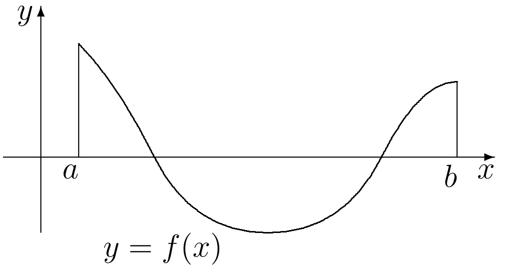
Проиллюстрируем рисунком.



XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

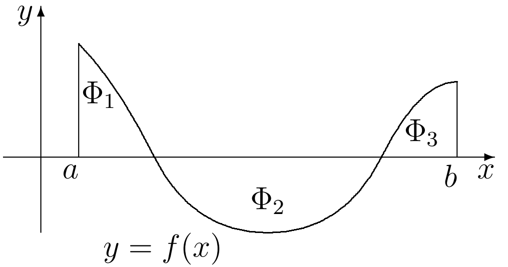
Проиллюстрируем рисунком.



XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

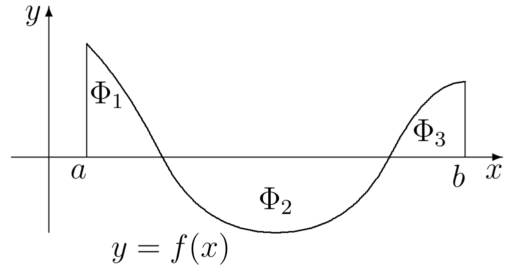
Проиллюстрируем рисунком.



XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

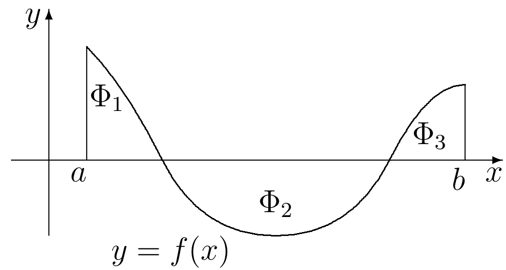


XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| =$

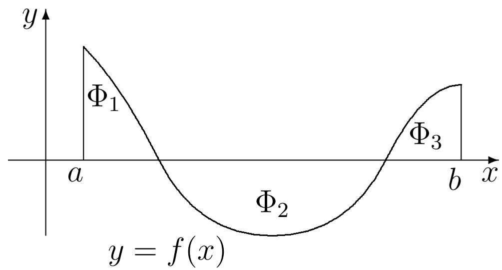


XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$

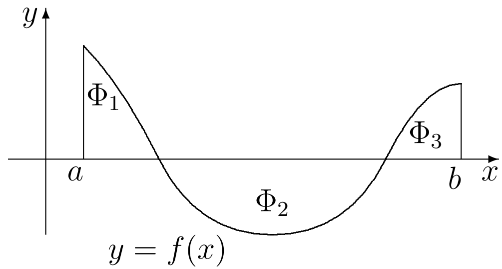


XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$



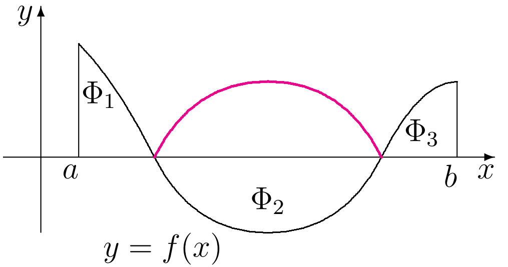
$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$



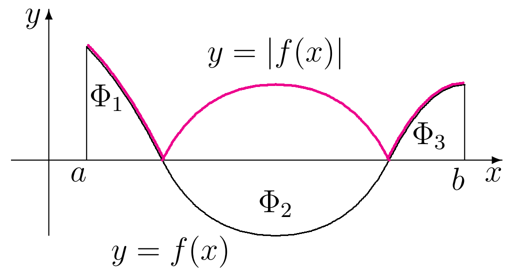
$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$



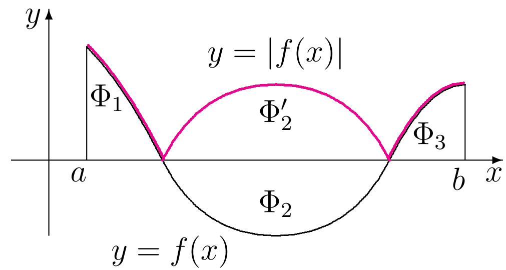
$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$



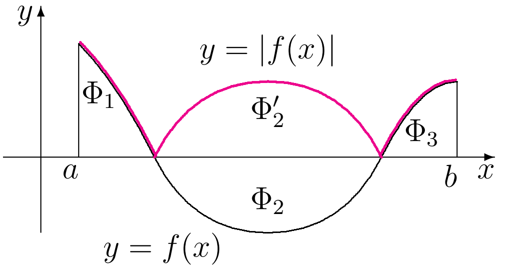
$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

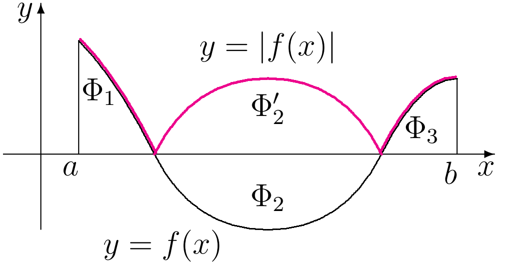
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$



$$S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2'} + S_{\Phi_3} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$



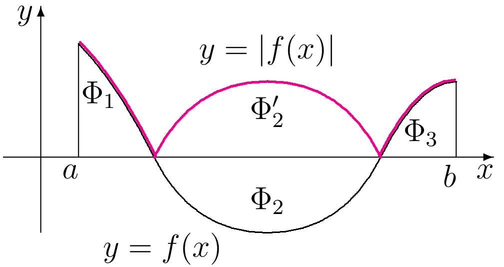
Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3}$$

$$S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2'} + S_{\Phi_3} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$



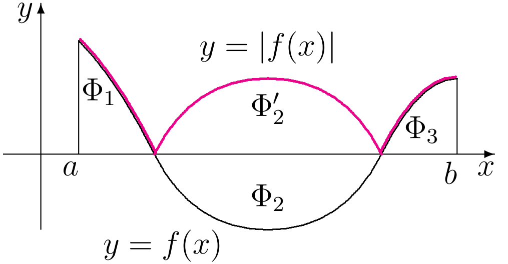
Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} \leqslant$$

$$\leqslant S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2'} + S_{\Phi_3} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$



Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} \leqslant$$

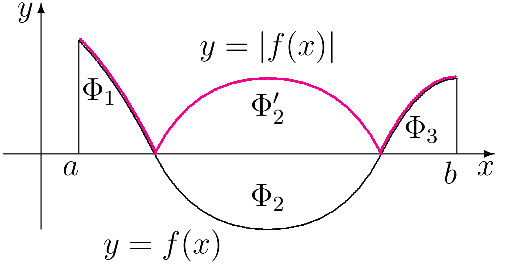
$$\leqslant S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi'_2} + S_{\Phi_3} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ура!

Хотя...

XI.14.6. Свойства определенного интеграла: сравнение интеграла от модуля и модуля от интеграла

Если $a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$



Если обозначить через S_Φ площадь фигуры Φ, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} \leqslant$$

$$\leqslant S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2'} + S_{\Phi_3} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ура!

Хотя это не доказательство, а лишь иллюстрация...

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $\quad m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

XI.15. Теорема об оценке интеграла

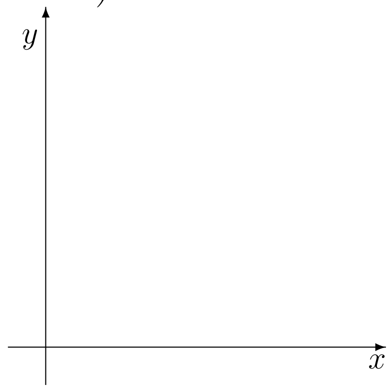
Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Проиллюстрируем утверждение и доказательство графически.

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

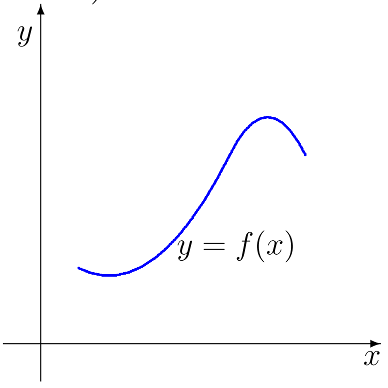
Доказательство. Проиллюстрируем утверждение и доказательство графически.



XI.15. Теорема об оценке интеграла

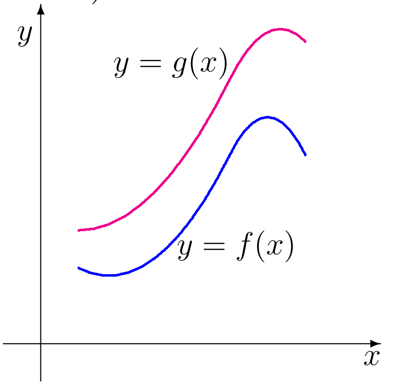
Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Проиллюстрируем утверждение и доказательство графически.



XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

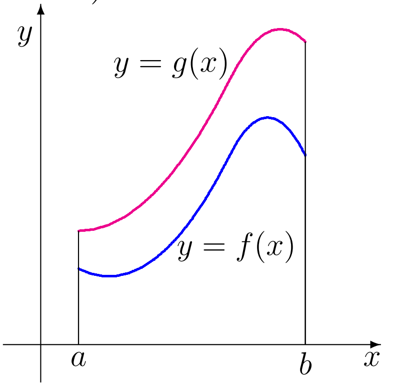


Доказательство. Проиллюстрируем утверждение и доказательство графически.

XI.15. Теорема об оценке интеграла

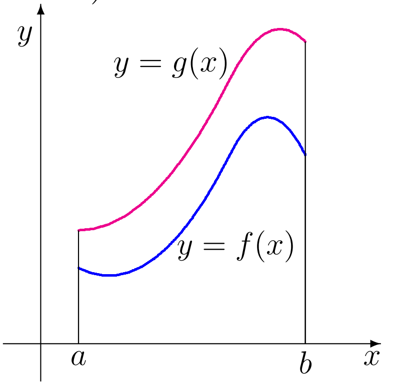
Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Проиллюстрируем утверждение и доказательство графически.



XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

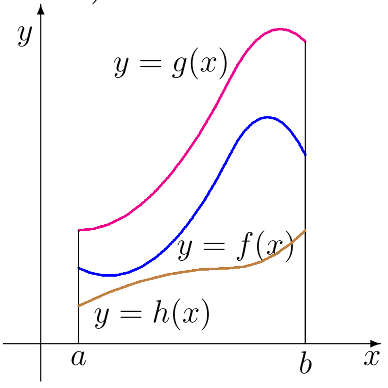


Доказательство. 1). Рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - f(x)$.

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. 1). Рассмотрим функцию $h(x)=g(x)-f(x)$.

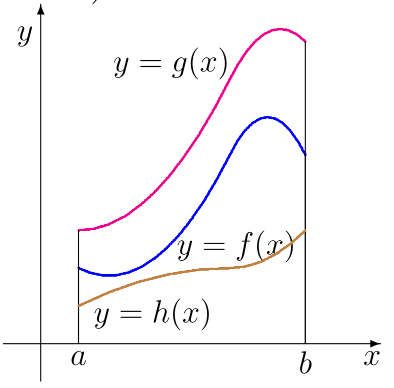


XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.



Доказательство. 1). Рассмотрим функцию $h(x)=g(x)-f(x)$.

По условию $h(x)\geqslant 0$, поэтому,

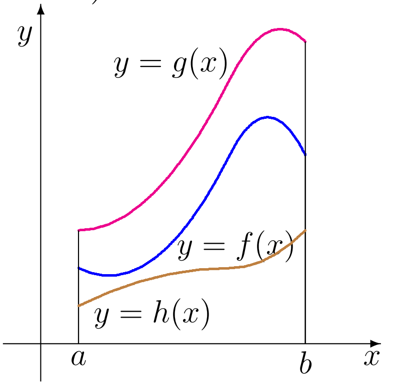
по **свойству интеграла от неотрицательной функции** и

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$.



Доказательство. 1). Рассмотрим функцию $h(x)=g(x)-f(x)$.

По условию $h(x)\geqslant 0$, поэтому,

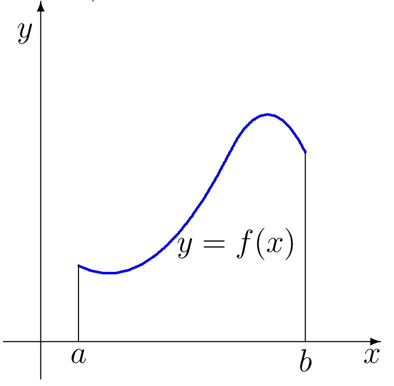
по **свойству интеграла от неотрицательной функции** и

свойству **линейности интеграла** получаем требуемое заключение.

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Теперь докажем утверждение 2).



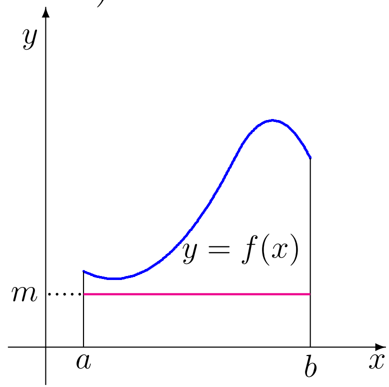
XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Теперь докажем утверждение 2).



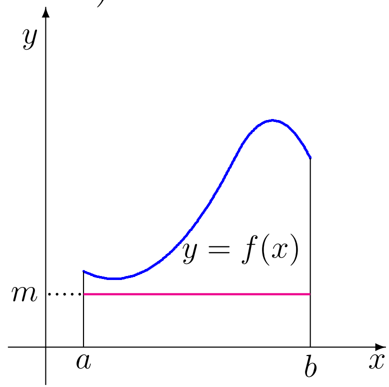
XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если f и g интегрируемы на $[a; b]$, где $a < b$ и для любого x из $[a, b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

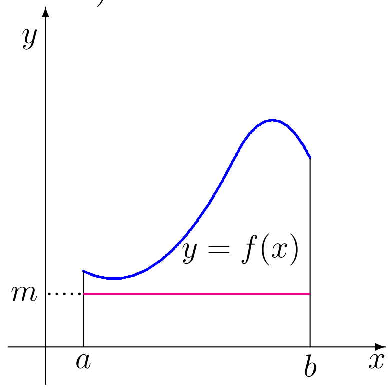
2) Если $a < b$ и для любого x из $[a, b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)



XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a < b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

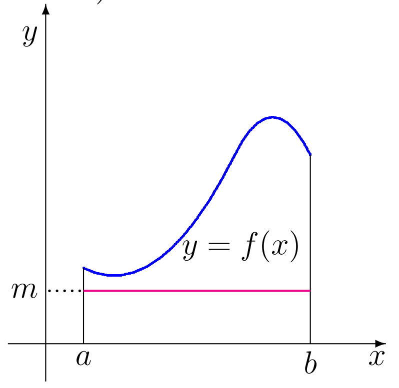


Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)

$$\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.



Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)

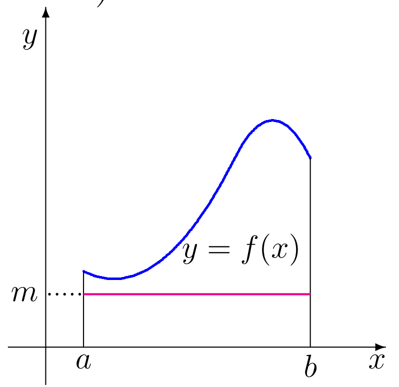
$$= \int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)

$$m(b-a)=\int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$

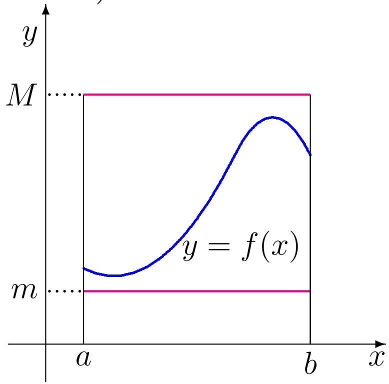


XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

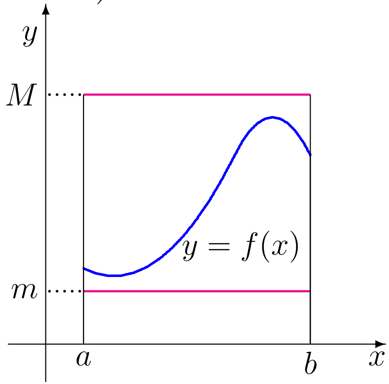
Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)

$$m(b-a) = \int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$



XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.



Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)

$$m(b-a) = \int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b M\,dx =$$

XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*

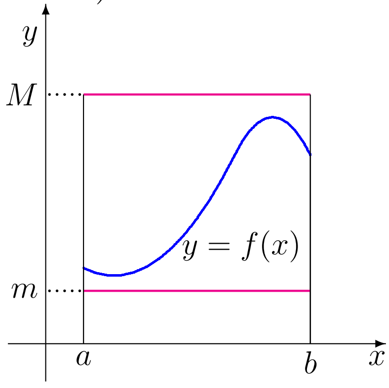
1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Доказательство. Согласно доказанному пункту 1)

$$m(b-a)=\int\limits_a^b m\,dx\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b M\,dx = M(b-a).$$

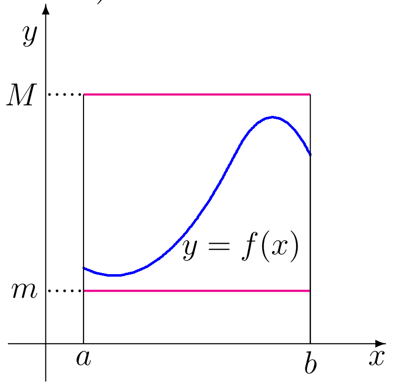


XI.15. Теорема об оценке интеграла

Теорема 39. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если f и g интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

2) Если $a<b$ и для любого x из $[a,b]$ имеет место неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то $m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.



Доказательство. Теорема доказана.

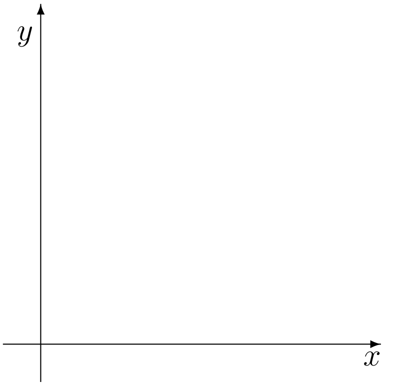
XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то на отрезке* $[a,b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

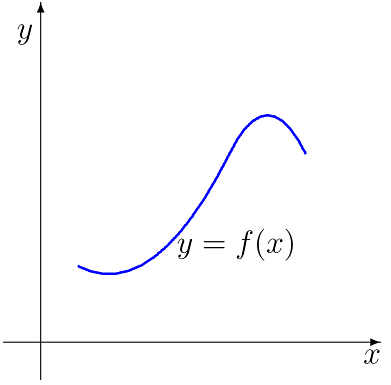
Доказательство.



XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

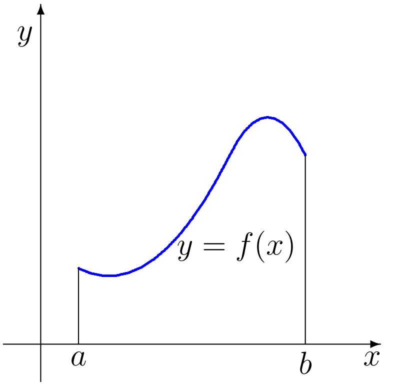
Доказательство.



XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

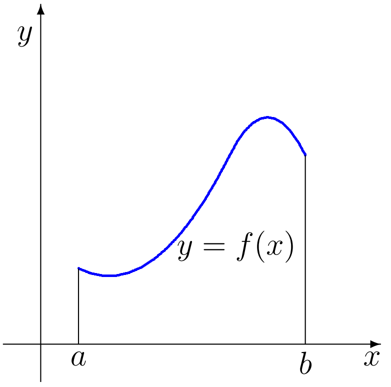


XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

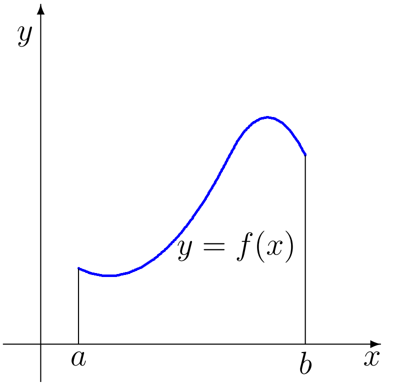
Пусть



XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$.

Доказательство.



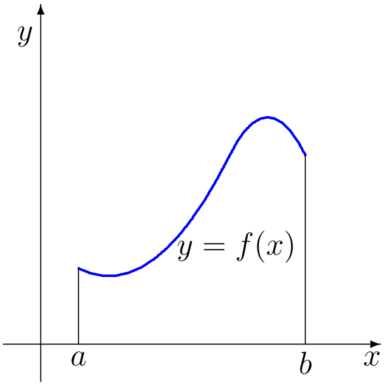
Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) =$

XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m$,

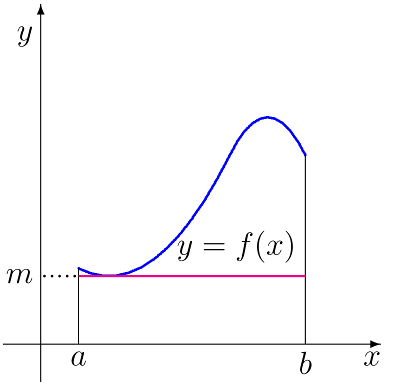


XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = m$,

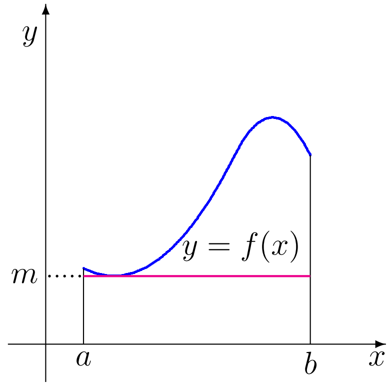


XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) =$

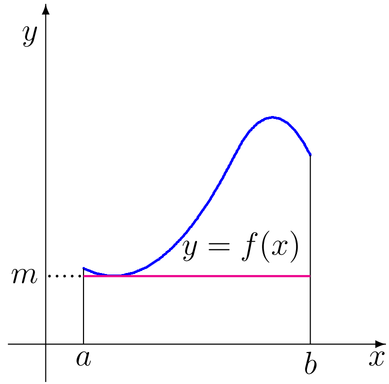


XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

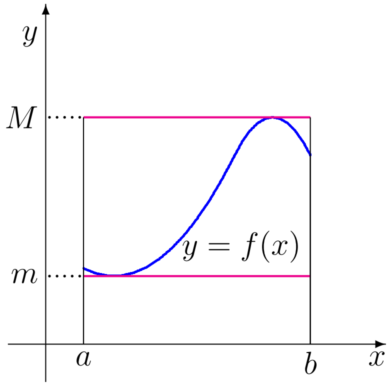


XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$



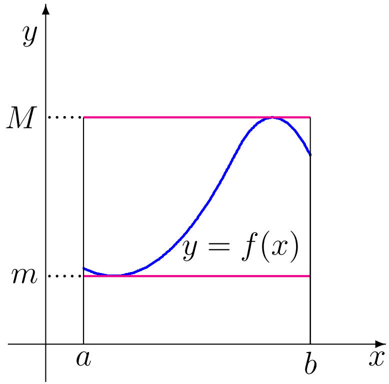
XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем



XI.16. Теорема о среднем значении

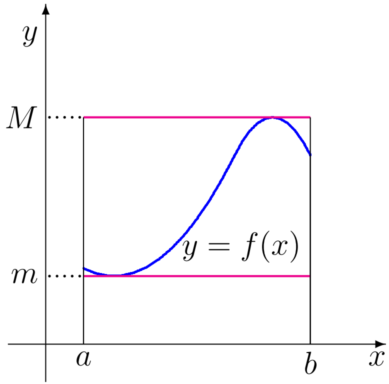
Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$



XI.16. Теорема о среднем значении

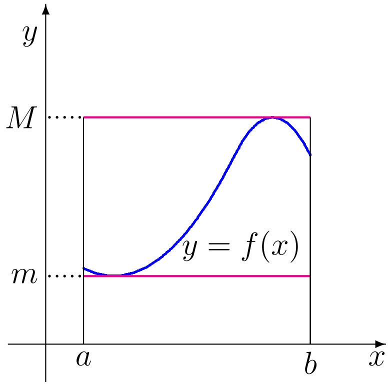
Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant$$



XI.16. Теорема о среднем значении

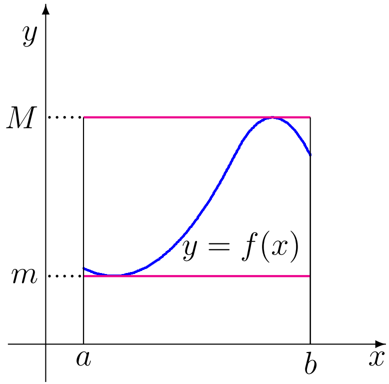
Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$



XI.16. Теорема о среднем значении

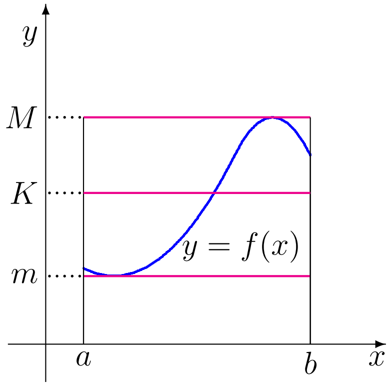
Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

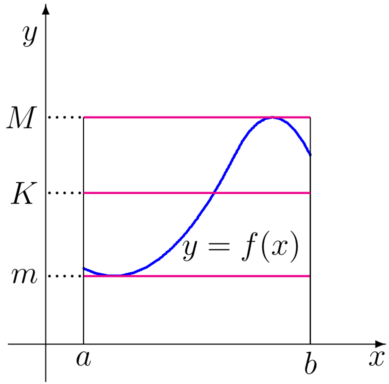


XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$



По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Согласно свойствам функции, непрерывной на отрезке, она принимает на это отрезке все значения между m и M, поэтому...

XI.16. Теорема о среднем значении

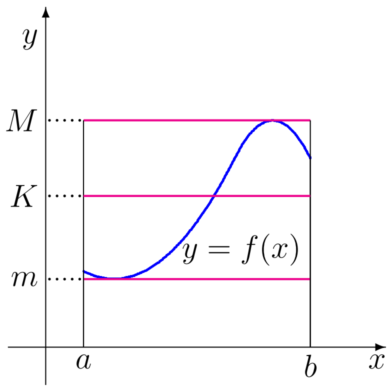
Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$



$\exists c \in [a;b]$

Согласно свойствам функции, непрерывной на отрезке, она принимает на это отрезке все значения между m и M, поэтому...

XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

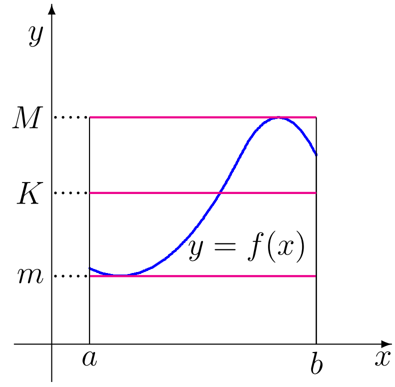
Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

$$\exists c \in [a;b] \quad f(c) =$$

Согласно свойствам функции, непрерывной на отрезке, она принимает на это отрезке все значения между m и M, поэтому...



XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

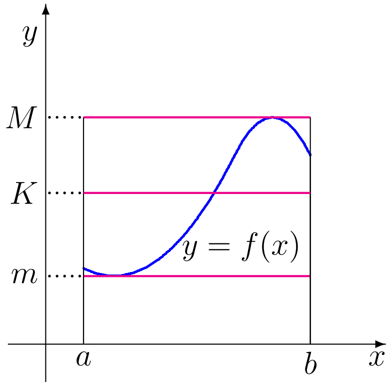
Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

$$\exists c \in [a;b] \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

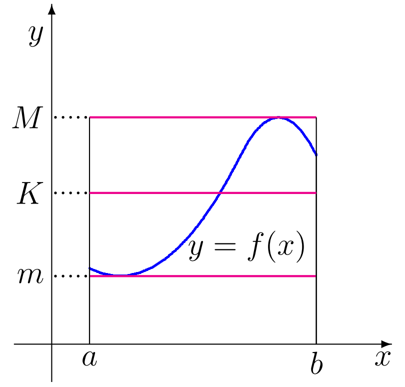


Согласно свойствам функции, непрерывной на отрезке, она принимает на это отрезке все значения между m и M, поэтому...

XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то на отрезке* $[a,b]$ *найдется хотя бы одно такое число* c, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.



Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

$$\exists c \in [a;b] \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

откуда следует доказываемое равенство.

XI.16. Теорема о среднем значении

Теорема 40. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одно такое число c, что* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство.

Пусть $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m, \quad \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M.$

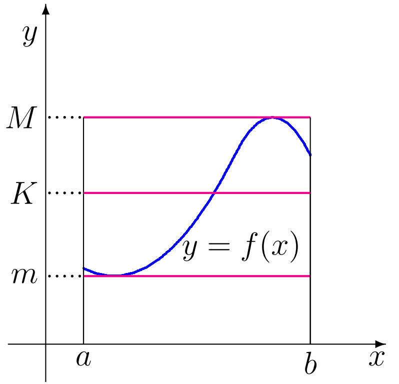
По **теореме об оценке интеграла** имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

$$\exists c \in [a; b] \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

откуда следует доказываемое равенство.

Теорема доказана.



XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от функции f определяется двумя параметрами: a и b. Естественный интерес вызывает изучение зависимости значений интеграла от значений этих параметров.

XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию $F(a, b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, где f — некоторая фиксированная функция. Выберем некоторое число c такое, что $a < c < b$ или $b < c < a$.

XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию $F(a,b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, где f — некоторая фиксированная функция. Выберем некоторое число c такое, что $a < c < b$ или $b < c < a$.

В силу свойства **аддитивности по отрезку** и свойства **о перестановке пределов интегрирования** $F(a,b) =$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx =$$

XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию $F(a,b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, где f — некоторая фиксированная функция. Выберем некоторое число c такое, что $a < c < b$ или $b < c < a$.

В силу свойства **аддитивности по отрезку** и свойства **о перестановке пределов интегрирования** $F(a,b) =$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx =$$

XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию $F(a,b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, где f — некоторая фиксированная функция. Выберем некоторое число c такое, что $a < c < b$ или $b < c < a$.

В силу свойства **аддитивности по отрезку** и свойства **о перестановке пределов интегрирования** $F(a,b) =$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = -\int\limits_c^a f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию $F(a, b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, где f — некоторая фиксированная функция. Выберем некоторое число c такое, что $a < c < b$ или $b < c < a$.

В силу свойства **аддитивности по отрезку** и свойства **о перестановке пределов интегрирования** $F(a, b) =$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = -\int\limits_c^a f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, изучение функции $F(a, b)$ сводится к ситуации, когда изменяется только верхний предел интегрирования.

XII. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение 34. *Выражение* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *от переменной* x *называется* **интегралом с переменным верхним пределом**.

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$*, то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна***.*

Доказательство. Надо проверить, что для любого $x_0 \in (a, b)$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0),$$

или, согласно свойствам предела, что $\lim\limits_{x \to x_0} (F(x) - F(x_0)) = 0$.

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ **непрерывна**.

Доказательство. Надо проверить, что $\lim\limits_{x \to x_0} (F(x) - F(x_0)) = 0$.

По **свойству аддитивности интеграла**, $F(x) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\, dt$.

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство. Надо проверить, что $\lim\limits_{x \to x_0} (F(x) - F(x_0)) = 0$.

По **свойству аддитивности интеграла**, $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Ниже **мы покажем**, из интегрируемости $f(t)$ следует ее ограниченность, то есть существует такое число K, что для любого t из $[a, b]$ имеет место неравенство $|f(t)| \leqslant K$.

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство. Надо проверить, что $\lim\limits_{x \to x_0} (F(x) - F(x_0)) = 0$.

По **свойству аддитивности интеграла**, $F(x) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$.

Для любого t из $[a, b]$ имеет место неравенство $|f(t)| \leqslant K$.

Следовательно,

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| =$$

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a,b]$*, то на отрезке* $[a,b]$ *функция* $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} |F(x)-F(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant$$

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$, *то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} K\,dt \right| =$$

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a,b]$, *то на отрезке* $[a,b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} K\,dt \right| = \lim_{x\to x_0} K|x - x_0| =$$

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a,b]$, *то на отрезке* $[a,b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} K\,dt \right| = \lim_{x\to x_0} K|x - x_0| = 0.$$

XII.1. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 41. *Если функция* $f(t)$ **интегрируема** *на отрезке* $[a, b]$*, то на отрезке* $[a, b]$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ **непрерывна**.

Доказательство.

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \int\limits_{x_0}^{x} K\,dt \right| = \lim_{x \to x_0} K|x - x_0| = 0.$$

Теорема доказана.

XII.2. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 42. *Если функция* $f(t)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$*, то функция* $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ *дифференцируема на этом отрезке, и справедливо утверждение*

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt \equiv f(x).$$

XII.2. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 42. *Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема на этом отрезке, и справедливо утверждение*

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt \equiv f(x).$$

Доказательство. По определению производной нам надо доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} = f(x). \qquad (56)$$

XII.2. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Согласно **свойству аддитивности по отрезку** и теореме **о среднем значении** имеем для некоторого $c \in [x, x + \Delta x]$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int\limits_a^{x} f(t)\, dt \right) \right| =$$

XII.2. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Согласно **свойству аддитивности по отрезку** и теореме **о среднем значении** имеем для некоторого $c \in [x, x + \Delta x]$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt \right) \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \right| =$$

XII.2. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Согласно **свойству аддитивности по отрезку** и теореме **о среднем значении** имеем для некоторого $c \in [x, x + \Delta x]$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int\limits_a^{x} f(t)\, dt \right) \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \cdot f(c)\,(x + \Delta x - x) \right| = \lim_{\Delta x \to 0} |f(x) - f(c)| = 0.$$

XII.2. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Согласно **свойству аддитивности по отрезку** и теореме **о среднем значении** имеем для некоторого $c \in [x, x + \Delta x]$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int\limits_a^{x} f(t)\, dt \right) \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\Delta x} \cdot f(c)\,(x + \Delta x - x) \right| = \lim_{\Delta x \to 0} |f(x) - f(c)| = 0.$$

Следовательно, **равенство (56)** выполняется. Теорема доказана.

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 43. *Если* $f(x)$ *— непрерывна и* $F(x)$ *— произвольная первообразная функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$, *то*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{57}$$

Последняя формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 43. *Если* $f(x)$ *— непрерывна и* $F(x)$ *— произвольная первообразная функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$, *то*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{57}$$

Последняя формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Доказательство. По **теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом** функция $\Phi(y) = \int\limits_a^y f(x)\,dx$ является первообразной функции f на отрезке $[a; b]$.

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 43. *Если* $f(x)$ *— непрерывна и* $F(x)$ *— произвольная первообразная функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$, *то*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{57}$$

Последняя формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Доказательство. По теореме о множестве первообразных непрерывной функции $F(y) = \Phi(y) + C = \int\limits_a^y f(x)\,dx + C$ для некоторого числа C.

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. По теореме о множестве первообразных непрерывной функции $F(y) = \Phi(y) + C = \int\limits_a^y f(x)\,dx + C$ для некоторого числа C.

При $y = a$ получаем

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. По теореме о множестве первообразных непрерывной функции $F(y) = \Phi(y) + C = \int\limits_a^y f(x)\,dx + C$ для некоторого числа C.

При $y = a$ получаем

$$F(a) = \Phi(a) + C =$$

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. По теореме о множестве первообразных непрерывной функции $F(y) = \Phi(y) + C = \int\limits_a^y f(x)\,dx + C$ для некоторого числа C.

При $y = a$ получаем

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int\limits_a^a f(x)\,dx + C =$$

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. По теореме о множестве первообразных непрерывной функции $F(y) = \Phi(y) + C = \int\limits_a^y f(x)\,dx + C$ для некоторого числа C.

При $y = a$ получаем

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int\limits_a^a f(x)\,dx + C = C.$$

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. По теореме о множестве первообразных непрерывной функции $F(y) = \Phi(y) + C = \int\limits_a^y f(x)\,dx + C$ для некоторого числа C.

При $y = a$ получаем

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int\limits_a^a f(x)\,dx + C = C.$$

Значит, $\Phi(y) = F(y) - F(a)$.

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. Доказали, что для первообразной F функции f имеем

$$\Phi(y) = \int\limits_a^y f(x)\,dx = F(y) - F(a).$$

При $y = b$ получаем требуемое равенство

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство. Доказали, что для первообразной F функции f имеем

$$\Phi(y) = \int\limits_a^y f(x)\,dx = F(y) - F(a).$$

При $y = b$ получаем требуемое равенство

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 43. *Если $f(x)$ — непрерывна и $F(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$, то*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{57}$$

Последняя формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Обычно используется обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$. Таким образом, формулу Ньютона-Лейбница можно представить в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

XIII. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 43. *Если* $f(x)$ *— непрерывна и* $F(x)$ *— произвольная первообразная функции* $f(x)$ *на*
$[a, b]$, *то*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (57)$$

Последняя формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Если функция F зависит от нескольких переменных, то иногда в этом обозначении указывают, какая из переменных принимает значение верхнего и нижнего пределов интегрирования, например

$$F(x, y, z)\Big|_{y=a}^{y=b} = F(x, b, z) - F(x, a, z).$$

XIV. Методы вычисления определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница устанавливает чрезвычайно важную связь между неопределенными и определенными интегралами. Она позволяет применить богатый «арсенал» средств, применяемых для вычисления первообразной функции, применить к вычислению определенных интегралов. При этом эти средства для новой области применения нужно лишь слегка «модернизировать», чем мы сейчас и займемся. Рассматривая под этим углом зрения **рекомендации по вычислению неопределенного интеграла**, можно заметить, что нам необходимо лишь выяснить, как изменятся для применения к определенным интегралам два важнейших «инструмента» интегрирования: замена переменной и интегрирование «по частям».

XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

Одним из наиболее эффективных методов интегрирования является метод замены переменной.

XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx =$$

XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

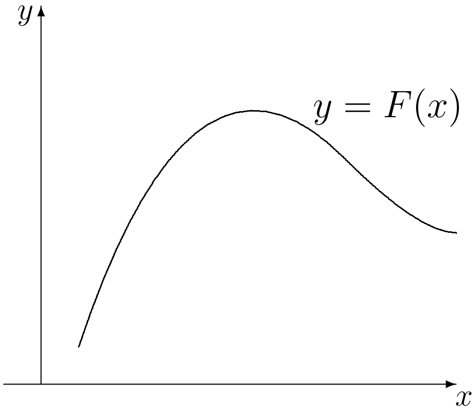
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b dy =$$

XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

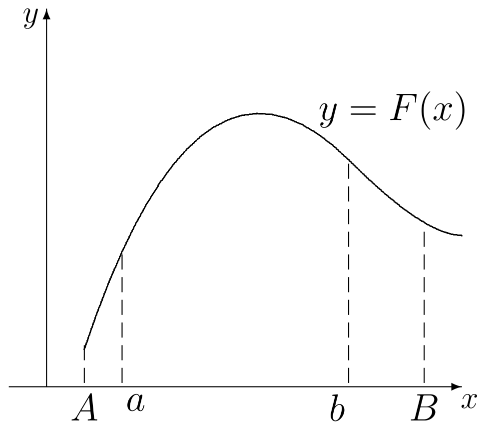
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b dy = \int\limits_a^b dF(x) =$$

XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



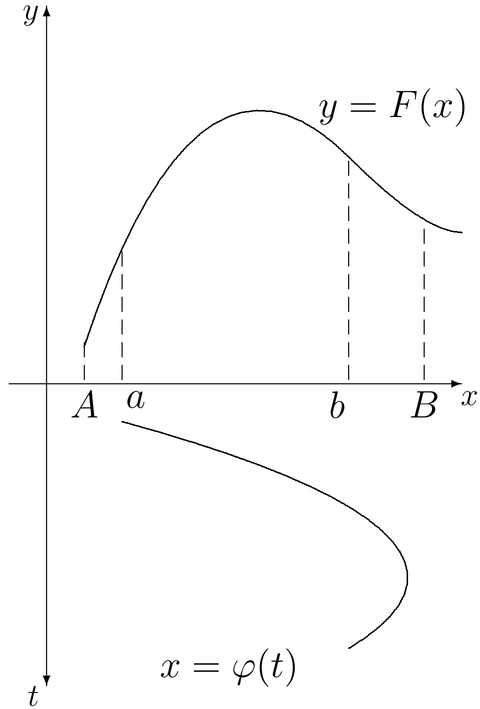
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$

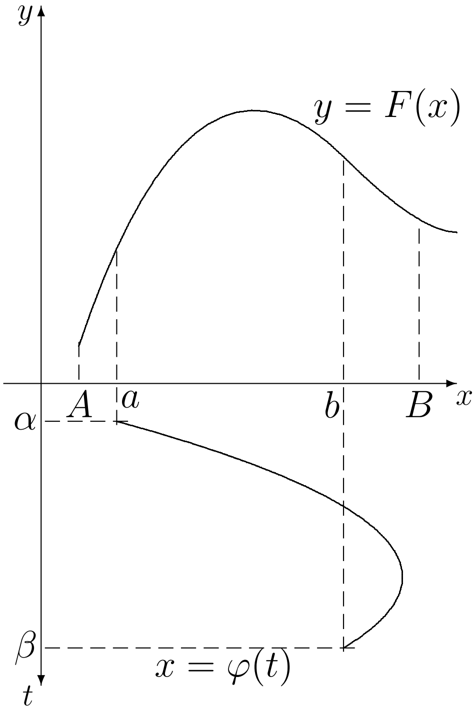
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b dy = \int\limits_a^b dF(x) =$$



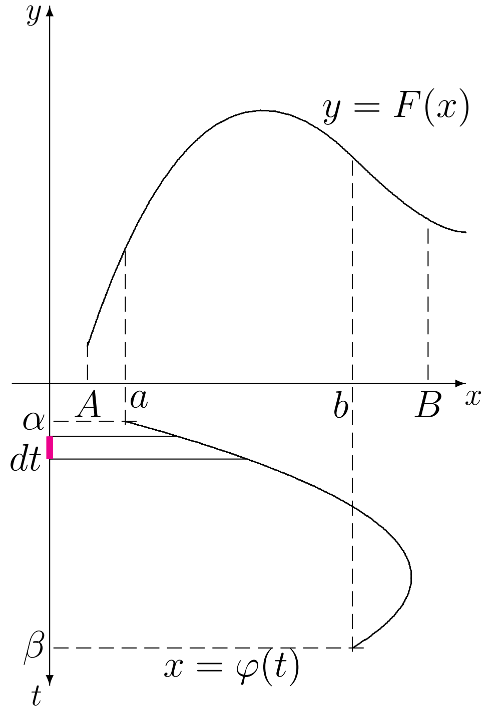
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



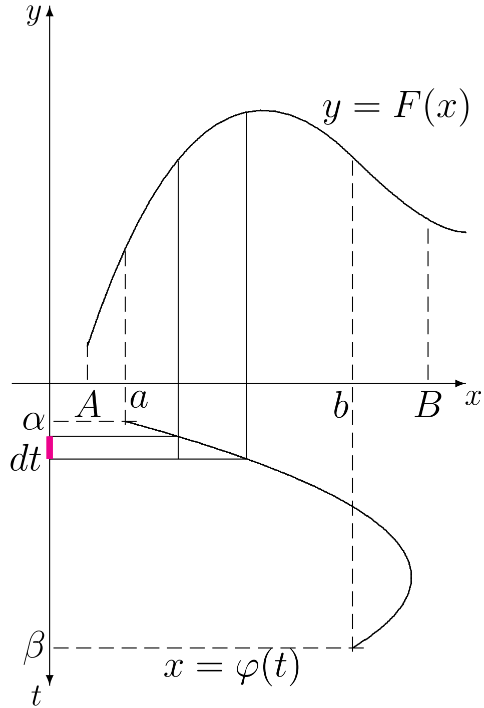
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



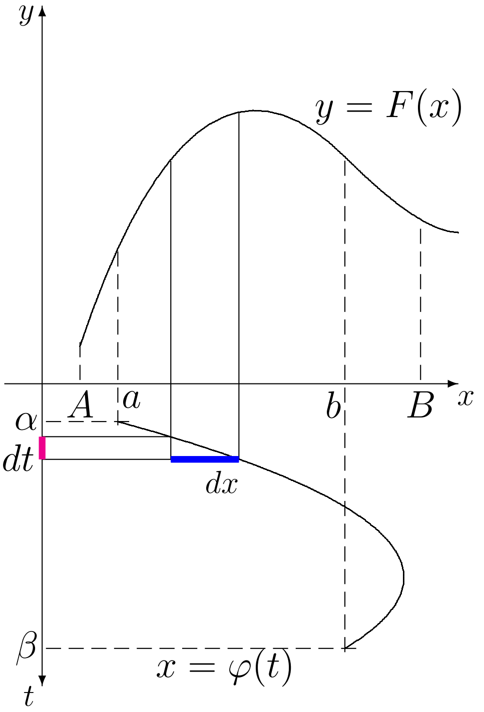
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



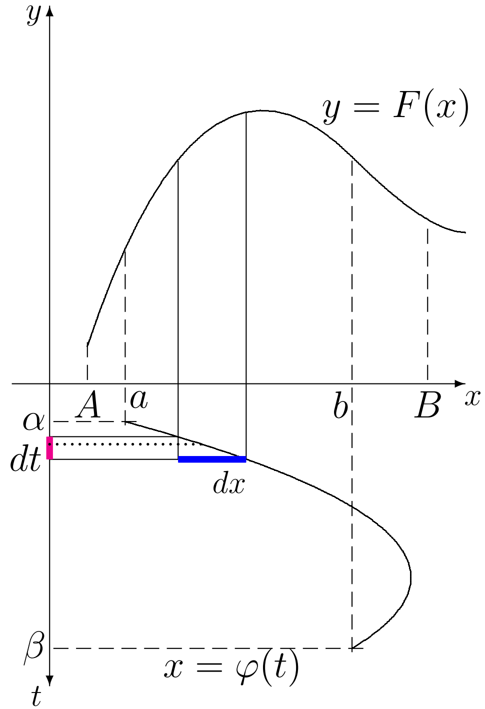
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



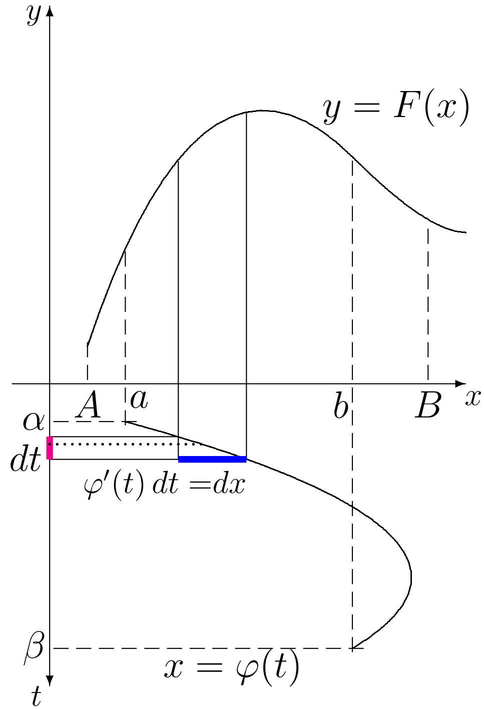
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



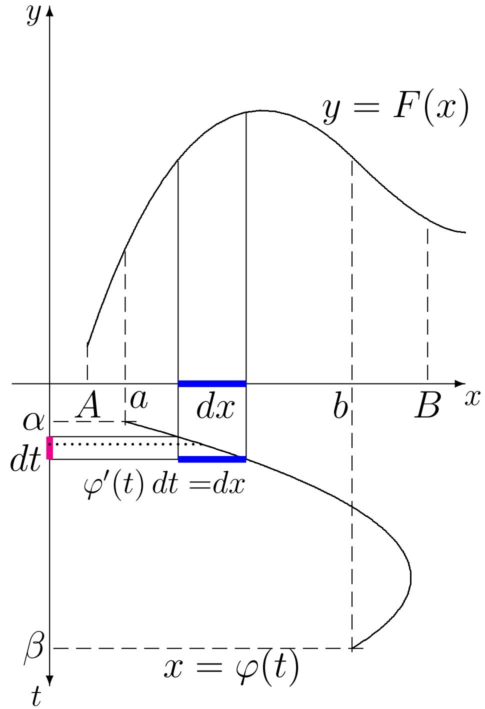
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b dy = \int\limits_a^b dF(x) =$$



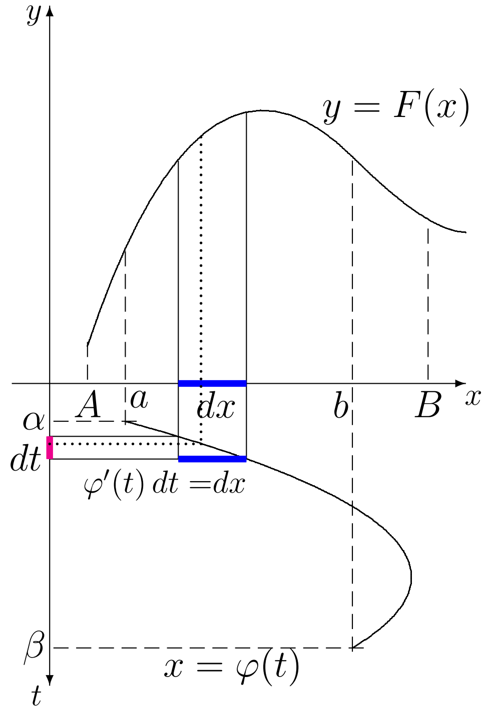
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



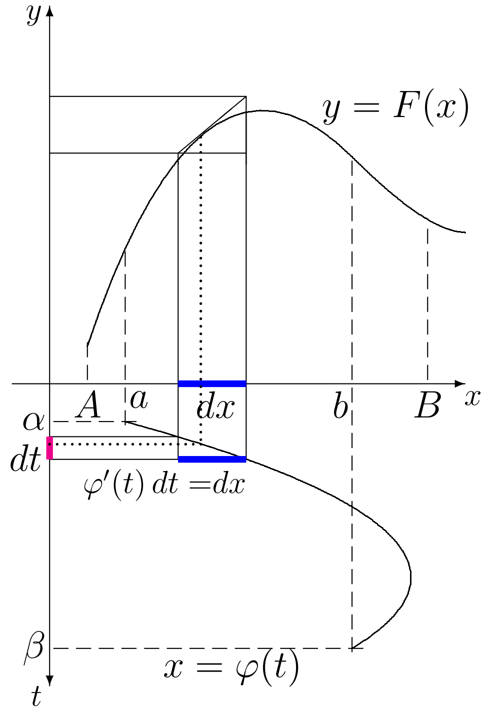
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



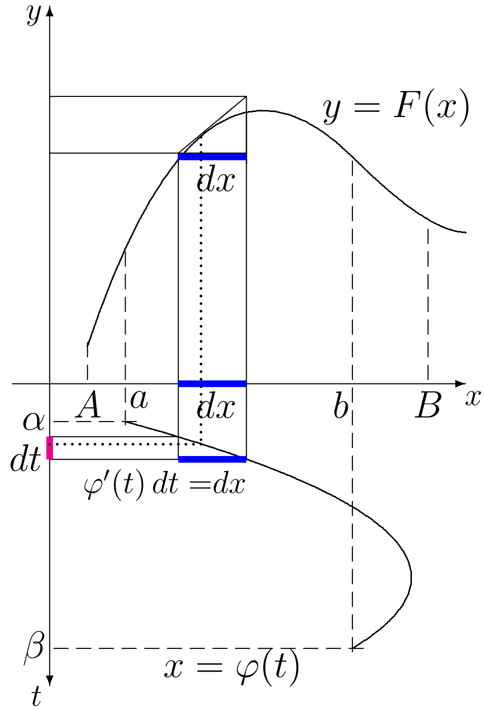
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



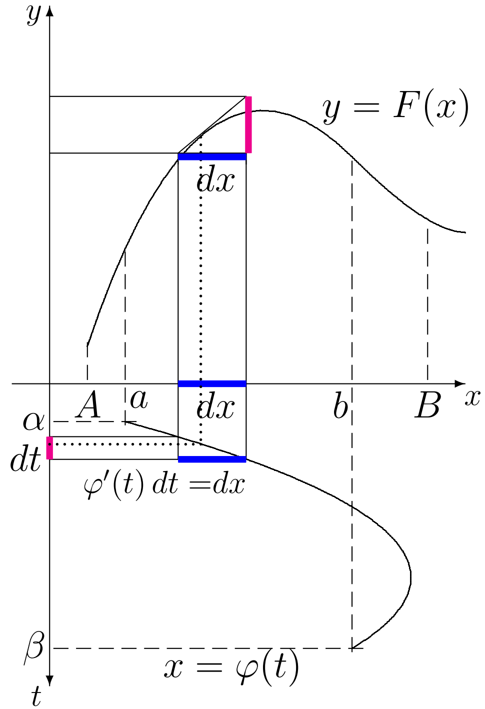
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



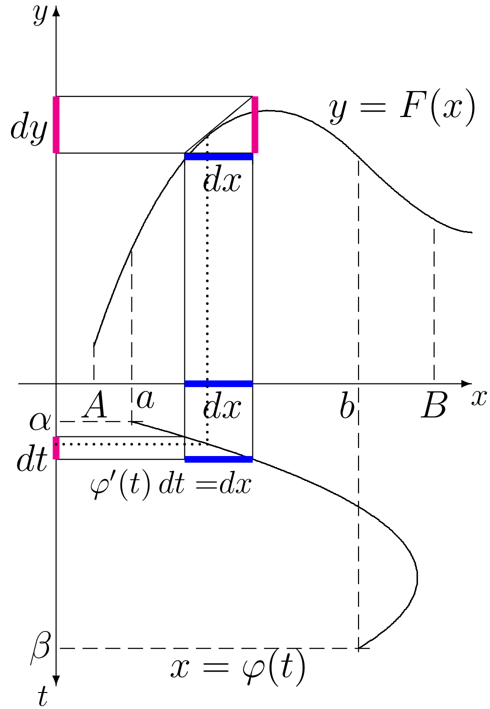
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



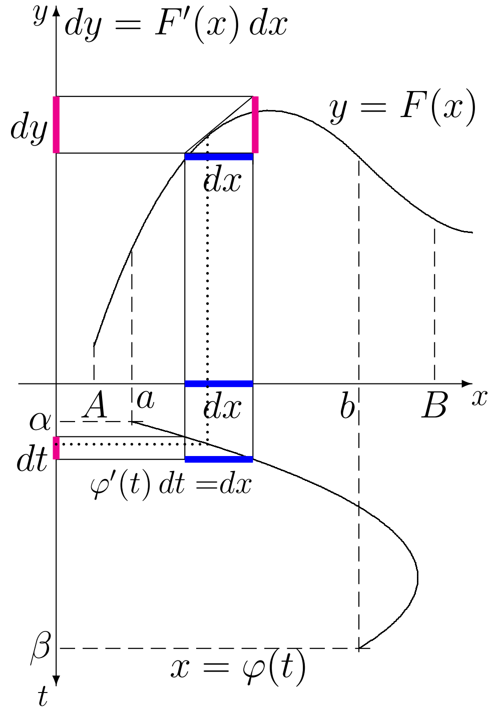
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



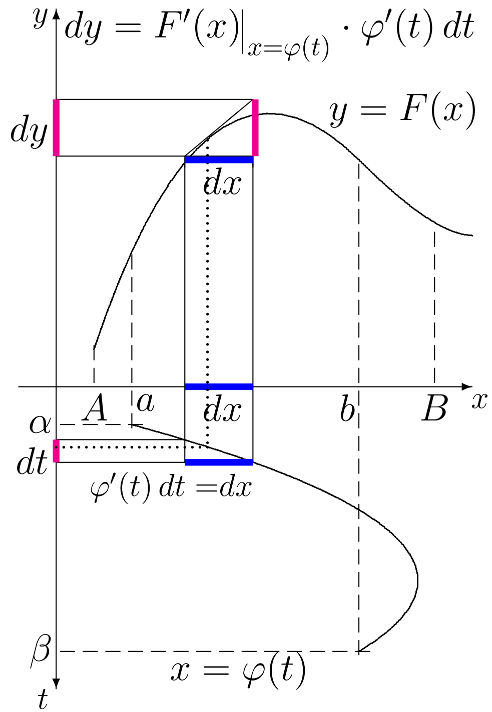
XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$

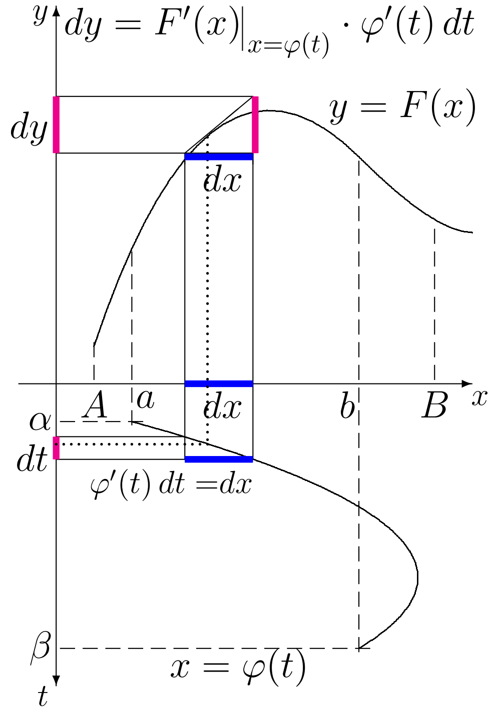


XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$



XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение



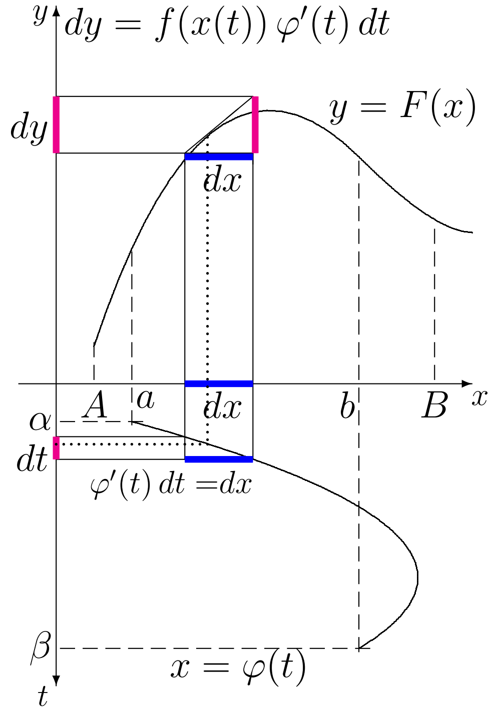
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(x)\big|_{x=\varphi(t)} \varphi'(t)\,dt =$$

XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(x)\big|_{x=\varphi(t)} \varphi'(t)\,dt =$$

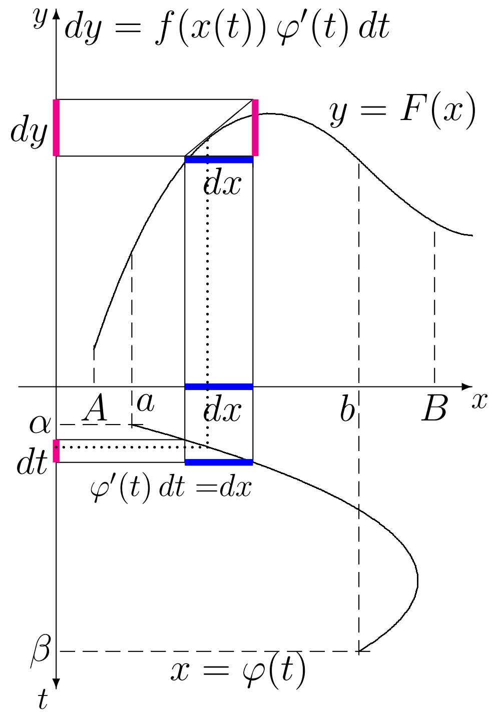


XIV.1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле: введение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dy = \int_a^b dF(x) =$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(x)\big|_{x=\varphi(t)} \varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t))\varphi'(t)\,dt.$$



XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем:*

- *$\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$;*
- *для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$;*
- *$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$.*

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$*, причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$*;* *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$*;* *3)* $\varphi(\alpha) = a$*,* $\varphi(\beta) = b$*, причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$*. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$*.*

Доказательство. Надо доказать равенство.

