Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы векторной алгебры

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2010

Основы векторной алгебры

На базе пособия «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», авторы:

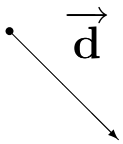
Юрий Борисович Мельников,

Ксения Сергеевна Поторочина,

Наталья Валентиновна Ткаленко,

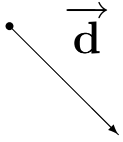
Владимир Платонович Кочнев.

I. Модели векторной алгебры

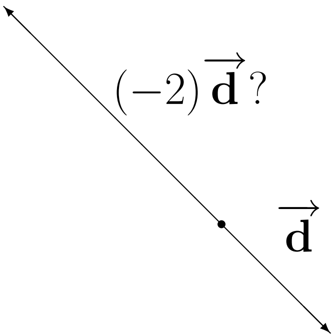


I. Модели векторной алгебры

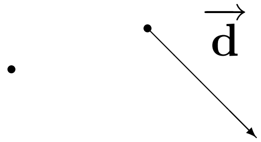
$(-2)\overrightarrow{\mathbf{d}}\,?$



I. Модели векторной алгебры

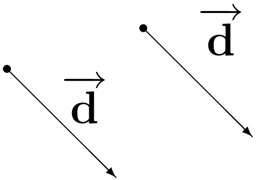


I. Модели векторной алгебры



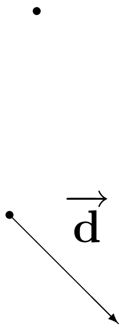
Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

I. Модели векторной алгебры



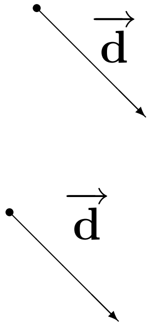
Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

I. Модели векторной алгебры



Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

I. Модели векторной алгебры



Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

I. Модели векторной алгебры

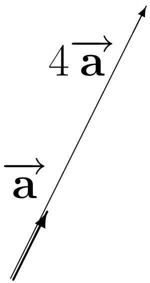
$\overrightarrow{\mathbf{a}}$

I. Модели векторной алгебры

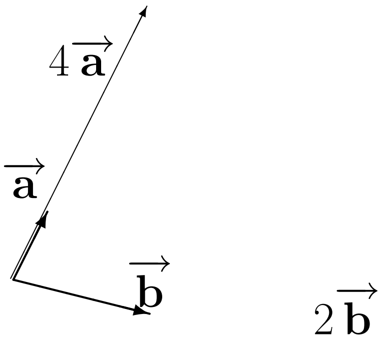
$4\overrightarrow{\mathbf{a}}$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}$

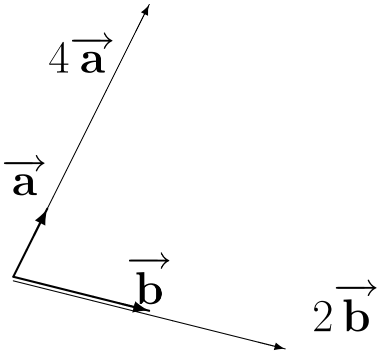
I. Модели векторной алгебры



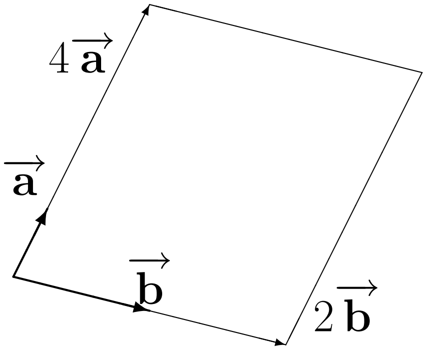
I. Модели векторной алгебры



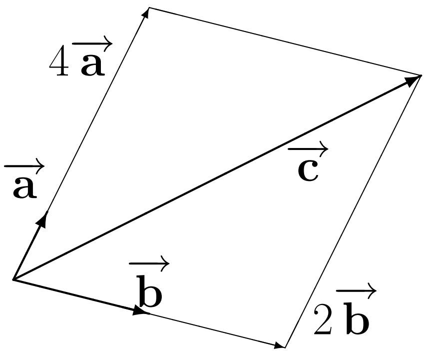
I. Модели векторной алгебры



I. Модели векторной алгебры

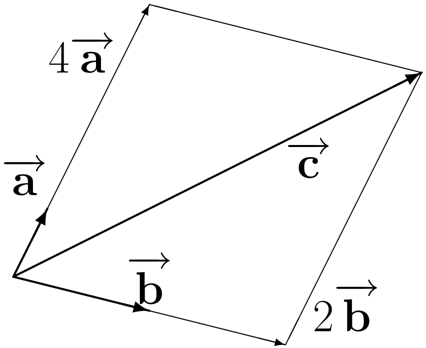


I. Модели векторной алгебры



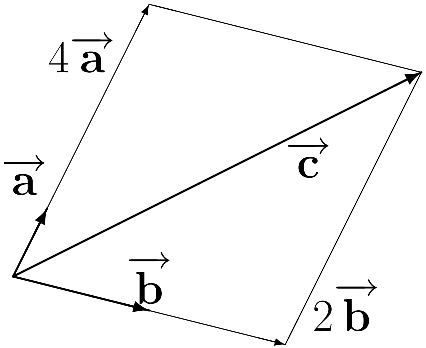
I. Модели векторной алгебры

$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = ?\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + ?\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