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.*

Доказательство. Надо доказать равенство.

Применяется три способа доказательства равенства $L = R$:

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо **доказать равенство**.

Применяется три способа доказательства равенства $L = R$:

1) метод алгебраических преобразований;

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.*

Доказательство. Надо доказать равенство.

Применяется три способа доказательства равенства $L = R$:

1) метод алгебраических преобразований;

2) доказательство двух неравенств $L \leqslant R$ и $L \geqslant R$;

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо доказать равенство.

Применяется три способа доказательства равенства $L = R$:

1) метод алгебраических преобразований;

2) доказательство двух неравенств $L \leqslant R$ и $L \geqslant R$;

3) метод «от противного».

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем: 1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо **доказать равенство**.

Применяется три способа доказательства равенства $L = R$:

1) метод алгебраических преобразований;

2) доказательство двух неравенств $L \leqslant R$ и $L \geqslant R$;

3) метод «от противного».

Воспользуемся методом алгебраических преобразований.

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо доказать равенство.

Пусть L и R — левая и, соответственно, правая части доказываемого равенства.

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.*

Доказательство. Надо доказать равенство.
Пусть L и R — левая и, соответственно, правая части доказываемого равенства.

Обозначим через F какую-либо первообразную функции f, и через Φ функцию, определенную формулой $\Phi(t) = F(\varphi(t))$.

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.*

Доказательство. Надо доказать равенство.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо **доказать равенство**.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$\int\limits_a^b f(x)\,dx =$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо доказать равенство.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$*, причем: 1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$*; 2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$*; 3)* $\varphi(\alpha) = a$*,* $\varphi(\beta) = b$*, причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$*. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$*.*

Доказательство. Надо доказать равенство.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$*, причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$*;* *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$*;* *3)* $\varphi(\alpha) = a$*,* $\varphi(\beta) = b$*, причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$*. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$*.*

Доказательство. Надо доказать равенство.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$*;* *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$*;* *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо доказать равенство.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо **доказать равенство**.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

XIV.2. Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем: 1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Надо **доказать равенство**.

По **формуле Ньютона-Лейбница**, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

XIV.2. Теорема о замене переменной в определенном интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$; *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$; *3)* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Как и для неопределенного интеграла, замена переменной проводится с целью упростить, в некотором смысле, подынтегральное выражение. Обычно стремятся «превратить его» в дробно-рациональную функцию, процедура интегрирования которой «стандартизована».

XIV.2. Теорема о замене переменной в определенном интеграле

Теорема 44. *Пусть функция f непрерывна на $[A, B]$ и $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) для любого $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место включение $\varphi(t) \in [A, B]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем $[a, b] \subseteq [A, B]$. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Особенность вычисления *определенного* интеграла с помощью замены переменной состоит в том, что после вычисления первообразной уже нет необходимости возвращаться к старой переменной: вся нужная информация учитывается с помощью *изменения пределов интегрирования.*

XIV.2. Теорема о замене переменной в определенном интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$*, причем:* *1)* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$*;* *2) для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$*;* *3)* $\varphi(\alpha) = a$*,* $\varphi(\beta) = b$*, причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$*. Тогда* $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$*.*

> **Внимание!** Одна из самых частых ошибок при вычислении определенного интеграла методом замены переменной состоит в том, что <u>забывают</u> <u>изменить</u> <u>пределы</u> <u>интегрирования</u>.

XIV.2. Теорема о замене переменной в определенном интеграле

Теорема 44. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[A, B]$ *и* $x = \varphi(t)$, *причем:*

- $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке* $[\alpha, \beta]$;
- *для любого* $t \in [\alpha, \beta]$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in [A, B]$;
- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем* $[a, b] \subseteq [A, B]$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Рассмотреть пример?

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство.

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$, так как

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x)-\varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$, так как

$$(u(x)v(x)-\varphi(x))' =$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$, так как

$$(u(x)v(x) - \varphi(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - v(x)u'(x) =$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.*

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$, так как

$$(u(x)v(x) - \varphi(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$.

Согласно **формуле Ньютона-Лейбница**, имеет место равенство

$$\int\limits_a^b v\,du =$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.*

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$.

Согласно **формуле Ньютона-Лейбница**, имеет место равенство

$$\int\limits_a^b v\,du = \varphi(x)\Big|_a^b.$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x)-\varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$.

$$\int\limits_a^b v\,du = \varphi(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, имеем

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$.

$$\int_a^b v\,du = \varphi(x)\Big|_a^b.$$

$$\int_a^b u\,dv =$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$.

$$\int_a^b v\,du = \varphi(x)\Big|_a^b.$$

$$\int_a^b u\,dv = (u(x)v(x) - \varphi(x))\Big|_a^b =$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Доказательство. Обозначим какую-либо первообразную функции $v(x)u'(x)$ через φ. Тогда $u(x)v(x) - \varphi(x)$ является первообразной для функции $u(x)v'(x)$.

$$\int\limits_a^b v\,du = \varphi(x)\Big|_a^b.$$

$$\int\limits_a^b u\,dv = \left(u(x)v(x) - \varphi(x)\right)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

XIV.3. Теорема об интегрировании «по частям»

Теорема 45. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными. Тогда имеет место равенство* $\int\limits_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$

Формула вычисления интеграла «по частям» сводит нахождение интеграла от функции uv' к вычислению интеграла от функции $u'v$. Поэтому, подбирая «кандидатов на роль» функции u и дифференциала dv следует стремиться к тому, чтобы вычисление интеграла $\displaystyle\int\limits_a^b v\,du$ выло более простым делом, чем вычисление исходного интеграла.

Рассмотрим пример?

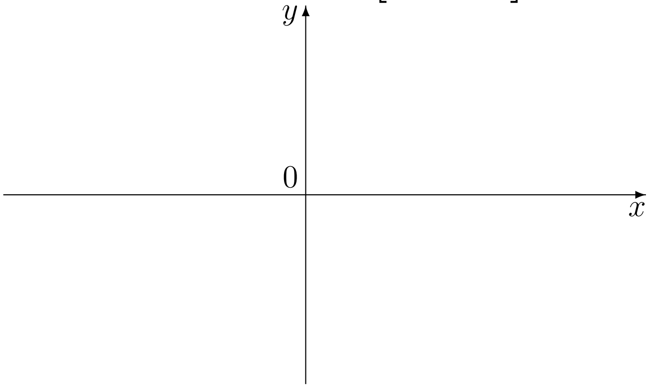
XIV.4. Интеграл от чётной и нечётной функций

В некоторых случаях несколько (иногда существенно) облегчает вычисление интегралов информация об особенностях подынтегральной функции. Мы рассмотрим два самых простых результата: об интеграле по отрезку $[-a; a]$ от **чётной** и от **нечётной** функции.

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

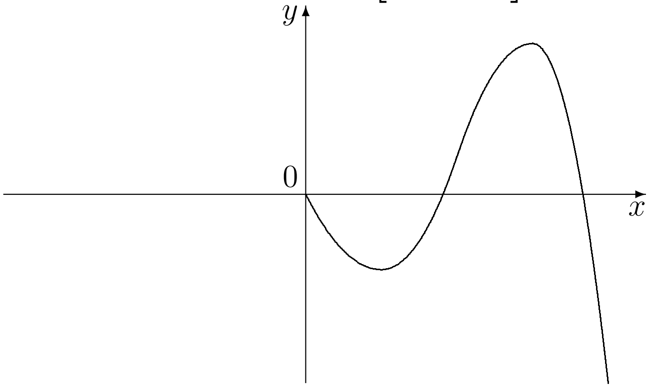
Воспользуемся симметрией графика чётной функции относительно начала координат.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



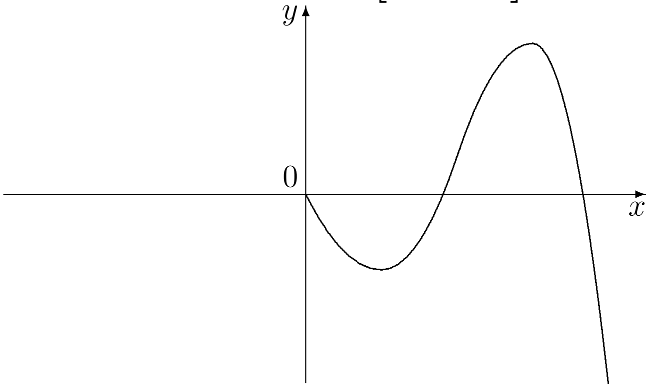
Построим график **чётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



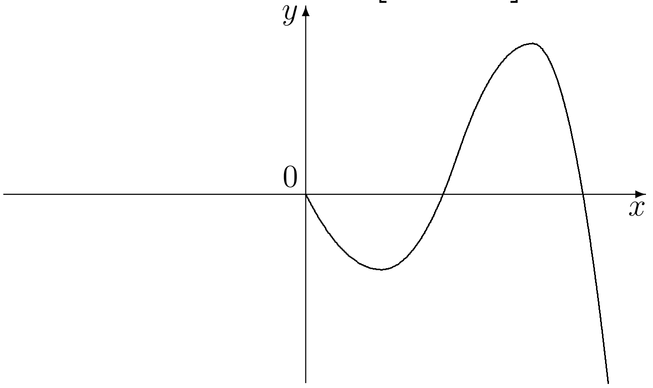
Построим график **чётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



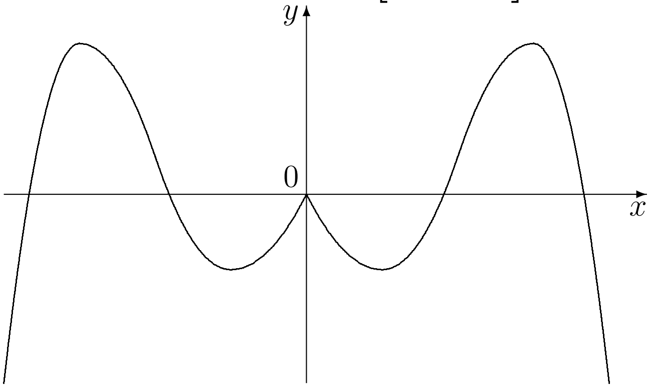
Построим график **чётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) =$

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



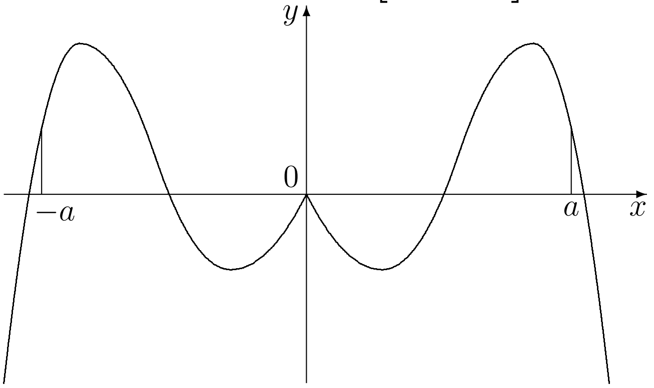
Построим график **чётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) = f(x)$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



Построим график **чётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) = f(x)$.

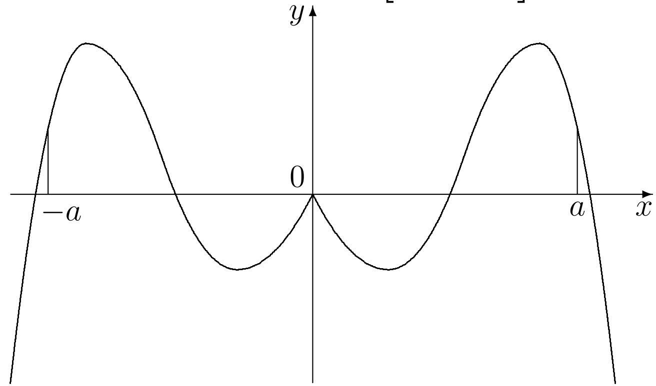
XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



Построим график **чётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) = f(x)$.

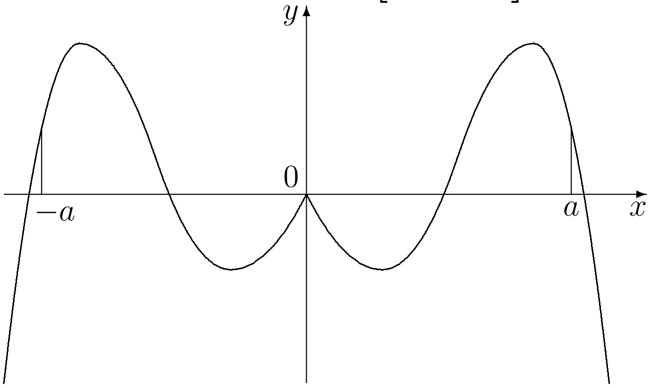
XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$$



XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

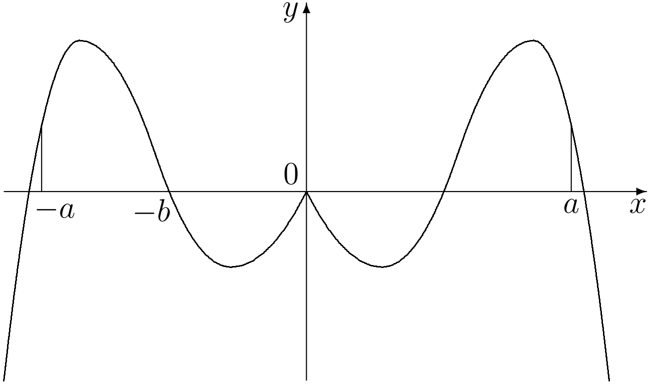
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

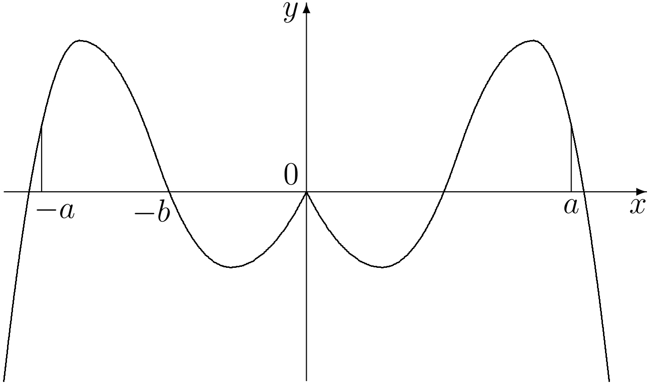
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

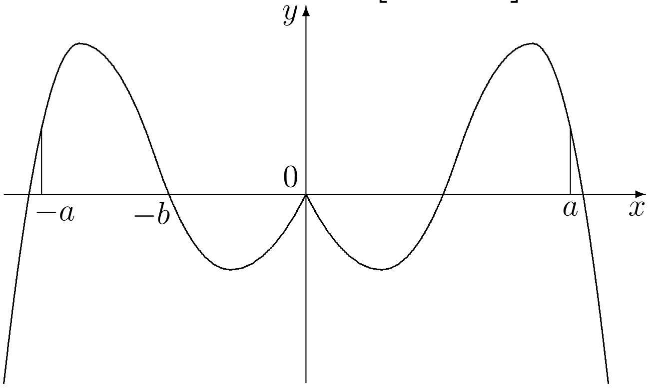
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

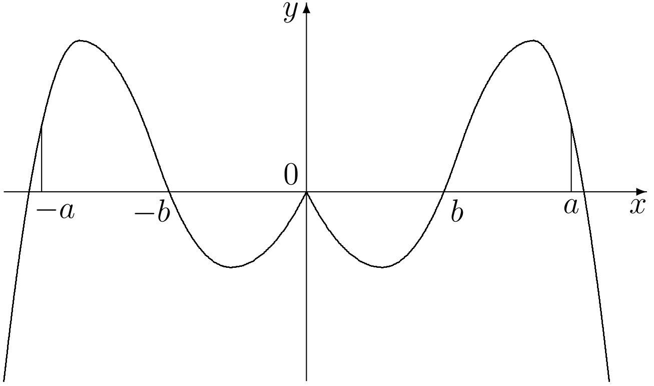
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

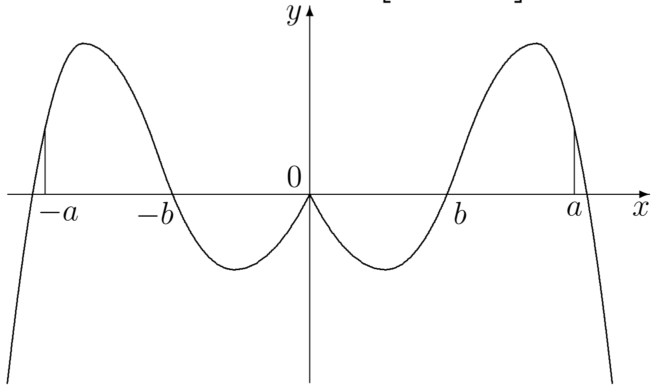


Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx +$$



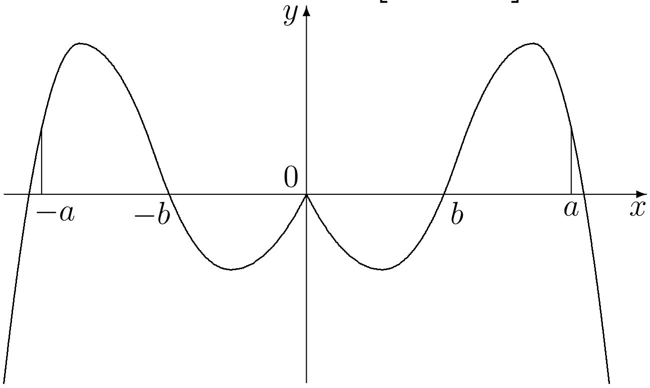
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



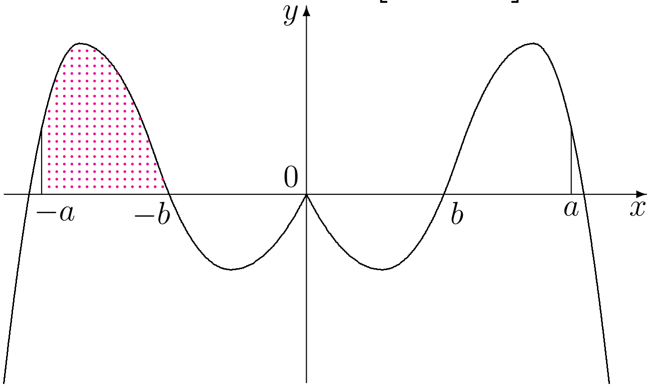
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



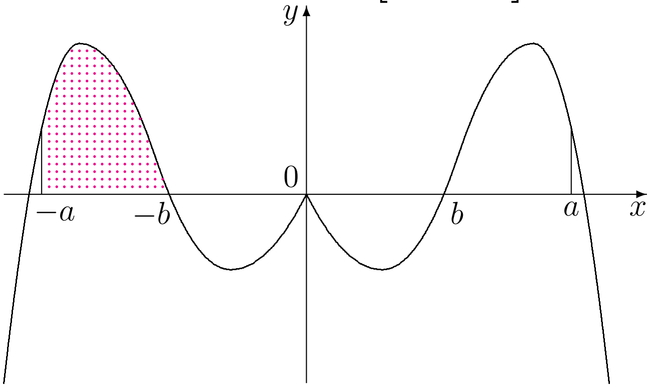
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

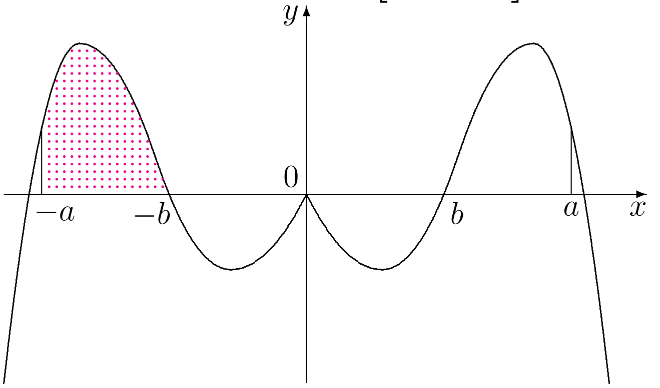
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

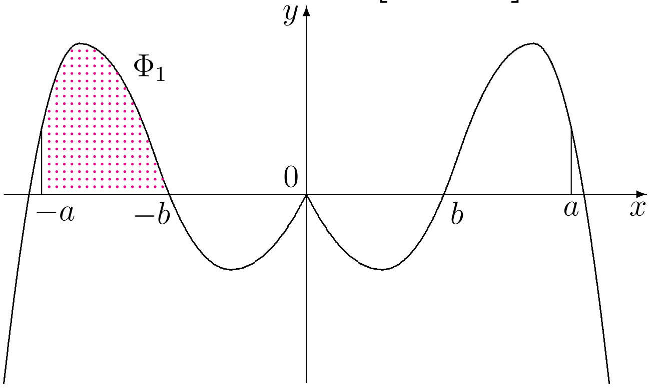
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

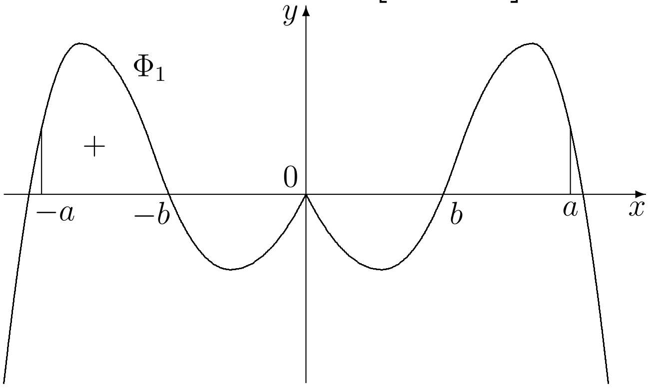
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

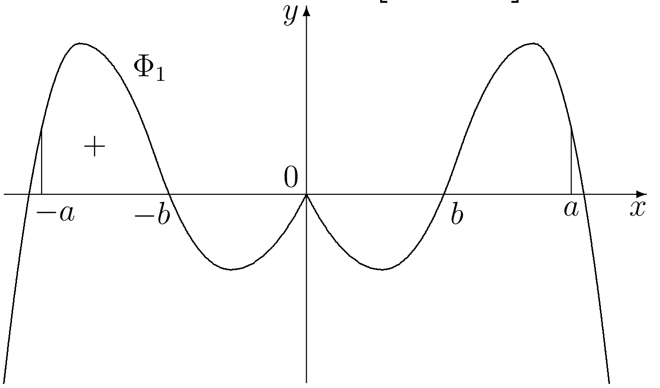
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

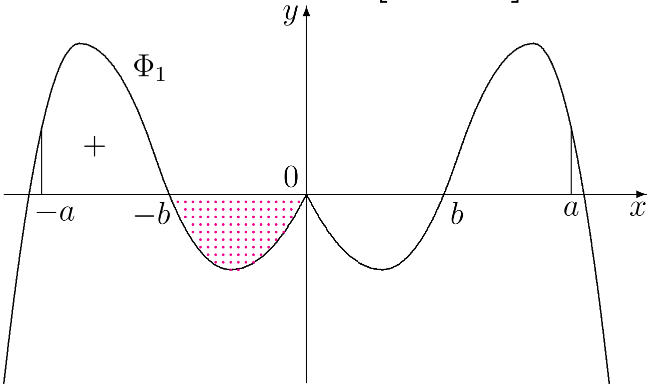
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

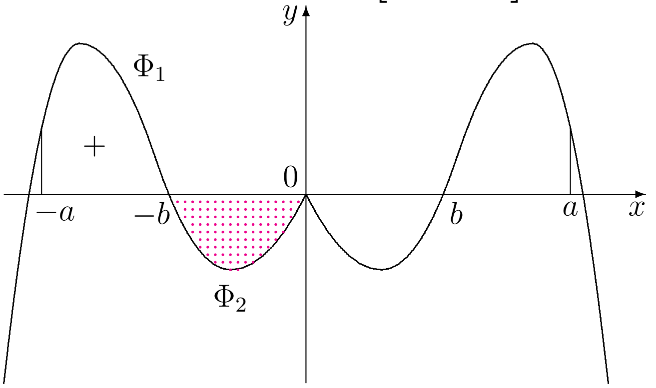
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

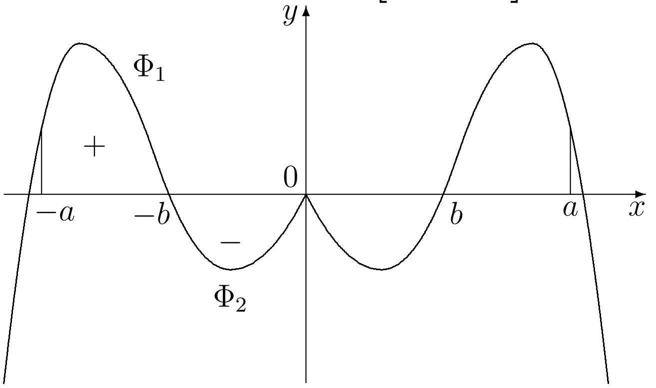
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

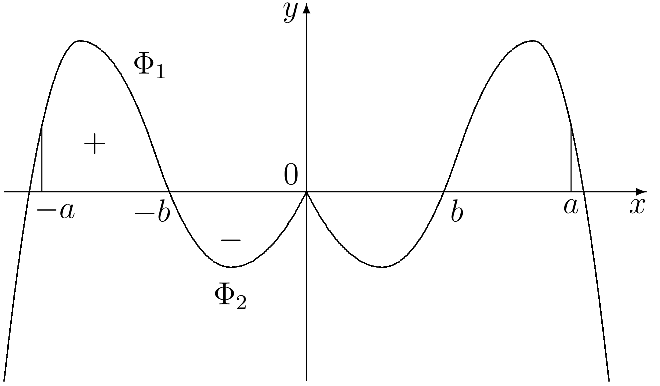
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

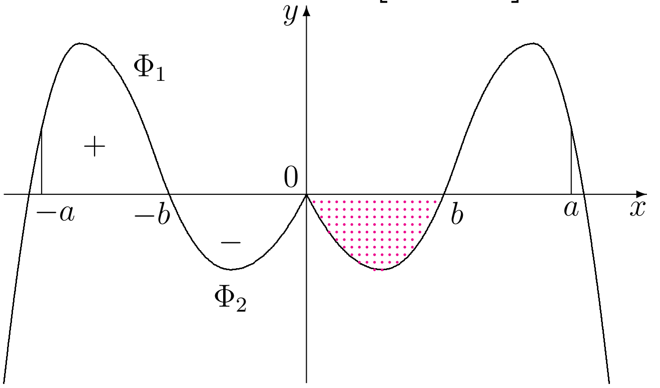
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

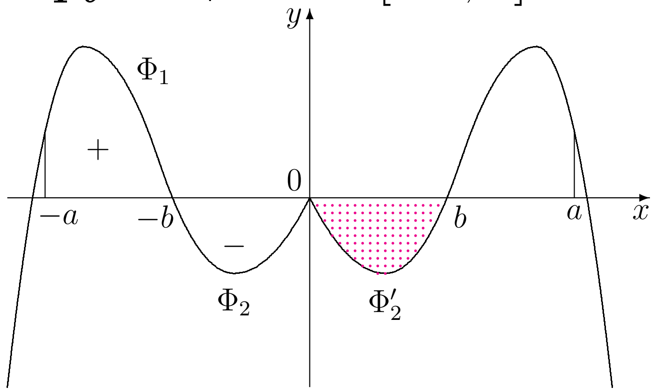
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

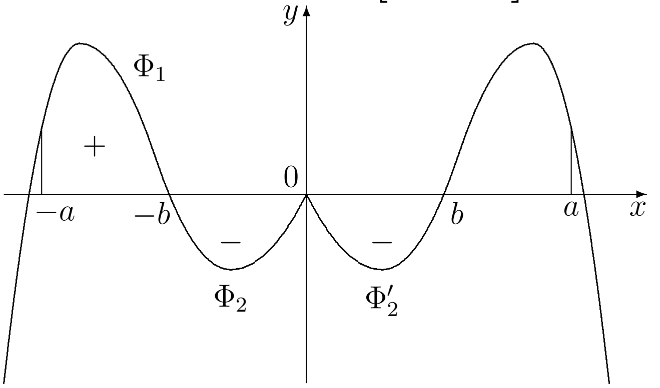
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

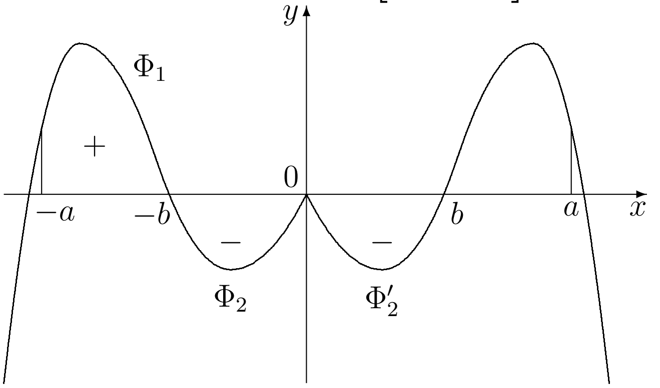
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi'_2}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

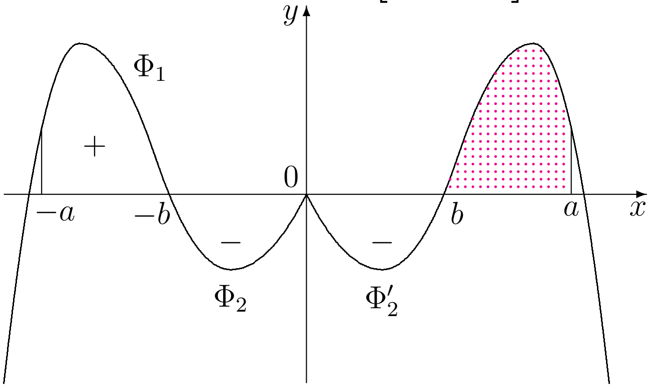
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi_2'}) +$$



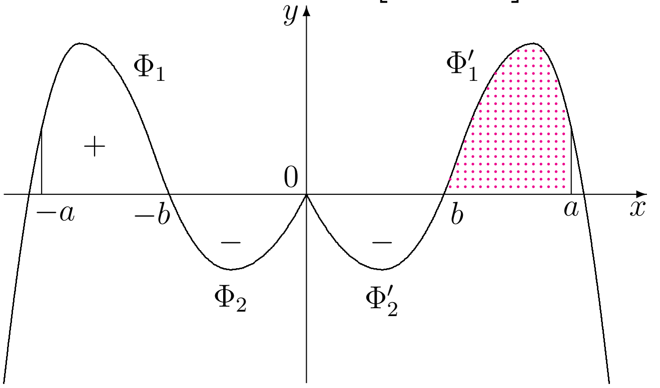
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$
$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$
$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi_2'}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

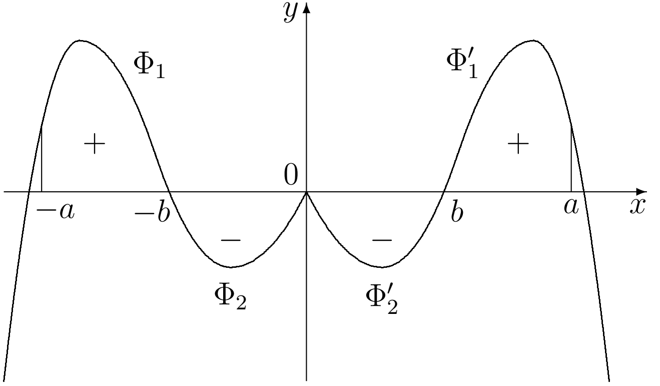
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi_2'}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

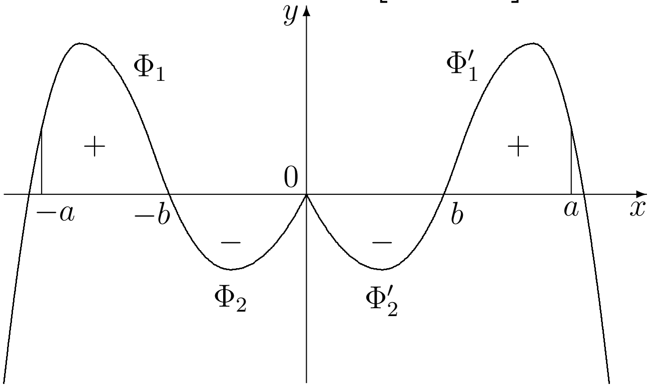
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

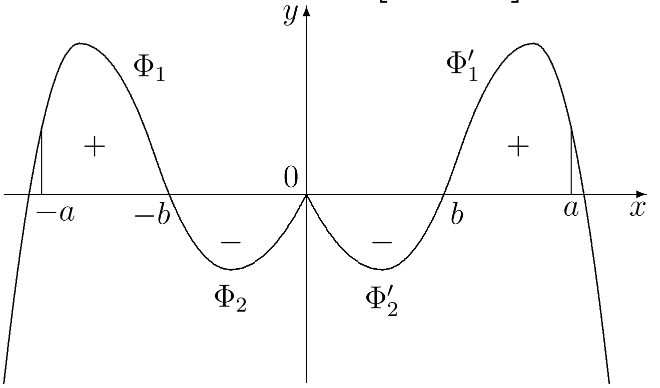
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

Но по условию из соображений симметрии $S_{\Phi_1} = S_{\Phi'_1}$ и $S_{\Phi_2} = S_{\Phi'_2}$.

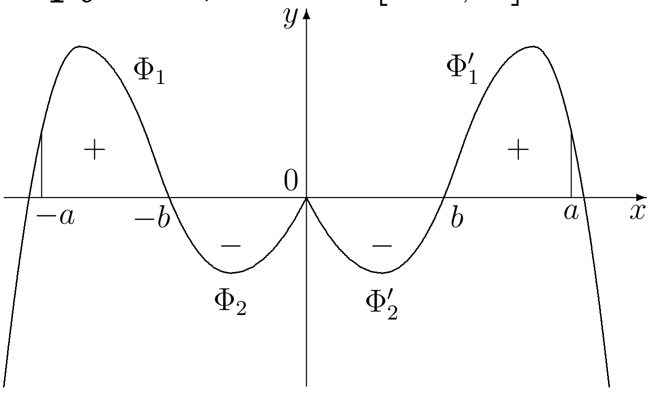
XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$

$$= 2\left(-S_{\Phi'_2} + S_{\Phi'_1}\right) =$$



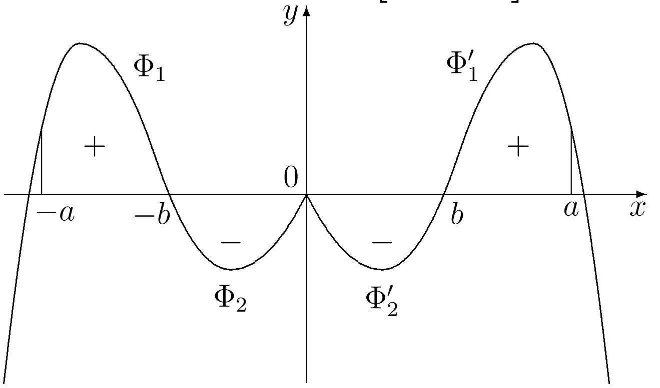
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

Но по условию из соображений симметрии $S_{\Phi_1} = S_{\Phi'_1}$ и $S_{\Phi_2} = S_{\Phi'_2}$.

XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + $$

$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$

$$= 2\left(-S_{\Phi'_2} + S_{\Phi'_1}\right) = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

Но по условию из соображений симметрии $S_{\Phi_1} = S_{\Phi'_1}$ и $S_{\Phi_2} = S_{\Phi'_2}$.

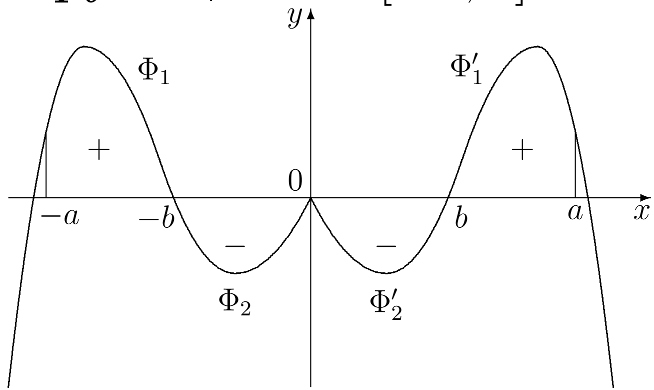
XIV.4. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= S_{\Phi_1} + (-S_{\Phi_2}) + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$

$$= 2\left(-S_{\Phi'_2} + S_{\Phi'_1}\right) = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Этот результат следует сформулировать и доказать!

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Доказательство.

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Доказательство.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx +$$

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* **чётная** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$t = -x$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ & \end{array} \right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = & \end{array} \right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & \end{array} \right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = \end{array} \right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = a \end{array} \right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left|\begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = a \end{array}\right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt +$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = a \end{array} \right|$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых, **чётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx +$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a; a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых,* ***чётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.1. Интеграл от чётной функции по $[-a;a]$

Теорема 46. *Если функция f, во-первых, **чётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

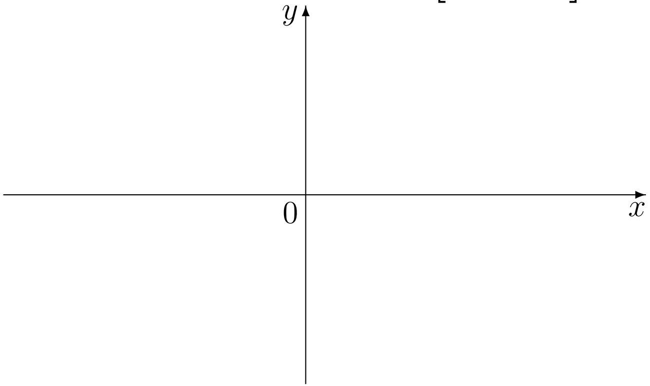
Перестановка пределов меняет знак интеграла!

Теорема доказана.

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

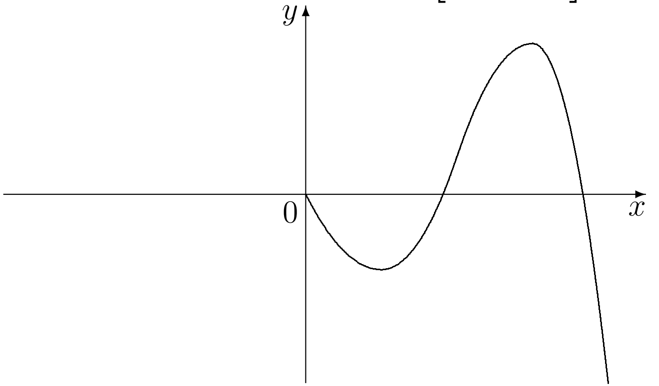
Воспользуемся симметрией графика нечётной функции относительно начала координат.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$



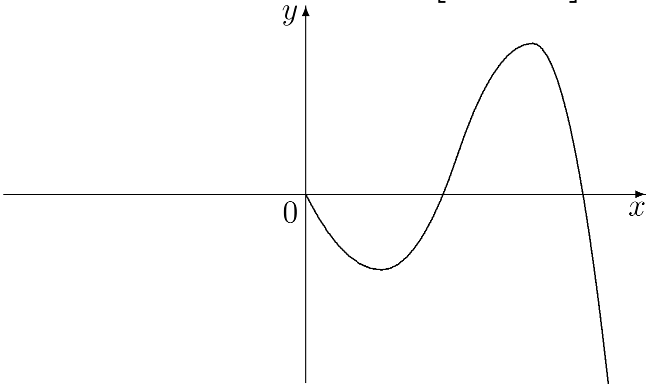
Построим график **нечётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$



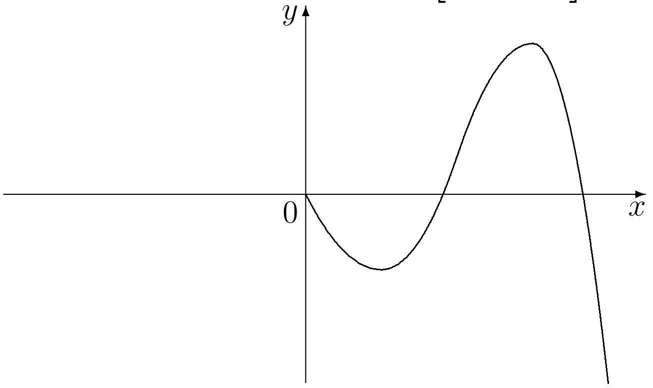
Построим график **нечётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$



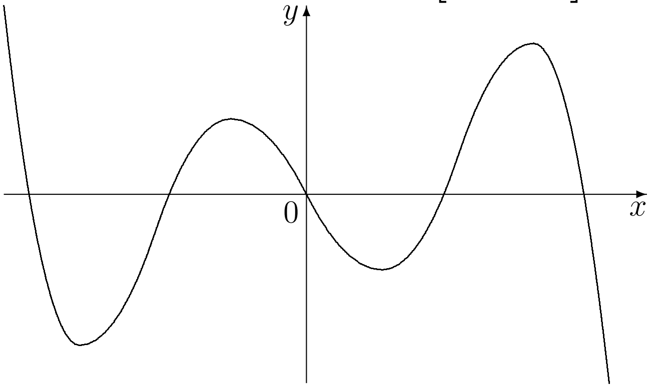
Построим график **нечётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) =$

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$



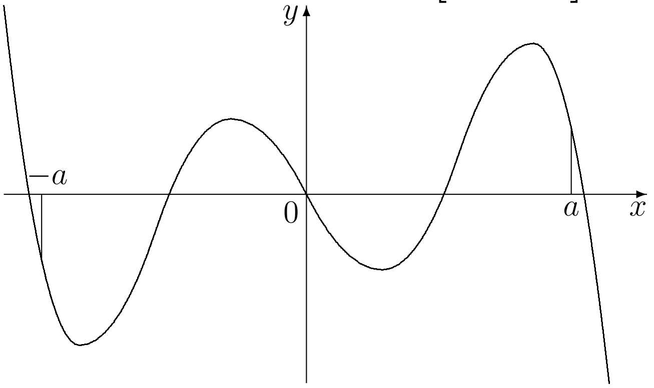
Построим график **нечётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) = -f(x)$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$



Построим график **нечётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) = -f(x)$.

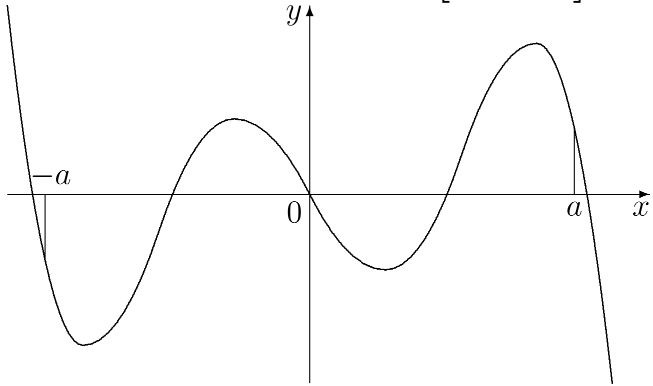
XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$



Построим график **нечётной** функции, т.е. функции, удовлетворяющей тождеству $f(-x) = -f(x)$.

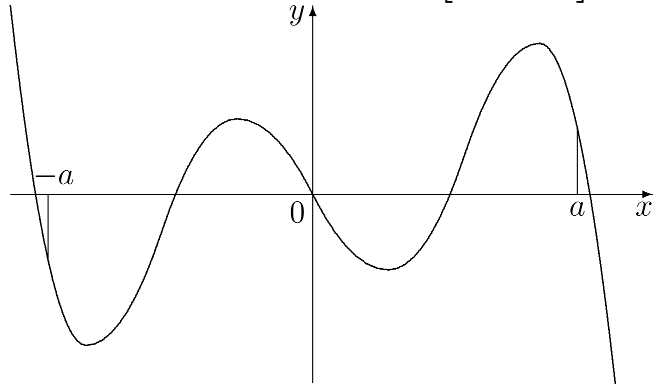
XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx =$$



XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

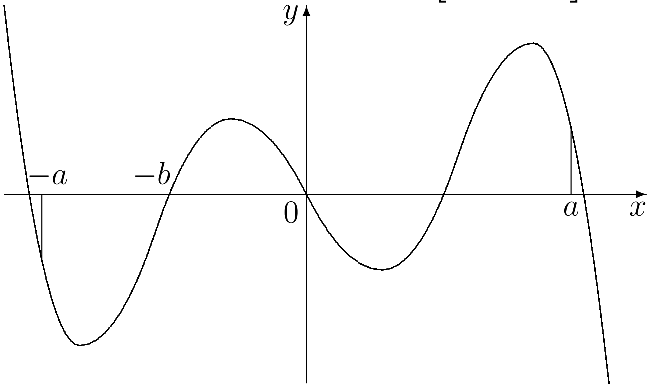
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

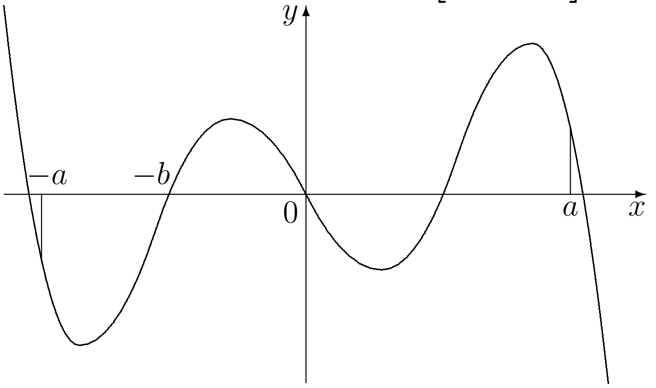
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

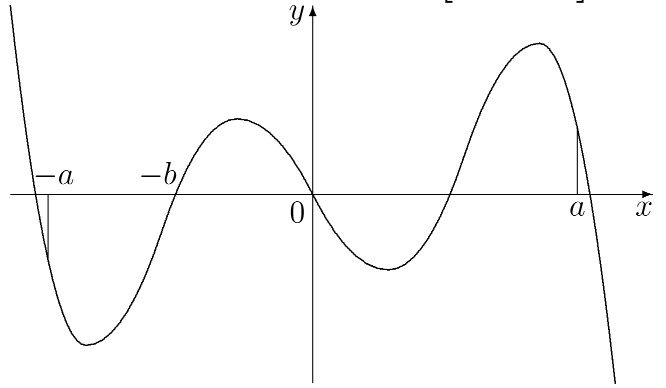
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

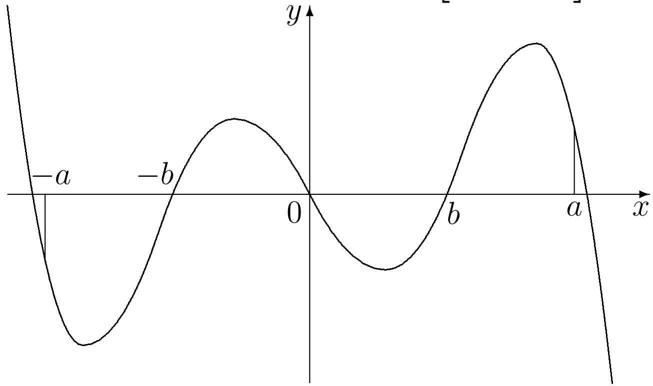
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

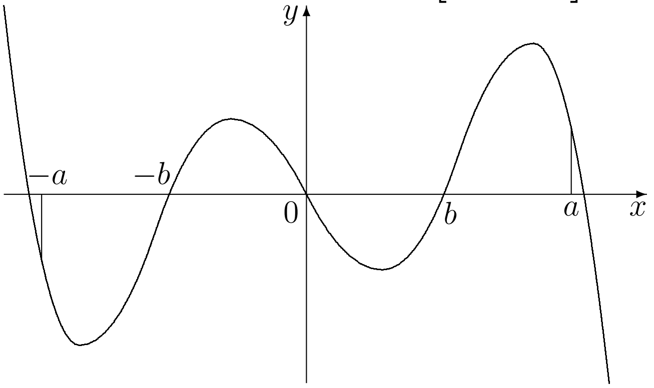


Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx +$$



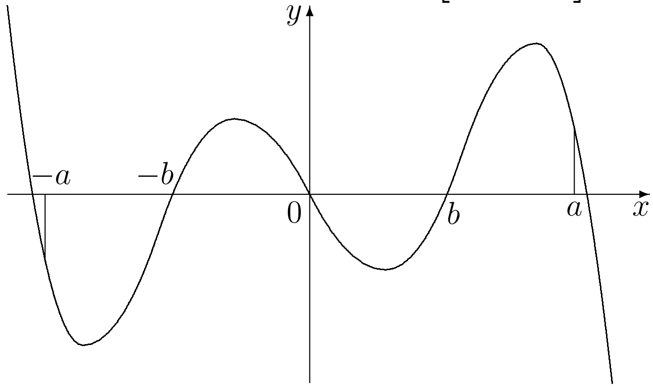
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



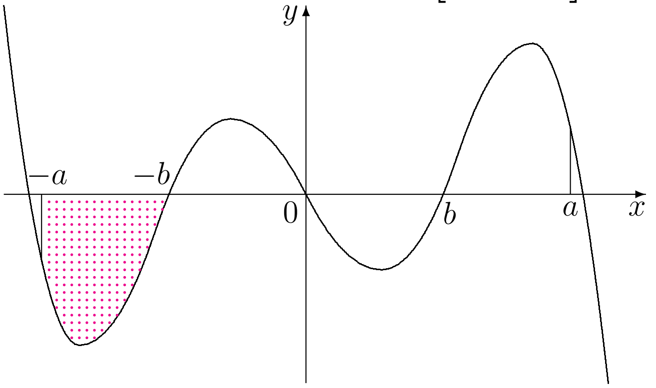
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



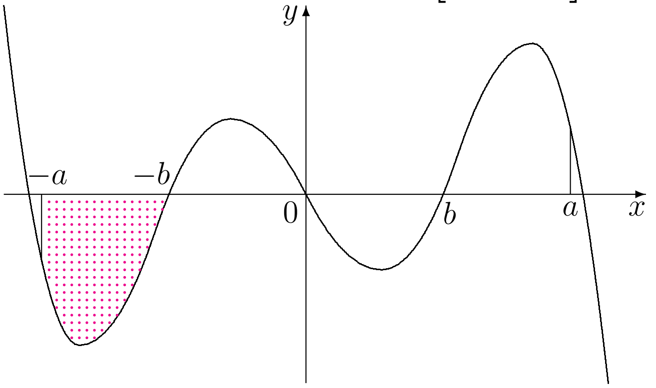
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



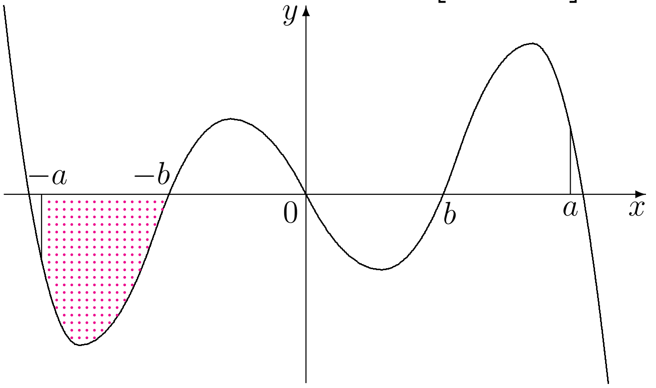
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

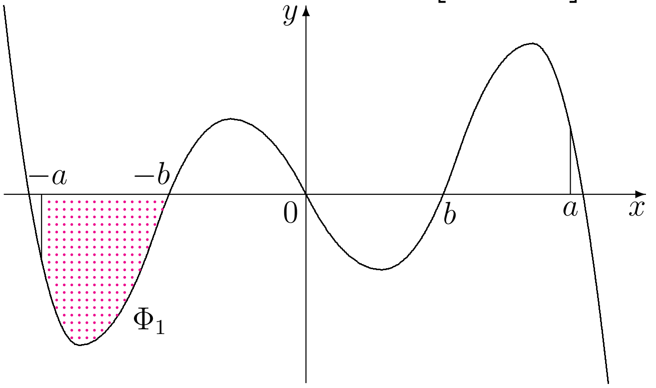
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

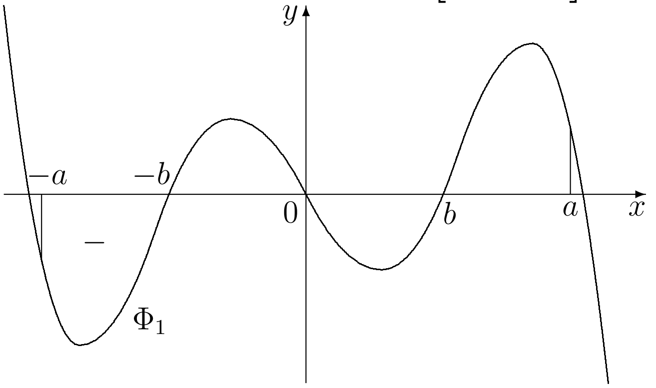
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$=$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

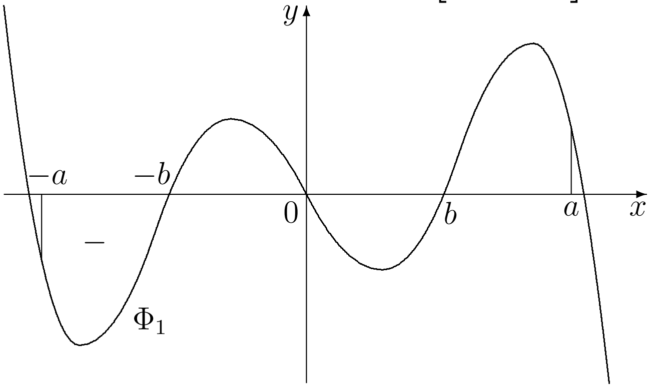
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

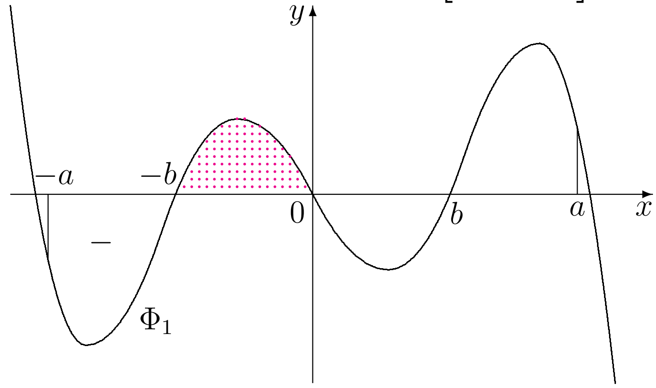
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

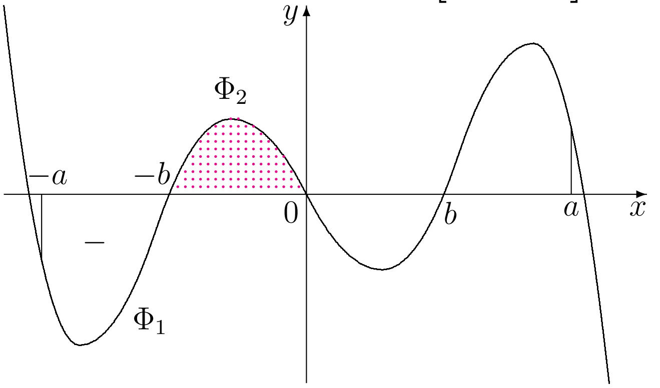
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

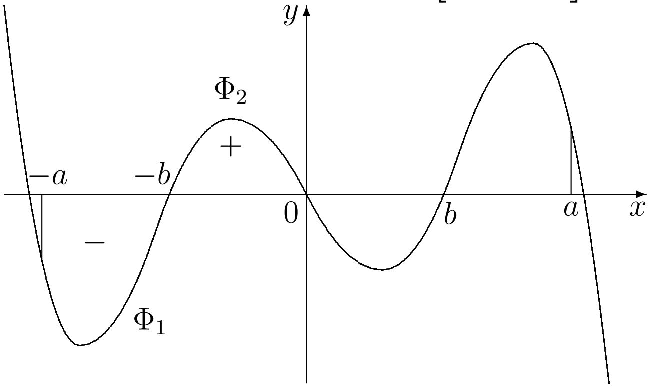
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

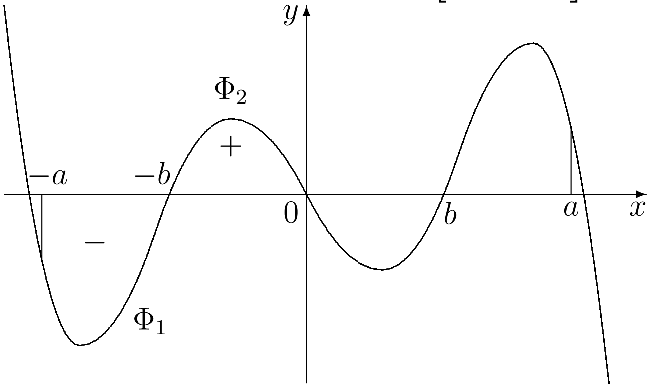
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

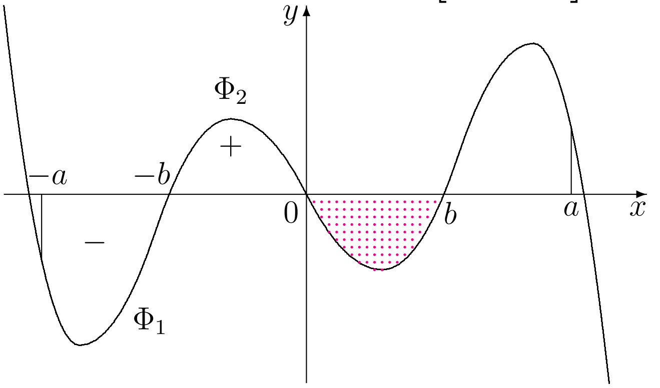
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

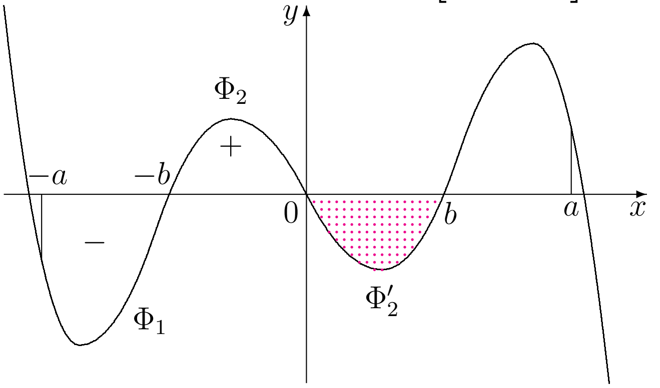
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} +$$



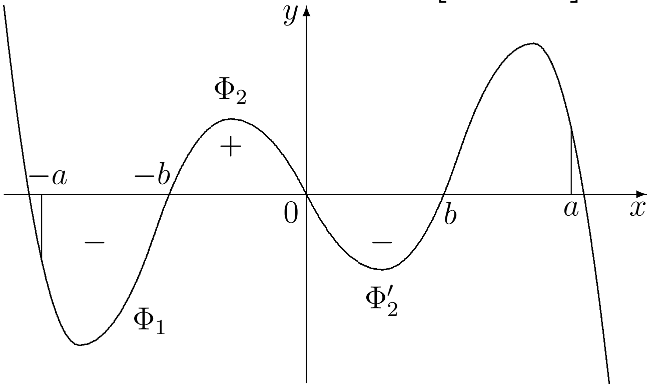
Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

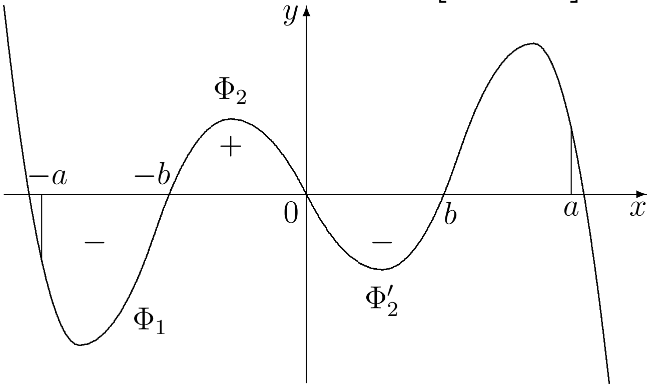
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi_2'}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

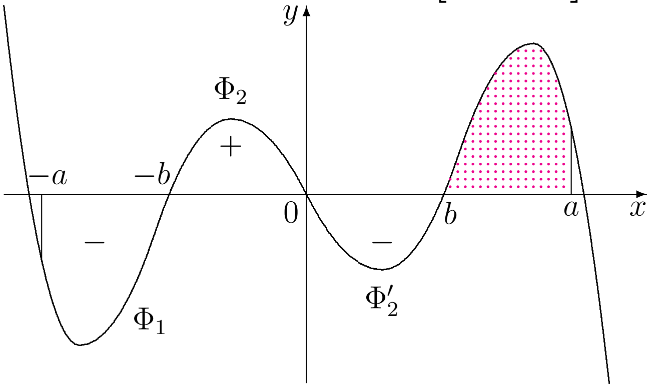
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi_2'}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

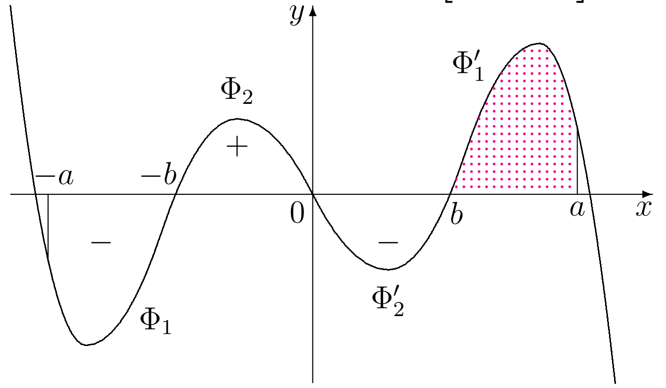
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi'_2}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

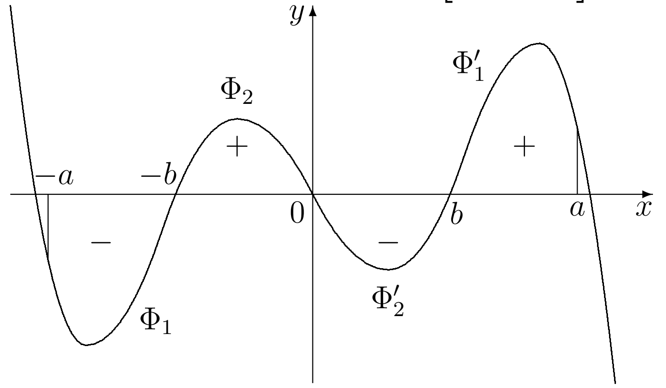
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi_2'}) +$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

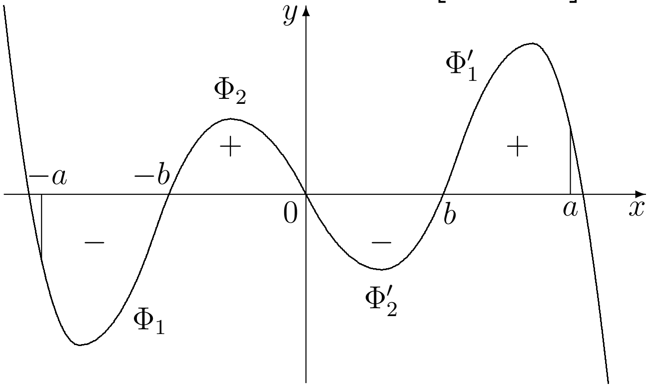
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

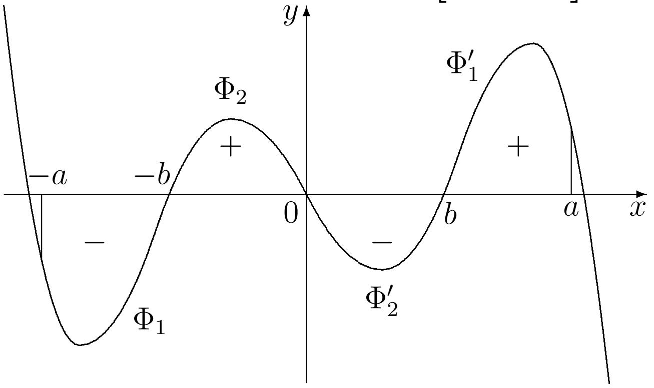
Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} =$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

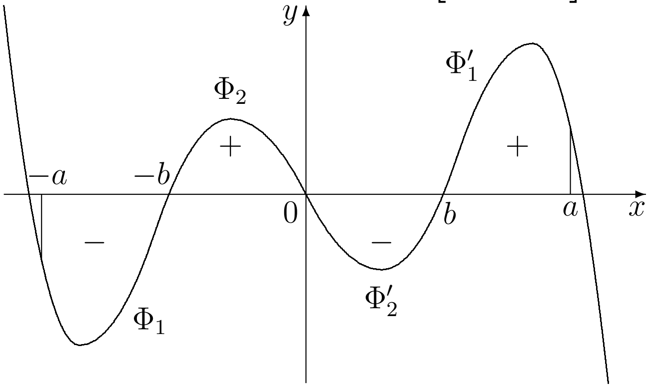
Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

Но по условию из соображений симметрии $S_{\Phi_1} = S_{\Phi'_1}$ и $S_{\Phi_2} = S_{\Phi'_2}$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx = -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi'_2}) + S_{\Phi'_1} = 0.$$



Воспользуемся свойством **аддитивности интеграла по отрезку**.

Интеграл от знакоположительной функции равен площади S_{trap} криволинейной трапеции.

Интеграл от знакоотрицательной функции отличается от площади S_{trap} криволинейной трапеции только знаком, т.е. интеграл равен $(-S_{trap})$.

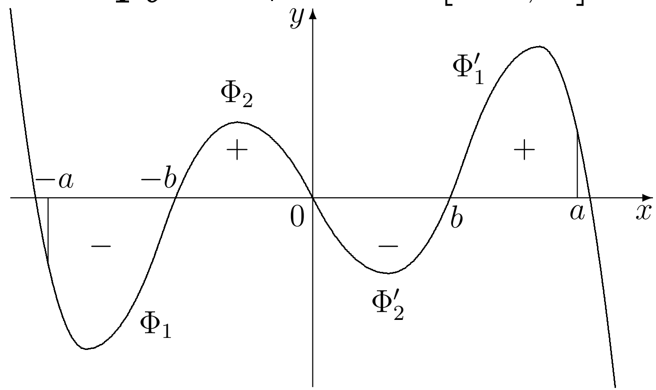
Но по условию из соображений симметрии $S_{\Phi_1} = S_{\Phi'_1}$ и $S_{\Phi_2} = S_{\Phi'_2}$.

XIV.4. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int\limits_{-b}^{0} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + (-S_{\Phi_2'}) + S_{\Phi_1'} = 0.$$



Этот результат следует сформулировать и доказать!

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Доказательство.

$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx =$

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx +$$

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

По **свойству аддитивности интеграла по отрезку** имеем...

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left|\; t = -x \right.$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{matrix} t = -x & \qquad dt = -dx \\ & \end{matrix} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = & \end{array} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & \end{array} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a;a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = \end{array} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \qquad\qquad + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = a \end{array} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = a \end{array} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a;a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt +$$

В первом слагаемом проведём **замену переменной**:

$$\left| \begin{array}{ll} t = -x & dt = -dx \\ x = 0 \to t = 0 & x = -a \to t = a \end{array} \right|$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых, **нечётная** и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx +$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a; a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a; a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

XIV.4.2. Интеграл от нечётной функции по $[-a;a]$

Теорема 47. *Если функция f, во-первых,* ***нечётная*** *и, во-вторых, интегрируема на $[-a;a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Перестановка пределов меняет знак интеграла!

Теорема доказана.

XV. Некоторые приложения определенного интеграла

Рассмотрим некоторые наиболее важные применения определенного интеграла.

XV.1. Площадь плоской фигуры

Один из исходных примеров, который ма рассматривали как основу для определения интеграла, нетрудно обобщить.

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$*, функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$*, и* $\forall x \ \big(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство.

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a, b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается

XV.1. Площадь плоской фигуры

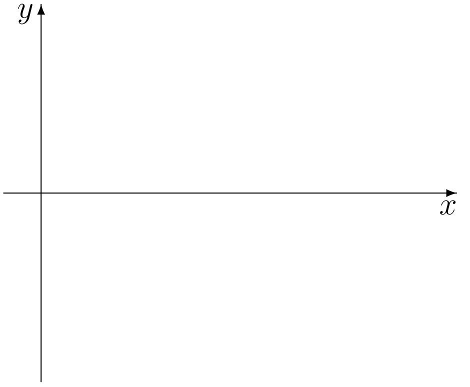
Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается построить чертёж.

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

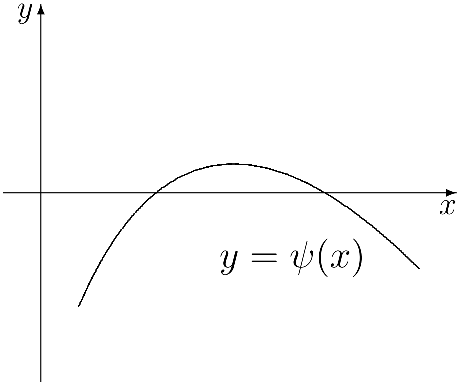
Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается построить чертёж.



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

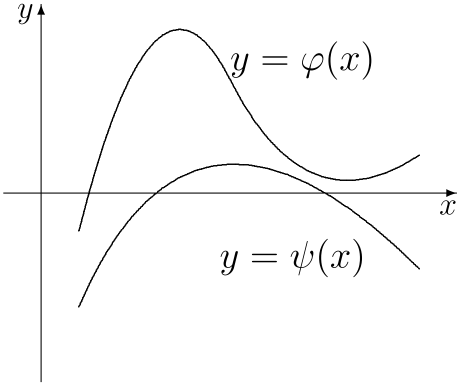
Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается построить чертёж.



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x \ \left(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\right)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

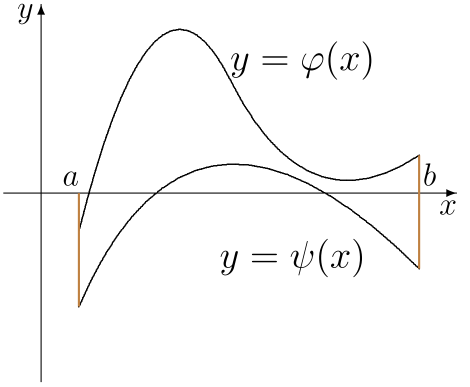
Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается построить чертёж.



XV.1. Площадь плоской фигуры

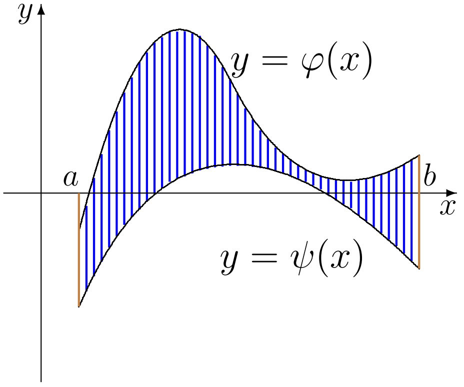
Теорема 48. *Пусть* $a < b$*, функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$*, и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается построить чертёж.



XV.1. Площадь плоской фигуры

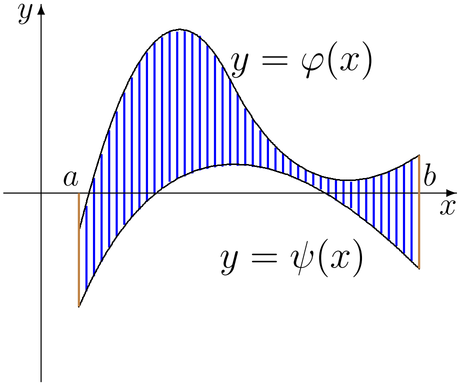
Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.



Доказательство. Задача носит геометрический характер, поэтому напрашивается построить чертёж.

XV.1. Площадь плоской фигуры

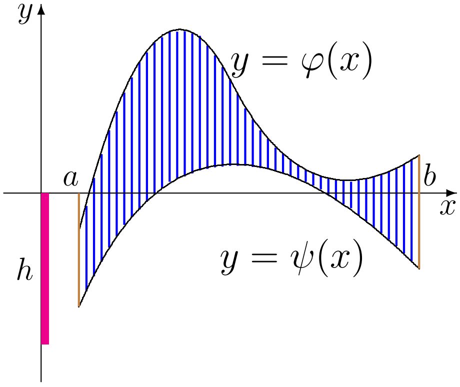
Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a, b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.



Доказательство. Для того, чтобы не усложнять построения рассуждениями «график проходит выше (ниже) оси Ox», перейдём к новой системе координат, при необходимости «перемещая вниз ось Ox».

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть $a < b$, функции φ и ψ непрерывны на $[a; b]$, и $\forall x \ \big(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

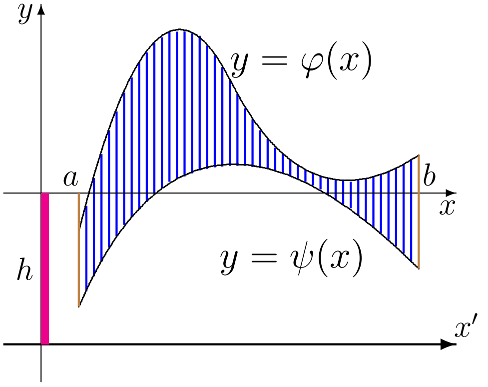


Доказательство. Для того, чтобы не усложнять построения рассуждениями «график проходит выше (ниже) оси Ox», перейдём к новой системе координат, при необходимости «перемещая вниз ось Ox».

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$*, функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$*, и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

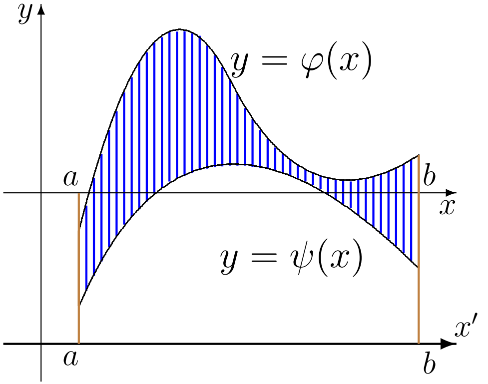
Доказательство. Для того, чтобы не усложнять построения рассуждениями «график проходит выше (ниже) оси Ox», перейдём к новой системе координат, при необходимости «перемещая вниз ось Ox».



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть $a < b$, функции φ и ψ непрерывны на $[a;b]$, и $\forall x \ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

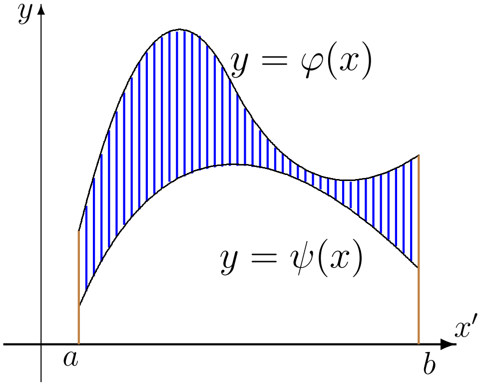
Доказательство. Для того, чтобы не усложнять построения рассуждениями «график проходит выше (ниже) оси Ox», перейдём к новой системе координат, при необходимости «перемещая вниз ось Ox».



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

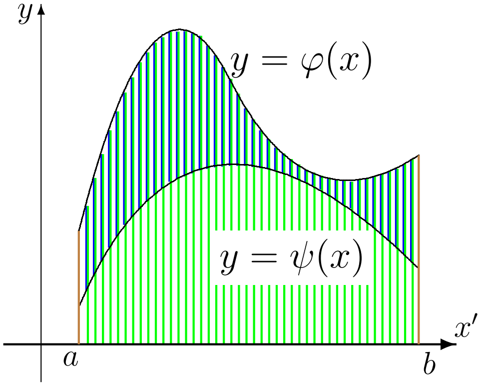
Доказательство. Для того, чтобы не усложнять построения рассуждениями «график проходит выше (ниже) оси Ox», перейдём к новой системе координат, при необходимости «перемещая вниз ось Ox».



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

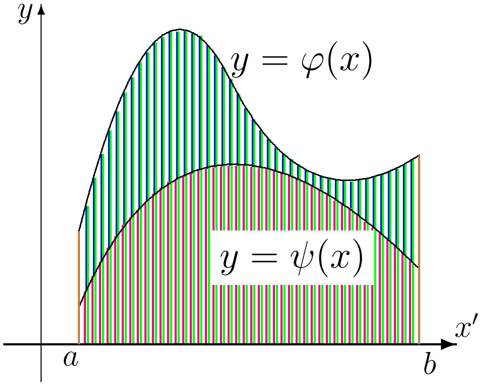
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

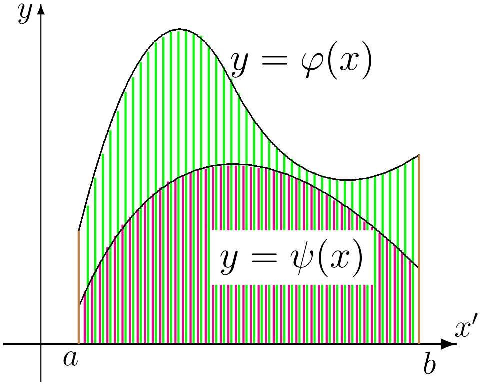
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

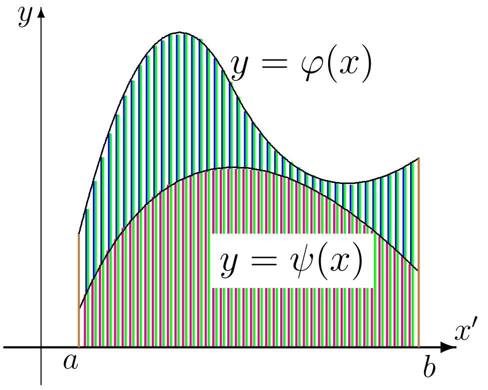
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$*, функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$*, и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

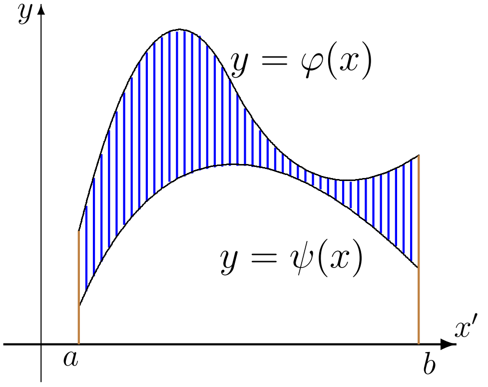
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

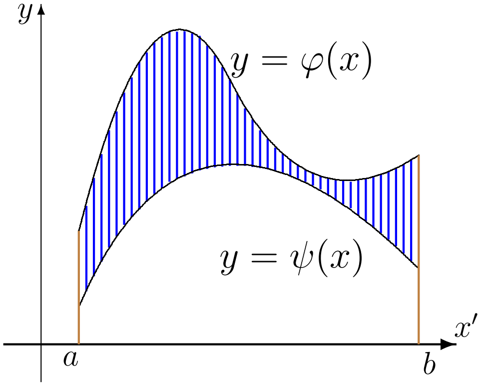
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$*, функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$*, и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$*. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

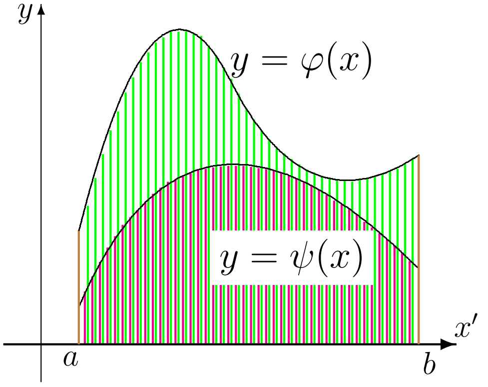


$S =$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

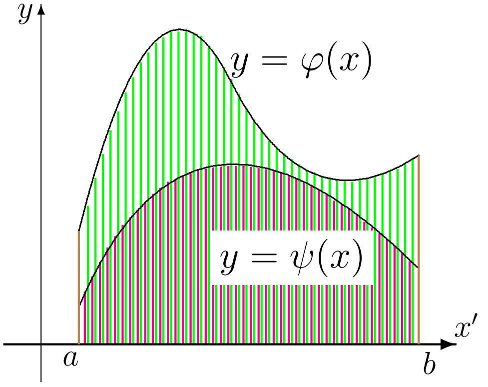


$S =$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть $a < b$, функции φ и ψ непрерывны на $[a;b]$, и $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

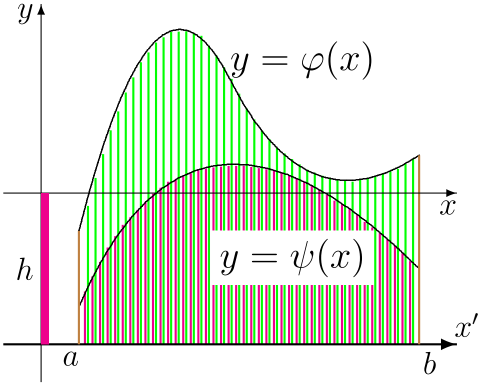
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



$$S = \int_a^b (\qquad\qquad)\,dx - \int_a^b (\qquad\qquad)\,dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a<b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x\ \big(x\in[a,b]\ \Rightarrow\ \varphi(x)\geqslant\psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b,\\ \psi(x)\leqslant y\leqslant\varphi(x),\end{cases}$ *равна* $\int_a^b(\varphi(x)-\psi(x))\,dx$.



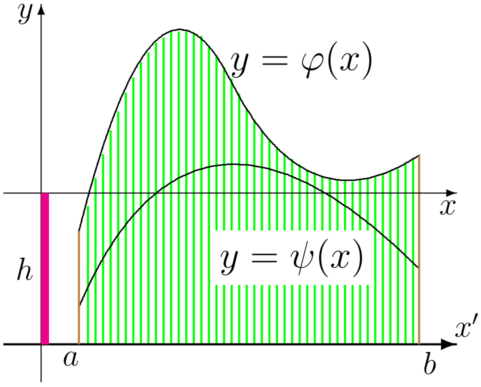
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y=\varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y=\psi(x)$.

$$S=\int_a^b(\qquad\qquad)\,dx-\int_a^b(\qquad\qquad)\,dx=$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \; \big(x \in [a,b] \;\Rightarrow\; \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

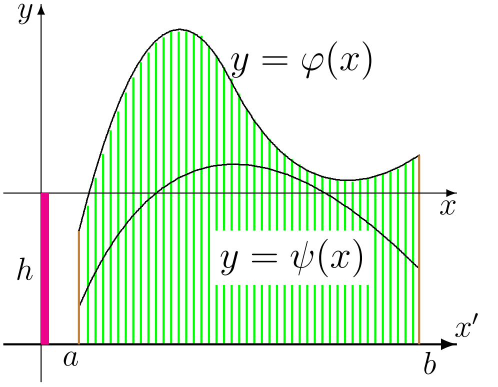


$$S = \int_a^b (\qquad\qquad) \, dx - \int_a^b (\qquad\qquad) \, dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

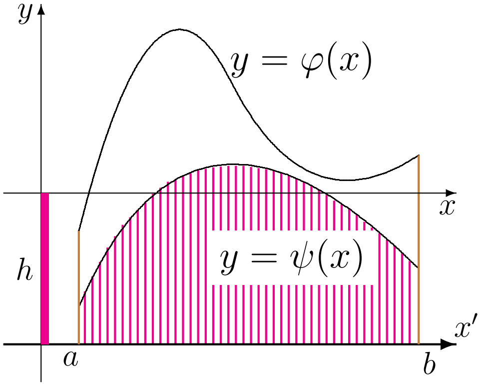


$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\, dx - \int_a^b (\qquad\qquad) \, dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

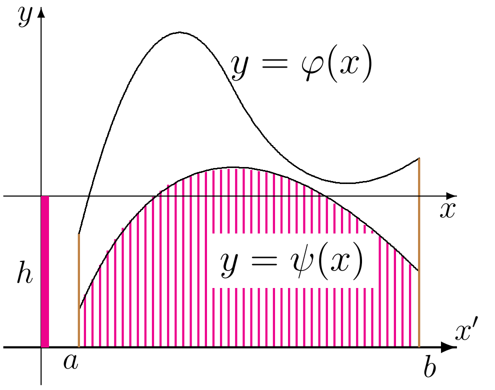
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\, dx - \int_a^b (\qquad\qquad) \, dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.



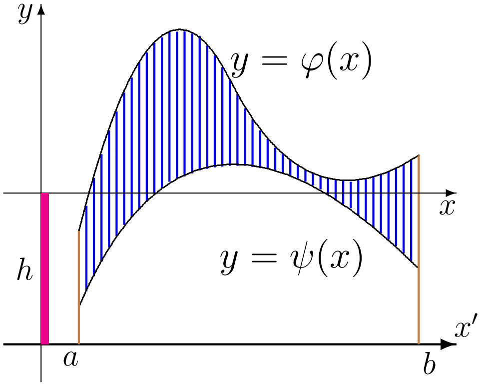
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\,dx - \int_a^b (\psi(x) + h)\,dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x\ \big(x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

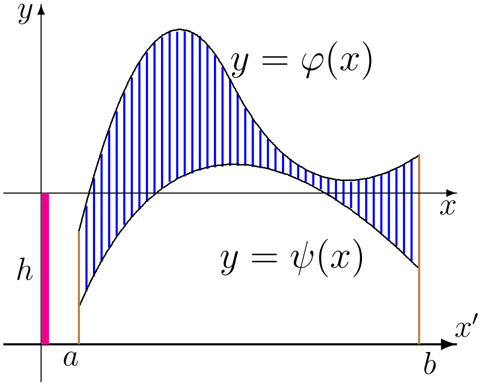
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.



$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\,dx - \int_a^b (\psi(x) + h)\,dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть $a < b$, функции φ и ψ непрерывны на $[a;b]$, и $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ равна $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.*



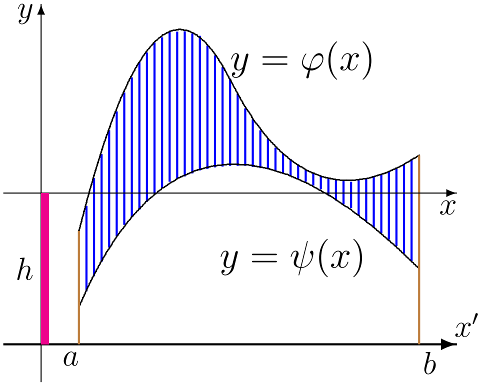
Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\,dx - \int_a^b (\psi(x) + h)\,dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b h\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b h\,dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a; b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a, b] \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx$.

Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

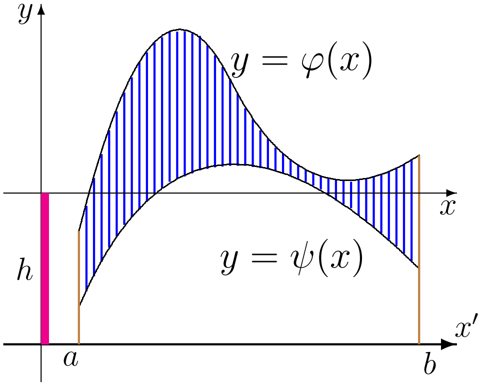


$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\, dx - \int_a^b (\psi(x) + h)\, dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\, dx + \int_a^b h\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx - \int_a^b h\, dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx =$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть $a < b$, функции φ и ψ непрерывны на $[a;b]$, и $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b(\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

Доказательство. Теперь интересующую нас фигуру можно представить в виде разности криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \varphi(x)$ и криволинейной трапеции с «кривой стороной» $y = \psi(x)$.

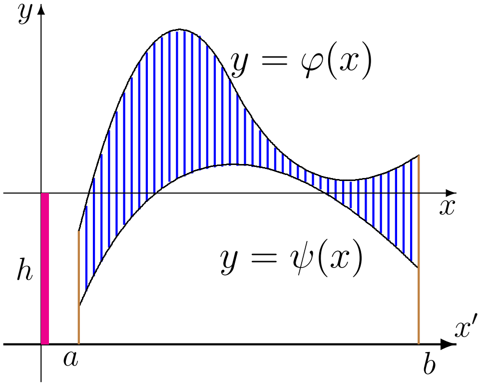


$$S = \int_a^b(\varphi(x) + h)\,dx - \int_a^b(\psi(x) + h)\,dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b h\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b h\,dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx.$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть* $a < b$, *функции* φ *и* ψ *непрерывны на* $[a;b]$, *и* $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. *Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

Доказательство. Теорема доказана.



$$S = \int_a^b (\varphi(x) + h)\,dx - \int_a^b (\psi(x) + h)\,dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b h\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b h\,dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx.$$

XV.1. Площадь плоской фигуры

Теорема 48. *Пусть $a < b$, функции φ и ψ непрерывны на $[a;b]$, и $\forall x \ \big(x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \varphi(x) \geqslant \psi(x)\big)$. Тогда площадь фигуры, заданной неравенствами* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x), \end{cases}$ *равна* $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$.

Замечание к теореме. Если либо $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, либо $a > b$, то

$$\int\limits_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$$

равен площади с обратным знаком для соответствующей фигуры.

Рассмотреть пример?

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x=a, \quad x=b$, равен $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x=a$, $\quad x=b$, равен $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Выполним рисунок.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $\quad x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Выполним рисунок.

XV.2. Объем тела вращения

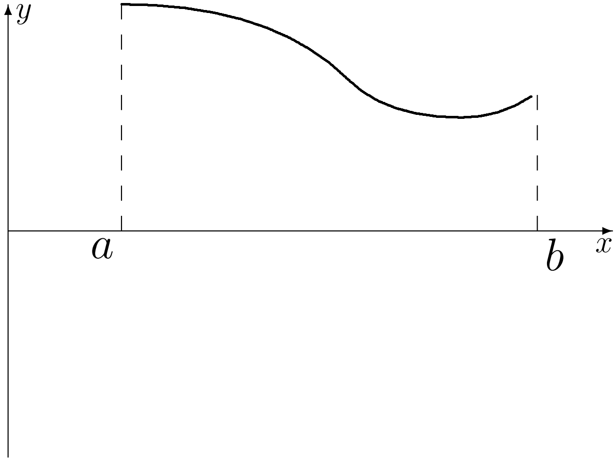
Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $\quad x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Изобразим участок графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

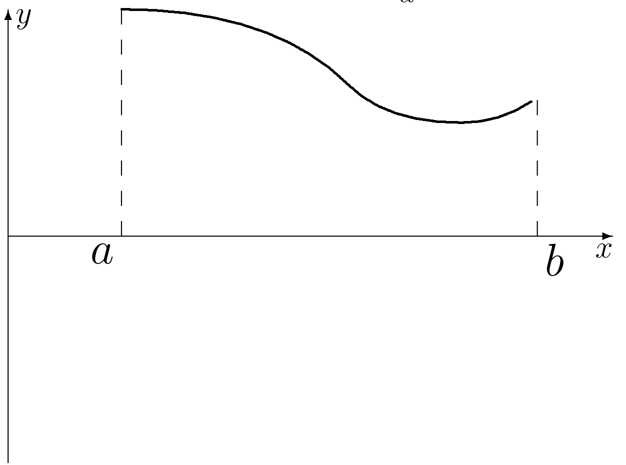
Изобразим участок графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

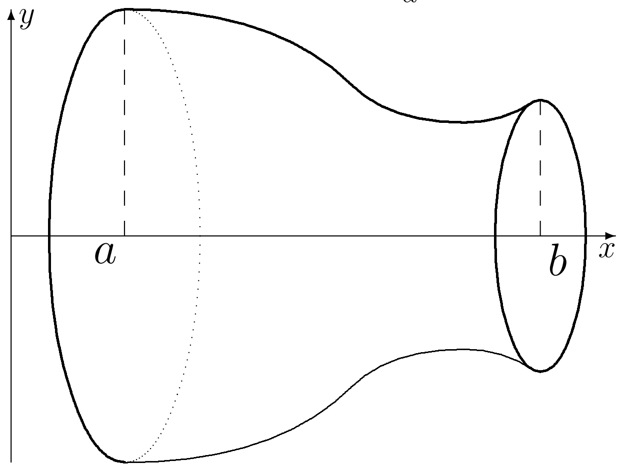
Изобразим участок графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.
В результате вращения получается тело, объем которого нам необходимо найти.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

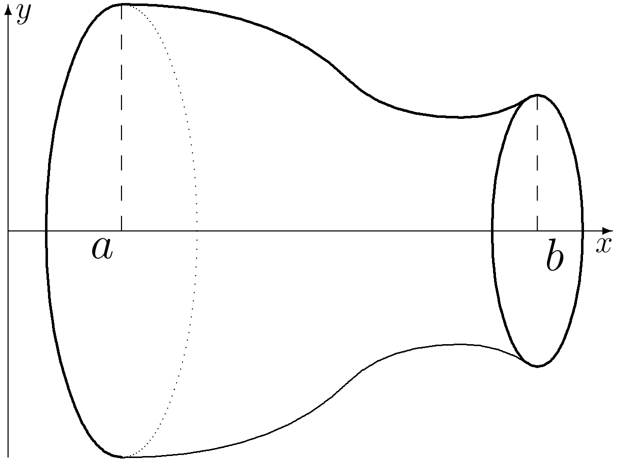
Изобразим участок графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.



В результате вращения получается тело, объем которого нам необходимо найти.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

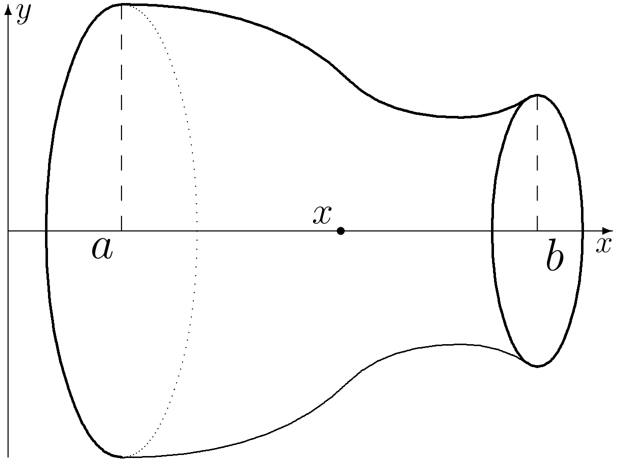


Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

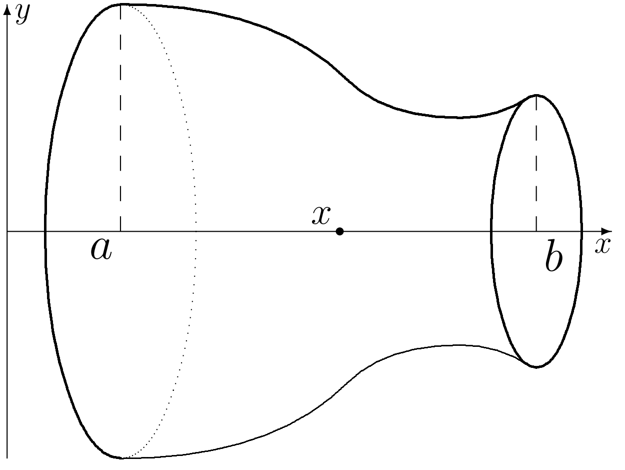
Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $\quad x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.
Построим сечение плоскостью через эту точку.

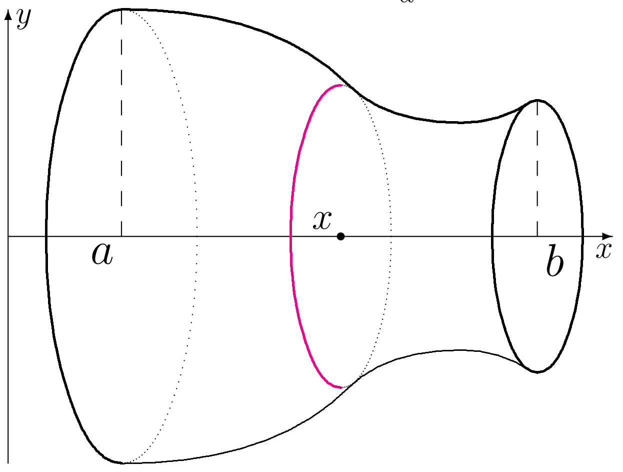


XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $\quad x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

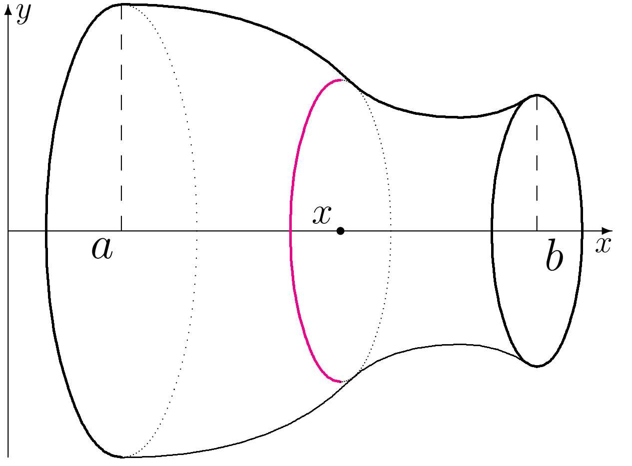
Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

Построим сечение плоскостью через эту точку.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.



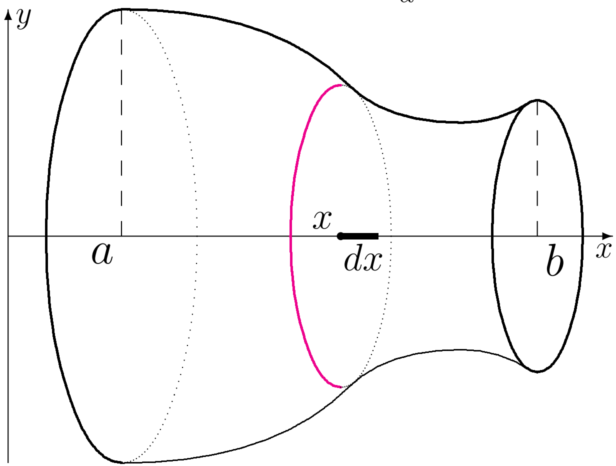
Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

Построим сечение плоскостью через эту точку.

Возьмём приращение аргумента dx.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.



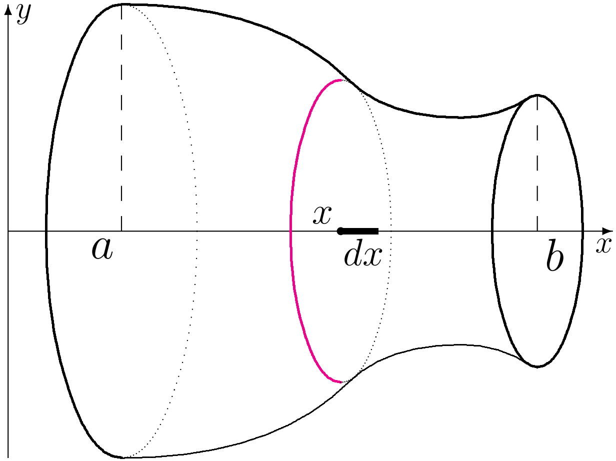
Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

Построим сечение плоскостью через эту точку.

Возьмём приращение аргумента dx.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.



Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

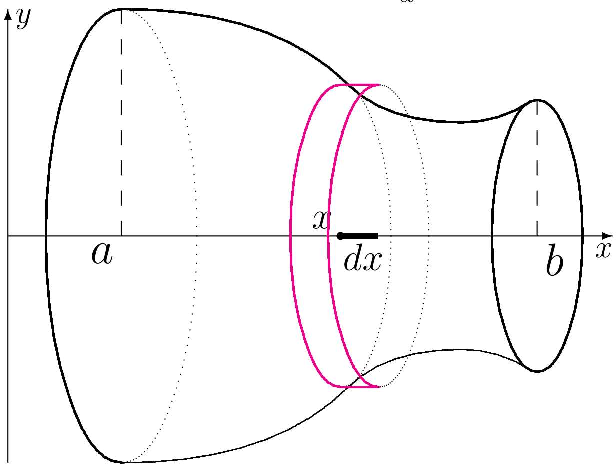
Построим сечение плоскостью через эту точку.