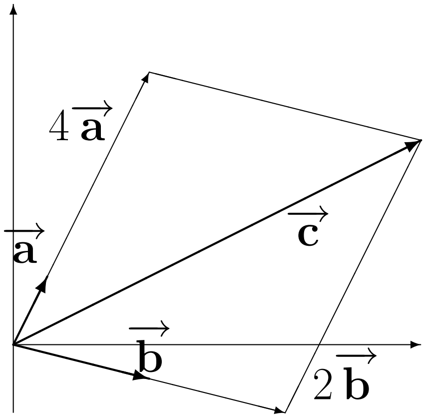


I. Модели векторной алгебры

$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$



I. Модели векторной алгебры

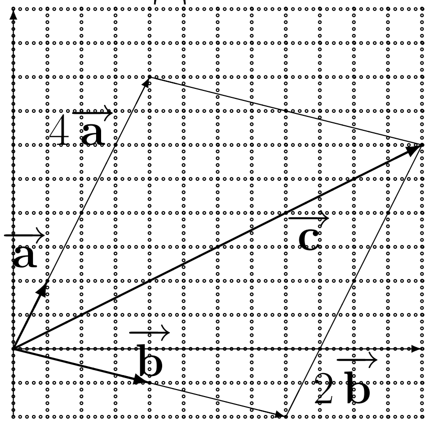


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(?;\ ?)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(?;\ ?)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

I. Модели векторной алгебры

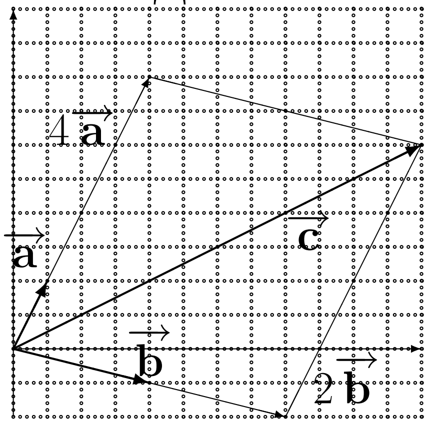


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(?;\ ?)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(?;\ ?)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

I. Модели векторной алгебры

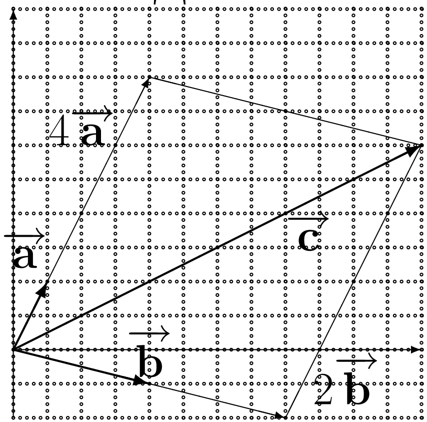


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(?;\ ?)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

I. Модели векторной алгебры

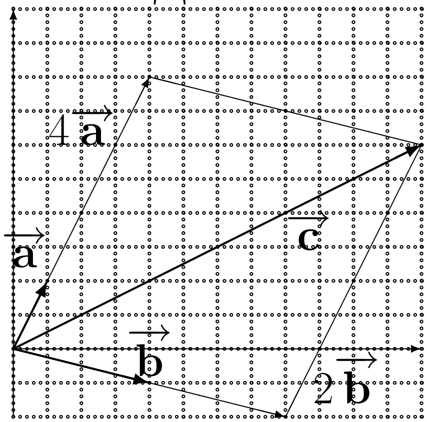


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

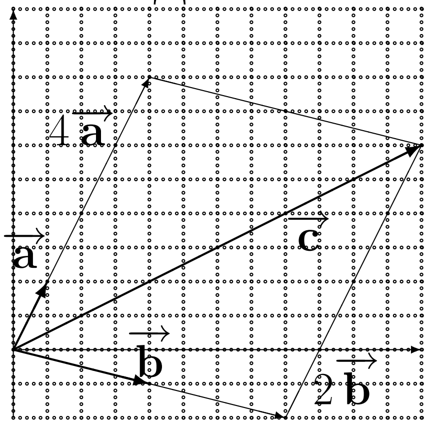
I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(12;\ 6)$,