Возьмём приращение аргумента dx.

Построим цилиндр с высотой dx.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x=a$, $x=b$, равен $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*



Возьмём точку $x\in[a;\ b]$.
Построим сечение плоскостью через эту точку.
Возьмём приращение аргумента dx.
Построим цилиндр с высотой dx.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Объем цилиндра равен

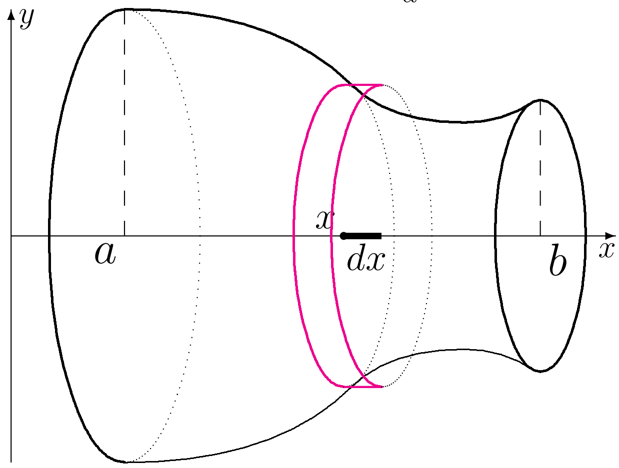
$\pi R^2 h = \pi \cdot \qquad ^2.$

Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

Построим сечение плоскостью через эту точку.

Возьмём приращение аргумента dx.

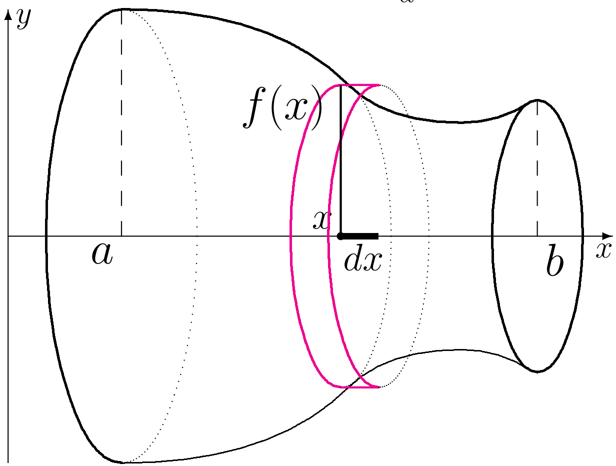
Построим цилиндр с высотой dx.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Объем цилиндра равен
$\pi R^2 h = \pi \cdot \qquad {}^2.$
Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.
Построим сечение плоскостью через эту точку.
Возьмём приращение аргумента dx.
Построим цилиндр с высотой dx.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

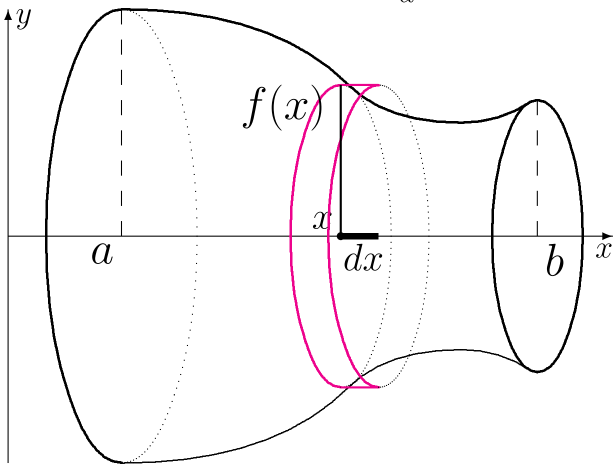
Объем цилиндра равен $\pi R^2 h = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot$

Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.

Построим сечение плоскостью через эту точку.

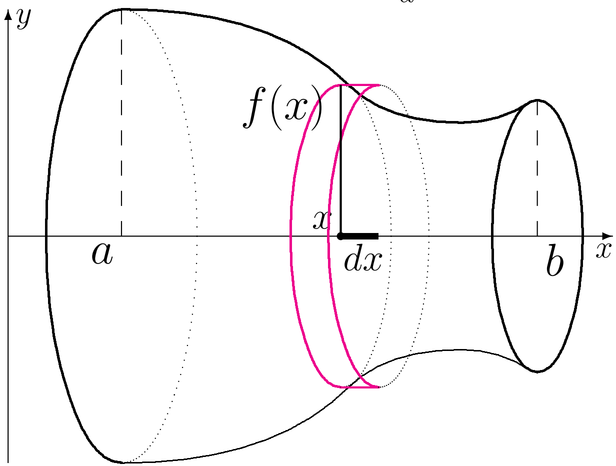
Возьмём приращение аргумента dx.

Построим цилиндр с высотой dx.



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

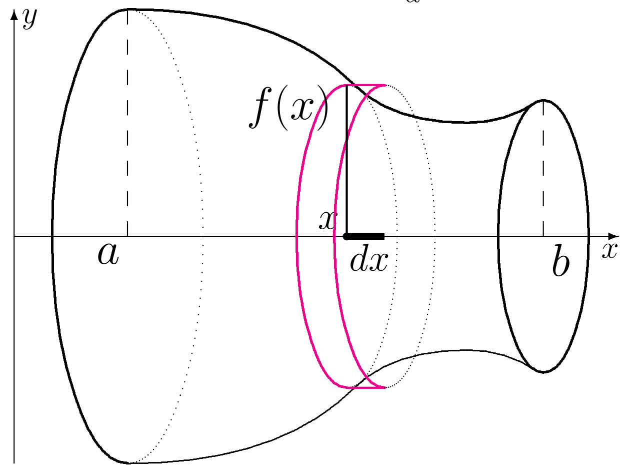


Объем цилиндра равен
$\pi R^2 h = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$.
Возьмём точку $x \in [a;\ b]$.
Построим сечение плоскостью через эту точку.
Возьмём приращение аргумента dx.
Построим цилиндр с высотой dx.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x=a$, $x=b$, равен* $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$

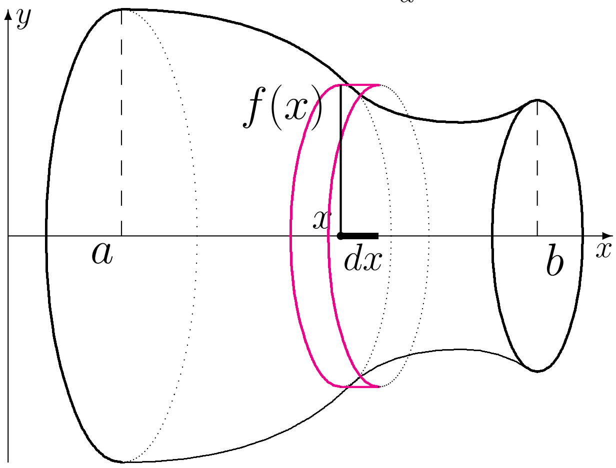
Объем цилиндра равен $\pi R^2 h = \pi\cdot(f(x))^2\cdot dx.$
Теперь осталось просуммировать по отрезку $[a;\ b]$:



XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$.

Объем цилиндра равен
$\pi R^2 h = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$.
Теперь осталось просуммировать по отрезку $[a;\ b]$:



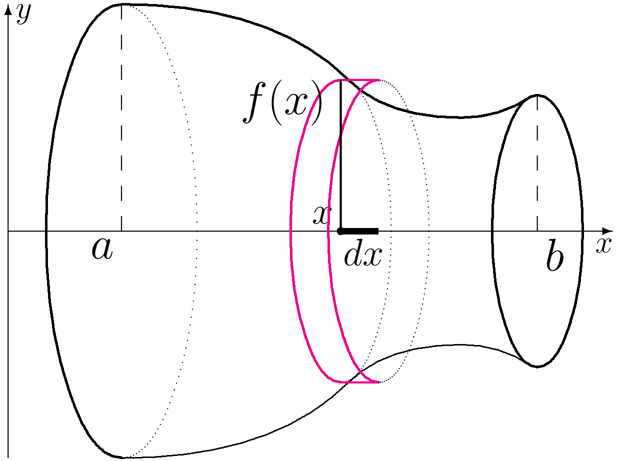
$V =$

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x=a$, $x=b$, равен* $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

Объем цилиндра равен
$\pi R^2 h = \pi\cdot(f(x))^2\cdot dx.$
Теперь осталось просуммировать по отрезку $[a;\ b]$:

$$V=\pi\int\limits_a^b$$



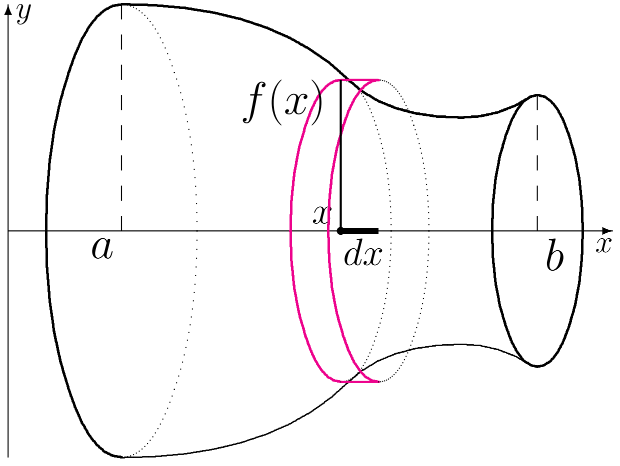
XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$.

Объем цилиндра равен $\pi R^2 h = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$.

Теперь осталось просуммировать по отрезку $[a;\ b]$:

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$



XV.2. Объем тела вращения

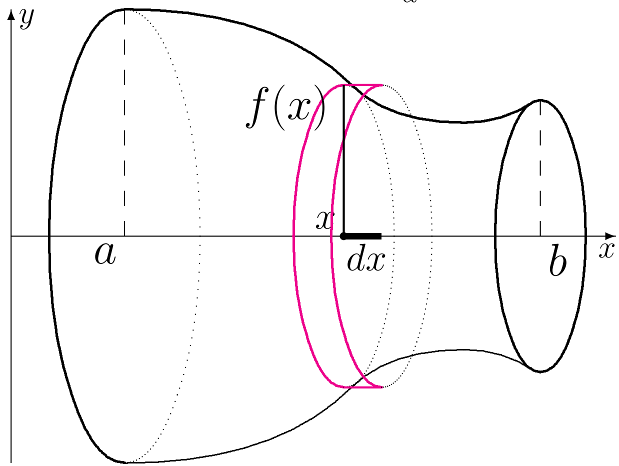
Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, равен $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.*

Объем цилиндра равен $\pi R^2 h = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$.

Теперь осталось просуммировать по отрезку $[a;\ b]$:

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Строгое доказательство почти повторяет эти рассуждения:



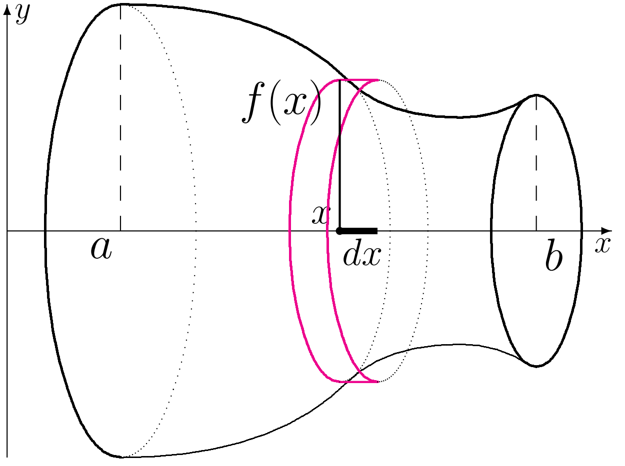
надо сразу рассматривать сумму и потом брать предел при диаметре разбиения, стремящемся к 0.

XV.2. Объем тела вращения

Теорема 49. *Если f непрерывна на $[a, b]$, то объём V тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $\quad x = b$, равен* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$.

Объем цилиндра равен
$\pi R^2 h = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$.
Теперь осталось просуммировать по отрезку $[a;\ b]$:

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$



Рассмотрим пример?

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой*
$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \tag{58}$$

Доказательство. Начнем, естественно,

с

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$

Доказательство. Начнем, естественно,

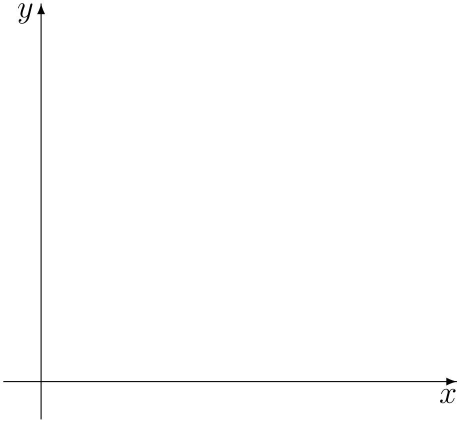
с выполнения рисунка.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$

Доказательство. Начнем, естественно, с выполнения рисунка.

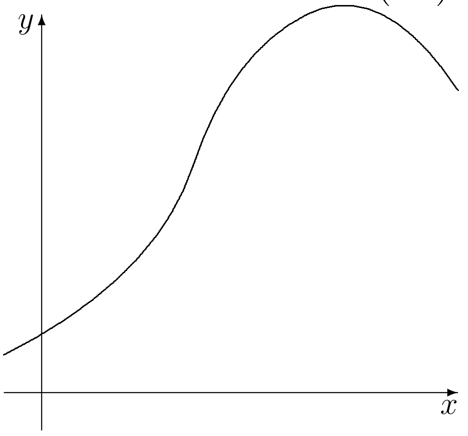


XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$

Доказательство. Начнем, естественно, с выполнения рисунка.

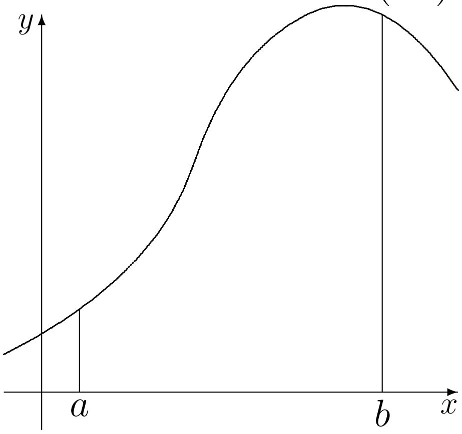


XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$

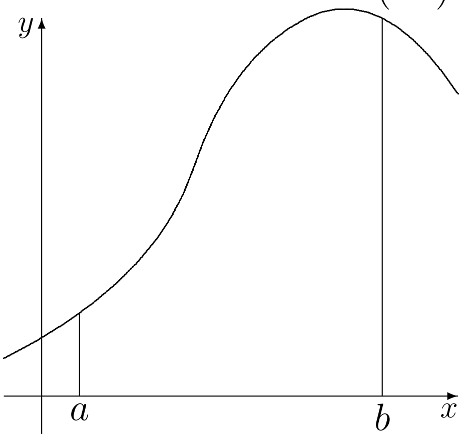
Доказательство. Начнем, естественно, с выполнения рисунка.



XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$

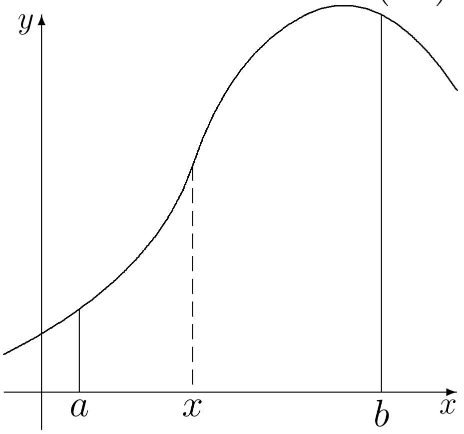


Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \qquad (58)$$

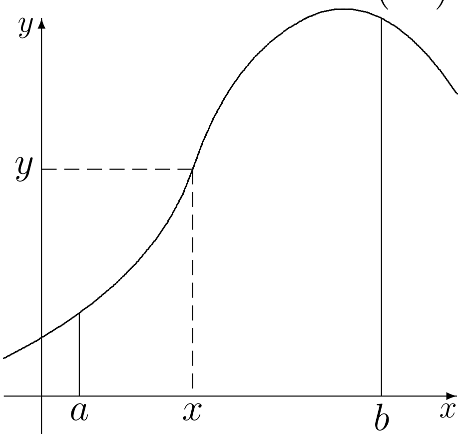


Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \tag{58}$$

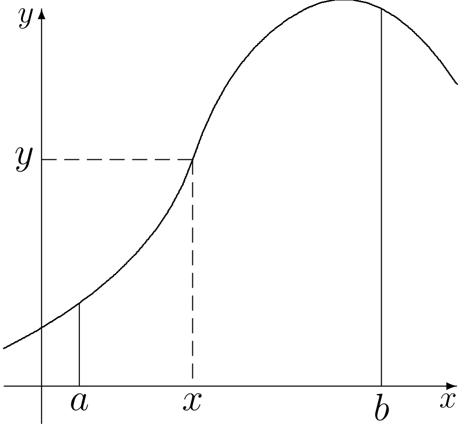


Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой*
$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$



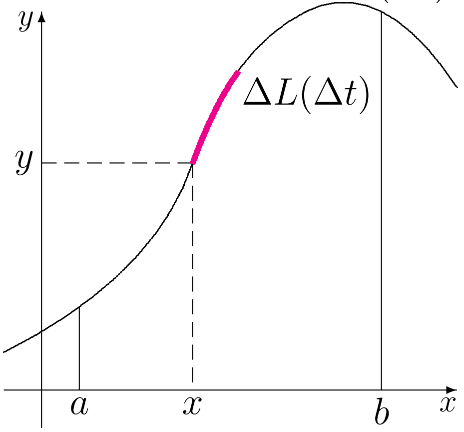
Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\Big\{M \,\Big|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau), \quad \tau \in [t, t + \Delta t]\Big\}$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \tag{58}$$



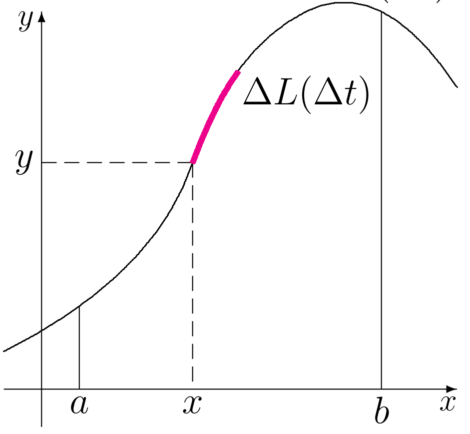
Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M \,\middle|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t + \Delta t]\right\}$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a<b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a,b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)=u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}}+v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a\leqslant t\leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t)+\acute{v}^2(t)}\,dt. \qquad (58)$$



Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x,y)=\big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t\in(a,b)$.

Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M\,\middle|\,\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau\in[t,t+\Delta t]\right\}$.

Длина участка ΔL с точностью до бесконечно малых порядка, большего Δt, равна $\left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t,\Delta t)\right|$.

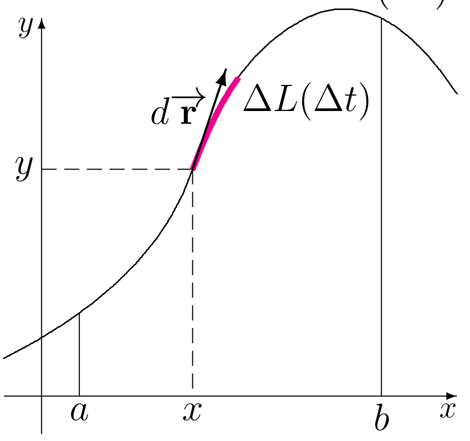
XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$

Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M \,\middle|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t + \Delta t]\right\}$.

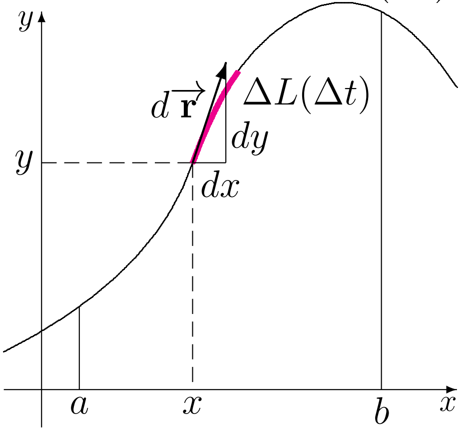


Длина участка ΔL с точностью до бесконечно малых порядка, большего Δt, равна $\left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t)\right|$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a,b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$



Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x,y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a,b)$.

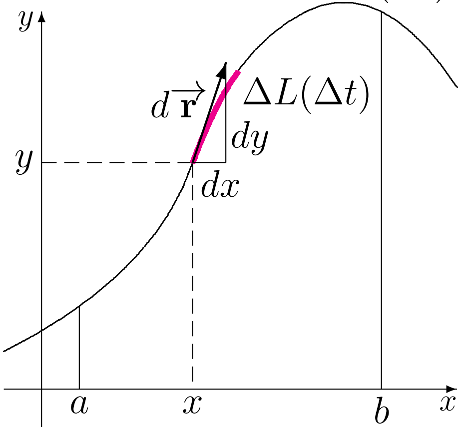
Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M \,\middle|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t+\Delta t]\right\}$.

Длина участка ΔL с точностью до бесконечно малых порядка, большего Δt, равна $\left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t,\Delta t)\right|$.

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$



Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

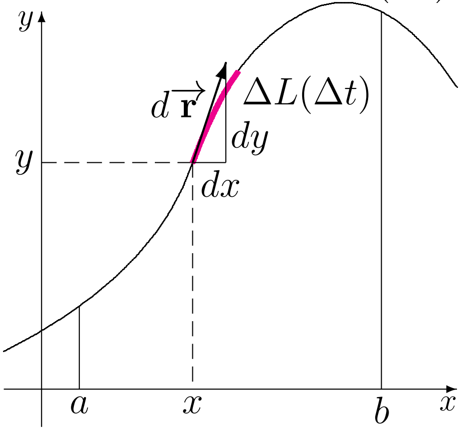
Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M \,\middle|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t + \Delta t]\right\}$.

$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) =$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$



Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

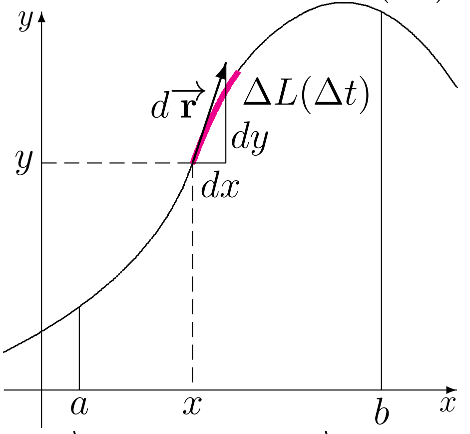
Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M \,\middle|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t + \Delta t]\right\}$.

$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \tag{58}$$



Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\left\{M \,\middle|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t + \Delta t]\right\}$.

$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\,dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\,dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

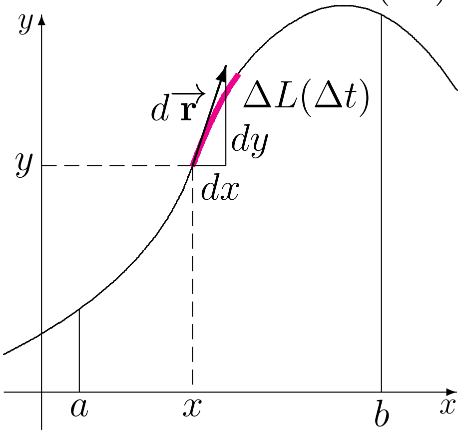
XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$

Доказательство. Возьмем на графике произвольную точку $(x, y) = \big(u(t);\ v(t)\big)$, где $t \in (a, b)$.

Зададим приращение Δt параметра t и выделим участок линии: $\Big\{M \,\Big|\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\tau),\quad \tau \in [t, t+\Delta t]\Big\}$.



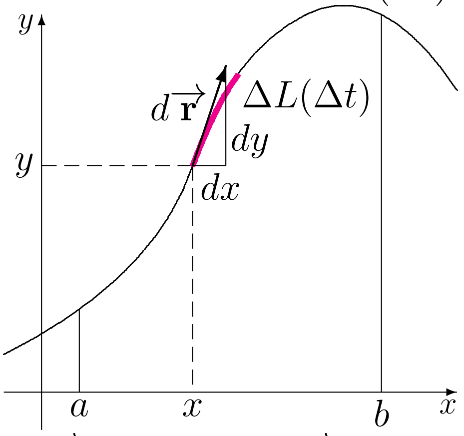
$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$
$$= \Big(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\Big)\, dt.$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой*
$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$

Доказательство. Значит,
$|\Delta L| \approx$

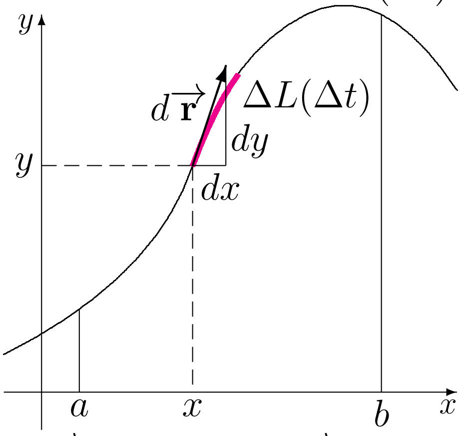


$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$
$$= \left(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) dt.$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \qquad (58)$$



Доказательство. Значит,

$$|\Delta L| \approx \left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| =$$

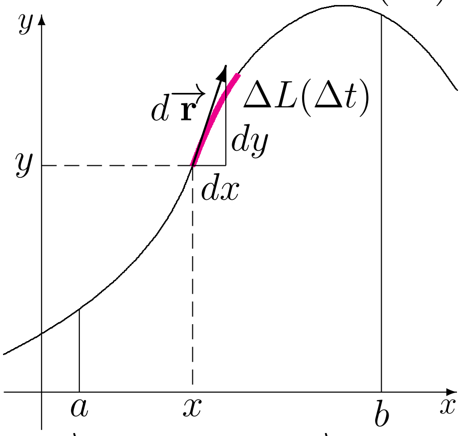
$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\,dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\,dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\acute{u}(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\,dt.$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$



Доказательство. Значит,

$$|\Delta L| \approx \left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| =$$

Здесь $\approx$ означает, что это равенство выполняется с точностью до бесконечно малых порядка большего, чем Δt.

$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$
$$= \left(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) dt.$$

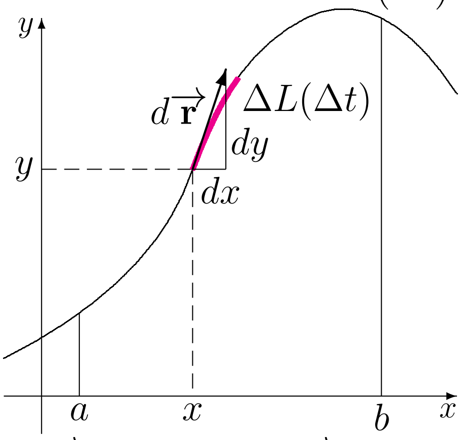
XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$

Доказательство. Значит,

$$|\Delta L| \approx \left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| = \left|\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right| dt =$$



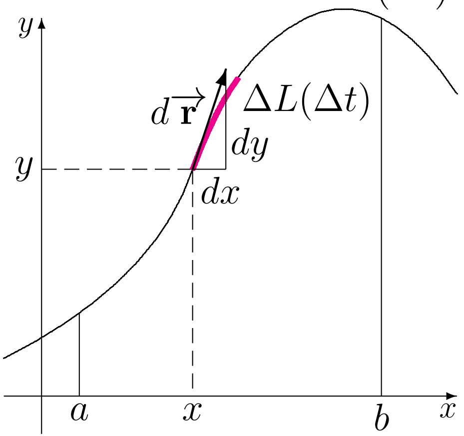
$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) dt.$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \qquad (58)$$



Доказательство. Значит,

$$|\Delta L| \approx \left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| = \left|\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right| dt =$$

$$= \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt.$$

$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) dt.$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

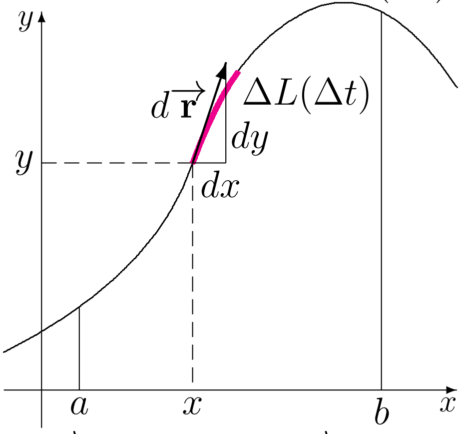
$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \qquad (58)$$

Доказательство. Значит,

$$|\Delta L| \approx \left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| = \left|\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right| dt =$$

$$= \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt.$$

Осталось «просуммировать» по отрезк$[a;\ b]$, и получим формулу (58).



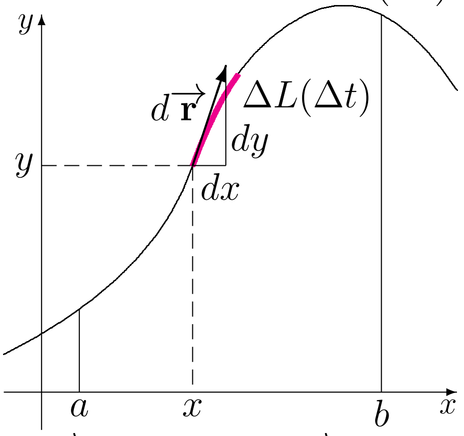
$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\,dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\,dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) dt.$$

XV.3. Длина дуги линии

Теорема 50. *Пусть $a < b$ и функции $u(t)$, $v(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда длина дуги кривой $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $a \leqslant t \leqslant b$, равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt. \tag{58}$$



Доказательство. Значит,

$$|\Delta L| \approx \left|d\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| = \left|\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right| dt =$$

$$= \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\, dt.$$

Осталось «просуммировать» по отрезк$[a;\ b]$, и получим формулу (58). Теорема доказана.

$$d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t, \Delta t) = \mathbf{dx}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{dy}(t, \Delta t)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \acute{u}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\, dt \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\acute{u}(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \acute{v}(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) dt.$$

XV.4. Длина дуги линии $y = f(x)$

Теорема 50. *Пусть* $a < b$ *и функции* $u(t)$, $v(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на* $[a, b]$. *Тогда длина дуги кривой* $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = u(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, *где* $a \leqslant t \leqslant b$, *равна*

$$\int_a^b \sqrt{\acute{u}^2(t) + \acute{v}^2(t)}\,dt. \tag{58}$$

Замечание 2. *Часто линия представляет собой часть графика функции* f, *заданной выражением* $f(x)$, *где* $a \leqslant x \leqslant b$. *В этом случае можно считать, что линия задана параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases}$ *В этом случае формулу (58) для вычисления длины дуги этой кривой можно представить в виде*

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \tag{59}$$

Рассмотрим пример?

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Будем считать, что вокруг оси Ox вращается бесконечно тонкая линия, заданная в плоскости xOy уравнением $y = f(x)$ или параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Нам надо найти площадь *внешней части* получившейся поверхности.

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

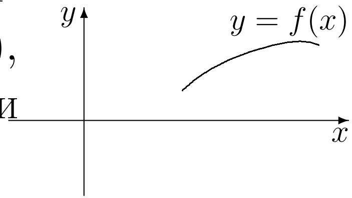
Построим график какой-либо функции $y = f(x)$, считая ее параметрически заданной: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Традиционное задание функции формулой $y = f(x)$ тоже можно представить в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

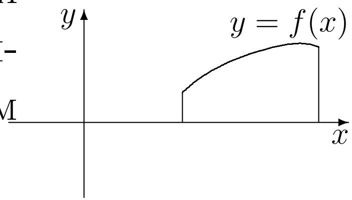
Построим график какой-либо функции $y = f(x)$, считая ее параметрически заданной: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$



Традиционное задание функции формулой $y = f(x)$ тоже можно представить в параметрической форме:
$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

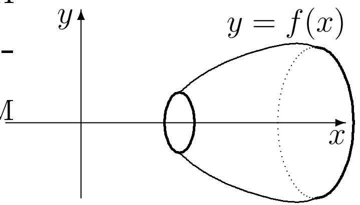
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

В результате вращения получившейся криволинейной трапеции получаем тело вращения.



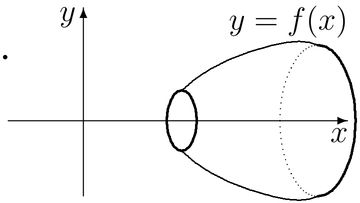
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

В результате вращения получившейся криволинейной трапеции получаем тело вращения.



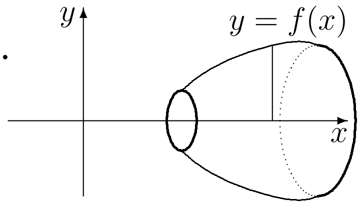
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Проведем сечение плоскостью $x = x(t), \quad t = const.$



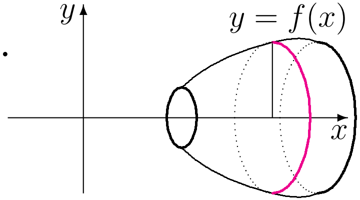
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Проведем сечение плоскостью $x = x(t), \quad t = const.$



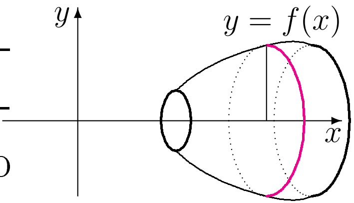
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Проведем сечение плоскостью $x = x(t), \quad t = const.$



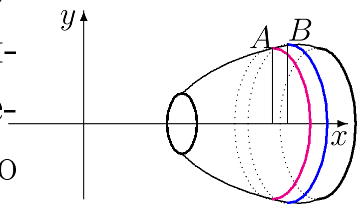
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Теперь дадим значению x небольшое приращение dx и проведем сечение плоскостью $x = x(t) + dx, \quad t = const.$



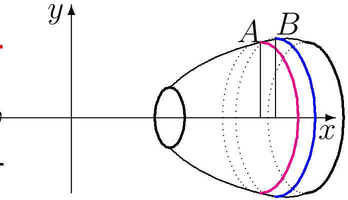
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Теперь дадим значению x небольшое приращение dx и проведем сечение плоскостью $x = x(t) + dx, \quad t = const.$



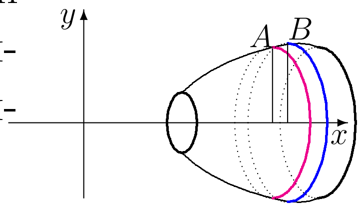
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

С точностью до бесконечно малых **порядка, большего** dx, можно считать, что AB — это часть касательной к графику функции $y = f(x)$.



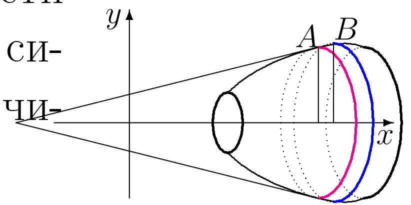
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Тогда часть поверхности между малиновой и синей линиями можно считать частью конуса.



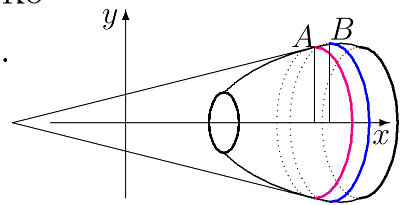
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Тогда часть поверхности между малиновой и синей линиями можно считать частью конуса.



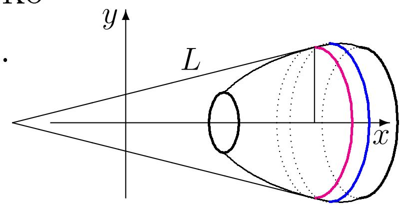
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Выполним развёртку боковой поверхности конуса.



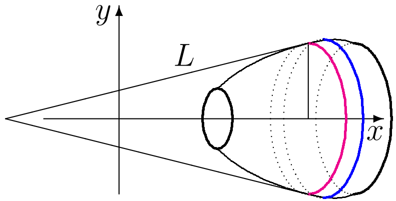
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

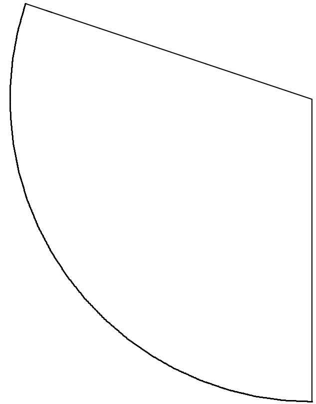
Выполним развёртку боковой поверхности конуса.



XV.5. Площадь поверхности тела вращения

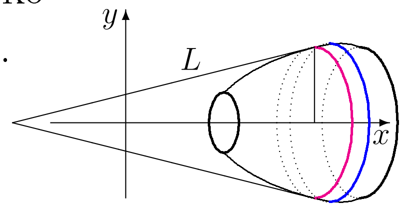
Выполним развёртку боковой поверхности конуса.

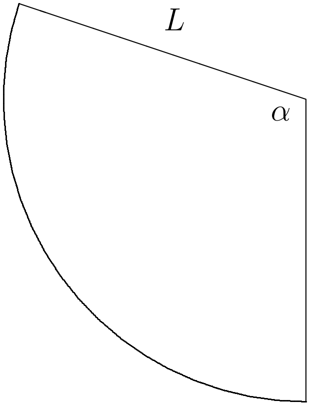




XV.5. Площадь поверхности тела вращения

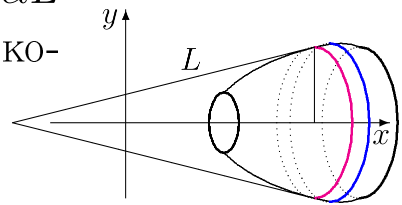
Выполним развёртку боковой поверхности конуса.

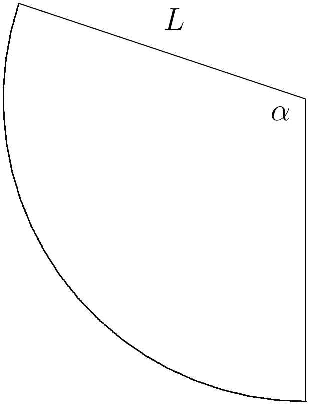




XV.5. Площадь поверхности тела вращения

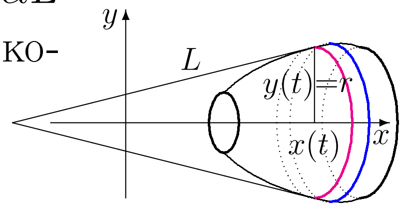
Учтем, что длина дуги αL равна длине основания конуса.

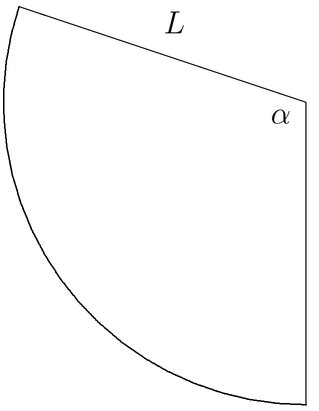




XV.5. Площадь поверхности тела вращения

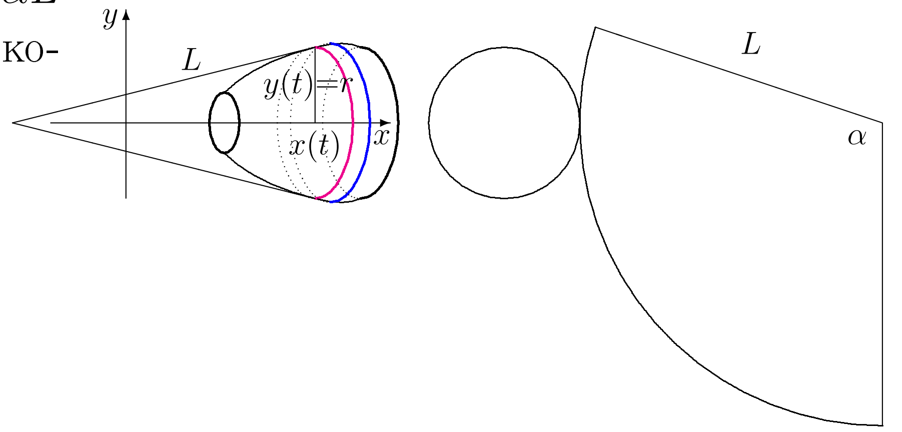
Учтем, что длина дуги αL равна длине основания конуса.





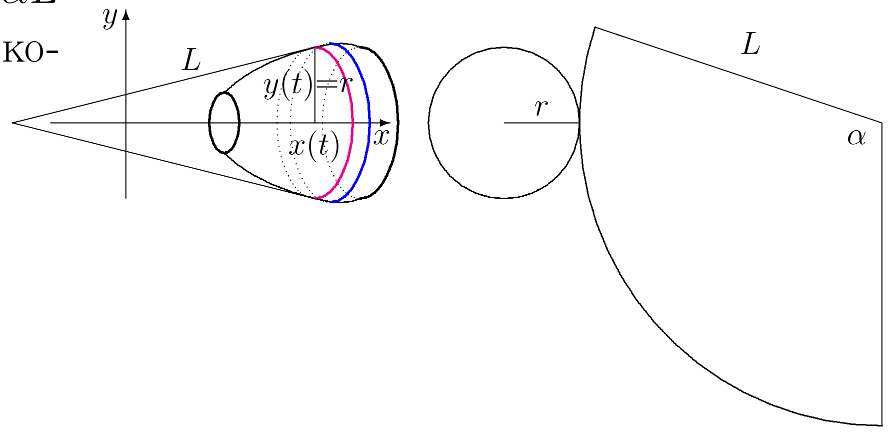
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Учтем, что длина дуги αL равна длине основания конуса.



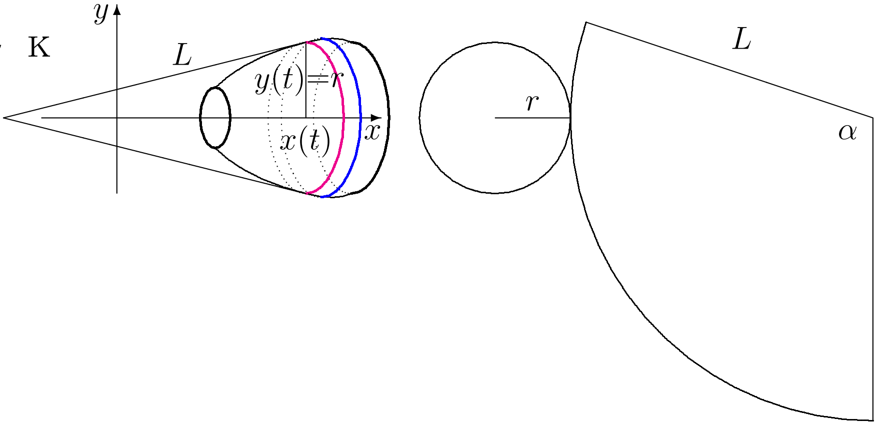
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Учтем, что длина дуги αL равна длине основания конуса.



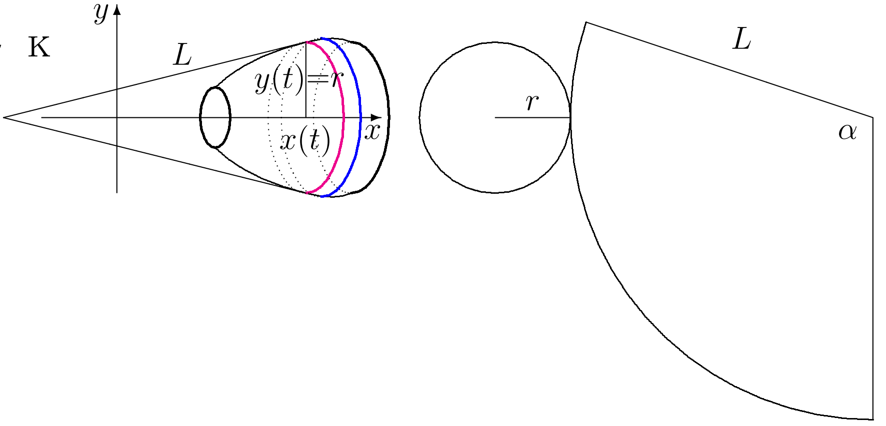
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен



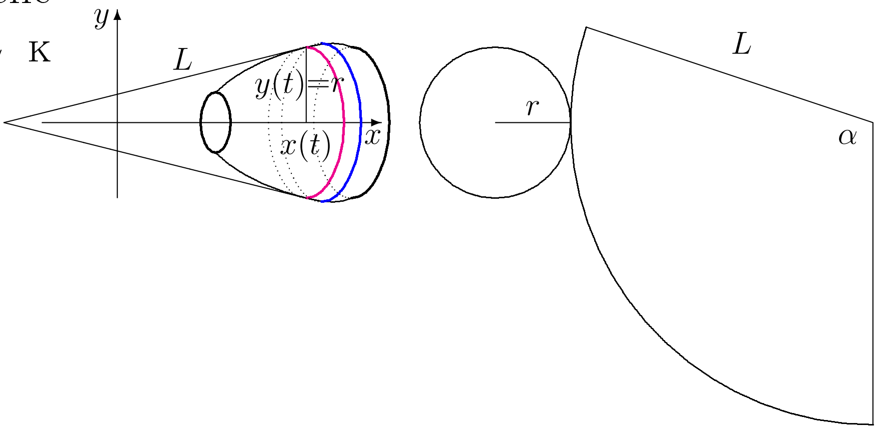
XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

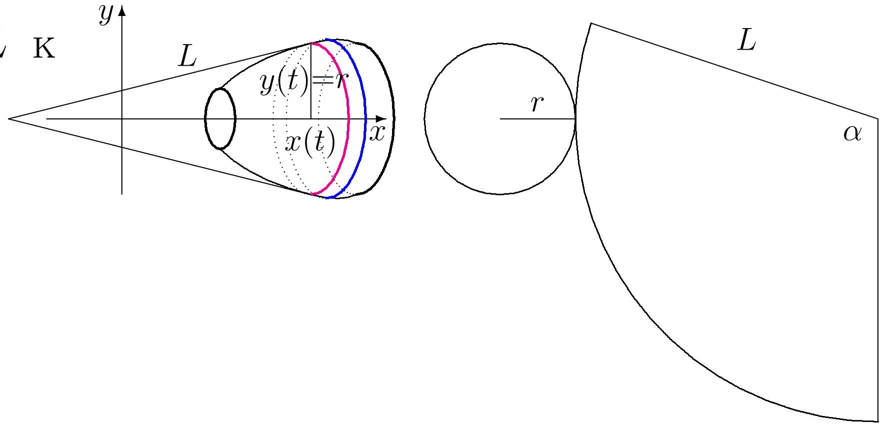


$$\left\{ \Delta S = \right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



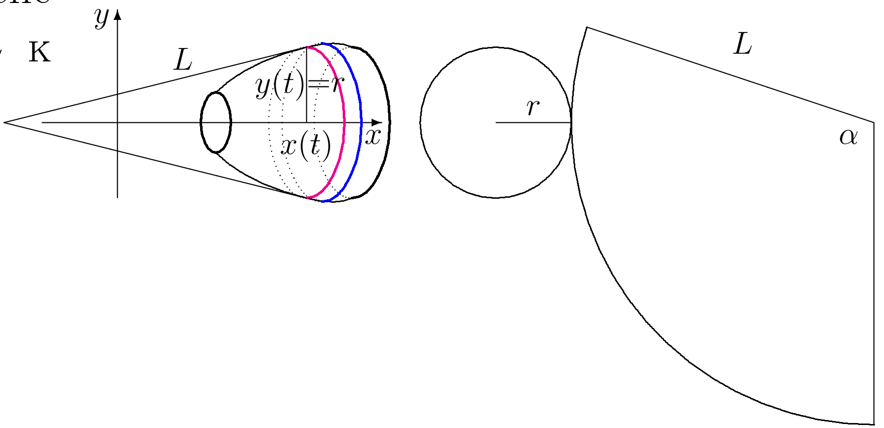
$$\left\{\begin{array}{l} \\ \Delta S = \\ \\ \end{array}\right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



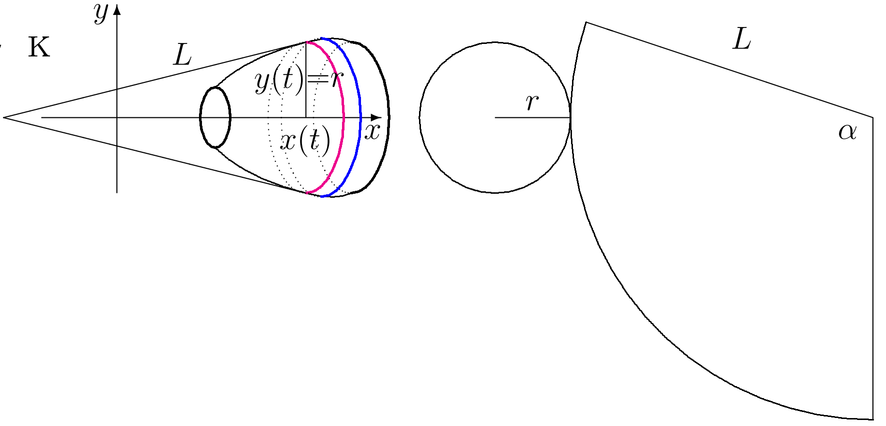
$$\left\{ \Delta S = \right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{} = \frac{\alpha}{}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



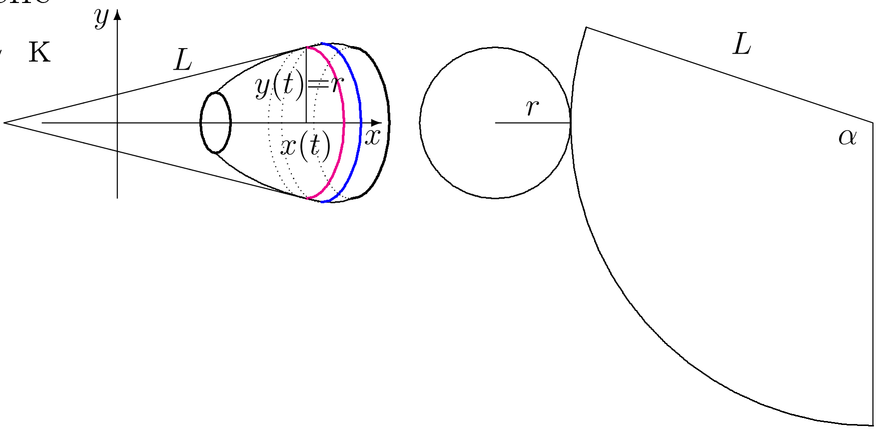
$$\begin{cases} \Delta S = \\ \\ \end{cases}$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\quad} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



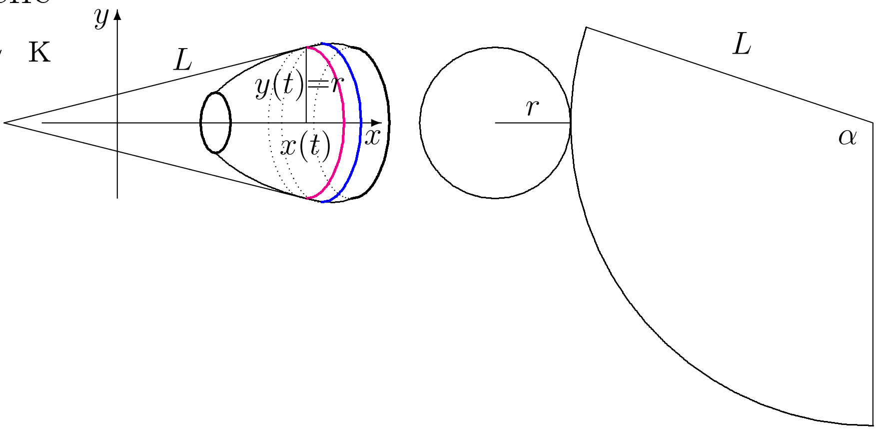
$$\left\{ \Delta S = \right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\pi L^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



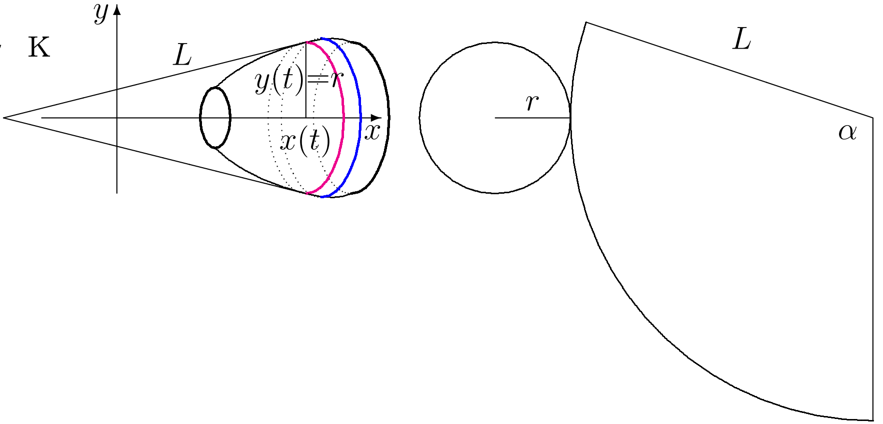
$$\left\{ \Delta S = \right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\pi L^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \ S =$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



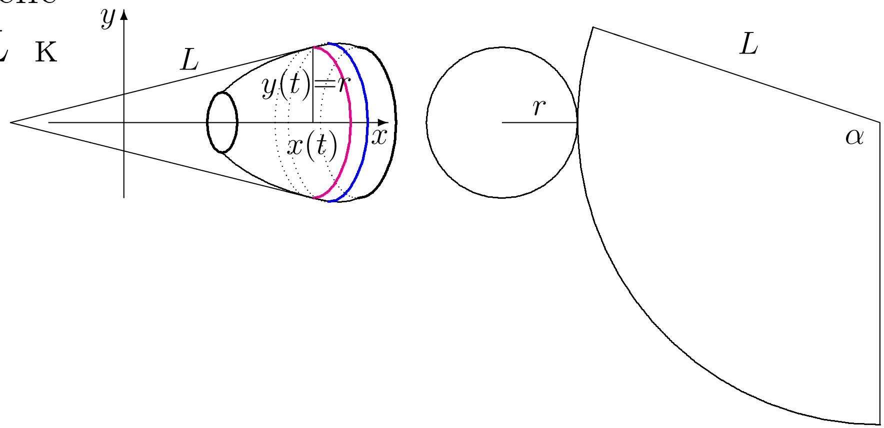
$$\left\{ \Delta S = \right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\pi L^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \; S = \frac{\alpha}{2} L^2,$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



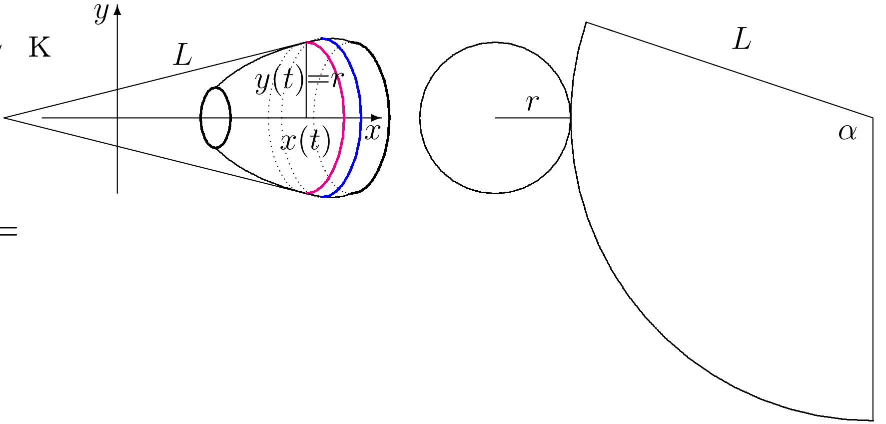
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\pi L^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \ S = \frac{\alpha}{2} L^2,$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



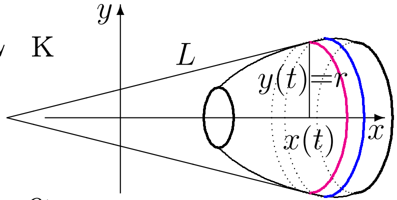
$$\begin{cases} \Delta S = \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \end{cases}$$

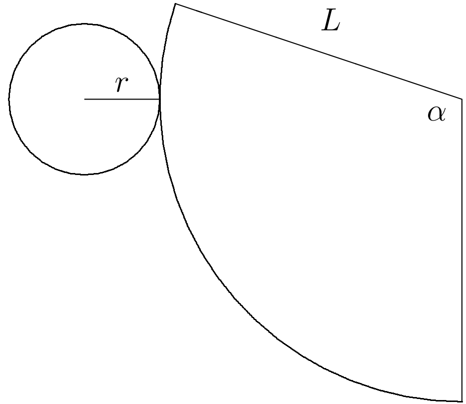
Площадь S сектора радиуса R с центральным углом α равна

$$\frac{S}{\pi L^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \ S = \frac{\alpha}{2}L^2,$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

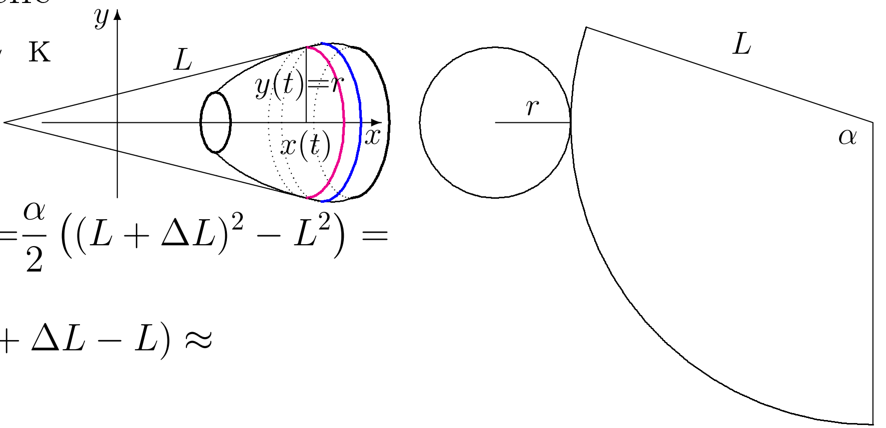




$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S = \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \\ \end{array} \right.$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

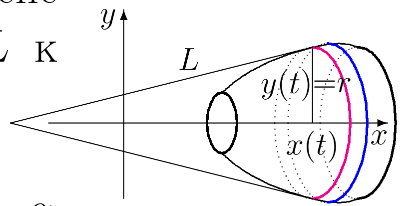
Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

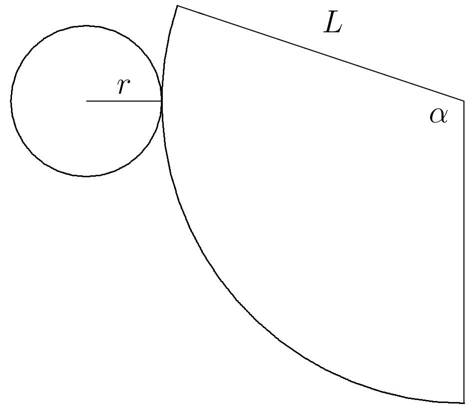


$$\left\{\begin{aligned} \Delta S &= \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ &= \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L+L)(L+\Delta L-L) \approx \end{aligned}\right.$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

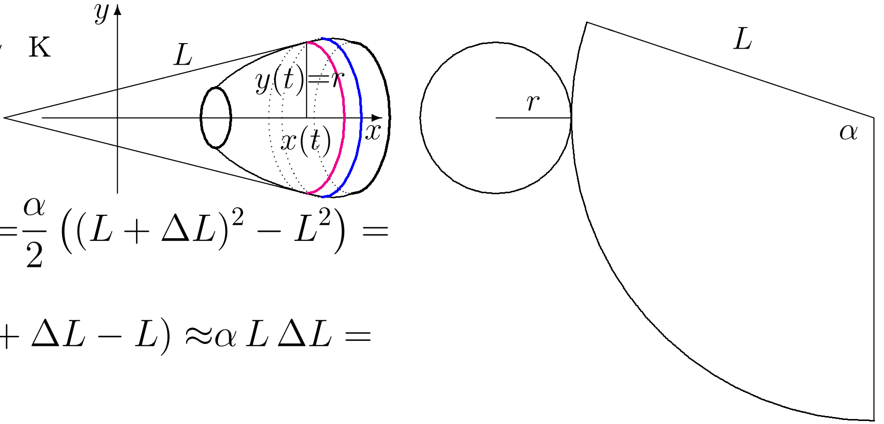




$$\left\{\begin{aligned} \Delta S &= \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ &= \frac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \end{aligned}\right.$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

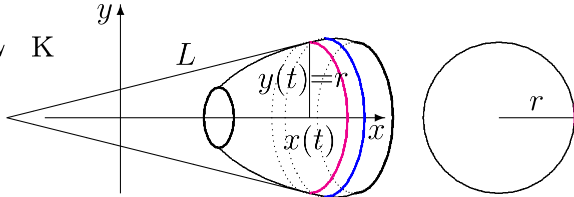
Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

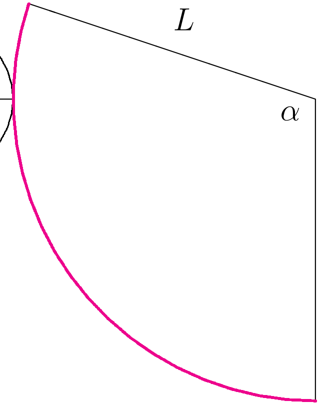


$$\left\{\begin{aligned} \Delta S &= \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ &= \frac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = \end{aligned}\right.$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

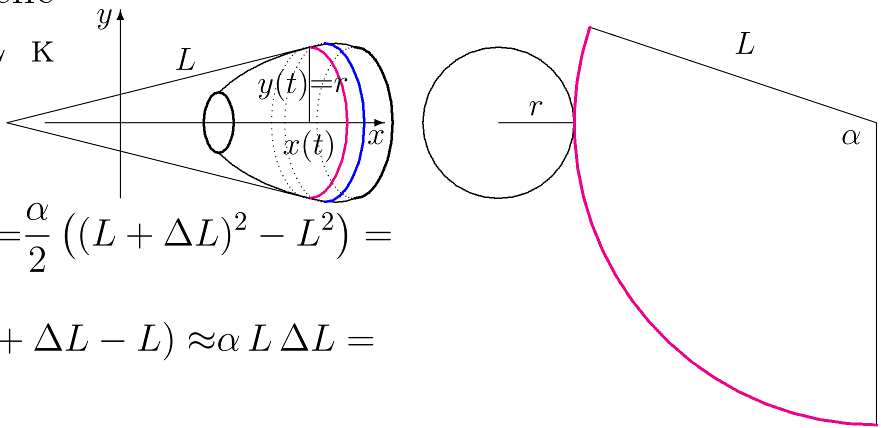




$$\left\{\begin{aligned} &\Delta S = \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ &\qquad = \frac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\,\Delta L = \end{aligned}\right.$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

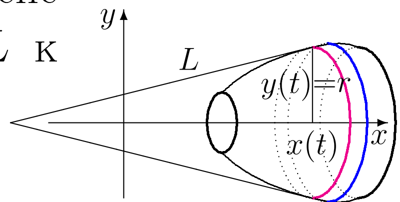
Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

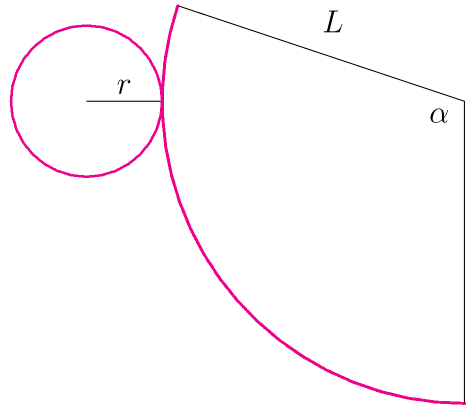


$$\begin{cases} \alpha L = \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

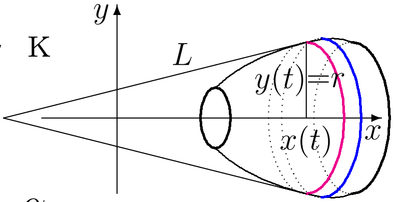


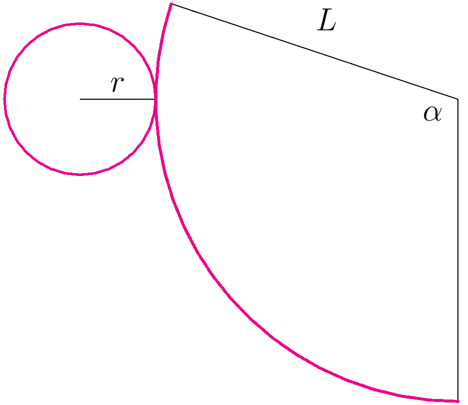


$$\begin{cases} \alpha L = \\ \Delta S = \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \frac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

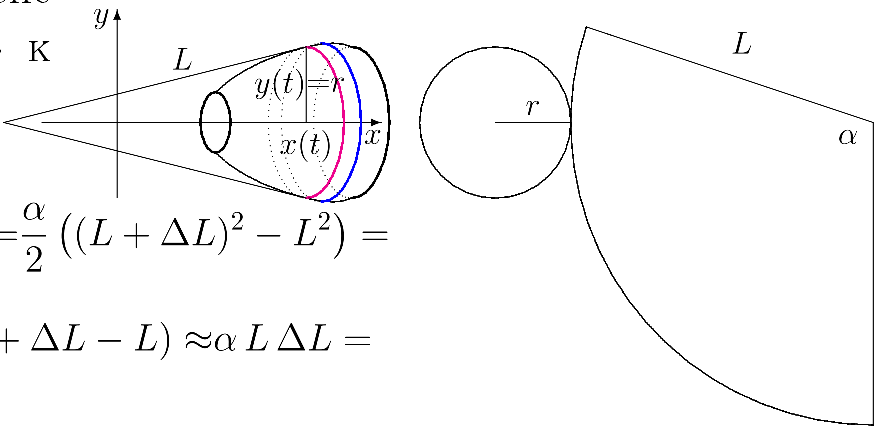




$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \ \Rightarrow \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

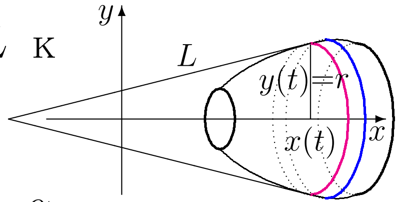
Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

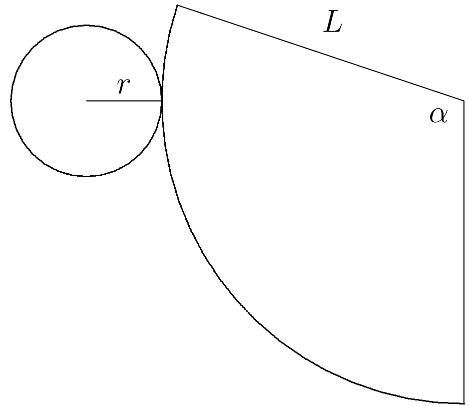


$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \ \Rightarrow \alpha = \\ \Delta S = \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \frac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

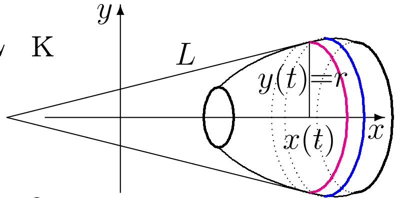


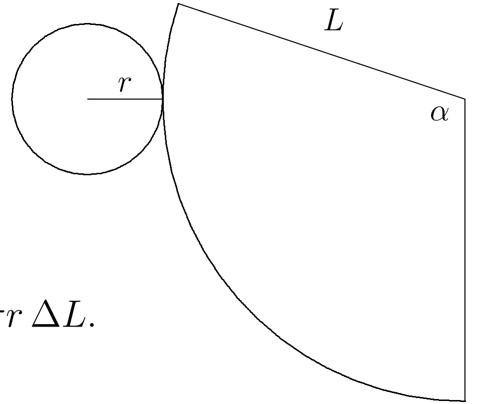


$$\left\{\begin{array}{l} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2} L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = \end{array}\right.$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

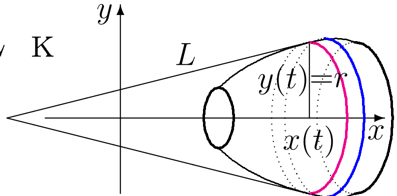


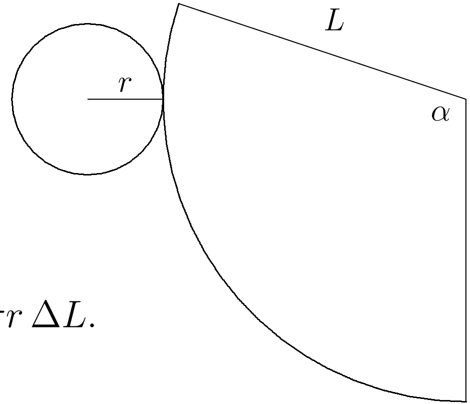


$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



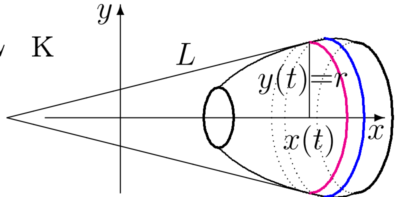


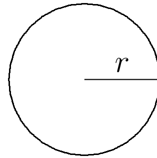
$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\,\Delta L = 2\pi r\,\Delta L. \end{cases}$$

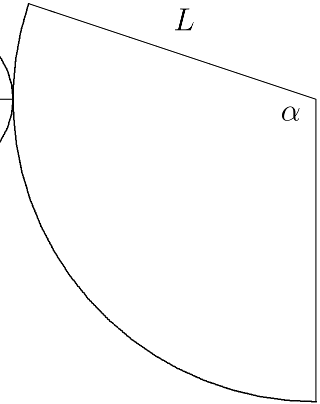
$$\begin{cases} \Delta L \approx \\ \\ \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.





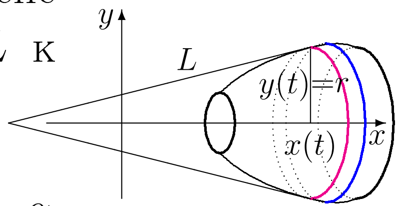


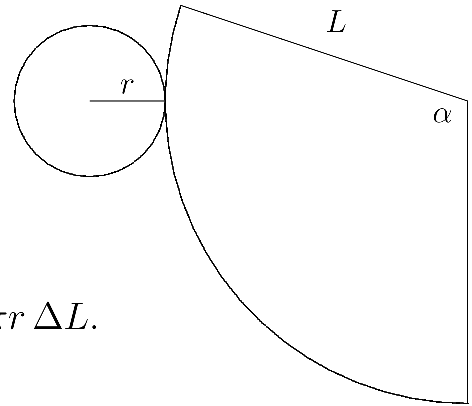
$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \\ \\ \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



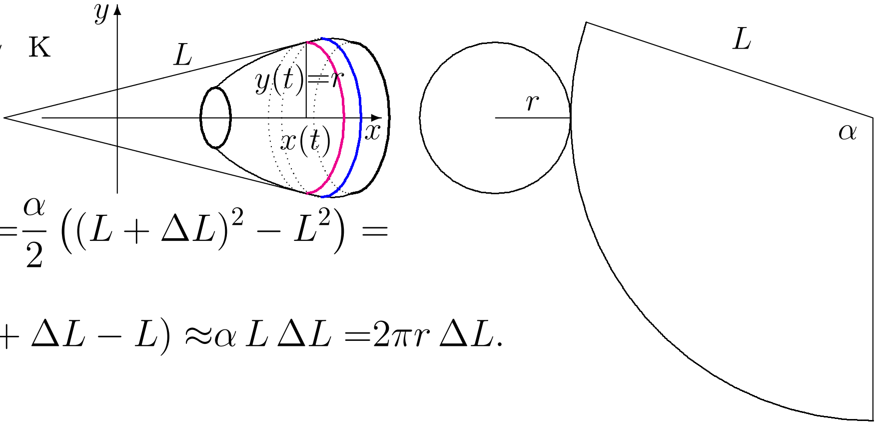


$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2+\acute{y}^2}\, dt. \\ \\ \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

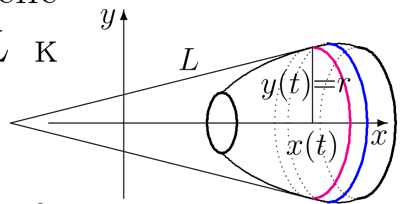


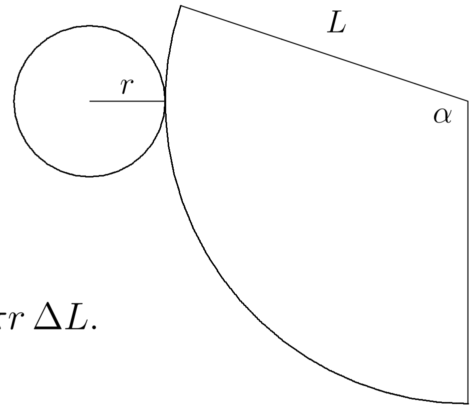
$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2+\acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



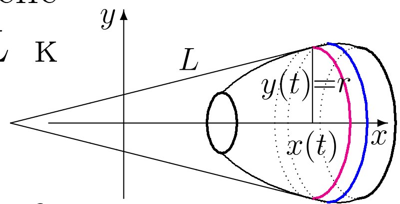


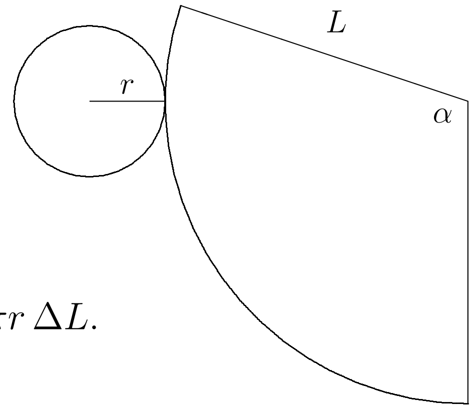
$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2+\acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \displaystyle\int_a^b \qquad\qquad\qquad\qquad dt = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.



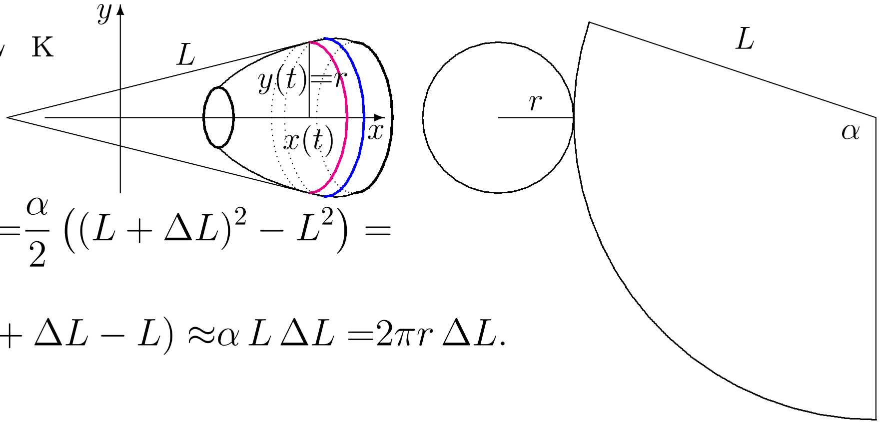


$$\begin{cases} \alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{L} r, \\ \Delta S = \dfrac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \dfrac{\alpha}{2}L^2 = \dfrac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) = \\ \qquad = \dfrac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L - L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2+\acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y\, \sqrt{\acute{x}^2+\acute{y}^2}\, dt = \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Как известно, тангенс наклона образующей L к оси x равен $f'(x)$.

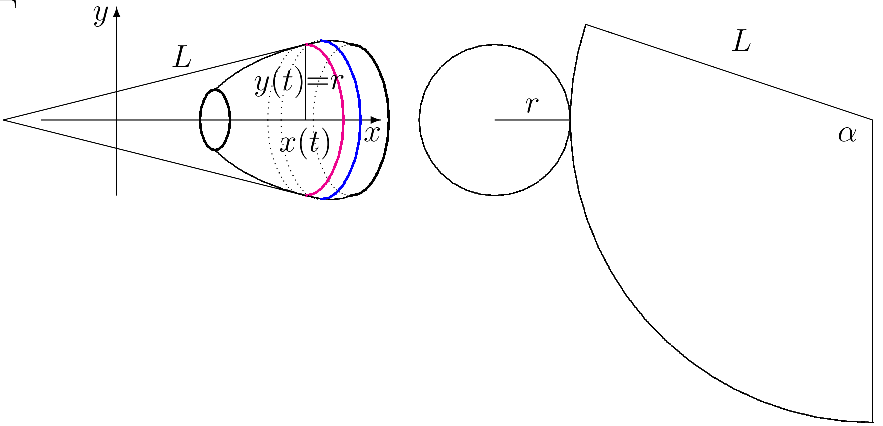


$$\left\{\begin{aligned} &\alpha L = 2\pi r \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{2\pi}{L} r,\\ &\Delta S = \frac{\alpha}{2}(L+\Delta L)^2 - \frac{\alpha}{2}L^2 = \frac{\alpha}{2}\left((L+\Delta L)^2 - L^2\right) =\\ &\qquad = \frac{\alpha}{2}\overbrace{(L+\Delta L+L)}^{\approx 2L}(L+\Delta L-L) \approx \alpha\, L\, \Delta L = 2\pi r\, \Delta L. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta L \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.\\ &S_{Ox} = \int_a^b 2\pi\, y\,\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \end{aligned}\right. \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.

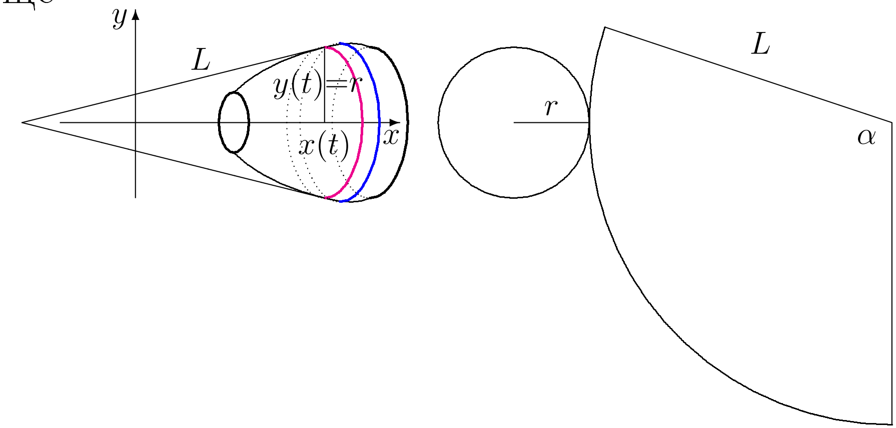


$S_{Oy} =$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y\, \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \end{cases} \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.

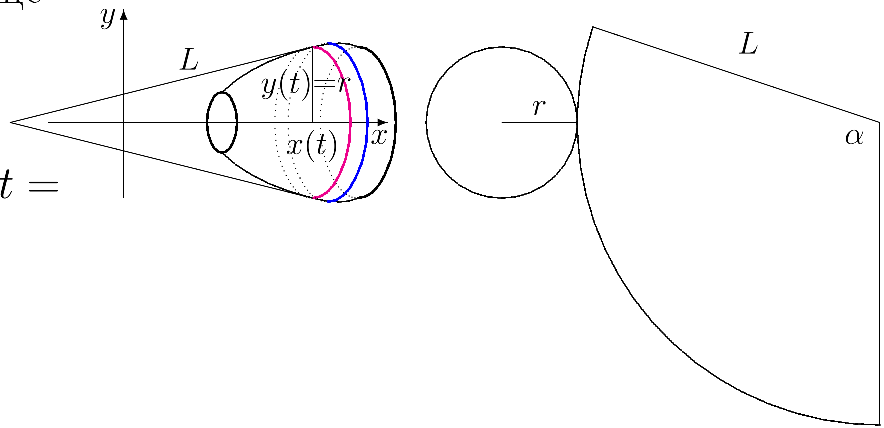


$$S_{Oy} = \int\limits_a^b 2\pi$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y\, \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \qquad (60) \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.

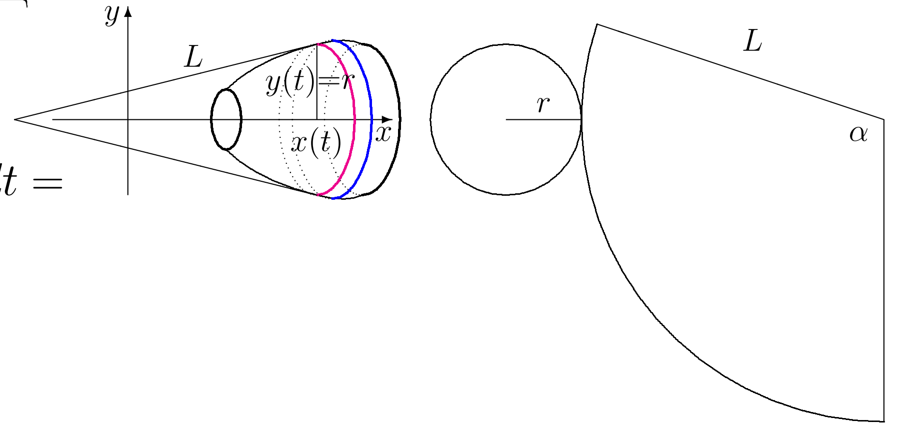


$$S_{Oy} = \int_a^b 2\pi\, x \qquad dt =$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y\, \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \end{cases} \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.

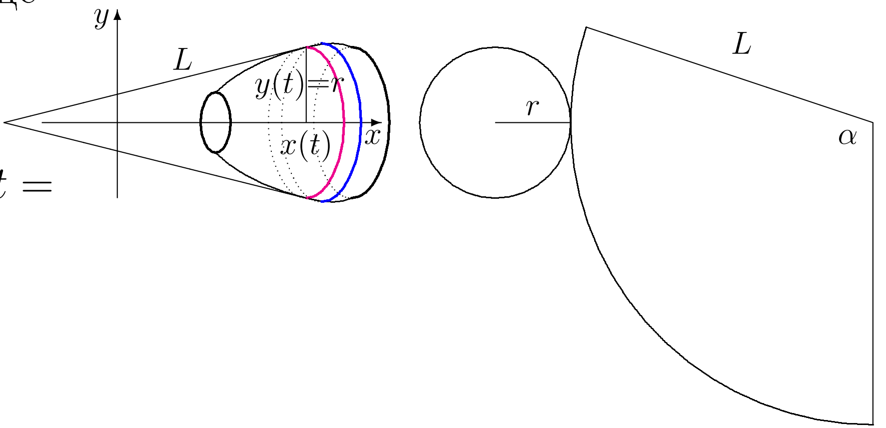


$$S_{Oy} = \int_a^b 2\pi\, x \qquad\qquad dt =$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int_a^b 2\pi\, y\, \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \end{cases} \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.

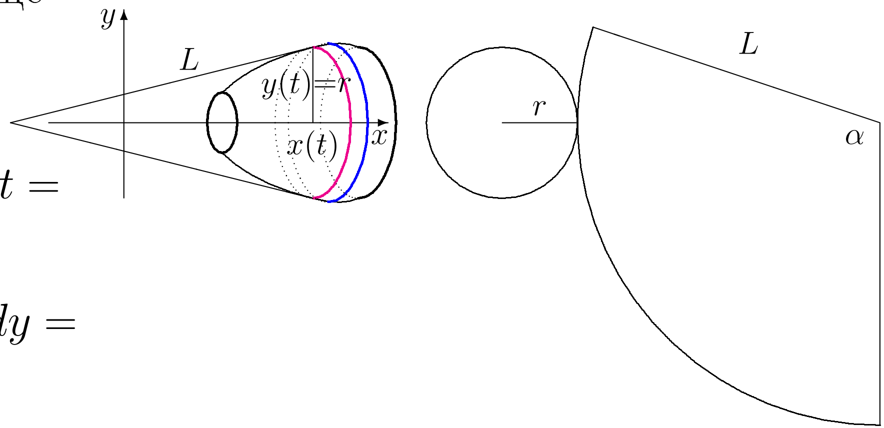


$$S_{Oy} = \int_a^b 2\pi\, x \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt =$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int_a^b 2\pi\, y \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \end{cases} \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.



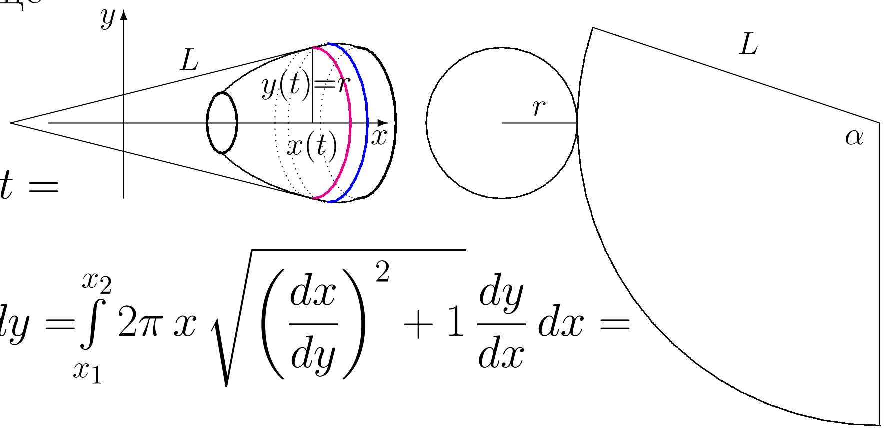
$$S_{Oy} = \int\limits_a^b 2\pi\, x\, \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x\, \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y\, \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \end{array} \right. \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.



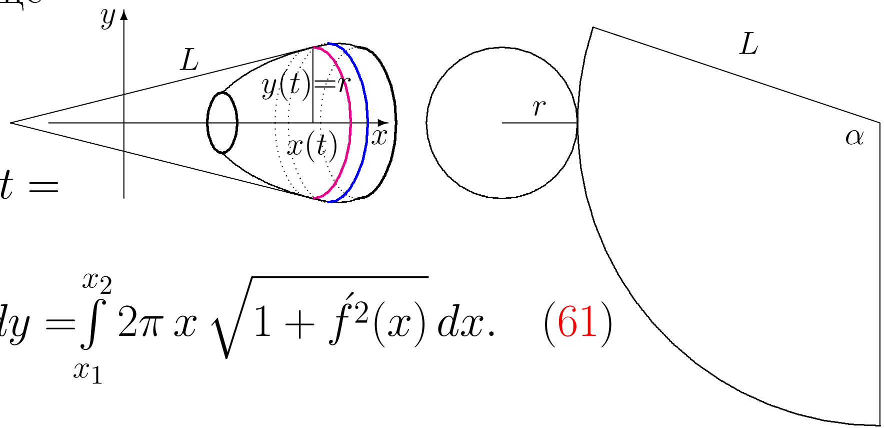
$$S_{Oy} = \int\limits_a^b 2\pi\, x \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, \frac{dy}{dx}\, dx =$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \end{cases} \qquad (60)$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.



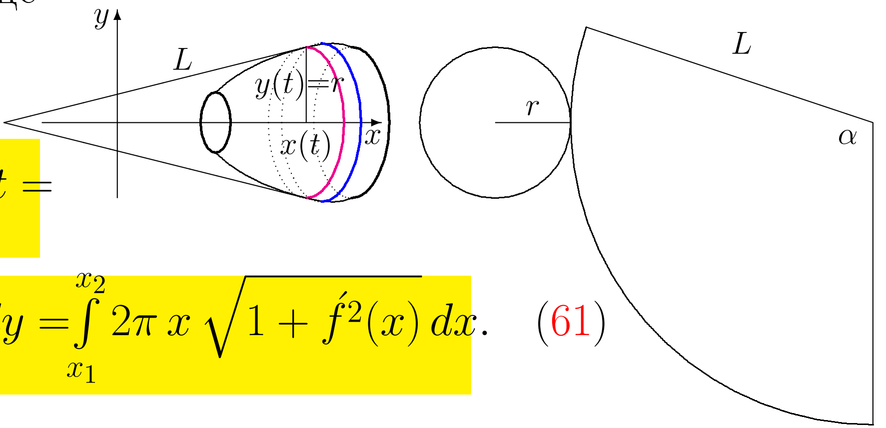
$$S_{Oy} = \int\limits_a^b 2\pi\, x \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \quad (61)$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \qquad (60) \end{cases}$$

XV.5. Площадь поверхности тела вращения

Рассмотрим случай вращения вокруг оси Oy.



$$S_{Oy} = \int\limits_a^b 2\pi\, x \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} 2\pi\, x \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \qquad (61)$$

$$\begin{cases} \Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt. \\ S_{Ox} = \int\limits_a^b 2\pi\, y \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2}\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)}\, dx. \qquad (60) \end{cases}$$

Для боковой поверхности тела, полученного вращением части линии $y = f(x)$ или $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ вокруг Ox, получили (60), для вращения вокруг Oy — (61). **Рассмотрим пример?**

XVI. Числовые ряды

XVI. Числовые ряды

Математика является инструментом моделирования, поэтому в математике большое внимание уделяется *стандартным формам представления* рассматриваемых объектов.

XVI. Числовые ряды

Математика является инструментом моделирования, поэтому в математике большое внимание уделяется *стандартным формам представления* рассматриваемых объектов.

Линия обычно задается либо сведением ее к участкам «стандартных линий» (частей прямой, дуг окружностей и т.п.), либо с помощью уравнения или системы уравнений.

XVI. Числовые ряды

Математика является инструментом моделирования, поэтому в математике большое внимание уделяется *стандартным формам представления* рассматриваемых объектов.

Линия обычно задается либо сведением ее к участкам «стандартных линий» (частей прямой, дуг окружностей и т.п.), либо с помощью уравнения или системы уравнений.

Число представляется арифметическим выражением, включающим обозначения арифметических операций, включая возведение в степень (быть может, дробную).

XVI. Числовые ряды

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

XVI. Числовые ряды

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.
Например, функцию можно аппроксимировать с помощью
формулы Тейлора,

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**,

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) +$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**,

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) +$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью

формулы Тейлора,

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots +$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**,

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**,

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**, причем при выполнении некоторых условий точность приближения возрастает с увеличением числа слагаемых.

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**, причем при выполнении некоторых условий точность приближения возрастает с увеличением числа слагаемых.

Возникает мысль, что можно было бы получить точное значение, если взять бесконечное число слагаемых.

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**, причем при выполнении некоторых условий точность приближения возрастает с увеличением числа слагаемых.

Возникает мысль, что можно было бы получить точное значение, если взять бесконечное число слагаемых.

Однако, при работе с бесконечностью интуиция, накопленная для конечного числа слагаемых, нередко «обманывает».

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Новые способы задания чисел и функций можно получить с помощью «модернизации» различных способов приближенного вычисления.

Например, функцию можно аппроксимировать с помощью **формулы Тейлора**, причем при выполнении некоторых условий точность приближения возрастает с увеличением числа слагаемых.

Возникает мысль, что можно было бы получить точное значение, если взять бесконечное число слагаемых.

Однако, при работе с бесконечностью интуиция, накопленная для конечного числа слагаемых, нередко «обманывает».

Поэтому необходимо создание специальной теории, которая называется *теорией рядов*.

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$2,3121212\ldots =$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$2,3121212\ldots = 2,3(12) =$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots =$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots =$$

$$= \frac{23}{10} +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots =$$

$$= \frac{23}{10} + 12 \cdot 10^{-3} +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a)+\frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a)+\frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots =$$

$$= \frac{23}{10} + 12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a) + \frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots =$$

$$= \frac{23}{10} + 12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} +$$

XVI. Числовые ряды

$$f(x) \approx f(a)+\frac{f'(a)}{\mathbf{1}!}(x-a)+\frac{f''(a)}{\mathbf{2}!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{\mathbf{n}!}(x-a)^n.$$

Воспользуемся стратегией поиска аналогии и рассмотрим ситуацию, когда нам уже приходилось суммировать бесконечное число слагаемых.

Это, например, задача перевода записи рационального числа из одной стандартной формы записи в другую.

Например, преобразуем число

$2,3121212\ldots = 2,3(12)$ в обыкновенную дробь.

Сначала представим это число с использованием арифметических операций:

$$2,3121212\ldots = 2,3(12) = \frac{23}{10} + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots =$$

$$= \frac{23}{10} + 12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$$

XVI. Числовые ряды

Выражение $12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$ представляет собой

XVI. Числовые ряды

Выражение $12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$ представляет собой частный случай суммы *всех* членов *прогрессии*,

XVI. Числовые ряды

Выражение $12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$ представляет собой частный случай суммы *всех* членов *геометрической прогрессии*,

XVI. Числовые ряды

Выражение $12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$ представляет собой частный случай суммы *всех* членов *геометрической прогрессии*, т.е.

XVI. Числовые ряды

Выражение $12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$ представляет собой частный случай суммы *всех* членов *геометрической прогрессии*, т.е. последовательности, общий член которой можно представить в виде

XVI. Числовые ряды

Выражение $12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots$ представляет собой частный случай суммы *всех* членов *геометрической прогрессии*, т.е. последовательности, общий член которой можно представить в виде $b_n = b_1 q^{n-1}$.

XVI. Числовые ряды

Проблема в том, что мы не умеем (пока) суммировать *бесконечное* число чисел.

XVI. Числовые ряды

Проблема в том, что мы не умеем (пока) суммировать *бесконечное* число чисел.

В рассматриваемом случае проблему решили следующим образом.

XVI. Числовые ряды

Проблема в том, что мы не умеем (пока) суммировать *бесконечное* число чисел.
В рассматриваемом случае проблему решили следующим образом.
Нетрудно доказать, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии может быть найдена по формулам

XVI. Числовые ряды

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{62}$$

Проблема в том, что мы не умеем (пока) суммировать *бесконечное* число чисел.

В рассматриваемом случае проблему решили следующим образом.

Нетрудно доказать, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии может быть найдена по формулам

XVI. Числовые ряды

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{62}$$

В ситуации, когда $|q| > 1$ этот предел не существует.

XVI. Числовые ряды

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \qquad (62)$$

В ситуации, когда $|q| > 1$ этот предел не существует. Для рассматриваемого примера имеем

XVI. Числовые ряды

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{62}$$

В ситуации, когда $|q| > 1$ этот предел не существует. Для рассматриваемого примера имеем

$$= \frac{23}{10} + \frac{12 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}} = \frac{23}{10} + \frac{12}{990} = \frac{763}{330}.$$

XVI. Числовые ряды

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{62}$$

В ситуации, когда $|q| > 1$ этот предел не существует. Для рассматриваемого примера имеем

$$= \frac{23}{10} + \frac{12 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}} = \frac{23}{10} + \frac{12}{990} = \frac{763}{330}.$$

Таким образом, сумму бесконечного числа слагаемых мы определили как *предел* при $n \to \infty$ сумм первых n слагаемых.

XVI. Числовые ряды

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{62}$$

В ситуации, когда $|q| > 1$ этот предел не существует. Для рассматриваемого примера имеем

$$= \frac{23}{10} + \frac{12 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}} = \frac{23}{10} + \frac{12}{990} = \frac{763}{330}.$$

Таким образом, сумму бесконечного числа слагаемых мы определили как *предел* при $n \to \infty$ сумм первых n слагаемых.

Эта естественная идея положена в основу теории рядов.

XVI. Числовые ряды

Рассмотрим теорию, которая в итоге развилась в мощный и оригинальный математический аппарат.

XVI.1. Определение числового ряда

Определение 35. Ряд — *это выражение вида* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *где* a_i *— элементы некоторого* ***кольца*** $\mathbf{K}$. *Это выражение часто записывают в символическом виде с помощью так называемого* **символа суммирования***:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.. *При этом* a_i *называются* **членами ряда** *или* **слагаемыми ряда**. *Если все члены ряда* a_i *являются числами, то ряд называется* **числовым рядом**.

XVI. Определение числового ряда

Следует ознакомиться с правилами работы с **символом суммирования** $\sum\limits_{?}^{?}$ и аналогичным **символом произведения** $\prod\limits_{?}^{?}$.

XVI. Определение числового ряда

Следует ознакомиться с правилами работы с **символом суммирования** $\sum\limits_{?}^{?}$ и аналогичным **символом произведения** $\prod\limits_{?}^{?}$.

Внимание! *Обратите внимание на тот факт, что <u>ряд</u> – это <u>выражение</u>, то есть некоторое «слово».*

XVI. Определение числового ряда

Следует ознакомиться с правилами работы с **символом суммирования** $\sum\limits_{?}^{?}$ и аналогичным **символом произведения** $\prod\limits_{?}^{?}$.

Внимание! *Обратите внимание на тот факт, что ряд – это выражение, то есть некоторое «слово».*

Этому «слову» в дальнейшем мы будем ставить в соответствие некоторое число, называемое *суммой* ряда.

XVI. Определение числового ряда

Следует ознакомиться с правилами работы с **символом суммирования** $\sum\limits_{?}^{?}$ и аналогичным **символом произведения** $\prod\limits_{?}^{?}$.

Внимание! *Обратите внимание на тот факт, что* *ряд – это выражение, то есть некоторое «слово».*

Этому «слову» в дальнейшем мы будем ставить в соответствие некоторое число, называемое *суммой* ряда.

Вообще говоря, отождествлять ряд и его сумму не следует, хотя мы и будем ставить между ними знак равенства.

XVI. Определение числового ряда

На ряд можно смотреть, как на некий грамматический объект,

XVI. Определение числового ряда

На ряд можно смотреть, как на некий грамматический объект, и вводить правила работы с рядами из каких-либо, например, «эстетических» соображений.

XVI. Определение числового ряда

На ряд можно смотреть, как на некий грамматический объект, и вводить правила работы с рядами из каких-либо, например, «эстетических» соображений.

Но, как известно, новые понятия без «семантической поддержки», как правило, бесплодны.

XVI. Определение числового ряда

На ряд можно смотреть, как на некий грамматический объект, и вводить правила работы с рядами из каких-либо, например, «эстетических» соображений.

Но, как известно, новые понятия без «семантической поддержки», как правило, бесплодны.

Понятие ряда явилось результатом усилий по преодолению одного из противоречий, наметившихся в математическом анализе — в ряде случаев (но не всегда!) суммирование все большего числа слагаемых приводит к более хорошей аппроксимаций какого-либо объекта,

XVI. Определение числового ряда

На ряд можно смотреть, как на некий грамматический объект, и вводить правила работы с рядами из каких-либо, например, «эстетических» соображений.
Но, как известно, новые понятия без «семантической поддержки», как правило, бесплодны.
Понятие ряда явилось результатом усилий по преодолению одного из противоречий, наметившихся в математическом анализе — в ряде случаев (но не всегда!) суммирование все большего числа слагаемых приводит к более хорошей аппроксимаций какого-либо объекта, например, функции, и для получения самого «объекта» необходимо просуммировать бесконечное число слагаемых. Такова в частности, ситуация с формулой Тейлора.

XVI.2. Частичная сумма ряда

Определение 36. *Для любого натурального числа n n-ной* **частичной суммой** *числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется число $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Предел последовательности частичных сумм при n стремящемся к бесконечности, если он существует и конечен, называется* **суммой** *этого ряда. Если S — сумма числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, то обычно пишут $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ или $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

XVI. Частичная сумма ряда

XVI. Частичная сумма ряда

Таким образом, сумма числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — это $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если это — число.

XVI. Частичная сумма ряда

Таким образом, сумма числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — это $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если это — число.

XVI. Частичная сумма ряда

Таким образом, сумма числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — это $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если это — число.

Если сумма ряда существует и является числом, он называется **сходящимся**, в противном случае — **расходящимся**.

XVI. Частичная сумма ряда

Таким образом, сумма числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — это $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если это — число.

Если сумма ряда существует и является числом, он называется **сходящимся**, в противном случае — **расходящимся**.

Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называется n-ным **остатком** ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

XVI. Частичная сумма ряда

Вычисление суммы произвольного ряда является, мягко говоря, непростой (а часто откровенно «безнадежной» задачей).
Суммы некоторых числовых рядов приведены в приложении.

XVI. Частичная сумма ряда

Вычисление суммы произвольного ряда является, мягко говоря, непростой (а часто откровенно «безнадежной» задачей).

К счастью, обычно значение суммы ряда требуется знать лишь приближенно, с некоторой точностью, что, как правило, сравнительно несложно осуществить с помощью современной компьютерной техники.

XVI. Частичная сумма ряда

Вычисление суммы произвольного ряда является, мягко говоря, непростой (а часто откровенно «безнадежной» задачей).

Здесь мы должны отметить два очень важных факта.

Во-первых, обеспечение заданной наперед точности при приближенных вычислениях суммы ряда является достаточно непростой задачей, см. замечание к **примеру**.

XVI. Частичная сумма ряда

Вычисление суммы произвольного ряда является, мягко говоря, непростой (а часто откровенно «безнадежной» задачей).

Здесь мы должны отметить два очень важных факта.

Во-вторых, в некоторых ситуациях дело осложняется необходимостью суммировать чрезмерно большое число членов ряда для достижения нужной точности. В таких случаях применяют методы ускорения сходимости ряда, разговор о которых выходит за рамки данной работы.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие проблемы возникают в теории рядов? Мы попытались дать предварительный ответ во введении.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие проблемы возникают в теории рядов? Мы попытались дать предварительный ответ во введении. Пока можно лишь отметить, что теория рядов, наряду с дифференцированием и интегрированием, является одним из «столпов» современного математического анализа.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие еще вопросы теории рядов «бросаются в глаза»?

XVI. Частичная сумма ряда

Какие еще вопросы теории рядов «бросаются в глаза»? Во-первых, хотелось бы получить хорошие (удобные и мощные) признаки сходимости ряда, в идеале это должен быть критерий сходимости ряда. Отметим сразу, что такой удобный для практического вычисления критерий не найден (критерий Коши или теорему об остатке ряда трудно назвать практическим). Кроме того, нужен способ быстрого вычисления суммы ряда.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие еще вопросы теории рядов «бросаются в глаза»? Во-первых, хотелось бы получить хорошие (удобные и мощные) признаки сходимости ряда, в идеале это должен быть критерий сходимости ряда. Отметим сразу, что такой удобный для практического вычисления критерий не найден (критерий Коши или теорему об остатке ряда трудно назвать практическим). Кроме того, нужен способ быстрого вычисления суммы ряда.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие еще вопросы теории рядов «бросаются в глаза»? Во-первых, хотелось бы получить хорошие (удобные и мощные) признаки сходимости ряда, в идеале это должен быть критерий сходимости ряда. Отметим сразу, что такой удобный для практического вычисления критерий не найден (критерий Коши или теорему об остатке ряда трудно назвать практическим). Кроме того, нужен способ быстрого вычисления суммы ряда. На первый взгляд, благодаря развитию современной вычислительной техники эта проблема не является столь уж острой — вместо суммы ряда надо взять частичную сумму с достаточно большим номером n. Но надо научиться определять, какое n является достаточно большим.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие еще вопросы теории рядов «бросаются в глаза»?

Во-вторых, в ряде случаев, даже когда это удается сделать, найденное значение n оказывается неприемлемо большим.

XVI. Частичная сумма ряда

Какие еще вопросы теории рядов «бросаются в глаза»?
Во-вторых, в ряде случаев, даже когда это удается сделать, найденное значение n оказывается неприемлемо большим.
Второго круга проблем (проблем, связанных с вычислением суммы ряда) мы в данном курсе практически не коснемся. При необходимости Вы можете самостоятельно ознакомиться с этим разделом теории, который называется «ускорение сходимости ряда». Мы сосредоточимся только на свойствах и признаках сходимости рядов.

XVI.3. Свойства сходящихся числовых рядов

XVI.3. Свойства сходящихся числовых рядов

Как можно изучать новое понятие?

XVI.3. Свойства сходящихся числовых рядов

Как можно изучать новое понятие?

XVI.3. Свойства сходящихся числовых рядов

Как можно изучать новое понятие?

Обычно применяется два способа:

XVI.3. Свойства сходящихся числовых рядов

Как можно изучать новое понятие?

Обычно применяется два способа:

— рассмотреть большое число примеров (моделей);

XVI.3. Свойства сходящихся числовых рядов

Как можно изучать новое понятие?

Обычно применяется два способа:

— рассмотреть большое число примеров (моделей);

— изучить свойства объектов из объема понятия (например, сформулировать свойства, элементарные теоремы и др.).

XVI.3.1. Линейность суммы ряда

Утверждение XVI.1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, то для любых чисел* λ *и* μ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *также сходится, причем* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

XVI.3.1. Линейность суммы ряда

Утверждение XVI.1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, то для любых чисел* λ *и* μ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *также сходится, причем* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Это очевидное следствие свойств предела.

XVI.3.2. Замечание о линейности суммы ряда

Замечание 3. *В **свойстве линейности** обратное утверждение не верно, то есть из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *не следует сходимость рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство.

XVI.3.2. Замечание о линейности суммы ряда

Замечание 3. *В* ***свойстве линейности*** *обратное утверждение не верно, то есть из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *не следует сходимость рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. В самом деле, пусть $a_n = b_n = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Тогда ряд

XVI.3.2. Замечание о линейности суммы ряда

Замечание 3. *В* ***свойстве линейности*** *обратное утверждение не верно, то есть из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *не следует сходимость рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. В самом деле, пусть $a_n = b_n = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots$$

сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + \ldots$ — расходится.

XVI.3.2. Замечание о линейности суммы ряда

Замечание 3. *В* ***свойстве линейности*** *обратное утверждение не верно, то есть из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *не следует сходимость рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. В самом деле, пусть $a_n = b_n = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots$$

сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + \ldots$ — расходится.

XVI.3.3. О сходимости остатка ряда

Утверждение XVI.2. *Для любого натурального числа* n *ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

XVI.3.3. О сходимости остатка ряда

Утверждение XVI.2. *Для любого натурального числа n ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

Таким образом, у ряда при «отбрасывании» конечного числа членов ряда сходимость не меняется.

XVI.3.3. О сходимости остатка ряда

Утверждение XVI.2. *Для любого натурального числа n ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Это очевидное следствие свойств предела.

XVI.3.4. О перегруппировке членов ряда

Оказывается, «школьное правило» о «распределительном законе» для рядов выполняется не всегда...

XVI.3.4. О перегруппировке членов ряда

Теорема 51. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится и ряд*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots + (a_{k_n} + \ldots) + \ldots,$$

причем его сумма равна сумме исходного ряда.

Доказательство.

XVI.3.4. О перегруппировке членов ряда

Теорема 51. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится и ряд*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots + (a_{k_n} + \ldots) + \ldots,$$

причем его сумма равна сумме исходного ряда.

Доказательство. Очевидное следствие из **определения суммы ряда**.

XVI.4. Признаки сходимости числовых рядов

В настоящий момент задача вычисления суммы числового ряда чаще всего решается с помощью компьютера, хотя нередко и компьютерное вычисление оказывается довольно сложной задачей.

На первый план выдвигается вопрос о том, существует ли сумма ряда.

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} =$

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n)$

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.$

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n =$
Равенство, помеченное сверху знаком вопроса, выполняется, поскольку по условию существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$. Равенство, помеченное сверху знаком вопроса, выполняется, поскольку по условию существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

XVI.4.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 52. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой, то есть* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и S — его сумма.

Из определения частичной суммы имеем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$. Равенство, помеченное сверху знаком вопроса, выполняется, поскольку по условию существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Теорема доказана.

XVI.4.2. Замечание о необходимом признаке сходимости ряда. Гармонический ряд

Замечание 4. ***Необходимый признак сходимости ряда*** *не является достаточным.*

XVI.4.2. Замечание о необходимом признаке сходимости ряда. Гармонический ряд

Замечание 4. ***Необходимый признак сходимости ряда*** *не является достаточным.*

Доказательство.

XVI.4.2. Замечание о необходимом признаке сходимости ряда. Гармонический ряд

Замечание 4. ***Необходимый признак сходимости ряда*** *не является достаточным.*

Доказательство. Контрпример: **гармонический ряд**

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{64}$$

расходится, несмотря на то, что последовательность общих членов этого ряда монотонно убывает и стремится к 0.

XVI.4.2. Замечание о необходимом признаке сходимости ряда. Гармонический ряд

Замечание 4. ***Необходимый признак сходимости ряда*** *не является достаточным.*

Доказательство расходимости **гармонического ряда**

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

опирается на следующую лемму.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Тот факт, что последовательность $S_1, S_2, \ldots$ возрастает, очевиден, так как $S_{n+1} - S_n =$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Тот факт, что последовательность $S_1, S_2, \ldots$ возрастает, очевиден, так как $S_{n+1}-S_n = \frac{1}{n+1} > 0$.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$.
Тот факт, что последовательность $S_1, S_2, \dots$ возрастает, очевиден, так как $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$.
Осталось проверить, что эта последовательность не ограничена.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$S_{2n} - S_n =$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$. Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \dots +$$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$.
Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} =$$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.
Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$.
Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n\text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S_{2^n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n\text{ слагаемых}} \geqslant$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S_{2^n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n \text{ слагаемых}} \geqslant \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty}$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n\text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S_{2^n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n\text{ слагаемых}} \geqslant \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.
Докажем, что последовательность S_n не ограничена:

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S_{2^n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n \text{ слагаемых}} \geqslant \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$

Лемма доказана.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$.

Продолжение доказательства расходимости гармонического ряда.

Таким образом, по **лемме 1** имеем, что **гармонический ряд** расходится.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Доказательство. Положим $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Продолжение доказательства расходимости гармонического ряда.

Таким образом, по **лемме 1** имеем, что **гармонический ряд** расходится.

Каждое слагаемое вносит все меньший «вклад» в итоговую сумму, но, все-таки этот вклад достаточно велик, чтобы, постепенно накапливаясь, приводить к неограниченному росту частичных сумм.

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	
$S_1 =$	
$S_{10} =$	
$S_{20} =$	
$S_{50} =$	
$S_{100} =$	
$S_{200} =$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	
$S_1 = 1$	
$S_{10} =$	
$S_{20} =$	
$S_{50} =$	
$S_{100} =$	
$S_{200} =$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	
$S_1 = 1$	
$S_{10} = 2.929$	
$S_{20} =$	
$S_{50} =$	
$S_{100} =$	
$S_{200} =$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	
$S_1 = 1$	
$S_{10} = 2.929$	
$S_{20} = 3.59774$	
$S_{50} =$	
$S_{100} =$	
$S_{200} =$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	
$S_1 = 1$ $S_{10} = 2.929$ $S_{20} = 3.59774$ $S_{50} = 4.4992$ $S_{100} =$ $S_{200} =$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	
$S_1 = 1$ $S_{10} = 2.929$ $S_{20} = 3.59774$ $S_{50} = 4.4992$ $S_{100} = 5.18738$ $S_{200} =$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	
$S_1 = 1$	
$S_{10} = 2.929$	
$S_{20} = 3.59774$	
$S_{50} = 4.4992$	
$S_{100} = 5.18738$	
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	
$S_{10} = 2.929$	
$S_{20} = 3.59774$	
$S_{50} = 4.4992$	
$S_{100} = 5.18738$	
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	$S_1 = 1$
$S_{10} = 2.929$	
$S_{20} = 3.59774$	
$S_{50} = 4.4992$	
$S_{100} = 5.18738$	
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	$S_1 = 1$
$S_{10} = 2.929$	$S_{10} = 1.54977$
$S_{20} = 3.59774$	
$S_{50} = 4.4992$	
$S_{100} = 5.18738$	
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	$S_1 = 1$
$S_{10} = 2.929$	$S_{10} = 1.54977$
$S_{20} = 3.59774$	$S_{20} = 1.59616$
$S_{50} = 4.4992$	
$S_{100} = 5.18738$	
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	$S_1 = 1$
$S_{10} = 2.929$	$S_{10} = 1.54977$
$S_{20} = 3.59774$	$S_{20} = 1.59616$
$S_{50} = 4.4992$	$S_{50} = 1.62513$
$S_{100} = 5.18738$	
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	для $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	$S_1 = 1$
$S_{10} = 2.929$	$S_{10} = 1.54977$
$S_{20} = 3.59774$	$S_{20} = 1.59616$
$S_{50} = 4.4992$	$S_{50} = 1.62513$
$S_{100} = 5.18738$	$S_{100} = 1.63498$
$S_{200} = 5.878$	

XVI.4.3. Лемма о частичных суммах гармонического ряда

Лемма 1. *Последовательность*

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$$

неограниченно возрастает.

Например, для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
$S_1 = 1$	$S_1 = 1$
$S_{10} = 2.929$	$S_{10} = 1.54977$
$S_{20} = 3.59774$	$S_{20} = 1.59616$
$S_{50} = 4.4992$	$S_{50} = 1.62513$
$S_{100} = 5.18738$	$S_{100} = 1.63498$
$S_{200} = 5.878$	$S_{200} = 1.63995$

XVI.4.4. Достаточный признак расходимости ряда

Теорема 53. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

XVI.4.4. Достаточный признак расходимости ряда

Теорема 53. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

XVI.4.4. Достаточный признак расходимости ряда

Теорема 53. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Это очевидное следствие необходимого признака сходимости ряда.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Как обобщение и уточнение **необходимого признака сходимости ряда** можно рассматривать доказанный ниже критерий Коши сходимости ряда.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Как обобщение и уточнение **необходимого признака сходимости ряда** можно рассматривать доказанный ниже критерий Коши сходимости ряда.

Этот критерий выходит далеко за рамки теории рядов, поскольку критерий Коши является «непременным атрибутом» многих математических теорий.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится тогда и только тогда, когда*
для любого положительного числа ε *найдется такое натуральное число* N, *что для любых таких натуральных чисел* m, n, *что* $N < m < n$, *имеет место неравенство* $|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$.

Какая-то громоздкая формулировка...

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Другое дело!

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$\exists N$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N\,\forall n\,\forall m\,\left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$\exists N \quad \forall n > N$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| =$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, если $n > m > N$, то

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \; \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, если $n > m > N$, то

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| =$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Таким образом, если $n > m > N$, то

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = |S_n - S_m| =$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда
$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Таким образом, если $n > m > N$, то
$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = |S_n - S_m| = |S_n - A - (S_m - A)| \leqslant$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, если $n > m > N$, то

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = |S_n - S_m| = |S_n - A - (S_m - A)| \leqslant$

$\leqslant |S_n - A| + |S_m - A| <$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, если $n > m > N$, то

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = |S_n - S_m| = |S_n - A - (S_m - A)| \leqslant$$

$$\leqslant |S_n - A| + |S_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Обозначим сумму исходного ряда через A. Тогда

$\exists N \quad \forall n > N \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - A| = |S_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Таким образом, если $n > m > N$, то

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = |S_n - S_m| = |S_n - A - (S_m - A)| \leqslant$

$\leqslant |S_n - A| + |S_m - A| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Необходимость доказана.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Докажем достаточность. Итак, нам дано, что

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Докажем достаточность. Итак, нам дано, что $\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Докажем достаточность. Итак, нам дано, что $\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1$. Надо доказать, что для некоторого числа A справедливо

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Докажем достаточность. Итак, нам дано, что $\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1$.
Надо доказать, что для некоторого числа A справедливо
$\forall \varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2$.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

$\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

$\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$

Надо: $\quad \forall \varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

$\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$

Надо: $\quad \forall \varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2.$ По условию

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N\,\forall n\,\forall m\,\left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

$\forall\varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$
Надо: $\quad \forall\varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2.$ По условию $\exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > m > N_0\ |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < 1,$ т.е. $|S_n - S_m| < 1.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

$\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$

Надо: $\quad \forall \varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2.$ По условию

$\exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > m > N_0\, |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < 1,$ т.е. $|S_n - S_m| < 1.$

Следовательно, $\forall n > N_0\; S_{N_0+1} - 1 < S_n < S_{N_0+1} + 1.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m\, \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.
$\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1.$
Надо: $\forall \varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2.$ По условию
$\exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > m > N_0\, |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < 1,$ т.е. $|S_n - S_m| < 1.$
Следовательно, $\forall n > N_0\ S_{N_0+1} - 1 < S_n < S_{N_0+1} + 1.$ Положим
$L = \min\left\{S_1, S_2, \ldots, S_{N_0}, S_{N_0+1} - 1\right\}, \quad B = \max\left\{S_1, S_2, \ldots, S_{N_0}, S_{N_0+1} + 1\right\}.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Сначала докажем, что последовательность частичных сумм исходного ряда ограничена.

$\forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 \quad \forall m, n \quad (m > n > N_1) \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon_1$.

Надо: $\quad \forall \varepsilon_2 \quad \exists N_2 \quad \forall n \quad (n > N_2) \Rightarrow |S_n - A| < \varepsilon_2$. По условию

$\exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > m > N_0\, |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < 1$, т.е. $|S_n - S_m| < 1$.

Следовательно, $\forall n > N_0\; S_{N_0+1} - 1 < S_n < S_{N_0+1} + 1$. Положим

$L = \min\left\{S_1, S_2, \ldots, S_{N_0}, S_{N_0+1} - 1\right\}, \quad B = \max\left\{S_1, S_2, \ldots, S_{N_0}, S_{N_0+1} + 1\right\}.$

Тогда $L \leqslant S_n \leqslant B$, то есть последовательность S_n ограничена.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказано, что последовательность S_n ограничена.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** из последовательности частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, в силу ее ограниченности, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots$.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Доказано, что последовательность S_n ограничена.
По **теореме Больцано-Вейерштрасса** из последовательности частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, в силу ее ограниченности, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots$.
Пусть A — предел этой подпоследовательности.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m\, \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.

Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$

$$< \varepsilon.$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m\, \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.

Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$

$$< \varepsilon.$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m\, \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.
$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' > 0 \quad \forall k > N'' \quad \left|S_{i_k} - A\right| < \varepsilon''$.
Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$

$$< \varepsilon.$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ \forall m\ \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.
$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' > 0 \quad \forall k > N'' \quad \left|S_{i_k} - A\right| < \varepsilon''$.
Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$

$< \left|S_n - S_{i_k}\right| + \left|S_{i_k} - A\right| < \qquad < \varepsilon.$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.
$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' > 0 \quad \forall k > N'' \quad \left|S_{i_k} - A\right| < \varepsilon''$.
Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$

$< \left|S_n - S_{i_k}\right| + \left|S_{i_k} - A\right| < \qquad < \varepsilon$. Сделаем так...

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.
$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' > 0 \quad \forall k > N'' \quad \left|S_{i_k} - A\right| < \varepsilon''$.
Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$
$< \left|S_n - S_{i_k}\right| + \left|S_{i_k} - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Сделаем так...

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.
$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' > 0 \quad \forall k > N'' \quad \left|S_{i_k} - A\right| < \varepsilon''$.
Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$
$< \left|S_n - S_{i_k}\right| + \left|S_{i_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Сделаем так...

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}, \quad N \geqslant \max\{N', N''\}.$$

XVI.4.5. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 54. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится* $\quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n\, \forall m \left(n > m > N \quad\Rightarrow\quad |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Выбрали последовательность $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}, \ldots \to A$.
$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N' > 0 \quad \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon'$.
$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists N'' > 0 \quad \forall k > N'' \quad \left|S_{i_k} - A\right| < \varepsilon''$.
Надо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |S_n - A| <$
$< \left|S_n - S_{i_k}\right| + \left|S_{i_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Сделаем так...

$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}, \quad N \geqslant \max\{N', N''\}$. Теорема доказана.

XVI.5. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Везде далее в этом разделе рассматриваются только числовые ряды, все члены которых являются действительными числами.

XVI.5.1. Признак сравнения для сходимости рядов

Теорема 55. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и для любого* n *имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *также сходится;*

2) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *также расходится.*

Доказательство.

XVI.5.1. Признак сравнения для сходимости рядов

Теорема 55. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и для любого* n *имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *также сходится;*

Доказательство. Сошлемся на существование предела ограниченной монотонной последовательности (частичные суммы «маленького» ряда

XVI.5.1. Признак сравнения для сходимости рядов

Теорема 55. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и для любого* n *имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *также сходится;*

Доказательство. Сошлемся на существование предела ограниченной монотонной последовательности (частичные суммы «маленького» ряда

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не превосходят частичных сумм «большого» ряда

XVI.5.1. Признак сравнения для сходимости рядов

Теорема 55. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и для любого* n *имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *также сходится;*

Доказательство. Сошлемся на существование предела ограниченной монотонной последовательности (частичные суммы «маленького» ряда

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не превосходят частичных сумм «большого» ряда

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, поэтому ограничены суммой последнего ряда.

XVI.5.1. Признак сравнения для сходимости рядов

Теорема 55. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и для любого* n *имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

2) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *также расходится.*

Доказательство.

XVI.5.1. Признак сравнения для сходимости рядов

Теорема 55. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и для любого* n *имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

2) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *также расходится.*

Доказательство. Во втором случае частичные суммы «маленького» ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ «выталкивают в бесконечность» частичные суммы «большого» ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, и требуемый результат получаем прямо из определений.

Рассмотрим пример?

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $k = 0$*, то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$*, а из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$*;*

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ k = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{сходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{расходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{расходится}. \end{cases}$$

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится } \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится,} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится } \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится.} \end{cases}$

2) если $k = \infty$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ k = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится}. \end{cases}$$

$$2)\ k = \infty \ \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится}. \end{cases}$$

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится,} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится.} \end{cases}$

2) $k = \infty \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится,} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится.} \end{cases}$

3) если k *— число, отличное от нуля, то ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ k = 0 \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится}. \end{array} \right.$$

$$2)\ k = \infty \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится}. \end{array} \right.$$

$$3)\ 0 < k < \infty \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \ \Leftrightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится}.$$

Доказательство проведите самостоятельно.

XVI.5.2. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 56. *Пусть все члены рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *положительны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ k = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится}. \end{cases}$$

$$2)\ k = \infty \ \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расходится} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ расходится}. \end{cases}$$

$$3)\ 0 < k < \infty \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \ \Leftrightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сходится}.$$

Рассмотрим пример?

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) Пусть все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует такое положительное число* $q < 1$, *что* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ *для любого* n. *Тогда исходный ряд сходится.*

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

2) Пусть все члены ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует такое положительное число* $q > 1$, *что* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q$ *для любого* n. *Тогда исходный ряд расходится.*

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

2) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q > 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

2) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q > 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

3) (предельная форма). Пусть все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$*. Тогда при* $q > 1$ *исходный ряд расходится, а при* $q < 1$ *— сходится.*

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

2) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q > 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

3)
$$\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \begin{cases} q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{\textit{сходится}}, \\ q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{\textit{расходится}}. \end{cases}$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

Утверждение следует из признака сравнения.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$

$= a_1 + a_1 \cdot \dfrac{a_2}{a_1} +$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$
$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} +$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$
$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_1 \cdot q +$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + \ldots$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + \ldots + a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ множи-} \atop \text{тель}} + \ldots =$$

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + \ldots + a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ множитель}} + \ldots =$$

Из формулы для суммы всех членов геометрической прогрессии.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + \ldots + a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ множитель}} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Из формулы для суммы всех членов геометрической прогрессии.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

1) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q < 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + \ldots + a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ множитель}} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Следовательно, по **признаку сравнения** ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

2) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q > 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

2) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q > 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство.

Второе утверждение доказывается аналогично, только знаки неравенства «переворачиваются», при этом суммы n членов геометрической прогрессии неограниченно растут,

поэтому исходный ряд ...

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

2) $\forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \exists q > 1 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \ \Rightarrow\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство.

Второе утверждение доказывается аналогично, только знаки неравенства «переворачиваются», при этом суммы n членов геометрической прогрессии неограниченно растут,

поэтому исходный ряд расходится.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

$$3)\ \forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \Rightarrow \ \begin{cases} q < 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{сходится}, \\ q > 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{расходится}. \end{cases}$$

Доказательство.

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

$$3)\ \forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \Rightarrow \begin{cases} q < 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{сходится}, \\ q > 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{расходится}. \end{cases}$$

Доказательство.

Третий пункт следует из первых двух и **теоремы о сходимости остатка ряда**:

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

$$\text{3) } \forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \Rightarrow \begin{cases} q < 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{сходится}, \\ q > 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{расходится}. \end{cases}$$

Доказательство.

Третий пункт следует из первых двух и **теоремы о сходимости остатка ряда**: если, например, $q < 1$, то, по определению предела найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ имеет место неравенство ,

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

$$3)\ \forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \begin{cases} q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ \textit{сходится}}, \\ q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ \textit{расходится}}. \end{cases}$$

Доказательство.

Третий пункт следует из первых двух и **теоремы о сходимости остатка ряда**: если, например, $q < 1$, то, по определению предела найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ имеет место неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{q+1}{2}$,

XVI.5.3. Признак д'Аламбера сходимости знакоположительного ряда

Теорема 57. *Справедливы следующие утверждения*

$$\text{3) } \forall n \in \mathbb{R}\ a_n > 0\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \begin{cases} q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{сходится}, \\ q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{расходится}. \end{cases}$$

Доказательство.

Третий пункт следует из первых двух и **теоремы о сходимости остатка ряда**: если, например, $q < 1$, то, по определению предела найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ имеет место неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{q+1}{2}$,

после чего остается к N-ному остатку ряда применить доказанное уже свойство пункта 2 доказываемой теоремы.

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство.

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд …

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится
(согласно необходимому признаку сходимости ряда),

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — ...

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится
а второй — сходится.

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится
а второй — сходится.
Действительно,

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} =$

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} -$

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится
а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots$$

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

XVI.5.4. Замечание к признаку д'Аламбера

Замечание 5. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Доказательство. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится

а второй — сходится.

Действительно, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Перейдём к **интеральному признаку** или рядам **Лейбницевского типа?**

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует такое положительное число* $q > 1$, *что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant q$ *для любого* n. *Тогда исходный ряд расходится.*

2. *Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует такое положительное число* $q < 1$, *что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ *для любого* n. *Тогда исходный ряд сходится.*

3. *(предельная форма) Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда при* $q > 1$ *исходный ряд расходится, а при* $q < 1$ — *сходится.*

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. *Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует такое положительное число* $q < 1$, *что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ *для любого* n. *Тогда исходный ряд сходится.*

3. *(предельная форма) Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда при* $q > 1$ *исходный ряд расходится, а при* $q < 1$ — *сходится.*

Доказательство.

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. $q_k > 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

3. *(предельная форма) Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда при* $q > 1$ *исходный ряд расходится, а при* $q < 1$ *— сходится.*

Доказательство.

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. $q_k > 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

3. $q_k > 0, \qquad \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q > 1 \;\Rightarrow\; \text{ряд расходится,} \\ q < 1 \;\Rightarrow\; \text{ряд сходится.} \end{cases}$

Доказательство.

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

3. $q_k > 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q > 1 \;\Rightarrow\; \text{ряд расходится,} \\ q < 1 \;\Rightarrow\; \text{ряд сходится.} \end{cases}$

Доказательство. Вновь применяем признак сравнения к исходному ряду и сумме членов геометрической прогрессии $a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n + \ldots$, поскольку с помощью индукции легко доказать, что в первом случае

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

3. $q_k > 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q > 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд расходится,} \\ q < 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд сходится.} \end{cases}$

Доказательство. Вновь применяем признак сравнения к исходному ряду и сумме членов геометрической прогрессии $a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n + \ldots$, поскольку с помощью индукции легко доказать, что в первом случае $\dfrac{a_n}{a_1} \geqslant q^n$, а во втором случае $\dfrac{a_n}{a_1} \leqslant q^n$.

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. $q_k > 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

3. $q_k > 0, \qquad \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q > 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд расходится}, \\ q < 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд сходится}. \end{cases}$

Доказательство. Сведение третьего случая к первым двум проводится аналогично рассуждениям при доказательстве признака д'Аламбера.

XVI.5.5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 58. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

2. $q_k > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

3. $q_k > 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q > 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд расходится}, \\ q < 1 \ \Rightarrow \ \text{ряд сходится}. \end{cases}$

Доказательство. Сведение третьего случая к первым двум проводится аналогично рассуждениям при доказательстве признака д'Аламбера.

XVI.5.6. Замечание к радикальному признаку Коши

Замечание 6. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

XVI.5.6. Замечание к радикальному признаку Коши

Замечание 6. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Решение. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1,

XVI.5.6. Замечание к радикальному признаку Коши

Замечание 6. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Решение. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд

XVI.5.6. Замечание к радикальному признаку Коши

Замечание 6. *Этот признак не дает никакой информации в случае $q = 1$.*

Решение. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится (согласно необходимому признаку сходимости),

XVI.5.6. Замечание к радикальному признаку Коши

Замечание 6. *Этот признак не дает никакой информации в случае* $q = 1$.

Решение. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится (согласно необходимому признаку сходимости),
а второй, как мы доказали выше (замечание к признаку д'Аламбера),

XVI.5.6. Замечание к радикальному признаку Коши

Замечание 6. *Этот признак не дает никакой информации в случае $q = 1$.*

Решение. В самом деле, для каждого из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 \ldots \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

параметр q равен 1, но первый ряд расходится (согласно необходимому признаку сходимости),
а второй, как мы доказали выше (замечание к признаку д'Аламбера), сходится.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Пусть все слагаемые ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *положительны и существует такая непрерывная функция* $f(x)$, *что, во-первых, для любого* n *имеет место равенство* $a_n = f(n)$, *и, во-вторых, функция* f *монотонна при* $x \geqslant 1$. *Тогда исходный ряд и несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y\ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.

Доказательство.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx < \infty \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.

Доказательство.

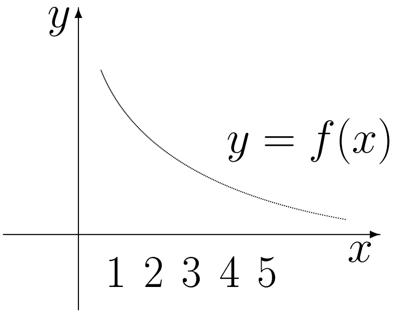
Фактически надо доказать, что из сходимости ряда вытекает сходимость интеграла и из сходимости интеграла вытекает сходимость ряда. Идею доказательства иллюстрирует рис.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;*
2) $0 < x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$*, то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty.$

Доказательство.

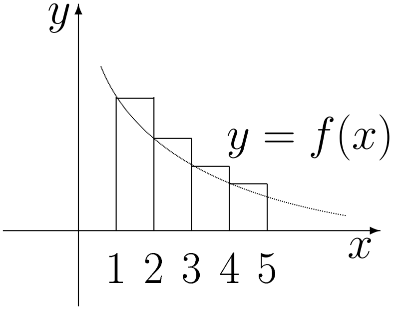
Фактически надо доказать, что из сходимости ряда вытекает сходимость интеграла и из сходимости интеграла вытекает сходимость ряда. Идею доказательства иллюстрирует рис.



XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;*
2) $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty.$

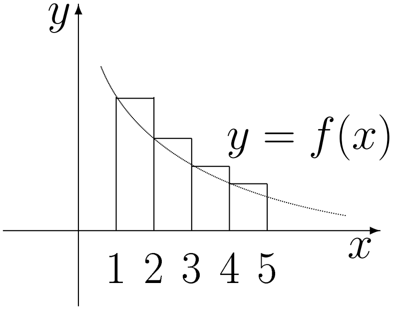
Доказательство. Пусть ряд сходится и f — функция, монотонно убывающая при $x \geqslant 1$ и такая, что $f(n) = a_n$.



XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.

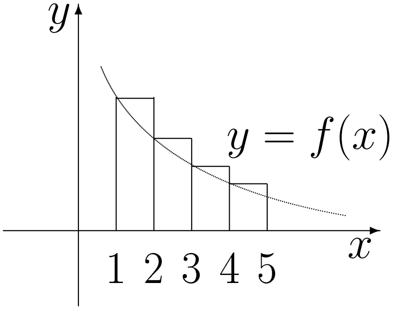
Доказательство. Пусть ряд сходится и f — функция, монотонно убывающая при $x \geqslant 1$ и такая, что $f(n) = a_n$.



XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty.$

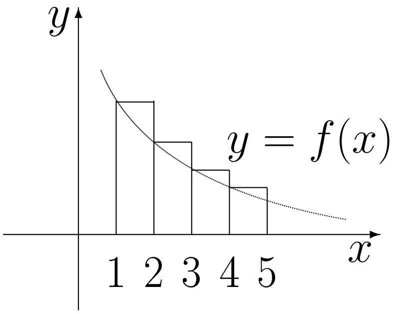
Доказательство. Положим $h(x) = a_{[x]}$, где $[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.



XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty.$

Доказательство. Положим $h(x) = a_{[x]}$.



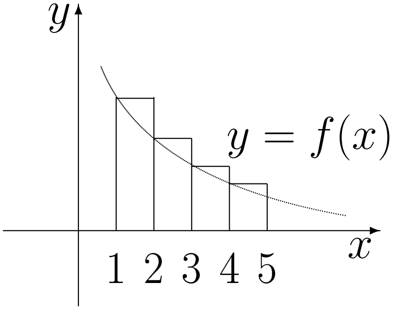
$\int\limits_1^{+\infty} h(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, в частности, интеграл от h сходится,

причём $[x] \leqslant x \Rightarrow f(x) \leqslant f([x]) = h(x)$.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.

Доказательство. Положим $h(x) = a_{[x]}$.



$\int\limits_1^{+\infty} h(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, в частности, интеграл от h сходится,

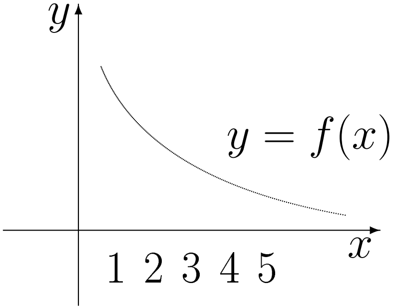
причём $[x] \leqslant x \Rightarrow f(x) \leqslant f([x]) = h(x)$.

Значит, по признаку сравнения для несобственных интегралов первого рода интеграл от f сходится.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.

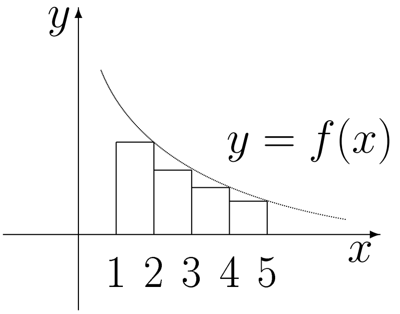
Доказательство. Пусть теперь известно, что сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.



XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.

Доказательство. В силу монотонности функции f для функции $g(x) = f([x]+1)$ имеем $g(x) = a_{[x]+1} = f([x]+1) \leqslant f(x)$.

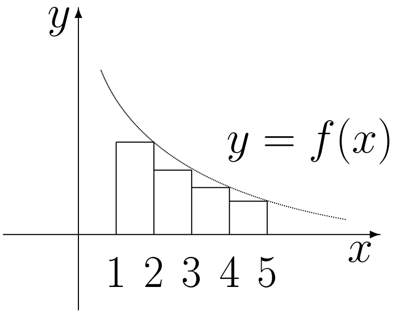


XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;*

2) $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty.$

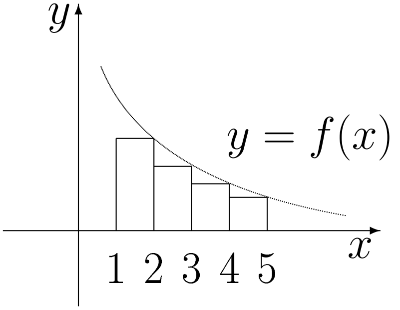
Доказательство. В силу монотонности функции f для функции $g(x) = f([x]+1)$ имеем $g(x) = a_{[x]+1} = f([x]+1) \leqslant f(x)$.



По признаку сравнения для интегралов первого рода, $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$*, то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.



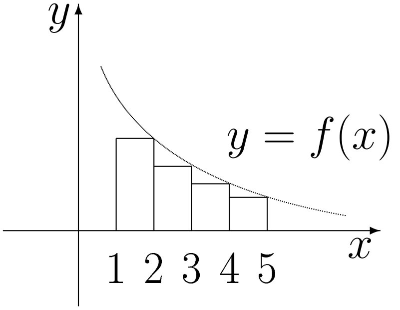
Доказательство. В силу монотонности функции f для функции $g(x) = f([x]+1)$ имеем $g(x) = a_{[x]+1} = f([x]+1) \leqslant f(x)$.

По признаку сравнения для интегралов первого рода, $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Но этот интеграл равен сумме ряда $a_2 + a_3 + \ldots$ Осталось применить **теорему об остатке ряда**.

XVI.5.7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда

Теорема 59. *Если* $\exists f : [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$ *1)* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$*;* *2)* $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, *то* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_0^{+\infty} a_n < \infty$.



Доказательство. В силу монотонности функции f для функции $g(x) = f([x] + 1)$ имеем $g(x) = a_{[x]+1} = f([x] + 1) \leqslant f(x)$.

По признаку сравнения для интегралов первого рода, $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Но этот интеграл равен сумме ряда $a_2 + a_3 + \ldots$ Осталось применить **теорему об остатке ряда**.

Теорема доказана.

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях* ***интегрального признака Коши*** *справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство.

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях* ***интегрального признака Коши*** *справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство.

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях* ***интегрального признака Коши*** *справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство. В самом деле, для введенных в доказательстве функций $h(x) = a_{[x]}$ и $g(x) = f([x]+1)$ имеем

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях* ***интегрального признака Коши*** *справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство. В самом деле, для введенных в доказательстве функций $h(x) = a_{[x]}$ и $g(x) = f([x]+1)$ имеем

$$\int\limits_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx \leqslant a_k \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx,$$

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях* ***интегрального признака Коши*** *справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. В самом деле, для введенных в доказательстве функций $h(x) = a_{[x]}$ и $g(x) = f([x]+1)$ имеем

$$\int\limits_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx \leqslant a_k \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx,$$

поэтому, суммируя по всем k, большим n, получаем, с помощью индуктивных рассуждений, доказываемую систему неравенств.

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях **интегрального признака Коши** справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство. В самом деле, для введенных в доказательстве функций $h(x) = a_{[x]}$ и $g(x) = f([x]+1)$ имеем

$$\int\limits_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx \leqslant a_k \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx,$$

поэтому, суммируя по всем k, большим n, получаем, с помощью индуктивных рассуждений, доказываемую систему неравенств.

Рассмотрим пример?

XVI.5.8. Следствие из интегрального признака Коши

Следствие 1. *В условиях **интегрального признака Коши** справедливы оценки* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство. В самом деле, для введенных в доказательстве функций $h(x) = a_{[x]}$ и $g(x) = f([x]+1)$ имеем

$$\int\limits_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx \leqslant a_k \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx,$$

поэтому, суммируя по всем k, большим n, получаем, с помощью индуктивных рассуждений, доказываемую систему неравенств.

Перейдём к рядам **Лейбницевского типа?**

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть все члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *положительны, то есть* $a_n > 0$, *и* $r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если, начиная с некоторого номера n, *имеем* $r_n \leqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*

2) если, начиная с некоторого номера n, *имеем* $r_n \geqslant r > 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится;*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство.

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, поэтому для любого $k > m + 1$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, поэтому для любого $k > m + 1$

$S_k =$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, поэтому для любого $k > m + 1$

$S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \geqslant$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, поэтому для любого $k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0$, $\quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + (m+1)a_{m+1} - (m+1)a_{m+2} + (m+2)a_{m+2} - (m+2)a_{m+3} + \ldots + k\,a_k -$$

$$-k\,a_{k+1} = a_1 + \ldots + a_m + (m+1)a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_k - k\,a_{k+1} =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0$, $\quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{m} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + (m+1)a_{m+1} - (m+1)a_{m+2} + (m+2)a_{m+2} - (m+2)a_{m+3} + \ldots + k\,a_k -$$

$$-k\,a_{k+1} = a_1 + \ldots + a_m + (m+1)a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_k - k\,a_{k+1} =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}, \Rightarrow$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}, \Rightarrow a_{k+1} \geqslant \frac{1}{k}\cdot m\,a_m.$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0,\quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\, a_{m+1} - k\, a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\, a_{m+1} - k\, a_{k+1}, \Rightarrow a_{k+1} \geqslant \frac{1}{k} \cdot m\, a_m.$

Следовательно,

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}, \Rightarrow a_{k+1} \geqslant \frac{1}{k}\cdot m\,a_m.$

Следовательно, $S_k =$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}, \Rightarrow a_{k+1} \geqslant \frac{1}{k}\cdot m\,a_m.$

Следовательно, $\displaystyle S_k = S_m + \sum_{n=m+1}^{k} a_n =$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}, \Rightarrow a_{k+1} \geqslant \frac{1}{k} \cdot m\,a_m.$

Следовательно, $\displaystyle S_k = S_m + \sum_{n=m+1}^{k} a_n = S_m + m\,a_m \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n-1},$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \;\Rightarrow\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*

Доказательство. В силу положительности a_n неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$ равносильно $a_n \geqslant n\,(a_n - a_{n+1})$, поэтому для любого $k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} n\,(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}.$$

Значит $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{k} a_n + m\,a_{m+1} - k\,a_{k+1}, \Rightarrow a_{k+1} \geqslant \frac{1}{k} \cdot m\,a_m.$

Следовательно, $\displaystyle S_k = S_m + \sum_{n=m+1}^{k} a_n = S_m + m\,a_m \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n-1},$

но **гармонический ряд** расходится!

Остается применить **признак сравнения**.

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. Пусть теперь для всех $n > m$ выполняется неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1$.

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow \ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} n a_n - \sum_{n=m+1}^{k} n a_{n+1}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме положим}\\ n' = n+1\end{array}\right) =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} n a_n - \sum_{n=m+1}^{k} n a_{n+1}\right) = \begin{pmatrix}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме положим}\\ n' = n+1\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} n a_n - \sum_{n'=m+2}^{k+1} (n'-1) a_{n'}\right) = \begin{pmatrix}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме положим}\\ n = n'\end{pmatrix}$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} na_n - \sum_{n=m+1}^{k} na_{n+1}\right) = \begin{pmatrix}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме положим}\\ n' = n+1\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} na_n - \sum_{n'=m+2}^{k+1} (n'-1)a_{n'}\right) = \begin{pmatrix}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме положим}\\ n = n'\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} na_n - \sum_{n=m+2}^{k+1} (n-1)a_n\right) =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} na_n - \sum_{n=m+1}^{k} na_{n+1}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме} \quad \text{положим}\\ n' = n+1\end{array}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} na_n - \sum_{n'=m+2}^{k+1} (n'-1)a_{n'}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{в третьей сум-}\\ \text{ме} \quad \text{положим}\\ n = n'\end{array}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left(\sum_{n=m+1}^{k} na_n - \sum_{n=m+2}^{k+1} (n-1)a_n\right) =$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \;\Rightarrow\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \;\Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Таким образом,

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m+1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Таким образом, $\dfrac{r-1}{r}\displaystyle\sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right),$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Таким образом, $\dfrac{r-1}{r} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right)$,

то есть

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r} \sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Таким образом, $\dfrac{r-1}{r} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right)$,

то есть $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r-1}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) \leqslant$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Таким образом, $\dfrac{r-1}{r}\displaystyle\sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right)$,

то есть $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{(m+1)a_{m+1}}{r-1}$.

$$\leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r-1}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) \leqslant$$

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0,\quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство. $a_n \leqslant n\left(a_n - a_{n+1}\right)/r \ \Rightarrow k > m + 1$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} n\left(a_n - a_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right) + \frac{1}{r}\sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Таким образом, $\dfrac{r-1}{r}\displaystyle\sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \dfrac{1}{r}\left((m+1)a_{m+1} - ka_{k+1}\right)$,

то есть $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{m} a_n + \dfrac{(m+1)a_{m+1}}{r-1}$.

Значит, возрастающая последовательность частичных сумм S_k ограничена сверху, **поэтому** она имеет предел. Теорема доказана.

XVI.5.9. Признак Раабе сходимости ряда

Теорема 60. *Пусть* $a_n > 0, \quad r_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. *Тогда*

1) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \leqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится;*

2) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m \quad r_n \geqslant 1 \ \Rightarrow\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится.*

Доказательство.

Рассмотрим пример?

XVI.5.10. Ряды лейбницевского типа

Единственный признак сходимости для не знакопостоянных рядов, который мы рассмотрим, относится к одному достаточно узкому классу рядов, который, тем не менее, часто возникает в исследованиях.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Пусть числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *(все* a_n *— действительные числа) обладает следующими свойствами:*

1. $a_n > 0$;
2. $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда, во-первых, исходный ряд сходится, и, во-вторых, модуль n-ного остатка ряда не превосходит a_{n+1}, *то есть*

$$\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}. \tag{65}$$

Доказательство.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если 1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$*;* *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$*;* *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* 1) $a_n > 0$; 2) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если 1)* $a_n > 0$*; 2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$*; 3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ — монотонно возрастающая последовательность с положительными членами, так как, по условию, $a_{2k-1} - a_{2k}$ — положительные числа.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ — монотонно возрастающая последовательность с положительными членами, так как, по условию, $a_{2k-1} - a_{2k}$ — положительные числа.
С другой стороны, эта последовательность ограничена, так как

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* 1) $a_n > 0$; 2) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ — монотонно возрастающая последовательность с положительными членами, так как, по условию, $a_{2k-1} - a_{2k}$ — положительные числа.
С другой стороны, эта последовательность ограничена, так как
$0 < S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1$.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится*,
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ — монотонно возрастающая последовательность с положительными членами, так как, по условию, $a_{2k-1} - a_{2k}$ — положительные числа.
С другой стороны, эта последовательность ограничена, так как
$0 < S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1$.
Следовательно, S_{2n} — сходящаяся последовательность.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится*,

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$

$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \to S.$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \to S.$
$S_n = P_n + Q_n$, где

n	1	2	3	4	5	$\ldots$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$
P_n		S_2	S_2	S_3	S_3	$\ldots$	S_{2n}	S_{2n}	$\ldots$.
Q_n	a_1	0	a_3	0	a_5	$\ldots$	0	a_{2n+1}	$\ldots$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится*,

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \to S$.

$S_n = P_n + Q_n$, где

n	1	2	3	4	5	$\ldots$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$
P_n		S_2	S_2	S_3	S_3	$\ldots$	S_{2n}	S_{2n}	$\ldots$.
Q_n	a_1	0	a_3	0	a_5	$\ldots$	0	a_{2n+1}	$\ldots$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n =$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если 1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \to S.$
$S_n = P_n + Q_n$, где

n	1	2	3	4	5	$\ldots$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$
P_n		S_2	S_2	S_3	S_3	$\ldots$	S_{2n}	S_{2n}	$\ldots$.
Q_n	a_1	0	a_3	0	a_5	$\ldots$	0	a_{2n+1}	$\ldots$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) =$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \to S.$
$S_n = P_n + Q_n$, где

n	1	2	3	4	5	$\ldots$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$
P_n		S_2	S_2	S_3	S_3	$\ldots$	S_{2n}	S_{2n}	$\ldots$.
Q_n	a_1	0	a_3	0	a_5	$\ldots$	0	a_{2n+1}	$\ldots$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = S + 0 = S$.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. $S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$
$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \to S$.
$S_n = P_n + Q_n$, где

n	1	2	3	4	5	$\ldots$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$
P_n		S_2	S_2	S_3	S_3	$\ldots$	S_{2n}	S_{2n}	$\ldots$.
Q_n	a_1	0	a_3	0	a_5	$\ldots$	0	a_{2n+1}	$\ldots$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = S + 0 = S$.
Значит, исходный ряд сходится.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$= \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится*,

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$< (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$*;* *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$*;* *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0< (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0 < (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

$$= a_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) - \ldots < a_{2k+1}.$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если 1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0< (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

$$= a_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) - \ldots < a_{2k+1}.$$

$$= \sum_{n=2k}^{\infty} a_n =$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0< (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

$$= a_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) - \ldots < a_{2k+1}.$$

$$< -a_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k}^{\infty} a_n =$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если 1)* $a_n > 0$*; 2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$*; 3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0< (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots= \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

$$= a_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) - \ldots < a_{2k+1}.$$

$$-a_{2k}< -a_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots= \sum_{n=2k}^{\infty} a_n =$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если 1) $a_n > 0$; 2) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то I) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится, II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.*

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0 < (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

$$= a_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) - \ldots < a_{2k+1}.$$

$$-a_{2k} < -a_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k}^{\infty} a_n =$$

$$= -(a_{2k} - a_{2k+1}) - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) + \ldots < 0.$$

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится,*
II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения II):

$$0 < (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k+1}^{\infty} a_n =$$

$$= a_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) - \ldots < a_{2k+1}.$$

$$-a_{2k} < -a_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \ldots = \sum_{n=2k}^{\infty} a_n =$$

$$= -(a_{2k} - a_{2k+1}) - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) + \ldots < 0.$$

Теорема доказана.

XVI.5.11. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

Теорема 61. *Если* *1)* $a_n > 0$; *2)* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то I) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится,*

II) $\left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots\right| \leqslant a_{n+1}$.

Доказательство.

Рассмотрим пример?

XVI.6. Абсолютная сходимость ряда

Определение 37. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(здесь* a_n *могут быть комплексными числами) называется* **абсолютно сходящимся**, *если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Если ряд сходится, но не абсолютно, то такой ряд называется* **условно сходящимся**.

XVI.6. Абсолютная сходимость ряда

Определение 37. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(здесь* a_n *могут быть комплексными числами) называется* **абсолютно сходящимся**, *если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Если ряд сходится, но не абсолютно, то такой ряд называется* **условно сходящимся**.

Как мы увидим позднее, некоторые из привычных нам свойств суммы конечного числа слагаемых выполняются только для абсолютно сходящихся рядов.

Рассмотрим пример?

XVI.6. Абсолютная сходимость ряда

Определение 37. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(здесь* a_n *могут быть комплексными числами) называется* **абсолютно сходящимся**, *если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Если ряд сходится, но не абсолютно, то такой ряд называется* **условно сходящимся**.

Отметим, что определение абсолютно сходящегося ряда пока формально не совсем корректно, так как, судя по структуре термина, абсолютная сходимость — особенность сходимости ряда, но мы еще не доказали, что абсолютно сходящийся ряд является сходящимся. Поэтому начнем мы с доказательства этого факта.

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство.

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием Коши**.

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \; \forall n, m$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \; \forall n, m \quad n > m > N_1 \; \Rightarrow \qquad\qquad < \varepsilon.$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \; \forall n, m \quad n > m > N_1 \;\Rightarrow |\qquad\qquad\qquad| < \varepsilon.$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \, \forall n, m \quad n > m > N_1 \;\Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists N_1 \,\forall n, m \quad n > m > N_1 \;\Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \; \forall n, m \quad n > m > N_1 \; \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 \; \forall n \; \forall m$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \, \forall n, m \quad n > m > N_1 \, \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 \, \forall n \, \forall m \quad n > m > N_2 \, \Rightarrow$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow \qquad\qquad \varepsilon.$$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \, \forall n, m \quad n > m > N_1 \;\Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 \, \forall n \, \forall m \quad n > m > N_2 \;\Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) =$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

Действительно, тогда при $n > m > N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$ имеем

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

Действительно, тогда при $n > m > N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$ имеем

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n|$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

Действительно, тогда при $n > m > N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$ имеем

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \quad |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n|$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \; \forall n, m \quad n > m > N_1 \;\Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 \; \forall n \; \forall m \quad n > m > N_2 \;\Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

Действительно, тогда при $n > m > N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$ имеем

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n|$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

Действительно, тогда при $n > m > N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$ имеем

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

XVI.6.1. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Теорема 62. ***Абсолютно сходящийся*** *ряд сходится.*

Доказательство. Надо доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m \quad n > m > N_1 \ \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Согласно **критерию Коши**

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n\ \forall m \quad n > m > N_2 \ \Rightarrow |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Поэтому в вышеуказанной формуле можно положить $N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$.

Действительно, тогда при $n > m > N_1(\varepsilon) = N_2(\varepsilon)$ имеем

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$

Теорема доказана.

Рассмотрим пример?

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство.

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q < 1$, то, по **признаку д'Аламбера для знакоположительных рядов**, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$*, то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q < 1$, то, по **признаку д'Аламбера для знакоположительных рядов**, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q < 1$, то, по **признаку д'Аламбера для знакоположительных рядов**, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

По **теореме о сходимости абсолютно сходящегося ряда**, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N}$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ $\qquad\qquad < \dfrac{q-1}{2}$.

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \left| \qquad\qquad\qquad \right| < \frac{q-1}{2}.$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}.$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q \right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

$$1 < \frac{q+1}{2}$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \qquad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

$$1 < \frac{q+1}{2} \quad |a_{N+1}|$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

$$1 < \frac{q+1}{2} < |a_{N+1}|$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для
$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$
В частности,
$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$
$$1 < \frac{q+1}{2} < |a_{N+1}| <$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q \right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

$$1 < \frac{q+1}{2} < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \dots$$

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ — *расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}.$$ Поэтому $|a_{n+1}| > \dfrac{q+1}{2}|a_n|$.

$$1 < \frac{q+1}{2} < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \ldots$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$.

По **необходимому признаку сходимости** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

$$1 < \frac{q+1}{2} < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \dots$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$.

По **необходимому признаку сходимости** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема доказана.

XVI.6.2. Признак д'Аламбера абсолютной сходимости произвольных рядов

Теорема 63. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *то, при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, а при* $q > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Если $q > 1$, то, по определению предела, для

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \frac{q-1}{2}.$$

В частности,

$$\forall n > N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{q+1}{2}. \quad \text{Поэтому } |a_{n+1}| > \frac{q+1}{2}|a_n|.$$

$$1 < \frac{q+1}{2} < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \ldots$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$.

По **необходимому признаку сходимости** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Рассмотрим пример?

XVI.7. Свойства числовых рядов (продолжение)

Следующие теоремы показывают, что не все «обычные» свойства суммы конечного числа слагаемых переносятся в теорию рядов. Мы докажем теорему Римана о том, что в условно сходящемся ряде вообще говоря, нельзя «безнаказанно» переставлять слагаемые. Сначала мы докажем, что переставлять слагаемые можно для абсолютно сходящихся рядов.

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

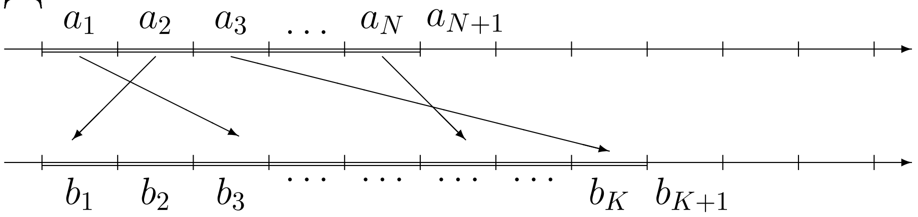
Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.



XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ получен перестановкой членов исходного ряда. В частности, для каждого m имеем $a_m = b_{k_m}$ для единственным образом определенного k_m.

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ получен перестановкой членов исходного ряда. В частности, для каждого m имеем $a_m = b_{k_m}$ для единственным образом определенного k_m.

Положим $R_n = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} |a_m|$, $S = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$, $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m$, $S'_n = \sum\limits_{m=1}^{n} b_m$.

Возьмем произвольное положительное число ε. По условию для положительного числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ найдется такой номер N, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|R_n| < \varepsilon_1$.

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| =$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left| \sum_{m=K+1}^{n} b_m \right| \leqslant$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left| \sum_{m=K+1}^{n} b_m \right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left| \sum_{m=K+1}^{n} b_m \right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| <$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left| \sum_{m=K+1}^{n} b_m \right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3},$$

и

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left|\sum_{m=K+1}^{n} b_m\right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3},$$

и

$$|S'_K - S_{N+1}| =$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left|\sum_{m=K+1}^{n} b_m\right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3},$$

и

$$|S'_K - S_{N+1}| = \left|\sum_{m=1}^{K} b_m - \sum_{m=1}^{N+1} a_m\right| \leqslant$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left|\sum_{m=K+1}^{n} b_m\right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3},$$

и

$$|S'_K - S_{N+1}| = \left|\sum_{m=1}^{K} b_m - \sum_{m=1}^{N+1} a_m\right| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| <$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть K — максимальное из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$.

Тогда для любого $n > K$ получаем

$$|S'_n - S'_K| = \left|\sum_{m=K+1}^{n} b_m\right| \leqslant \sum_{m=K+1}^{n} |b_m| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3},$$

и

$$|S'_K - S_{N+1}| = \left|\sum_{m=1}^{K} b_m - \sum_{m=1}^{N+1} a_m\right| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}.$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Поэтому для любого $n > K$

$$|S'_n - S| =$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Поэтому для любого $n > K$

$$|S'_n - S| = |S'_n - S'_K + S'_K - S_{N+1} + S_{N+1} - S| \leqslant$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Поэтому для любого $n > K$

$$|S'_n - S| = |S'_n - S'_K + S'_K - S_{N+1} + S_{N+1} - S| \leqslant$$

$$\leqslant |S'_n - S'_K| + |S'_K - S_{N+1}| + |S_{N+1} - S| <$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Поэтому для любого $n > K$

$$|S'_n - S| = |S'_n - S'_K + S'_K - S_{N+1} + S_{N+1} - S| \leqslant$$

$$\leqslant |S'_n - S'_K| + |S'_K - S_{N+1}| + |S_{N+1} - S| <$$

$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + |S_{N+1} - S| <$$

XVI.7.1. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема 64. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке членов этого ряда получим абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Поэтому для любого $n > K$

$$|S'_n - S| = |S'_n - S'_K + S'_K - S_{N+1} + S_{N+1} - S| \leqslant$$

$$\leqslant |S'_n - S'_K| + |S'_K - S_{N+1}| + |S_{N+1} - S| <$$

$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + |S_{N+1} - S| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + |R_{N+1}| < 3\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Рассмотрим пример?

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Иными словами, в условно сходящихся рядах **нельзя** переставлять слагаемые.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Иными словами, в условно сходящихся рядах **нельзя** переставлять слагаемые.

Слово «нельзя» означает, что при этом сумма ряда может измениться.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то есть его частичные суммы не ограничены.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\forall M \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m > N \quad \sum\limits_{n=1}^{m} |a_n| > M.$

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\forall M \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m > N \quad \sum\limits_{n=1}^{m} |a_n| > M.$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ — ряд из всех положительных слагаемых ряда,

и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряд из всех отрицательных слагаемых ряда.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\forall M \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m > N \quad \sum\limits_{n=1}^{m} |a_n| > M.$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ — ряд из всех положительных слагаемых ряда,

и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряд из всех отрицательных слагаемых ряда.

В силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и сходимости исходного ряда получаем, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ расходятся (рассуждения «от противного»).

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ построим следующим образом.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_{p+q}$ уже выбраны, причем p штук из них совпадает с $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}$, а остальные — с $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{p+q} b_n < A$, то положим $b_{p+q+1} = a_{i_{p+1}}$,

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{p+q} b_n < A$, то положим $b_{p+q+1} = a_{i_{p+1}}$, иначе $b_{p+q+1} = a_{j_{q+1}}$.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{p+q} b_n < A$, то положим $b_{p+q+1} = a_{i_{p+1}}$, иначе $b_{p+q+1} = a_{j_{q+1}}$.

Индукцией можно показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = A$.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{p+q} b_n < A$, то положим $b_{p+q+1} = a_{i_{p+1}}$, иначе $b_{p+q+1} = a_{j_{q+1}}$.

Индукцией можно показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = A$. При этом p и q растут неограниченно, иначе некоторый остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ совпадал бы с каким-либо расходящимся остатком ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$.

XVI.7.2. Теорема Римана

Теорема 65. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *можно найти такую перестановку членов исходного ряда, что суммой полученного ряда будет число* A.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j_k}$ — ряды из всех положительных и, соответственно, отрицательных слагаемых ряда.

Положим $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{j_1}$, $p = q = 1$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{p+q} b_n < A$, то положим $b_{p+q+1} = a_{i_{p+1}}$, иначе $b_{p+q+1} = a_{j_{q+1}}$.

Индукцией можно показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = A$. Теорема доказана.

XVI.7.3. Следствие из доказательства теоремы Римана

Следствие 2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то существует такая перестановка членов этого ряда, что полученный ряд станет расходящимся.*

Рассмотрим пример?

XVII. Функциональные ряды: основные определения

До сих пор мы считали, что слагаемые ряда — это числа. Но основу, «ядро» теории рядов составляют так называемые функциональные ряды — ряды, все члены которых являются функциями. Итак, в данном разделе мы рассмотрим так называемые **функциональные ряды**.

XVII.0. Определение функционального ряда

Определение 38. Функциональным рядом *называется выражение* $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$, *часто записываемое в виде* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0$$

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$$

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N$$

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \qquad\qquad\qquad\qquad < \varepsilon.$$

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \qquad\qquad\qquad \right| < \varepsilon.$$

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\,(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

Надо еще указать, из какого множества выбираются x.

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

Надо еще указать, из какого множества выбираются x.

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Понятие суммы ряда переносится с теории числовых рядов в теорию функциональных рядов естественным образом, так как при каждом *значении* x_0 аргумента x получаем *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$.

Получим определение суммы ряда на языке «эпсилон-дельта».

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

Надо еще указать, из какого множества выбираются x.

Для получения формулировки осталось добавить нужные слова...

XVII.1. Определение суммы функционального ряда

Определение 39. *Функция* $S(x)$ *называется* **суммой функционального ряда** *на множестве* D*, если*

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon. \tag{66}$$

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

Эти проблемы решаются достаточно успешно с помощью уже рассмотренного нами математического аппарата.

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

Но к этим проблемам добавляются новые: изучение свойств суммы ряда, как функции от x, в частности,

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

Но к этим проблемам добавляются новые: изучение свойств суммы ряда, как функции от x, в частности,

— нахождение условий непрерывности суммы ряда;

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

Но к этим проблемам добавляются новые: изучение свойств суммы ряда, как функции от x, в частности,
— нахождение условий непрерывности суммы ряда;
— дифференцируемости суммы ряда, точнее, совпадает ли производная суммы ряда с «почленной производной», и если не всегда, то при каких условиях выполняется равенство

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

Но к этим проблемам добавляются новые: изучение свойств суммы ряда, как функции от x, в частности,
— нахождение условий непрерывности суммы ряда;
— дифференцируемости суммы ряда, точнее, совпадает ли производная суммы ряда с «почленной производной», и если не всегда, то при каких условиях выполняется равенство

$$\frac{d}{dx}\left(f_0(x) + f_1(x) + \dots\right) \stackrel{?}{=}$$

XVII.2. Проблематика теории функциональных рядов

Какие вопросы мы должны рассмотреть?

Во-первых, это те проблемы, которые «переходят по наследству» от теории числовых рядов: нахождение суммы, сходимость ряда и т.п.

Но к этим проблемам добавляются новые: изучение свойств суммы ряда, как функции от x, в частности,

— нахождение условий непрерывности суммы ряда;

— дифференцируемости суммы ряда, точнее, совпадает ли производная суммы ряда с «почленной производной», и если не всегда, то при каких условиях выполняется равенство

$$\frac{d}{dx}\left(f_0(x)+f_1(x)+\ldots\right) \stackrel{?}{=} \frac{d\,f_0(x)}{dx}+\frac{d\,f_1(x)}{dx}+\ldots$$

— условия почленной интегрируемости ряда.

XVII.3. Точка и область сходимости ряда

Определение 40. *Такое значение переменной* x, *при котором ряд* $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ *сходится (расходится) называют* **точкой сходимости** *(соответственно,* **расходимости***) этого ряда. Множество всех точек сходимости (соответственно, расходимости) ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *называется* **областью сходимости** *(соответственно,* **областью расходимости***) этого ряда.*

XVII.3. Точка и область сходимости ряда

Определение 40. *Такое значение переменной x, при котором ряд $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ сходится (расходится) называют* **точкой сходимости** *(соответственно,* **расходимости***) этого ряда. Множество всех точек сходимости (соответственно, расходимости) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется* **областью сходимости** *(соответственно,* **областью расходимости***) этого ряда.*

Частичные суммы функционального ряда являются функциями, поэтому сумма ряда тоже является функцией. Это один из важных и популярных способов задания функции, в особенности для числовых функций, не являющихся элементарными.

Рассмотрим пример?

XVII.4. Элементарные свойства функциональных рядов

Все **элементарные свойства числовых рядов** переносятся на функциональные ряды.

Их доказательство получается непосредственным применением соответствующих свойств числовых рядов.

XVII.4.1. Линейность суммы функционального ряда

Теорема 66. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *сходятся (абсолютно сходятся, условно сходятся) на множестве* D, *то для любых чисел* λ *и* μ *сходится (соответственно, абсолютно сходится, условно сходится) на множестве* D *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x))$. *При этом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

XVII.4.2. Область сходимости остатка ряда

Для любого номера N область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ совпадает с пересечением области сходимости ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$ с пересечением областей определения функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x)$.

Рассмотрим пример?

XVII.4.2. Область сходимости остатка ряда

Для любого номера N область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ совпадает с пересечением области сходимости ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$ с пересечением областей определения функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x)$.

Перейдём к степенным рядам?

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Одной из причин (хотя и далеко не главной) успехов, достигнутых математическим анализом является тот факт, что основные преобразования: дифференцирование и интегрирование, обладают «хорошими» свойствами.

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Одной из причин (хотя и далеко не главной) успехов, достигнутых математическим анализом является тот факт, что основные преобразования: дифференцирование и интегрирование, обладают «хорошими» свойствами.

Например, $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=\dfrac{df(x)}{dx}+\dfrac{dg(x)}{dx}$ и т.п.

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Одной из причин (хотя и далеко не главной) успехов, достигнутых математическим анализом является тот факт, что основные преобразования: дифференцирование и интегрирование, обладают «хорошими» свойствами.

Например, $\dfrac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$ и т.п.

Естественно, хотелось бы, чтобы эти свойства конечной суммы функций сохранились бы при переходе к бесконечной сумме, то есть к ряду.

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Одной из причин (хотя и далеко не главной) успехов, достигнутых математическим анализом является тот факт, что основные преобразования: дифференцирование и интегрирование, обладают «хорошими» свойствами.

Например, $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=\dfrac{df(x)}{dx}+\dfrac{dg(x)}{dx}$ и т.п.

Естественно, хотелось бы, чтобы эти свойства конечной суммы функций сохранились бы при переходе к бесконечной сумме, то есть к ряду.

По этому поводу говорят о **почленном дифференцировании** и **почленном интегрировании**.

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

и **почленным интегралом** — ряды

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

и **почленным интегралом** — ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx. \tag{68}$$

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

и **почленным интегралом** — ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\, dx. \tag{68}$$

Можно было бы ожидать совпадения почленной и «обычной» производных: $\dfrac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \stackrel{?}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x)$,

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

и **почленным интегралом** — ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx. \tag{68}$$

Также можно было бы ожидать совпадения почленного и «обычного» интегралов от суммы ряда.

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

и **почленным интегралом** — ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\, dx. \tag{68}$$

Но, оказывается, это верно не всегда. Для «сбытия мечт» необходима, как правило, сходимость не простая

XVII.5. Равномерная сходимость ряда

Почленной производной ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \tag{67}$$

и **почленным интегралом** — ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx. \tag{68}$$

Но, оказывается, это верно не всегда. Для «сбытия мечт» необходима, как правило, сходимость не простая
(хоть и не золотая).

XVII.5.1. Определение равномерной сходимости последовательности

Определение 41. *Говорят, что последовательность функций* $S_1(x); S_2(x); \ldots; S_k(x); \ldots$ *сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* D **равномерно**, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > N \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon. \qquad (69)$$

XVII.5.1. Определение равномерной сходимости последовательности

Определение 41. *Говорят, что последовательность функций* $S_1(x); S_2(x); \ldots; S_k(x); \ldots$ *сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* D **равномерно**, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > N \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon. \tag{69}$$

Если интерпретировать функции $S_k(x)$ как частичные суммы функционального ряда, то получим определение равномерной сходимости ряда.

XVII.5.1. Определение равномерной сходимости последовательности

Определение 42. *Говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* D **равномерно**, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > N \qquad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad (70)$$

XVII.5.1. Определение равномерной сходимости последовательности

Определение 42. *Говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* D **равномерно**, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > N \qquad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (70)$$

Таким образом, если ряд сходится равномерно, то по $\varepsilon > 0$ можно найти такой N, который «годится» для любого x, то есть обеспечивает выполнение нужного неравенства сразу при всех интересующих нас x.

XVII.5.1. Определение равномерной сходимости последовательности

Определение 42. *Говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* D **равномерно**, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > N \qquad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad (70)$$

$$\boxed{\forall x \in D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

«обычная» сходимость на D

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \boxed{\forall x \in D} \quad \forall n > N \quad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

равномерная сходимость на D

Рассмотрим пример?

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *существует такой номер* N, *что для любого* x *из* D *и для любых номеров* $n > m > N$ *имеет место неравенство* $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$.

Слишком много слов естественного языка...

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \qquad\qquad\qquad \frac{\varepsilon}{2}.$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \qquad\qquad\qquad\qquad \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| =$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| =$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) - \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right) \right| \leqslant$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) - \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| <$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) - \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) - \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) - \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, можно положить $N = N_0$.

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд сходится равномерно, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > N_0 \quad \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $n > m > N_0$ получаем

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) - \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, можно положить $N = N_0$. Необходимость доказана.

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$ Надо доказать, что этот ряд сходится на D равномерно.

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, в силу **свойств предела**, имеем

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| =$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| =$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\right| =$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} <$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве N в определении равномерной сходимости ряда можно взять N_1.

XVII.5.2. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 67. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \varepsilon > 0.$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m > N_1 \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве N в определении равномерной сходимости ряда можно взять N_1. Теорема доказана.

XVII.5.3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Теорема 68. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *— некоторый функциональный ряд и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *— такой числовой знакоположительный ряд, что выполняются следующие утверждения:*

1. *для любого номера* n *и любого* x *из* D *имеет место неравенство* $|f_n(x)| \leqslant a_n$*;*
2. *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на множестве* D *абсолютно и равномерно.* **Доказательство.**

XVII.5. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Доказательство практически повторяет соответствующее доказательство для несобственных интегралов. Номер N_0 выбирается из условия, чтобы для любого $n > N_0$ выполнялось неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Такое N_0 найдется по условию 2. Из этого неравенства в силу 1 для любого x из D получаем

XVII.5. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Доказательство практически повторяет соответствующее доказательство для несобственных интегралов. Номер N_0 выбирается из условия, чтобы для любого $n > N_0$ выполнялось неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Такое N_0 найдется по условию 2. Из этого неравенства в силу 1 для любого x из D получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Значит, в определении равномерной сходимости в качестве N можно взять N_0.

Теорема доказана.

XVII.5. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Определение 43. *В условиях предыдущей теоремы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *называется* **мажорирующим рядом** *для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *на* D*. В этом случае говорят еще, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **мажорирует** *на* D *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$*.*

Рассмотрим пример?

XVII.6. Преобразование Абеля

Определение 44. *Положим* $B_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{n+k}$. **Преобразованием Абеля** *(аналог интегрирования по частям) называется представление суммы* $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}$ *в виде*

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n,k} - \alpha_{n+p} B_{n,p}.$$

Доказательство.

XVII.6. Преобразование Абеля

Определение 44. *Положим* $B_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{n+k}$. **Преобразованием Абеля** *(аналог интегрирования по частям) называется представление суммы* $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}$ *в виде*

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n,k} - \alpha_{n+p} B_{n,p}.$$

Доказательство. Докажем корректность преобразования Абеля:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} =$$

XVII.6. Преобразование Абеля

Определение 44. *Положим* $B_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{n+k}$. **Преобразованием Абеля** *(аналог интегрирования по частям) называется представление суммы* $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}$ *в виде*

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n,k} - \alpha_{n+p} B_{n,p}.$$

Доказательство. Докажем корректность преобразования Абеля:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \alpha_{n+1} B_{n,1} + \sum_{k=2}^{p} \alpha_{n+k}(B_{n,k} - B_{n,k-1}) =$$

XVII.6. Преобразование Абеля

Определение 44. *Положим* $B_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{n+k}$. **Преобразованием Абеля** *(аналог интегрирования по частям) называется представление суммы* $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}$ *в виде*

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n,k} - \alpha_{n+p} B_{n,p}.$$

Доказательство. Докажем корректность преобразования Абеля:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \alpha_{n+1} B_{n,1} + \sum_{k=2}^{p} \alpha_{n+k} (B_{n,k} - B_{n,k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) B_{n,k} - \alpha_{n+p} B_{n,p}.$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Теорема 69. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *ограничены на* D *в совокупности,*

то есть $\exists M \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$*;*

2) последовательность функций g_k *с возрастанием* k *равномерно по* x *сходится к 0 на* D*;*

3) при каждом фиксированном $x_0 \in D$ *числовая последовательность* $\{f_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *является убывающей.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

Как много букафff...

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Теорема 69. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\exists M \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$*;*

2) последовательность функций g_k *с возрастанием* k *равномерно по* x *сходится к 0 на* D*;*

3) при каждом фиксированном $x_0 \in D$ *числовая последовательность* $\{f_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *является убывающей.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Теорема 69. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\exists M \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in D \forall n > N \, |f_n(x)| < \varepsilon;$

3) при каждом фиксированном $x_0 \in D$ *числовая последовательность* $\{f_k\,(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *является убывающей.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ *сходится равномерно на* D.

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Теорема 69. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\exists M \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$*;*

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in D \forall n > N \, |f_n(x)| < \varepsilon$*;*

3) $\forall x_0 \in D \quad \forall 1 \leqslant k < m \quad f_k(x_0) > f_m(x_0)$*;*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

Доказательство.

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Доказательство. Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)$. По условию для некоторого числа M имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$ для любого n и любого $x \in D$. Следовательно,

$$|B_{n,p}| =$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Доказательство. Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)$. По условию для некоторого числа M имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$ для любого n и любого $x \in D$. Следовательно,

$$|B_{n,p}| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Доказательство. Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)$. По условию для некоторого числа M имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$ для любого n и любого $x \in D$. Следовательно,

$$|B_{n,p}| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant 2M.$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Доказательство. Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)$. По условию для некоторого числа M имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$ для любого n и любого $x \in D$. Следовательно,

$$|B_{n,p}| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant 2M.$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости последовательности функций $g_n(x)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; \forall x \in D \quad |g_n(x)| < \varepsilon.$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Поэтому, используя преобразование Абеля, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)g_k(x)\right| \leqslant 2M\sum_{k=1}^{p-1}\big(g_{n+k}(x)-g_{n+k+1}(x)\big)+2M|g_{n+p}(x)| =$$

$$= 2Mg_{n+1}(x) < 2M\varepsilon.$$

По критерию Коши получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ сходится равномерно на D.

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Теорема 70 (Признак Абеля). *Пусть, во-первых, ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* D *равномерно, во-вторых, для любого* $x \in D$ *последовательность* $g_k(x)$ *монотонна*[3] *и, в-третьих, множество* $\left\{ g_k(x) \,\middle|\, x \in D, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ *ограничено. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ *также сходится равномерно на* D*.*

[3] то есть или $\forall x \in D \quad m > n \Rightarrow g_m(x) \geqslant g_n(x)$ (т.е. последовательность $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *не убывает* при каждом фиксированном $x \in D$), или $\forall x \in D \quad m > n \Rightarrow g_m(x) \leqslant g_n(x)$ (т.е. последовательность $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *не возрастает* при каждом фиксированном $x \in D$).

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Доказательство. По условию для некоторого M имеем $|g_k(x)| \leqslant M$ для любого k и любого $x \in D$. Можно считать, что последовательность $g_k(x)$ монотонно убывает, в противном случае следует взять $-f_k(x)$ вместо $f_k(x)$ и $-g_k(x)$ вместо $g_k(x)$.

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Доказательство. По условию для некоторого M имеем $|g_k(x)| \leqslant M$ для любого k и любого $x \in D$. Можно считать, что последовательность $g_k(x)$ монотонно убывает, в противном случае следует взять $-f_k(x)$ вместо $f_k(x)$ и $-g_k(x)$ вместо $g_k(x)$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится на D равномерно, то, согласно критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \quad \forall p > 0 \quad \left| \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) \right| < \varepsilon.$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}$. Так как $n > N$, $p > 0$, в силу монотонности по k последовательности $g_k(x)$ получаем, используя преобразование Абеля,

$$\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) g_{n+k}(x)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} \big(g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)\big) + \varepsilon |g_{n+p}(x)| =$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}$. Так как $n > N$, $p > 0$, в силу монотонности по k последовательности $g_k(x)$ получаем, используя преобразование Абеля,

$$\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) g_{n+k}(x)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} \big(g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)\big) + \varepsilon |g_{n+p}(x)| =$$

$$= \quad \big(g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)\big) + \varepsilon |g_{n+p}(x)| \leqslant 3\varepsilon M.$$

XVII.7. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Положим $B_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{p} f_{n+k}$. Так как $n > N$, $p > 0$, в силу монотонности по k последовательности $g_k(x)$ получаем, используя преобразование Абеля,

$$\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) g_{n+k}(x)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} \big(g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)\big) + \varepsilon |g_{n+p}(x)| =$$

$$= \quad \big(g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)\big) + \varepsilon |g_{n+p}(x)| \leqslant 3\varepsilon M.$$

Таким образом, по критерию Коши, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ сходится на D равномерно.

Рассмотрим пример?

XVII.8. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теоремы этого раздела почти повторяют соответствующие результаты из теории несобственных интегралов.

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$*, и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство вновь почти повторяет соответствующее доказательство для несобственных интегралов.

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство. Надо доказать, что в условиях теоремы для любого x из D

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \Delta x\ \begin{cases} |\Delta x| < \delta \\ a \leqslant x + \Delta x \leqslant b \end{cases} \Rightarrow |S(x + \Delta x) - S(x)| < \varepsilon.$$

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство. Надо доказать, что в условиях теоремы для любого x из D

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \, \Delta x \; \begin{cases} |\Delta x| < \delta \\ a \leqslant x + \Delta x \leqslant b \end{cases} \Rightarrow |S(x + \Delta x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Обозначим через $S_n(x)$ n-ую частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, то есть $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. По условию найдется такой номер N_0, что для любого $n > N_0$ и любого x из D имеем неравенство

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство.

$$|S_n(x) - S(x)| = |f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство. В частности, для любого такого Δx, что $a \leqslant x + \Delta x \leqslant b$ имеем

$$|S_n(x + \Delta x) - S(x + \Delta x)| =$$

$$= \qquad\qquad .$$

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство. В частности, для любого такого Δx, что $a \leqslant x + \Delta x \leqslant b$ имеем

$$|S_n(x + \Delta x) - S(x + \Delta x)| =$$

$$= \|f_1(x + \Delta x) + f_2(x + \Delta x) + \ldots + f_n(x + \Delta x) - S(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

XVII.9. Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема 71. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывными функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно, то сумма этого ряда является непрерывной на* D *функцией.*

Доказательство. В силу непрерывности функций $f_k(x)$ найдутся такие положительные числа δ_k, что, если $|\Delta x| < \delta_k$, то $|f_k(x + \Delta x) - f_k(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3(N+1)}$. Положим $\delta_0 = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{N+1}\}$. Поэтому, если $|\Delta x| < \delta_0$, то

$$|S(x + \Delta x) - S(x)| \leqslant$$

$$|S(x+\Delta x) - S_{N+1}(x+\Delta x)| + |S_{N+1}(x+\Delta x) - S_{N+1}(x)| + |S_{N+1}(x) - S(x)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + (N+1)\frac{\varepsilon}{3(N+1)} = \varepsilon.$$

Значит, в определении непрерывности в качестве δ можно взять δ_0.

Теорема доказана.

XVII.10. Замечание о сумме неравномерно сходящегося ряда

Замечание 7. *Сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функций может быть как непрерывной, так и разрывной функцией.*

Рассмотрим пример?

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a, b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a, b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a, b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a, b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство.

Положим $\varphi_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a, b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a, b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство.

Положим $\varphi_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$. По условию последовательность функций $\varphi_n(x)$ сходится к нулевой функции. Покажем, что эта сходимость является равномерной, т.е., согласно формуле (70), стр.2678, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N\, \forall x \quad (x \in [a, b] \Rightarrow \varphi_n(x) < \varepsilon)\,. \tag{71}$$

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a,b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство. Заметим, что для каждого фиксированного $x \in [a;b]$ последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно убывает.

Действительно,

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$*, непрерывную на* $[a,b]$*, то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство. Заметим, что для каждого фиксированного $x \in [a;b]$ последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно убывает.

Действительно, если $m > n$, то, в силу положительности $u_k(x)$, имеем

$$\varphi_m(x) - \varphi_n(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = -\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) < 0,$$

то есть $m > n \;\Rightarrow\; \varphi_m(x) < \varphi_n(x)$.

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a, b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a, b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство. Заметим, что для каждого фиксированного $x \in [a; b]$ последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно убывает.

Применим метод «от противного», то есть предположим, что сходимость не является равномерной. Построим отрицание к **формуле71:**

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a,b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство. Заметим, что для каждого фиксированного $x \in [a;b]$ последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно убывает.

Применим метод «от противного», то есть предположим, что сходимость не является равномерной. Построим отрицание к **формуле71:**

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall N\, \exists n > N\, \exists x_n \quad x_n \in [a,b], \text{ но } \varphi_n\left(x_n\right) \geqslant \varepsilon.$$

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a, b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a, b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство.

Тогда в последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_p}\} \to x_0$. В силу непрерывности функций φ_m имеем

$$\forall m \ \lim_{p\to\infty} \varphi_m\left(x_{n_p}\right) = \varphi_m\left(x_0\right).$$

XVII.11. Теорема Дини

Теорема 72. *Пусть* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$ *и* $u_n(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *имеет сумму* $f(x)$, *непрерывную на* $[a,b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство.

Тогда в последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_p}\} \to x_0$. В силу непрерывности функций φ_m имеем

$$\forall m \lim_{p\to\infty} \varphi_m\left(x_{n_p}\right) = \varphi_m\left(x_0\right).$$

Для достаточно больших значений переменной p имеем $n_p \geqslant m$, откуда $\varphi_m(x_{n_p}) \geqslant \varphi_{n_p}(x_{n_p}) \geqslant \varepsilon$. В этом неравенстве перейдем к пределу при $p \to \infty$ и получим $\forall m \; \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon$, что противоречит утверждению

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0$$

XVII.12. Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема 73. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются интегрируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно к интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $S(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство.

XVII.12. Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема 73. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются интегрируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно к интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $S(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство. Мы докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right)\,dx,$$

XVII.12. Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема 73. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются интегрируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно к интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $S(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство.

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx - \int\limits_a^b S(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

XVII.12. Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема 73. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются интегрируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно к интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $S(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство. По условию для любого положительного числа ε найдется такой номер N_0, что для любого $n > N_0$ и для любого x из $D = [a, b]$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

XVII.12. Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема 73. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются интегрируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно к интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $S(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство.

Поэтому, используя линейность интеграла, получаем

$$\left| \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx - \int\limits_a^b S(x)\,dx \right| =$$

XVII.12. Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема 73. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются интегрируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *и этот ряд на* D *сходится равномерно к интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $S(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство.

Поэтому, используя линейность интеграла, получаем

$$\left| \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx - \int\limits_a^b S(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - S(x)| \right| dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве N можно взять N_0.

Теорема доказана.

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство.

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство. По **теореме о почленном интегрировании**

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\, dx =$$

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство. По **теореме о почленном интегрировании**

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^y f_k'(x)\, dx =$$

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$*, причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$*, и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$*.*

Доказательство. По **формуле Ньютона-Лейбница**

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^y f_k'(x)\,dx =$$

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^y f_k'(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y) - f_k(a)) =$$

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^y f_k'(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y) - f_k(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a) =$$

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^y f_k'(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y) - f_k(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a) = S(y) - S(a).$$

XVII.13. Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема 74. *Если все члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на отрезке* $D = [a, b]$, *причем этот ряд на* D *сходится к функции* $S(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится на* D *равномерно, то* $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^y \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,dx = S(y) - S(a).$$

Дифференцируя полученное равенство по y, получаем доказываемое равенство.

Рассмотрим пример?

XVIII. Степенные ряды

Можно ожидать, что выбирая слагаемые ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в каком-либо конкретном классе функций, можно получить ряды с хорошими в некотором смысле свойствами.

XVIII. Степенные ряды

Можно ожидать, что выбирая слагаемые ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в каком-либо конкретном классе функций, можно получить ряды с хорошими в некотором смысле свойствами. Первым «кандидатом» на проверку является, видимо, класс степенных функций. Дело в том, что конечные суммы степенных функций — это многочлены[4], их свойства хорошо изучены. Формула Тейлора позволяет n раз дифференцируемую в окрестности точки $x = x_0$ функцию F аппроксимировать многочленом.

[4]Напомним, что в алгебре под **многочленом** понимается **выражение**, с этой точки зрения мы сейчас говорим о *функции, определяемой многочленом*, то есть выражением вида $a_0 + \ldots + a_n x^n$.

XVIII. Степенные ряды

Можно ожидать, что выбирая слагаемые ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в каком-либо конкретном классе функций, можно получить ряды с хорошими в некотором смысле свойствами. Первым «кандидатом» на проверку является, видимо, класс степенных функций. Дело в том, что конечные суммы степенных функций — это многочлены[5], их свойства хорошо изучены. Формула Тейлора позволяет n раз дифференцируемую в окрестности точки $x = x_0$ функцию F аппроксимировать многочленом. Можно было бы ожидать, что «повышая степень многочлена до бесконечности», то есть переходя к соответствующему ряду, мы получим в точности саму функцию F.

---

[5]Напомним, что в алгебре под **многочленом** понимается **выражение**, с этой точки зрения мы сейчас говорим о *функции, определяемой многочленом*, то есть выражением вида $a_0 + \ldots + a_n x^n$.

XVIII. Степенные ряды

Опережая события отметим, что это не совсем так, но «исключения» на сегодняшний день можно рассматривать скорее, как «патологию», а для «нормальной функции» ее разложение в ряд Тейлора (о котором мы будем говорить ниже) сходится к самой функции. «Бог хитер, но не зловреден», и в ряде случаев результаты превысят ожидания.

XVIII. Степенные ряды

Опережая события отметим, что это не совсем так, но «исключения» на сегодняшний день можно рассматривать скорее, как «патологию», а для «нормальной функции» ее разложение в ряд Тейлора (о котором мы будем говорить ниже) сходится к самой функции. «Бог хитер, но не зловреден», и в ряде случаев результаты превысят ожидания.

Вновь забегая вперед, отметим, что мы не остановимся на степенных функциях в качестве членов функционального ряда, «на эту роль попробуются» многие другие функции, причем результат часто оказывается таким замечательным, что на сегодняшний день без теории рядов, этой «рабочей лошадки», немыслимы многие разделы современной математики. В частности, ниже мы поговорим о рядах Тейлора и рядах Фурье.

XVIII.1. Определение степенного ряда

Определение 45. Степенным рядом, *называется функциональный ряд вида* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *или, в более общем случае,* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$.

XVIII.1. Определение степенного ряда

Определение 45. Степенным рядом, *называется функциональный ряд вида* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *или, в более общем случае,* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Мы, как правило, будем формулировать утверждения для рядов вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Дело в том, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ сводится к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ с помощью замены переменной $y = x - x_0$.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *Для ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *справедливы следующие утверждения:*

1) Пусть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$. *Тогда этот ряд* ***абсолютно сходится*** *для любого такого* x, *что* $|x| < |x_0|$.

2) Пусть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$. *Тогда этот ряд расходится для любого такого* x, *что* $|x| > |x_0|$.

Доказательство.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится.***

Доказательство. 1). Утверждение требует доказательства только при $x_0 \neq 0$.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). Утверждение требует доказательства только при $x_0 \neq 0$.

Согласно **необходимому признаку сходимости ряда** имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0.$

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0.$

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

$\exists K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| < K.$

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

$\exists K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| < K$.

Поэтому для такого x, что $|x| < |x_0|$ имеем...

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится.***

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$|a_n x^n| =$

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

$\exists K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| < K$.

Поэтому для такого x, что $|x| < |x_0|$ имеем...

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n <$$

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

$\exists K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| < K$.

Поэтому для такого x, что $|x| < |x_0|$ имеем...

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

$\exists K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| < K.$

Поэтому для такого x, что $|x| < |x_0|$ имеем...

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

По **теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел**,

$\exists K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| < K$.

Поэтому для такого x, что $|x| < |x_0|$ имеем...

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Ряд $K + K\left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + K\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ сходится,

так как это сумма членов геометрической прогрессии с положительным знаменателем, меньшим 1.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Ряд $K + K\left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + K\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ сходится.

Поэтому, по **признаку сравнения**, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|a_k x^k\right|$

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится***.

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Ряд $K + K\left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + K\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ сходится.

Поэтому, по **признаку сравнения**, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|a_k x^k\right|$ сходится.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится****.*

Доказательство. 1). $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Ряд $K + K\left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + K\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ сходится.

Поэтому, по **признаку сравнения**, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|a_k x^k\right|$ сходится.

Таким образом, получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ **сходится абсолютно**, что и требовалось доказать.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится***.

2) Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$, *то этот ряд расходится для любого такого* x, *что* $|x| > |x_0|$.

Доказательство. 2). От противного.

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \left(|x| < |x_0| \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$ ***абсолютно сходится****.*

2) Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$, *то этот ряд расходится для любого такого* x, *что* $|x| > |x_0|$.

Доказательство. 2). От противного.

В самом деле, если бы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходился для некоторого такого числа x_1, что $|x_1| > |x_0|$, то,

XVIII.2. Теорема Абеля

Теорема 75. *1) Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x \ \left(|x| < |x_0| \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$ ***абсолютно сходится.***

2) Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$, *то этот ряд расходится для любого такого* x, *что* $|x| > |x_0|$.

Доказательство. 2). От противного.

В самом деле, если бы ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходился для некоторого такого числа x_1, что $|x_1| > |x_0|$, то,

по **пункту 1),** он сходился бы и при $x = x_0$, противоречие.

Теорема доказана.

XVIII.3. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда

Теорема 76. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится не всюду, но более, чем в одной точке, то существует такое положительное число* R*, что при* $|x| < R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится.*

Доказательство.

XVIII.3. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда

Теорема 76. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится не всюду, но более, чем в одной точке, то существует такое положительное число* R*, что при* $|x| < R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится.*

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится более, чем в одной точке, то он сходится при некотором $x_1 \neq 0$ и расходится при некотором значении x_2 переменной x.

XVIII.3. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда

Теорема 76. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится не всюду, но более, чем в одной точке, то существует такое положительное число* R*, что при* $|x| < R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится.*

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится более, чем в одной точке, то он сходится при некотором $x_1 \neq 0$ и расходится при некотором значении x_2 переменной x. Обозначим через M область сходимости исходного ряда, и положим $R = \sup\limits_{x \in M} |x|$.

XVIII.3. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда

Теорема 76. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится не всюду, но более, чем в одной точке, то существует такое положительное число* R*, что при* $|x| < R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится.*

Доказательство.

Обозначим через M область сходимости исходного ряда, и положим $R = \sup\limits_{x \in M} |x|$.D силу теоремы Абеля $0 < |x_1| \leqslant R \leqslant |x_2|$, поэтому R является положительным числом. Если $|a| < R$, то по выбору R найдется такое число y, что при $x = y$ исходный ряд сходится и $|a| < |y| \leqslant R$.

XVIII.3. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда

Теорема 76. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится не всюду, но более, чем в одной точке, то существует такое положительное число* R*, что при* $|x| < R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится.*

Доказательство.

Обозначим через M область сходимости исходного ряда, и положим $R = \sup\limits_{x \in M} |x|$.D силу теоремы Абеля $0 < |x_1| \leqslant R \leqslant |x_2|$, поэтому R является положительным числом. Если $|a| < R$, то по выбору R найдется такое число y, что при $x = y$ исходный ряд сходится и $|a| < |y| \leqslant R$. Поэтому по теореме Абеля ряд при $x = a$ сходится. Аналогично получаем, что если $|b| > R$, то ряд при $x = b$ расходится.

XVIII.3.1. Определение радиуса сходимости степенного ряда

Определение 46. *Число R из формулировки* ***теоремы 76*** *называется* **радиусом сходимости** *степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Множество $\{x \mid |x| < R\}$ называется* **кругом сходимости** *этого ряда. Если все члены степенного ряда имеют только вещественные значения, то множество $(-R; R)$ называется* **интервалом сходимости**. *Для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ интервалом сходимости называется множество $(x_0 - R; x_0 + R)$.*

XVIII.3.2. Следствие из теоремы о радиусе сходимости степенного ряда

Следствие 3. *Для произвольного степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *с вещественными членами область сходимости есть либо множество всех действительных чисел, либо одноэлементное множество* $\{x_0\}$, *либо область сходимости имеет вид* $(x_0 - R; x_0 + R)$, $(x_0 - R; x_0 + R]$, $[x_0 - R; x_0 + R)$ *или* $[x_0 - R; x_0 + R]$, *где* $0 < R \in \mathbb{R}$, *то есть* R *— положительное вещественное число.*

XVIII.3.2. Следствие из теоремы о радиусе сходимости степенного ряда

Следствие 3. *Для произвольного степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *с вещественными членами область сходимости есть либо множество всех действительных чисел, либо одноэлементное множество* $\{x_0\}$, *либо область сходимости имеет вид* $(x_0 - R; x_0 + R)$, $(x_0 - R; x_0 + R]$, $[x_0 - R; x_0 + R)$ *или* $[x_0 - R; x_0 + R]$, *где* $0 < R \in \mathbb{R}$, *то есть* R *— положительное вещественное число.*

Отметим, что при $|x| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

XVIII.3.3. Замечание к теореме о радиусе сходимост степенного ряда

Замечание 8. *Обычно радиус степенного ряда удобно находить с помощью признака сходимости д'Аламбера для произвольных рядов или радикального признака Коши для ряда из модулей слагаемых.*

Рассмотрим пример?

XVIII.4. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Теорема 77. *Пусть* R *— радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, *и* $-R < a < b < R$. *Тогда на отрезке* $[a, b]$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство.

XVIII.4. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Теорема 77. *Пусть* R *— радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, *и* $-R < a < b < R$. *Тогда на отрезке* $[a, b]$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Пусть $m = \max\{|a|, |b|\}$.

XVIII.4. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Теорема 77. *Пусть* R *— радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$*, и* $-R < a < b < R$*. Тогда на отрезке* $[a, b]$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Пусть $m = \max\{|a|, |b|\}$. По теореме Абеля ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится при $x = m$.

XVIII.4. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Теорема 77. *Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, и $-R < a < b < R$. Тогда на отрезке $[a, b]$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Для любого x из $[a, b]$ по определению m имеет место неравенство $|x| \leqslant m$, поэтому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k m^k$ мажорирует ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на отрезке $[a, b]$.

XVIII.4. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Теорема 77. *Пусть* R *— радиус сходимости ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, *и* $-R < a < b < R$. *Тогда на отрезке* $[a, b]$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится на $[a, b]$ равномерно. Абсолютная сходимость этого ряда на $[a, b]$ следует из теоремы Абеля, а возможность почленного дифференцирования и интегрирования — из соответствующих теорем.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. ***Радиусы сходимости*** *степенных рядов*

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, \tag{72}$$

$$T(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1} \tag{73}$$

совпадают, причем $S'(x)=T(x)$.

Доказательство.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} \text{ совпадают и } S'(x) = T(x).$$

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**. Надо доказать, что при таких x, что $|x| < R$ **ряд (73)** сходится, а при $|x| > R$ **ряд (73)** расходится.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**. Пусть $|x| < R$.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть $|x| < R$.

Докажем, что ряд (73) сходится.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}$,

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов* $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p}$

Мы хотим доказать сходимость **ряда (73)** с помощью **признака сравнения**, сравнивая ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k k x^{k-1}|$ и сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k p^k|$ (он сходится, по **теореме Абеля** так как $p < R$).

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p}$

$|k a_k x^{k-1}| \leqslant$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p}$

$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| =$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$S(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x)=T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**. Пусть $|x|<R$.

Положим $p=\dfrac{R+|x|}{2}, \quad q=\dfrac{|x|}{p}$

$$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| = a_k p^k \frac{|kq^{k-1}|}{p}.$$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.

Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R+|x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p} < 1,$

$$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| = a_k p^k \frac{|kq^{k-1}|}{p}.$$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p} < 1, \quad \lim\limits_{k\to\infty} kq^{k-1} =$

$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| = a_k p^k \dfrac{|kq^{k-1}|}{p}.$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.

Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p} < 1, \quad \lim\limits_{k\to\infty} kq^{k-1} = 0.$

$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| = a_k p^k \dfrac{|kq^{k-1}|}{p}.$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.

Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R + |x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p} < 1, \quad \lim\limits_{k\to\infty} kq^{k-1} = 0.$

$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| = a_k p^k \dfrac{|kq^{k-1}|}{p}.$

$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |kq^{k-1}| \leqslant p.$

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.

Пусть $|x| < R$.

Положим $p = \dfrac{R+|x|}{2}, \quad q = \dfrac{|x|}{p} < 1, \quad \lim\limits_{k\to\infty} kq^{k-1} = 0.$

$|ka_k x^{k-1}| \leqslant |ka_k p^{n-1} q^{n-1}| = a_k p^k \dfrac{|kq^{k-1}|}{p}.$

$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |kq^{k-1}| \leqslant p.$

Таким образом, начиная с этого номера N, имеем $|ka_k x^{k-1}| \leqslant a_k p^k$, поэтому, по **признаку сравнения** и **теореме об остатке ряда**, получаем сходимость ряда (73) в точке x.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть теперь $|x| > R$.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**. Пусть теперь $|x| > R$.

Если ряд (73) сходился бы, то, по **теореме о равномерной сходимости степенного ряда** и **теореме о почленном интегрировании ряда**, ряд (72) отличался бы только, быть может, слагаемым a_0 от ряда, полученного почленным интегрированием ряда (73) по отрезку $[0, x]$.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов* $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть теперь $|x| > R$.

Если ряд (73) сходился бы, то, по **теореме о равномерной сходимости степенного ряда** и **теореме о почленном интегрировании ряда**, ряд (72) отличался бы только, быть может, слагаемым a_0 от ряда, полученного почленным интегрированием ряда (73) по отрезку $[0, x]$.
В частности и ряд (72) сходился бы в точке x, что противоречит определению R и неравенству $|x| > R$.

XVIII.4.1. Следствие: теорема о радиусе сходимости почленной производной

Теорема 78. *Радиусы сходимости степенных рядов*
$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *совпадают и* $S'(x) = T(x)$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости **ряд (72)**.
Пусть теперь $|x| > R$.

Если ряд (73) сходился бы, то, по **теореме о равномерной сходимости степенного ряда** и **теореме о почленном интегрировании ряда**, ряд (72) отличался бы только, быть может, слагаемым a_0 от ряда, полученного почленным интегрированием ряда (73) по отрезку $[0, x]$.
В частности и ряд (72) сходился бы в точке x, что противоречит определению R и неравенству $|x| > R$.

Следствие доказано.

XVIII.4.2. Следствие: теорема о непрерывности суммы степенного ряда

Следствие 4. *Сумма степенного ряда есть функция непрерывная на любом отрезке из области его сходимости.*

XVIII.4.2. Следствие: теорема о непрерывности суммы степенного ряда

Следствие 4. *Сумма степенного ряда есть функция непрерывная на любом отрезке из области его сходимости.*

Доказательство проведите самостоятельно.

XVIII.4.3. Следствие: теорема о почленном интегрировании степенного ряда

Следствие 4. *Сумма степенного ряда есть функция непрерывная на любом отрезке из области его сходимости.*

Следствие 5. *Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри области его сходимости сколько угодно раз.*

Доказательство.

XVIII.4.3. Следствие: теорема о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда

Следствие 4. *Сумма степенного ряда есть функция непрерывная на любом отрезке из области его сходимости.*

Следствие 5. *Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри области его сходимости сколько угодно раз.*

Доказательство. Это очевидное следствие из теоремы **о равномерной сходимости степенного ряда**, теоремы **о радиусе сходимости почленной производной** и теорем **о почленном интегрировании** и **дифференцировании функциональных рядов**.

XVIII.4.3. Следствие: теорема о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда

Следствие 4. *Сумма степенного ряда есть функция непрерывная на любом отрезке из области его сходимости.*

Следствие 5. *Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри области его сходимости сколько угодно раз.*

С помощью последнего свойства можно аналитически (не численно) найти сумму некоторых степенных рядов.

Рассмотрим пример?

XVIII.5. Ряды Тейлора

В курсе математического анализа была рассмотрена *формула Тейлора:* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x - x_0)$. Для «хороших» функций (см. соответствующую теорему) при *приближении* значения переменной x к числу x_0 улучшается точность аппроксимации.

XVIII.5. Ряды Тейлора

В курсе математического анализа была рассмотрена *формула Тейлора:* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x - x_0)$. Для «хороших» функций (см. соответствующую теорему) при *приближении* значения переменной x к числу x_0 улучшается точность аппроксимации.

Можно поставить вопрос иначе: улучшается ли аппроксимация при увеличении значения n, если *зафиксировать значение* переменной x?

XVIII.5. Ряды Тейлора

В курсе математического анализа была рассмотрена *формула Тейлора:* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x-x_0)$. Для «хороших» функций (см. соответствующую теорему) при *приближении* значения переменной x к числу x_0 улучшается точность аппроксимации.

Можно поставить вопрос иначе: улучшается ли аппроксимация при увеличении значения n, если *зафиксировать значение* переменной x?

Забегая вперед отметим, что ответ будет отрицательным, что выдвигает на первый план другой вопрос: как найти множество всех тех значений переменной x, для которых с ростом n аппроксимация улучшается, то есть для каких значений переменной x с ростом n уменьшается $R_{n+1}(x-x_0)$?

XVIII.5. Ряды Тейлора

Для ответа на эти вопросы напрашивается осуществить предельный переход по $n \to \infty$, чтобы получить *точное* представление функции $f(x)$ в виде ряда. Такое представление мы сейчас рассмотрим.

XVIII.5.1. Определение ряда Тейлора

Определение 47. *Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0.* **Рядом Тейлора функции** $f(x)$ **в окрестности точки** x_0 *называется ряд*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots.$$

XVIII.5.1. Определение ряда Тейлора

Определение 47. *Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0.* **Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0** *называется ряд*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots.$$

Сначала рассмотрим вопрос о единственности разложения.

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если в некотором интервале, содержащем точку* x_0 *имеет место тождество* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$, *причем ряды в левой и правой части в этом интервале сходятся, то* $a_k = b_k$ *для всех* k. *Таким образом, если в окрестности точки* x_0 *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *сходится к функции* $f(x)$, *то, во-первых, этот ряд является ее рядом Тейлора, и, во-вторых, это разложение единственно.*

Доказательство.

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b)*, включающий в себя* x_0*, что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$*, то* $a_k = b_k$.

Доказательство.

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b), *включающий в себя* x_0, *что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$, *то* $a_k = b_k$.

Доказательство. Согласно теореме **о равномерной сходимости степенного ряда**, теореме **о радиусе сходимости почленной производной** и теореме **о почленном дифференцировании степенного ряда** получаем, дифференцируя левую и правую части тождества n раз и подставляя в качестве x значение x_0, что

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b), *включающий в себя* x_0, *что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$, *то* $a_k = b_k$.

Доказательство. Согласно теореме **о равномерной сходимости степенного ряда**, теореме **о радиусе сходимости почленной производной** и теореме **о почленном дифференцировании степенного ряда** получаем, дифференцируя левую и правую части тождества n раз и подставляя в качестве x значение x_0, что

$\mathbf{n}! \cdot a_n = \mathbf{n}! \cdot b_n$, то есть

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b), *включающий в себя* x_0, *что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$, *то* $a_k = b_k$.

Доказательство. Согласно теореме **о равномерной сходимости степенного ряда**, теореме **о радиусе сходимости почленной производной** и теореме **о почленном дифференцировании степенного ряда** получаем, дифференцируя левую и правую части тождества n раз и подставляя в качестве x значение x_0, что

$\mathbf{n}! \cdot a_n = \mathbf{n}! \cdot b_n$, то есть $a_n = b_n$,

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b), *включающий в себя* x_0, *что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$, *то* $a_k = b_k$.

Доказательство. Согласно теореме **о равномерной сходимости степенного ряда**, теореме **о радиусе сходимости почленной производной** и теореме **о почленном дифференцировании степенного ряда** получаем, дифференцируя левую и правую части тождества n раз и подставляя в качестве x значение x_0, что

$\mathbf{n}! \cdot a_n = \mathbf{n}! \cdot b_n$, то есть $a_n = b_n$,

что и требовалось доказать.

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b)*, включающий в себя* x_0*, что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$*, то* $a_k = b_k$*.*

Естественный вопрос: обязан ли ряд Тейлора функции $f(x)$ сходиться к $f(x)$?

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b)*, включающий в себя* x_0*, что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$*, то* $a_k = b_k$*.*

Естественный вопрос: обязан ли ряд Тейлора функции $f(x)$ сходиться к $f(x)$?

Дифференцируемость функции — локальное свойство.

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b)*, включающий в себя* x_0*, что*
$$\forall x \in (a, b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \text{ *то* } a_k = b_k.$$

Естественный вопрос: обязан ли ряд Тейлора функции $f(x)$ сходиться к $f(x)$?

Дифференцируемость функции — локальное свойство.

Поэтому вряд ли можно ожидать, не накладывая на функцию $f(x)$ дополнительных ограничений, что даже в области сходимости ряда Тейлора он будет сходиться к этой функции.

Рассмотрим пример?

XVIII.5.2. Теорема о единственности разложения в степенной ряд

Теорема 79. *Если существует* (a, b), *включающий в себя* x_0, *что* $\forall x \in (a, b) \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$, *то* $a_k = b_k$.

Рассмотренный пример показывает, что для ряда Тейлора функции f в окрестности точки x_0 для любого значения x_1 аргумента x возможен один из случаев: во-первых, этот ряд может сходиться к $f(x_1)$, во-вторых, этот ряд может сходиться, но не к $f(x_1)$, и, наконец, этот ряд может расходиться при $x = x_1$.

XVIII.5.3. Критерий сходимости ряда Тейлора к функции

Теорема 80. *Ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ в точке x тогда и только тогда, когда остаточный член формулы Тейлора стремится в точке x к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательство проведите самостоятельно.

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство.

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.
При этом получаем равенства $n!a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.

При этом получаем равенства $n! a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.

Например,

$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots,$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.
При этом получаем равенства $n!a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.
Например,
$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots, \quad f(x_0) = a_0;$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.

При этом получаем равенства $n!a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.

Например,

$f(x) = a_0 + a_1 \left(x - x_0\right) + a_2 \left(x - x_0\right)^2 + a_3 \left(x - x_0\right)^3 + \ldots, \quad f(x_0) = a_0;$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 \left(x - x_0\right) + 3a_3 \left(x - x_0\right)^2 + \ldots,$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.

При этом получаем равенства $n!a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.

Например,

$$f(x) = a_0 + a_1 \left(x - x_0\right) + a_2 \left(x - x_0\right)^2 + a_3 \left(x - x_0\right)^3 + \ldots, \quad f(x_0) = a_0;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 \left(x - x_0\right) + 3a_3 \left(x - x_0\right)^2 + \ldots, \quad f'(x_0) = a_1;$$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.

При этом получаем равенства $n! a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.

Например,

$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + ..., \quad f(x_0) = a_0;$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \ldots, \quad f'(x_0) = a_1;$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x - x_0) + \ldots,$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.
При этом получаем равенства $n!a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.
Например,

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + ..., \quad f(x_0) = a_0;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \ldots, \quad f'(x_0) = a_1;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x - x_0) + \ldots, \quad f''(x_0) = a_1;$$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.
При этом получаем равенства $n!a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.
Например,

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + ..., \quad f(x_0) = a_0;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \ldots, \quad f'(x_0) = a_1;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x - x_0) + \ldots, \quad f''(x_0) = a_1;$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_2 (x - x_0) + \ldots,$$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

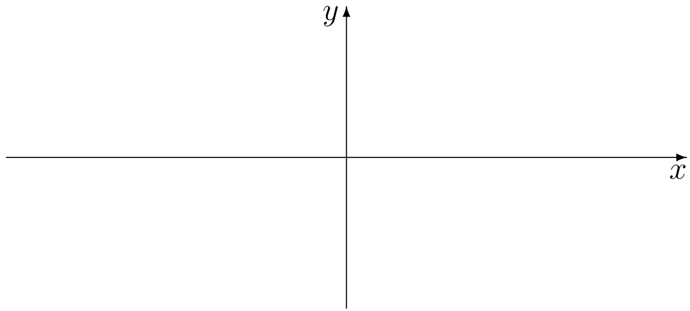
Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, берем n раз производную от левой и правой части исходного равенства и подставляем $x = x_0$.
При этом получаем равенства $n! a_n = f^{(n)}(x_0)$, откуда следуют доказываемые равенства.
Например,
$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + ...,\quad f(x_0) = a_0;$
$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \ldots,\quad f'(x_0) = a_1;$
$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x - x_0) + \ldots,\quad f''(x_0) = a_1;$
$f'''(x) = 6a_3 + 24a_2 (x - x_0) + \ldots,\quad f'''(x_0) = a_1...$

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

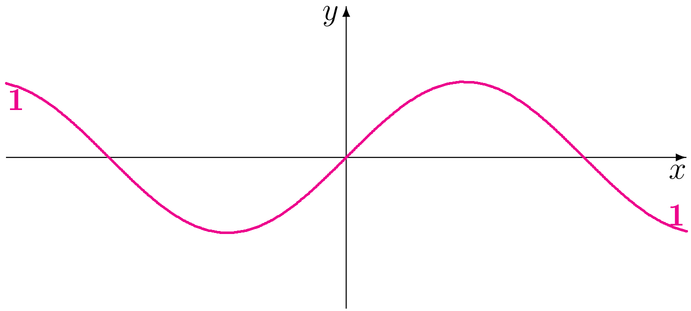
1) график $y = \sin x$;



XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

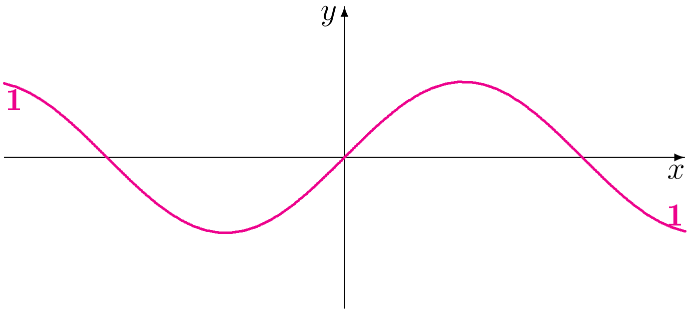
1) график $y = \sin x$;



XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

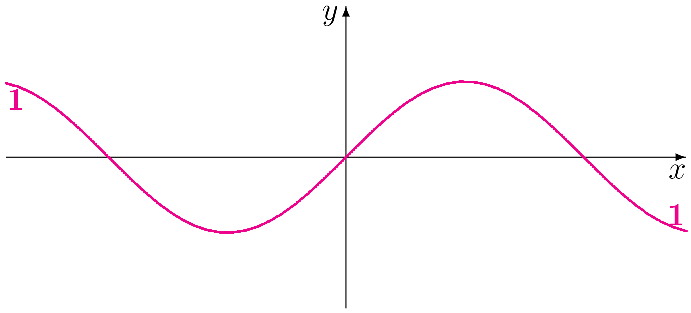


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$								
$f^n(0)$									

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

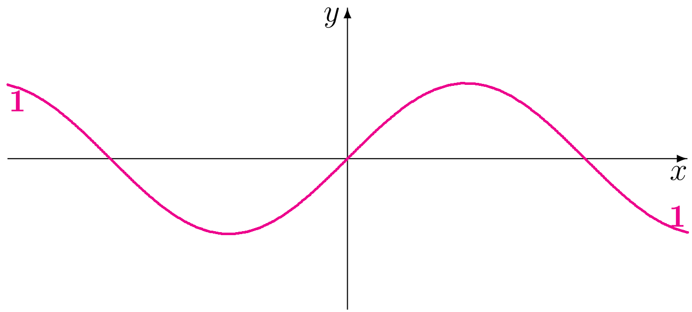


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$								
$f^n(0)$	0								

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

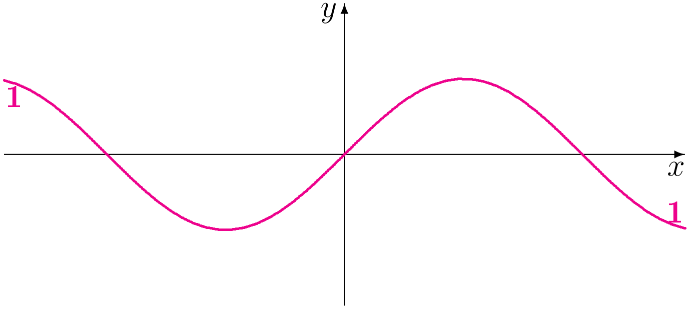


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$							
$f^n(0)$	0								

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

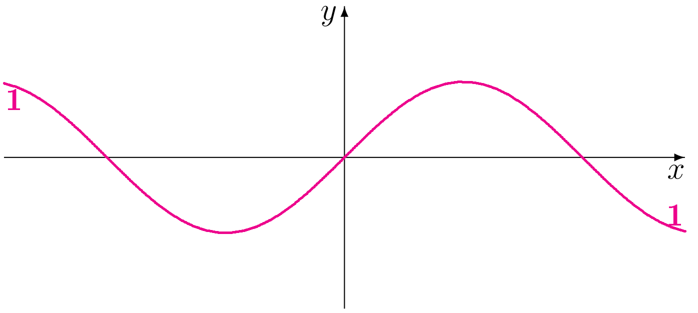


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$							
$f^n(0)$	0	1							

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

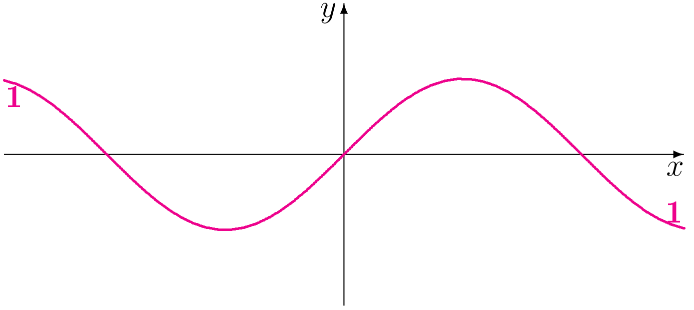


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$						
$f^n(0)$	0	1							

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

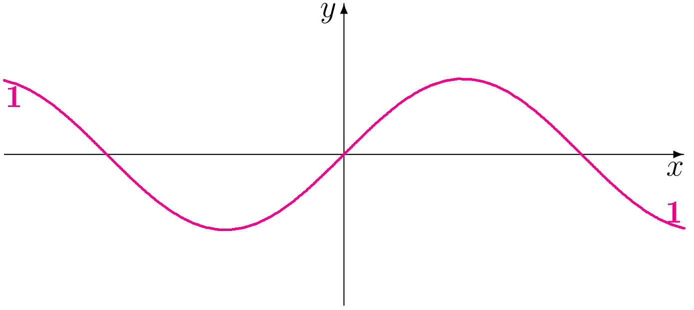


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$						
$f^n(0)$	0	1	0						

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

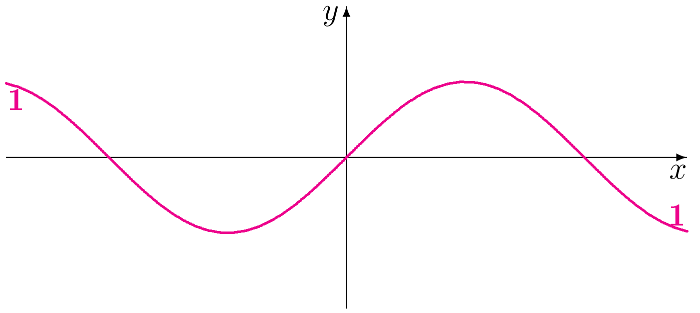


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$					
$f^n(0)$	0	1	0						

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

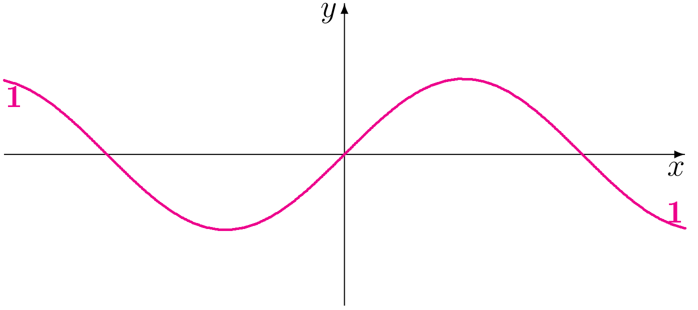


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$					
$f^n(0)$	0	1	0	-1					

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

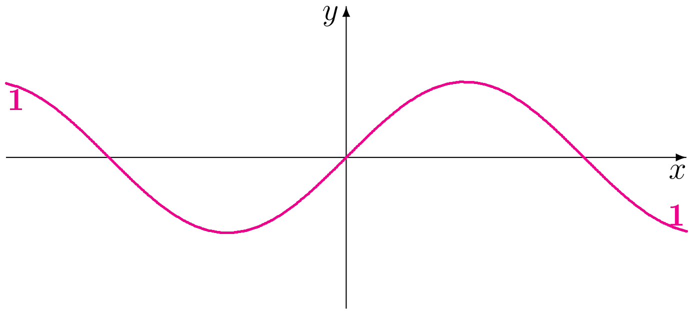


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$				
$f^n(0)$	0	1	0	-1					

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

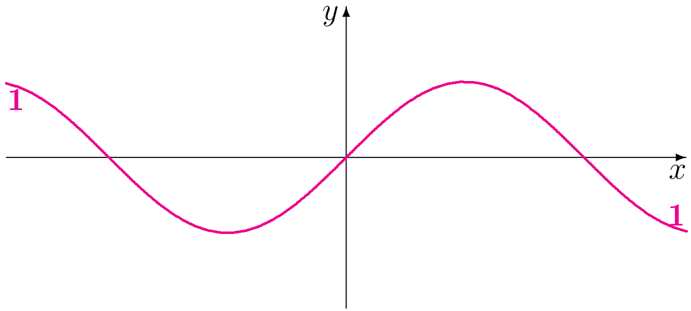


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$				
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0				

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

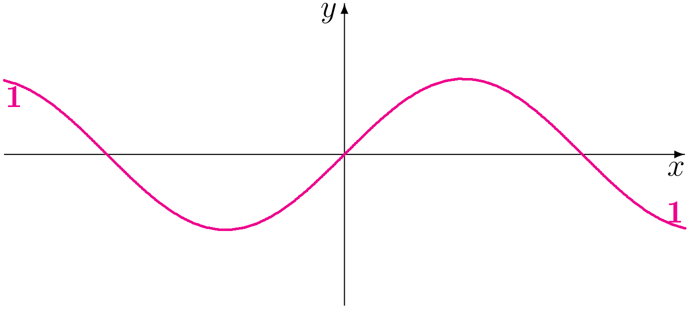


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$			
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0				

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

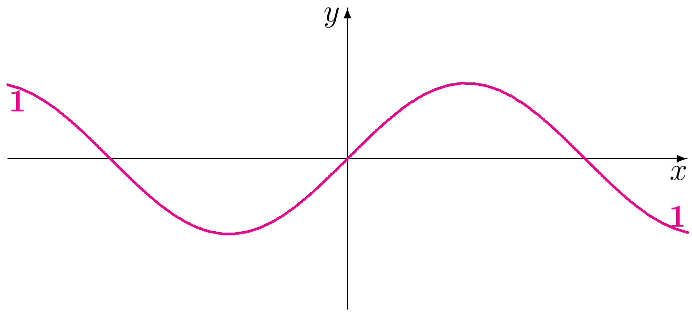


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$			
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1			

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

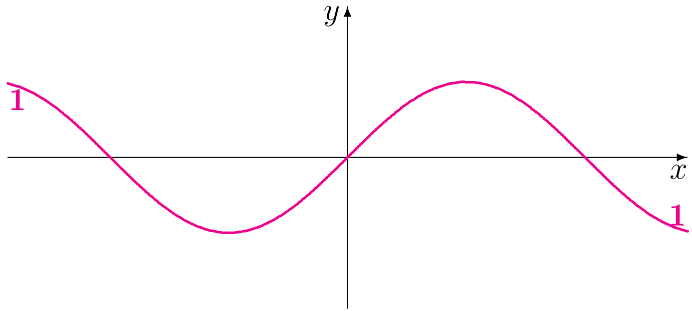


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$		
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1			

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

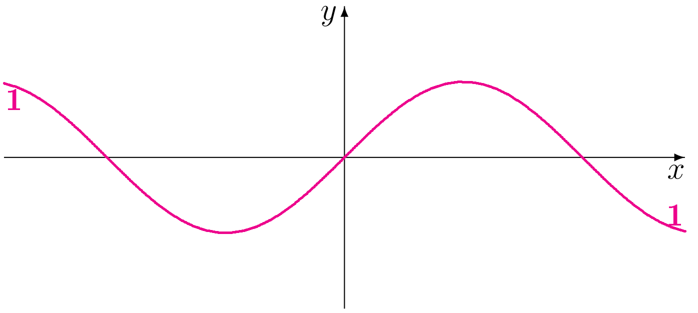


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$		
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0		

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

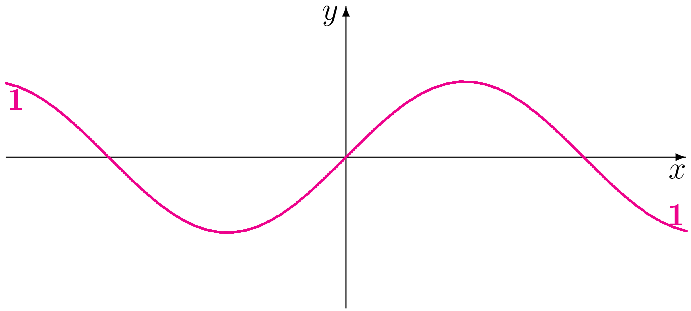


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0		

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

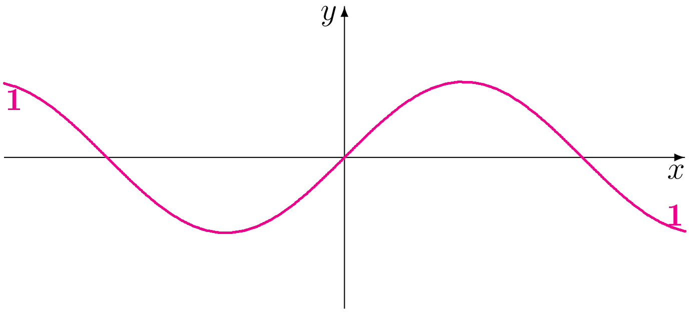


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

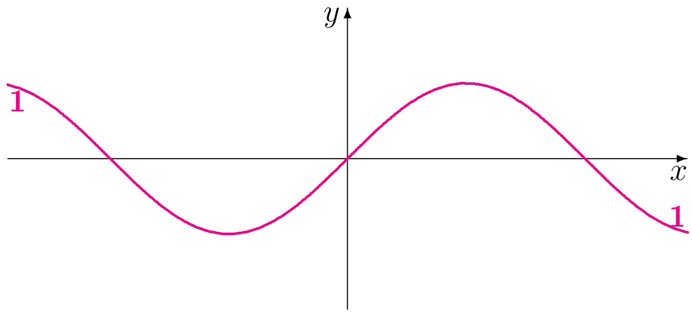


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\left(x-x_0\right)^k$. *Тогда* $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y=\sin x$;



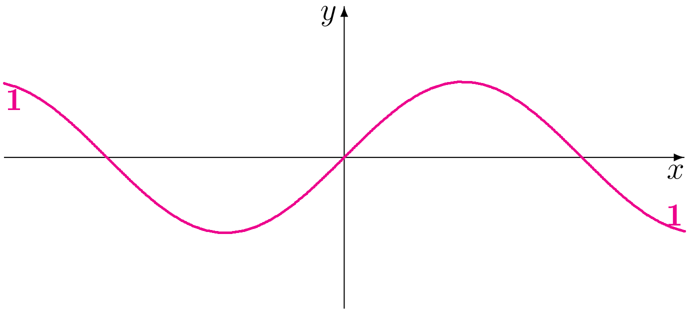
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) =$



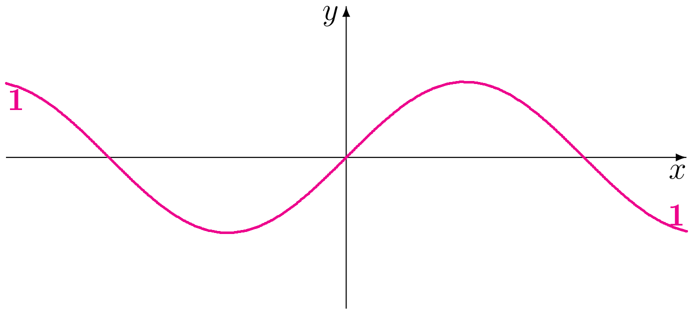
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x$



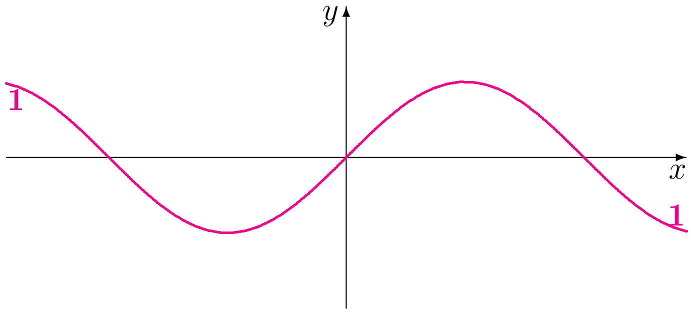
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;



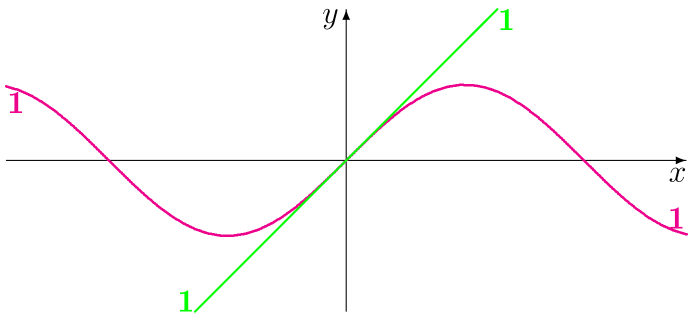
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

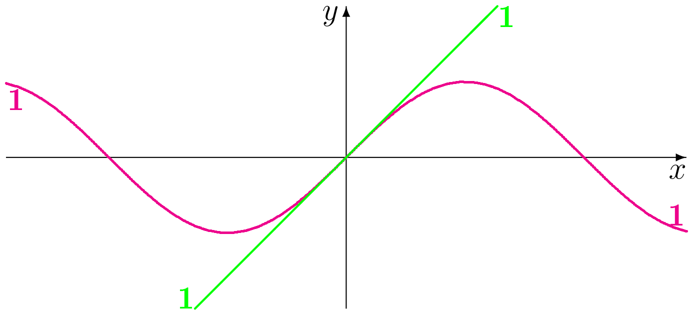
XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) =$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

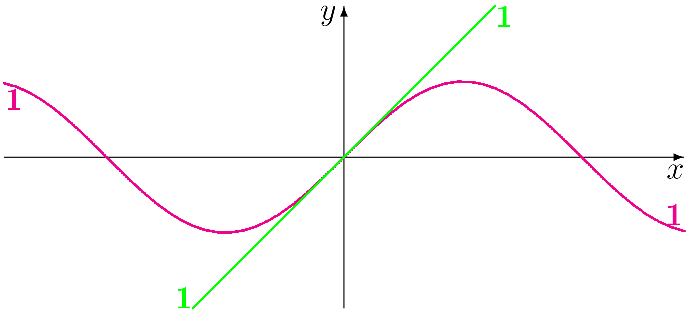
XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

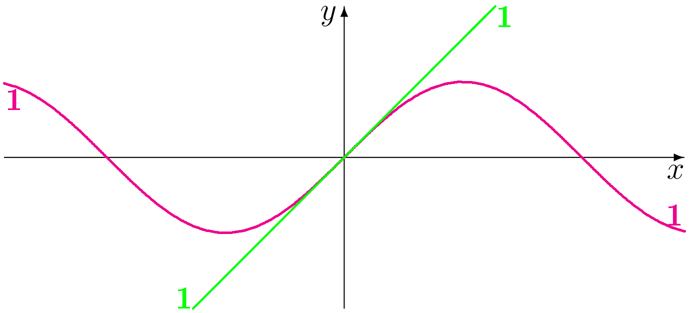
XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

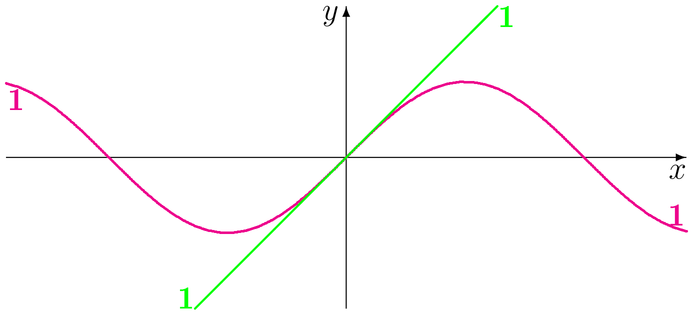
XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

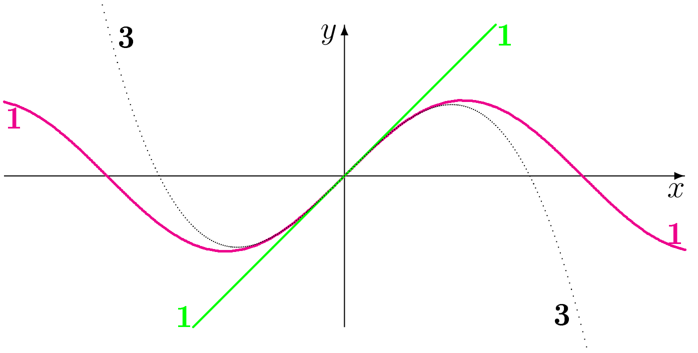
XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

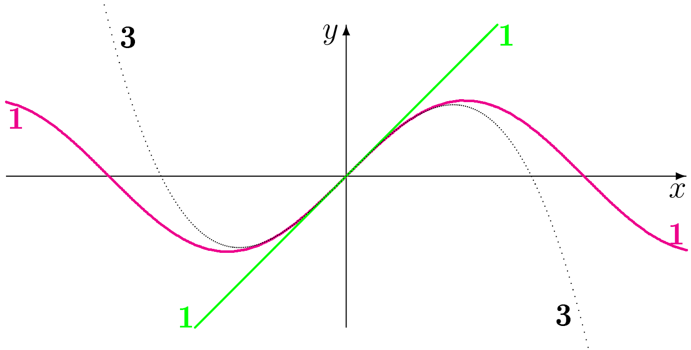
3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.



1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

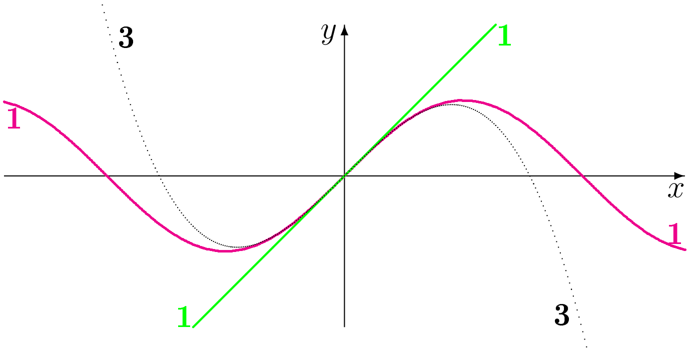
Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

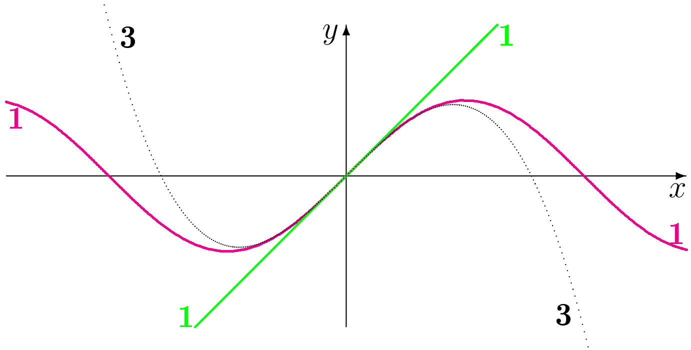
Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$. *Тогда* $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y=\sin x$;

2) $S_1(x)=x=S_2(x)$;

3) $S_3(x)=x-\dfrac{x^3}{6}=S_4(x)$;

4) $S_5(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

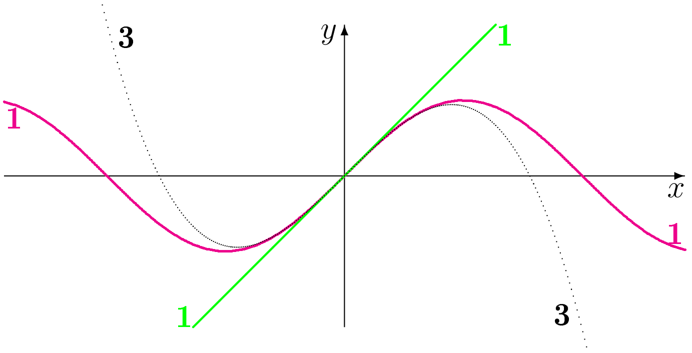
Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

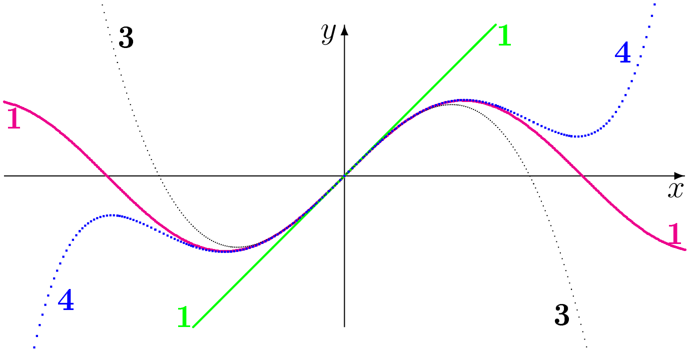
Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

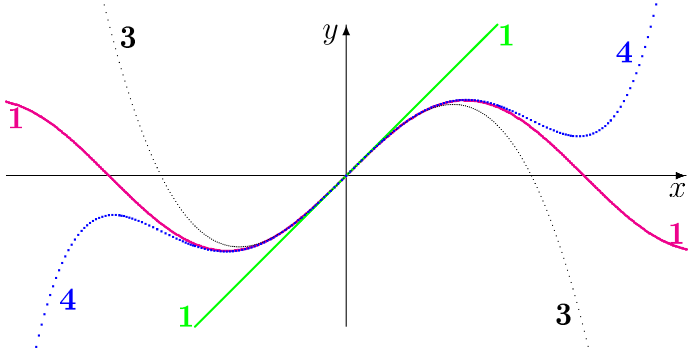
1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;

5) $S_7(x) =$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

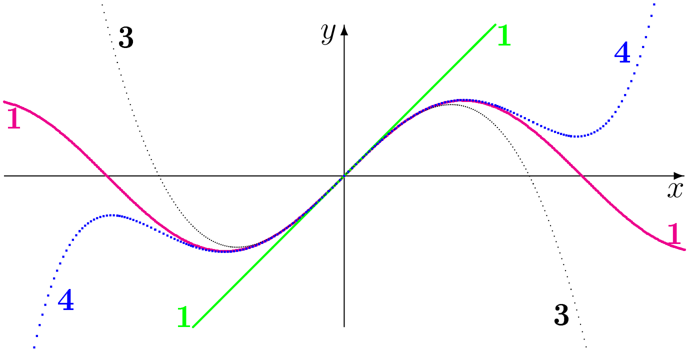
1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;

5) $S_7(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

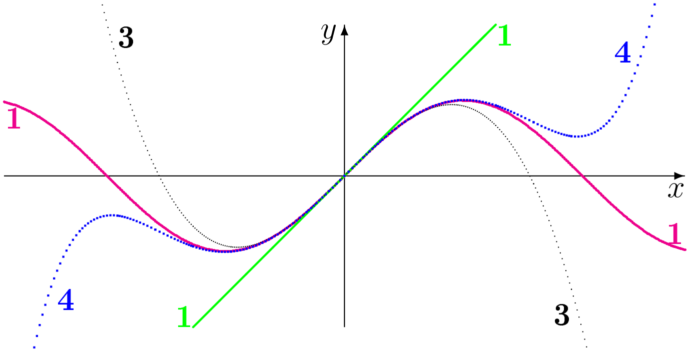
1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;

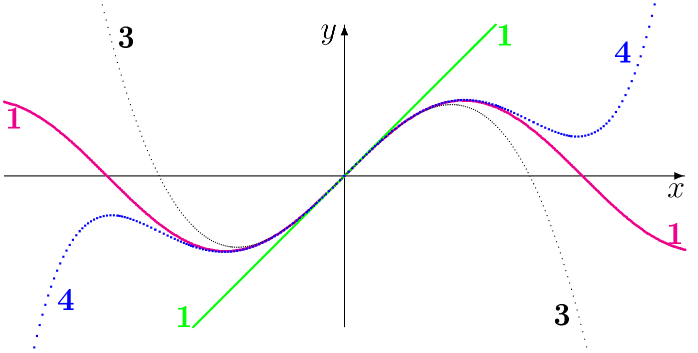
5) $S_7(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040}$



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.



1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;

5) $S_7(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} = S_8(x)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

XVIII.5.4. Теорема о коэффициентах ряда Тейлора

Теорема 81. *Пусть в некоторой окрестности точки* x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Тогда* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$.

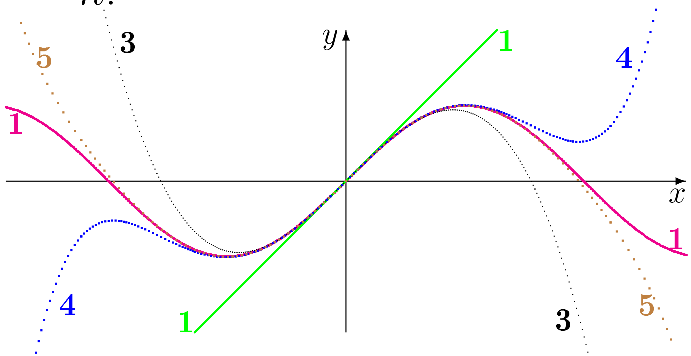
1) график $y = \sin x$;

2) $S_1(x) = x = S_2(x)$;

3) $S_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} = S_4(x)$;

4) $S_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = S_6(x)$;

5) $S_7(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} = S_8(x)$.



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^n(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^n(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Рассмотрим пример?

XIX. Приложения

XIX.1. Суммы некоторых числовых рядов

В таблице 4 приведены значения сумм некоторых числовых рядов.

Таблица 4

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2}$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{3}{4}$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$		$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$

XIX.2. Разложение в ряды Тейлора некоторых элементарных функций

- $(1+x)^\alpha = 1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\prod\limits_{m=1}^{k}(\alpha - m + 1)}{k!}x^k, \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \text{если} \quad \alpha \in \mathbb{N}, \\ x \in (-1;\ 1], & \text{если} \quad \alpha \notin \mathbb{N}; \end{cases}$
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}x^k, \quad x \in (-1;\ 1];$
- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}x^k, \qquad \operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$

XIX.3. Эндоструктурные и экзоструктурные модели

Эндоструктурная модель описывает «устройство» моделируемого объекта в ситуации, когда связи «внешней среды» с моделируемым объектом (прототипом) не рассматриваются или предельно свернуты.

XIX.3. Эндоструктурные и экзоструктурные модели

Эндоструктурная модель описывает «устройство» моделируемого объекта в ситуации, когда связи «внешней среды» с моделируемым объектом (прототипом) не рассматриваются или предельно свернуты.

Экзоструктурная модель описывает устройство объекта в предположении, что моделируемый объект является составной частью некоторого «более общего» объекта, т.е. раскрываются связи прототипа с «окружающей средой».

XIX.4. Алгебраический подход к реализации стратегий

I. Система базовых стратегий.

II. Система типовых преобразований и комбинирования стратегий.

III. Механизм аппроксимирования.

(Ю.Б.Мельников)

XIX.4.1. Базовые стратегии рутинного моделирования

<table>
<tr><td>I. Стратегия алгебраического построения модели</td><td>II. Стратегия смены компонентов модели:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Предполагается, что для данного класса объектов имеется полный набор базисных элементов, типовых преобразований и известен механизм аппроксимирования</td><td>II.1. Стратегия построения модели по аналогии</td></tr>
<tr><td>II.2. Стратегия построения модели с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)</td></tr>
<tr><td>II.3. Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели</td></tr>
</table>

XIX.4.2. Стратегия алгебраического построения моделей

Стратегия алгебраического построения моделей применяется в случае, когда исполнителю известны все базовые модели, типовые преобразования и механизмы комбинирования, а также механизм аппроксимирования, достаточные для получения необходимой модели.

В качестве примера можно указать аппроксимацию функции с помощью формулы или ряда Тейлора, ряда Фурье, представление этой функции в виде сплайнов или приближённое её задание с помощью элементарных функций, параметры которых вычисляются методом наименьших квадратов.

XIX.4.2. Стратегия алгебраического построения моделей

Стратегия алгебраического построения моделей применяется в случае, когда исполнителю известны все базовые модели, типовые преобразования и механизмы комбинирования, а также механизм аппроксимирования, достаточные для получения необходимой модели.

Другим примером является проектирование строительного сооружения, основанное на использовании в качестве базисных элементов кирпичей, железобетонных блоков, балок, плит перекрытия и др.

При этом типовые комбинации и преобразования представлены

XIX.4.2. Стратегия алгебраического построения моделей

Стратегия алгебраического построения моделей применяется в случае, когда исполнителю известны все базовые модели, типовые преобразования и механизмы комбинирования, а также механизм аппроксимирования, достаточные для получения необходимой модели.

Другим примером является проектирование строительного сооружения, основанное на использовании в качестве базисных элементов кирпичей, железобетонных блоков, балок, плит перекрытия и др.

При этом типовые комбинации и преобразования представлены типовыми техническими решениями и ограничениями (СНИП, технические параметры элементов), а механизм аппроксимирования – соответствующими правилами и технологиями проектирования, и, в частности, правилами проведения расчётов.

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,
замена некоторых характеристик (например, изменение правил начисления налогов на определённый вид деятельности или изменения способа учёта результатов деятельности, скажем, когда вместо объёма произведённой продукции учитывается объём продаж произведённой продукции или объём заказов на неё),

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,
замена некоторых характеристик;
замена каких-то отношений (допустим, перевод подразделения в подчинение другой структуре или изменение приоритетов в отчётности подразделений или должностных лиц)

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,
замена некоторых характеристик;
замена каких-то отношений;
замена элементов интерфейсного компонента (допустим, резкое повышение успеваемости в группе при прежних методиках обучения и прежнем способе оценивания его качества можно трактовать как

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,
замена некоторых характеристик;
замена каких-то отношений;
замена элементов интерфейсного компонента (допустим, резкое повышение успеваемости в группе при прежних методиках обучения и прежнем способе оценивания его качества можно трактовать как изменение отношения студентов к обучению,

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,
замена некоторых характеристик;
замена каких-то отношений;
замена элементов интерфейсного компонента (допустим, резкое повышение успеваемости в группе при прежних методиках обучения и прежнем способе оценивания его качества можно трактовать как снижение требований к уровню подготовки,

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Примерами применения стратегии смены компонентов модели являются:
повышение проходимости грузовика за счёт замены заднего ведущего колеса автомобиля на тележку с катками, на которые натянута гусеница,
замена некоторых характеристик;
замена каких-то отношений;
замена элементов интерфейсного компонента (допустим, резкое повышение успеваемости в группе при прежних методиках обучения и прежнем способе оценивания его качества можно трактовать как неадекватность педагогических измерений).

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

В математике как применение этой стратегии можно рассматривать представление векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ в виде

формального детерминанта: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] =$.

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

В математике как применение этой стратегии можно рассматривать представление векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ в виде формального детерминанта: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

В математике как применение этой стратегии можно рассматривать представление векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ в виде формального детерминанта: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

В строгом смысле это не детерминант, так как

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

В математике как применение этой стратегии можно рассматривать представление векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ в виде формального детерминанта: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

В строгом смысле это не детерминант, так как элементы первой строки не являются числами, но формальное раскрытие детерминанта приводит к верной формуле векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = (a_y b_z - a_z b_y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

В математике как применение этой стратегии можно рассматривать представление векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ в виде формального детерминанта: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

В данном примере был изменён интерфейсный компонент, так как в определителе в качестве переменных $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ подставляются не числа, а векторы.

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Как примеры применения стратегии смены компонентов модели можно рассматривать замену типа двигателя в автомобиле и изменение полномочий должностного лица.

XIX.4.3. Стратегия смены компонентов модели

Стратегия смены компонентов модели основана на идее повышения адекватности имеющейся модели за счёт замены некоторых элементов носителя модели.

Мы покажем, что для рутинного построения модели стратегию смены компонентов модели можно представить в виде комбинации трёх стратегий:

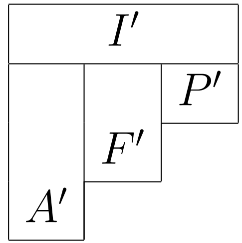
стратегии построения модели по аналогии;

стратегии построения модели с помощью смены ролей и приоритетов;

стратегии итерационно-аппроксимационного построения модели.

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии

Имеется некоторая модель.

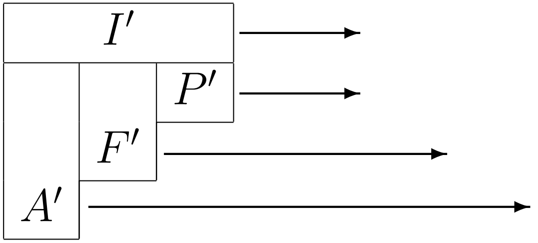


Известная модель

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии

Имеется некоторая модель.

Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.



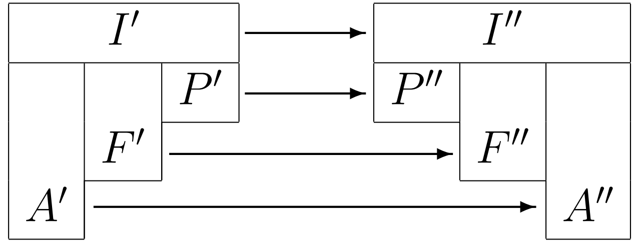
Известная модель

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии

Имеется некоторая модель.

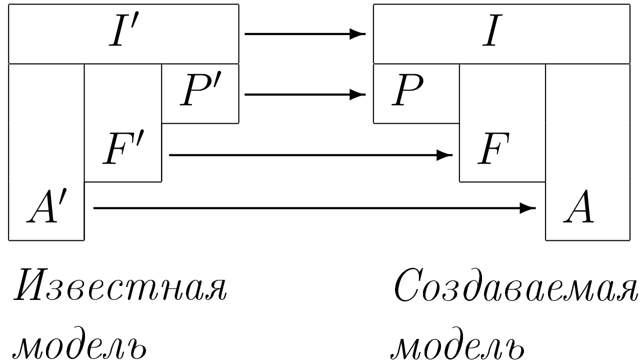
Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.

Рассмотрим ситуацию, когда часть этих объектов могут рассматриваться как компоненты какой-либо модели.



Известная модель *Создаваемая модель*

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии



Имеется некоторая модель.

Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.

Рассмотрим ситуацию, когда часть этих объектов могут рассматриваться как компоненты какой-либо модели.

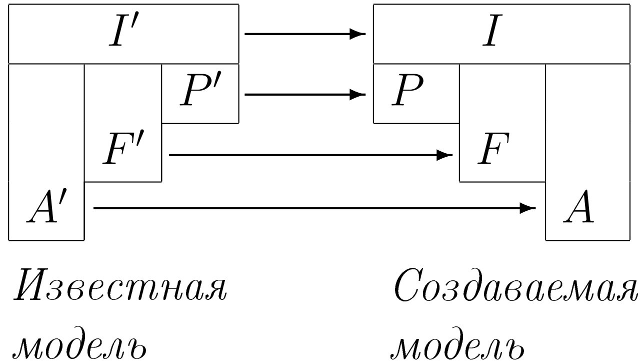
Завершив построение, получаем требуемую модель.

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии

Имеется некоторая модель.

Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.

Рассмотрим ситуацию, когда часть этих объектов могут рассматриваться как компоненты какой-либо модели.



Завершив построение, получаем требуемую модель.

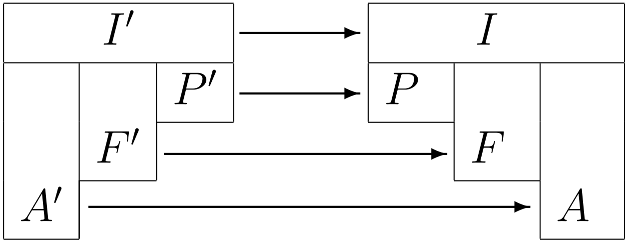
Например, очевидна аналогия между свойствами сложения чисел и свойствами сложения векторов плоскости. Эта аналогия была обогащена операцией умножения векторов комплексной плоскости (при котором модули перемножаются, а аргументы суммируются), в результате чего была получена одна из моделей поля комплексных чисел.

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии

Имеется некоторая модель.

Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.

Рассмотрим ситуацию, когда часть этих объектов могут рассматриваться как компоненты какой-либо модели.



Известная модель

Создаваемая модель

Завершив построение, получаем требуемую модель.

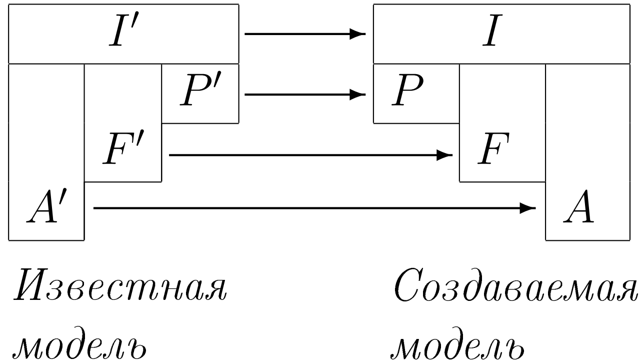
Изменив традиционное определение умножения многочленов от переменной i (с помощью отношения $i^2 = -1$), получили другую модель поля комплексных чисел.

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии

Имеется некоторая модель.

Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.

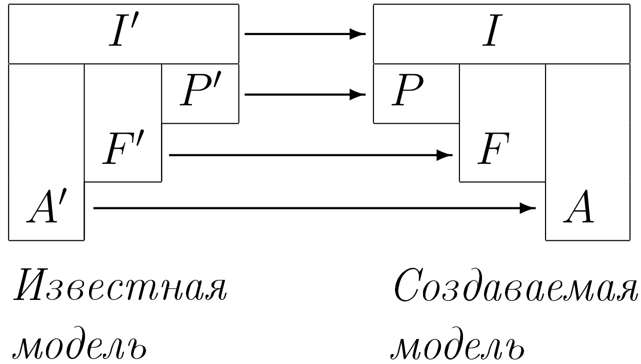
Рассмотрим ситуацию, когда часть этих объектов могут рассматриваться как компоненты какой-либо модели.



Завершив построение, получаем требуемую модель.

Другим примером применения стратегии построения модели по аналогии является создание летательных аппаратов на основе наблюдений за полетом птиц. поля комплексных чисел.

XIX.4.4. Стратегия построения моделей по аналогии



Имеется некоторая модель.

Допустим, установлены связи с некоторыми объектами.

Рассмотрим ситуацию, когда часть этих объектов могут рассматриваться как компоненты какой-либо модели.

Завершив построение, получаем требуемую модель.

При создании летательных аппаратов на основе наблюдений за полетом птиц изменения состояли в применении другого механизма для обеспечения горизонтальной скорости (воздушный винт или реактивный двигатель), поскольку попытки использовать для этого машущий полет, характерный для птиц, не привёл к успеху.

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

Например, имеется образ, потом по нему подыскивается прообраз, из аксиоматики делаются выводы и потом оценивается адекватность выводов с использованием известных эталонных моделей или эталонных моделей эмпирического характера.

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

Примерами являются:

доказательство от противного;

построение примеров для поиска доказательства или опровержения (построение контрпримера).

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

Как реализацию этой стратегии можно рассматривать ситуацию, когда подбираются объекты, для которых может быть применено открытое свойство, метод, теория и др.

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

Применение воздушного винта для обеспечения горизонтальной скорости аэросаней и воздушных судов (дирижаблей и самолетов) можно рассматривать как применение стратегии смены ролей и приоритетов.

В самом деле, первоначально воздушный винт применялся М.В.Ломоносовым в метеорологических приборах для измерения скорости ветра.

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

Применение воздушного винта для обеспечения горизонтальной скорости аэросаней и воздушных судов (дирижаблей и самолетов) можно рассматривать как применение стратегии смены ролей и приоритетов.

В данном случае применена инверсия, состоящая в том, что вместо того, чтобы преобразовывать энергию ветра в кинетическую энергию вращающегося винта, осуществляется обратное преобразование – кинетической энергии вращающегося винта в кинетическую энергию ветра.

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

В процессе написания компьютерной программы, проектирования рабочего места или инструмента разработчик должен периодически представлять себя пользователем программы или работником, использующим данное рабочее место или инструмент. Таким образом, программист или проектировщик должен периодически менять роль (хотя бы мысленно).

XIX.4.5. Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии)

Стратегия построения моделей с помощью смены ролей и приоритетов (в частности, инверсии) можно трактовать как «взгляд с другой стороны».

Лампочка накаливания имеет малый коэффициент полезного действия, но если использовать его в качестве нагревательного прибора (например, для обогрева аквариума), то в новой роли лампочка накаливания может оказаться весьма эффективным прибором.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационног построения модели

Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели обычно применяется в ситуации, когда уже имеется некоторая модель, уровень адекватности которой пока недостаточен, но имеется перспектива получения требуемой модели путём последовательных улучшений с помощью типовых преобразований, правила выбора которых известны исполнителю.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационног построения модели

Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели обычно применяется в ситуации, когда уже имеется некоторая модель, уровень адекватности которой пока недостаточен, но имеется перспектива получения требуемой модели путём последовательных улучшений с помощью типовых преобразований, правила выбора которых известны исполнителю.

Например, в процессе создания картины или скульптуры художник или скульптор шаг за шагом создают произведение искусства, но в случае художника итерация заключается в добавлении каких-либо деталей, а у скульптора, наоборот, в отсечении.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели

Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели обычно применяется в ситуации, когда уже имеется некоторая модель, уровень адекватности которой пока недостаточен, но имеется перспектива получения требуемой модели путём последовательных улучшений с помощью типовых преобразований, правила выбора которых известны исполнителю.

Другим примером является построение объекта «сверху вниз», с помощью постепенного уточнения деталей, например, замены «чёрных ящиков» на реальные устройства или их модели.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели

Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели обычно применяется в ситуации, когда уже имеется некоторая модель, уровень адекватности которой пока недостаточен, но имеется перспектива получения требуемой модели путём последовательных улучшений с помощью типовых преобразований, правила выбора которых известны исполнителю.

Как применение итерационно-аппроксимационного построения модели можно рассматривать постепенную модернизацию, например, модернизацию поршневых истребителей, проводившуюся во время второй мировой войны путем постепенного усиления вооружения, установки всё более мощных двигателей, улучшения аэродинамики, применения материалов с более высокими характеристиками.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели

Стратегия итерационно-аппроксимационного построения модели обычно применяется в ситуации, когда уже имеется некоторая модель, уровень адекватности которой пока недостаточен, но имеется перспектива получения требуемой модели путём последовательных улучшений с помощью типовых преобразований, правила выбора которых известны исполнителю.

В программировании примером является генетический алгоритм оптимизации, когда из начального случайного приближения получают все более и более хорошее решение с применением принципов, основанных на идеях эволюции (мутация, скрещивание). Похожим образом работает алгоритм локального поиска.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационног построения модели

В случае, когда для некоторой деятельности имеется полная система базовых стратегий, реализация стратегии итерационно-аппроксимационного построения модели для построения плана деятельности состоит в поэтапном применении алгебраического подхода: анализе условий, сложившихся в результате очередного применения базовой стратегии, выбора базовой стратегии, применение которой является наиболее перспективным в этих условиях, применение выбранной стратегий и т.д. В частности, это относится и к рутинному построению модели, рассматриваемому в данном разделе.

XIX.4.6. Стратегия итерационно-аппроксимационног построения модели

Важным частным случаем *стратегии итерационно-аппроксимационного построения модели* является **стратегия обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели**.

XIX.4.7. Утверждение о стратегиях рутинного моделирования

Утверждение XIX.1. *Применение стратегии построения модели, проводимое в условиях выполнения постулата цели моделирования, постулата изменений модели, постулата алгебраичности, постулата полимодельности и постулата структуры модели (т.е. проводимого без использования инсайта) можно представить в виде комбинации применения стратегии алгебраического построения модели и стратегии смены компонентов модели, причём применение последней можно представить в виде комбинации применения стратегии построения модели по аналогии, стратегии построения модели с помощью смены ролей и приоритетов и стратегии итерационно-аппроксимационного построения модели, см.* ***табл.5.***

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;

2) стратегия поиска аналогии;

3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;

4) стратегия предвкушения;

5) стратегия построения модели;

6) стратегия обогащения и редуцирования модели;

7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Перейти к формулировке утверждения о базовых исследовательских стратегиях?

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций применяется для формирования понятийного аппарата и других научных аппаратов, формирования гипотез, накопления опыта.

Типовой план состоит в выделении некоторые характеристики и приоритетном изучении ситуаций, в которых эти характеристики приобретают экстремальные значения.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций применяется для формирования понятийного аппарата и других научных аппаратов, формирования гипотез, накопления опыта.

Примеры введения понятий: прямой угол, прямоугольный треугольник, прямоугольник (экстремальное значение угла между прямыми), равнобедренный треугольник, ромб (экстремальная ситуация сравнения длин сторон), ядро линейного оператора, подпространство, бесконечно малая и бесконечно большая величина, линейные уравнения и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций применяется для формирования понятийного аппарата и других научных аппаратов, формирования гипотез, накопления опыта.

Примеры обогащения аналитического аппарата: теоремы о треугольнике (теорема Пифагора, теорема синусов и др., свойства равнобедренного треугольника), теоремы о ядре линейного оператора (подпространство, методы нахождения), теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия поиска аналогии соответствует двум основным функциям науки объяснять и предсказывать. После выявления общих особенностей сравниваемых объектов и установления возможных аналогий применяется метод аналогий.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов применяется для обогащения понятийного аппарата и других аппаратов математики. Обычно является «прелюдией» к стратегии построения модели и, как правило, применяется в сочетании со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов применяется для обогащения понятийного аппарата и других аппаратов математики. Обычно является «прелюдией» к стратегии построения модели и, как правило, применяется в сочетании со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций.

Примеры применения для обогащения понятийного аппарата: введение понятий медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника, линия и поверхность (как множество точек, отождествляемых с радиусом-вектором), базис линейного пространства, сравнение бесконечно малых и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов применяется для обогащения понятийного аппарата и других аппаратов математики. Обычно является «прелюдией» к стратегии построения модели и, как правило, применяется в сочетании со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций.

Примеры применения для обогащения аналитического аппарата: теоремы о пересечении трех линий треугольника, уравнения линии и поверхности, критерий базиса линейного пространства, касательная к графику функции и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия предвкушения применяется для формирования гипотез и доказательства теорем, решения задач, контроля адекватности моделей.

Примеры:

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия предвкушения применяется для формирования гипотез и доказательства теорем, решения задач, контроля адекватности моделей.

Примеры: введение переменных для сведения требования задачи к уравнениям, поиск решения методом восходящего анализа.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия построения модели является одной из наиболее сложных и наиболее универсальных стратегий исследования. Можно сказать, что все остальные стратегии входят в эту стратегию в том или ином качестве, ибо целью любого исследования является построение и/или исследование модели.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия построения модели является одной из наиболее сложных и наиболее универсальных стратегий исследования. Можно сказать, что все остальные стратегии входят в эту стратегию в том или ином качестве, ибо целью любого исследования является построение и/или исследование модели.

Как применение стратегии построения модели можно рассматривать введение стандартных способов задания объектов: функции — таблицей, графиком и формулой, линейного оператора в конечномерном линейном пространстве — матрицей и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия обогащения и редуцирования модели разработана Ю.Б.Мельниковым и Надеждой Николаевной Вечтомовой.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия обогащения и редуцирования модели разработана Ю.Б.Мельниковым и Надеждой Николаевной Вечтомовой.

При развитии теории является одной из возможных альтернатив стратегии перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов. В школьном курсе геометрии приводит к понятиям «медиана», «биссектриса», «вписанная окружность» и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов выделена Ксенией Сергеевной Поторочиной.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов выделена Ксенией Сергеевной Поторочиной.

Проявляется, например, в том, что разработчик программного обеспечения представляет себя пользователем или клиентом, которого обслуживает пользователь.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

Например, введение операции «вычитание» можно рассматривать как результат применения этой стратегии.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

операция «сумма»

$$x \quad + \quad y \quad = \quad z$$

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

$$\begin{array}{ccccc} \text{известное} & & & & \\ \downarrow & & \text{известное} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ x & + & y & = & z \end{array}$$

операция «сумма»

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

$$\begin{array}{lllll} \text{известное} & & & & \\ \downarrow & & \text{известное} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \text{искомое} \\ x & + & y & = & z \end{array}$$

операция «сумма»

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{известное} & & & & \\
\downarrow & & \text{известное} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \text{искомое} \\
x & + & y & = & z \\
\uparrow & & & & \text{известное} \\
\uparrow & & & & \\
\text{известное} & & & &
\end{array}$$

операция «сумма»

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{известное} & & & & \\
\downarrow & & \text{известное} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \text{искомое} \\
x & + & y & = & z \\
\uparrow & & \uparrow & & \text{известное} \\
\uparrow & & \text{искомое} & & \\
\text{известное} & & & &
\end{array}
\qquad \text{операция «сумма»}
$$

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

известное					
$\downarrow$		известное			
$\downarrow$		$\downarrow$		искомое	операция «сумма»
x	$+$	y	$=$	z	
$\uparrow$		$\uparrow$		известное	операция «вычитание»
$\uparrow$		искомое			
известное					

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

Уравнение также можно рассматривать как результат применения этой стратегии.

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

Уравнение также можно рассматривать как результат применения этой стратегии.

При изучении элементарных функций сначала рассматривается процедура нахождения значения функции:

$$f(\underbrace{x}_{\text{известное}}) = \underbrace{y}_{\text{искомое}}.$$

XIX.4.8. Базовые исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения и редуцирования модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

Уравнение также можно рассматривать как результат применения этой стратегии.

При изучении элементарных функций сначала рассматривается процедура нахождения значения функции:

$$f(\underbrace{x}_{\text{известное}}) = \underbrace{y}_{\text{искомое}}.$$

При смене ролей переменных x и y получаем уравнение.

XIX.4.9. Утверждение о базовых исследовательских стратегиях

Утверждение XIX.2. *Если стратегия S используется для создания плана исследования, для которого выполняются постулаты исследовательской цели, полимодельности, алгебраичности, характеристичности, целенаправленности, причем план создается без использования* ***инсайта****, то реализация стратегии S может быть представлена в виде комбинации реализаций базовых исследовательских стратегий: стратегии приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций, стратегии поиска аналогии, стратегии предвкушения, стратегии перехода от изучения одного объекта к исследованию системы объектов, стратегии построения модели, стратегии обогащения и редуцирования модели, стратегии смены ролей и приоритетов.*

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

<table>
<tr><td rowspan="3">адаптации известной модели</td><td>обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели</td></tr>
<tr><td>смены ролей и приоритетов</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

<table>
<tr><td rowspan="3">адаптации известной модели</td><td>обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели</td></tr>
<tr><td>смены ролей и приоритетов</td></tr>
<tr><td>комбинирования моделей</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

<table>
<tr><td rowspan="3">адаптации известной модели</td><td>обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели</td></tr>
<tr><td>смены ролей и приоритетов</td></tr>
<tr><td>комбинирования моделей</td></tr>
<tr><td rowspan="3">построения новой модели</td><td>поиска и использования аналогии</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	поиска и использования аналогии
	перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	поиска и использования аналогии
	перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов
	построения модели с носителем из характеристик, отношений или составляющих интерфейсного компонента некоторой модели

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	поиска и использования аналогии
	перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов
	построения модели с носителем из характеристик, отношений или составляющих интерфейсного компонента некоторой модели
построения и использования моделей адекватности	

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	поиска и использования аналогии
	перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов
	построения модели с носителем из характеристик, отношений или составляющих интерфейсного компонента некоторой модели
построения и использования моделей адекватности	предвкушения

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	поиска и использования аналогии
	перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов
	построения модели с носителем из характеристик, отношений или составляющих интерфейсного компонента некоторой модели
построения и использования моделей адекватности	предвкушения
	приоритетного анализа «экстремальных» ситуаций

XIX.4.10. Система базовых стратегий проектирования

адаптации известной модели	обогащения, редуцирования, абстрагирования или конкретизации модели
	смены ролей и приоритетов
	комбинирования моделей
построения новой модели	поиска и использования аналогии
	перехода от проектирования из отдельных деталей к использованию узлов и агрегатов
	построения модели с носителем из характеристик, отношений или составляющих интерфейсного компонента некоторой модели
построения и использования моделей адекватности	предвкушения
	приоритетного анализа «экстремальных» ситуаций
	выявления и использования ограничений

Список литературы

[1] *Мельников, Ю.Б.* Алгебра и теория чисел. Изд-е 4-е, испр. и доп. [Электронный ресурс]/ Ю. Б. Мельников/ Издательство УрГЭУ, Екатеринбург, 2010 г., 70 уч.-изд.л. [режим доступа свободный] http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html

[2] Мельников, Ю.Б. Элементарная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие/ Ю. Б. Мельников ; М-во образования и науки РФ, Урал. гос. экон. ун-т. Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2014, 27 уч.-изд.л. http://lib.usue.ru/resource/free/14/MelnikovAlgebra5/index.html

[3] Мельников, Ю.Б. Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности / Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина/ Ярославский педагогический вестник, 2010, № 3: Физико-математические и естественные науки. с.19-24.

[4] Мельников Ю.Б. Алгебраический подход к созданию учебных презентаций по математике / Ю.Б. Мельников / Образование и наука, № 5(84), 2011, с. 129-141.

[5] Мельников Ю.Б. Мультиплатформенная система подготовки обучающих ресурсов, основанная на реализации алгебраического подхода/ Ю.Б. Мельников, Н.В. Мельников, А.О. Богданов/ Ярославский педагогический вестник — 2013 — № 3 — Том III (Естественные науки).— С. 80-83.

Спасибо

за внимание!

e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com.ru, melnikov@k66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Перейти к примерам и задачам?

Компьютерная верстка *Ю. Б. Мельников*

Подписано в свет 31.03.2015. Поз. 30. Уч.-изд. л. 26,6.

Издательство Уральского государственного экономического университета
620144, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта/Народной Воли, 62/45