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

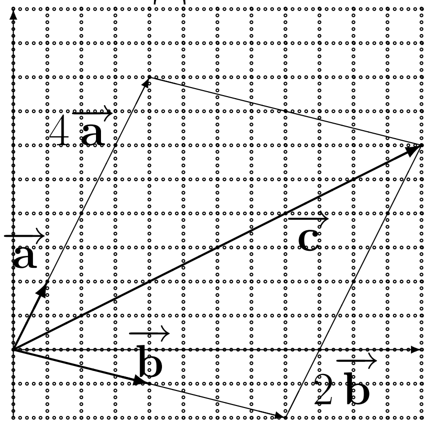
$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= ?(1;\ 2) + ?(4;\ -1)$

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

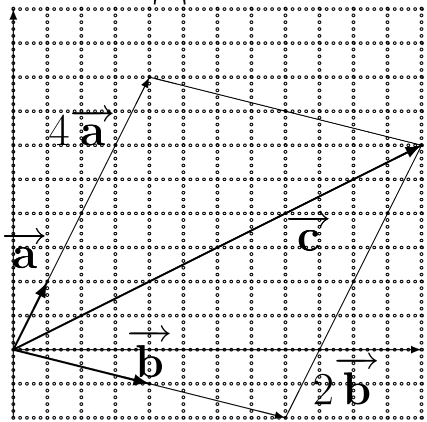
$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= 4(1;\ 2) + 2(4;\ -1)$

I. Модели векторной алгебры

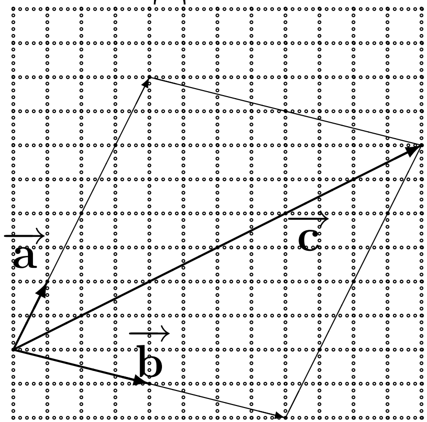


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= ?(1;\ 2) + ?(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры

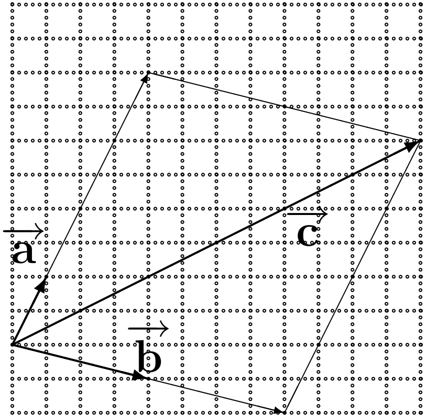


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha \overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

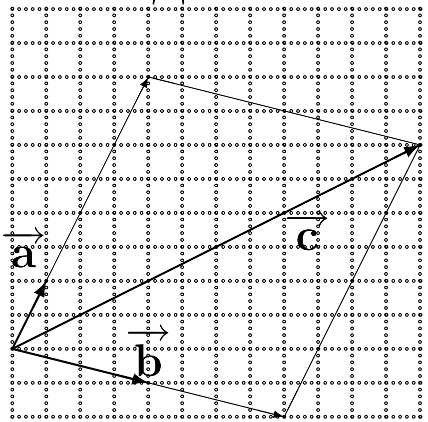
$(\mathbf{12};\ 6) =$

$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \qquad\qquad = \mathbf{12}, \\ \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(12;\ 6)$,

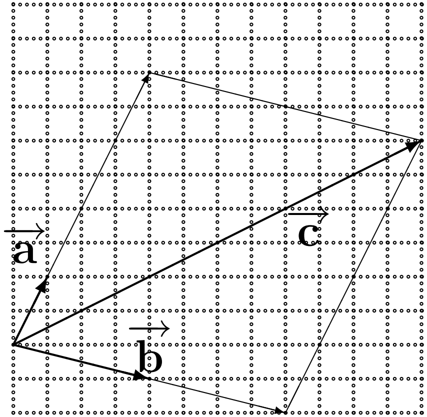
$(\mathbf{12};\ 6) =$

$= \alpha(\mathbf{1};\ 2) + \beta(\mathbf{4};\ -1)$

$$\begin{cases} \qquad\qquad = \mathbf{12}, \\ \\ \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

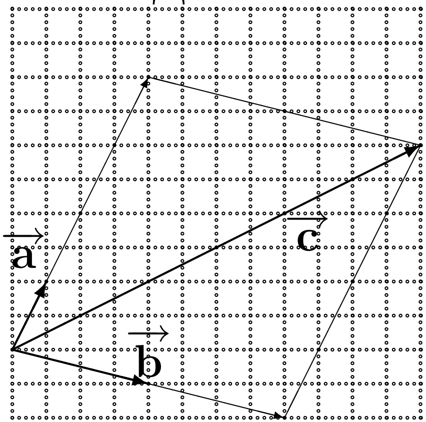
$(\mathbf{12};\ 6) =$

$= \alpha(\mathbf{1};\ 2) + \beta(\mathbf{4};\ -1)$

$$\begin{cases} \mathbf{1}\alpha + \mathbf{4}\beta = \mathbf{12}, \\ \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

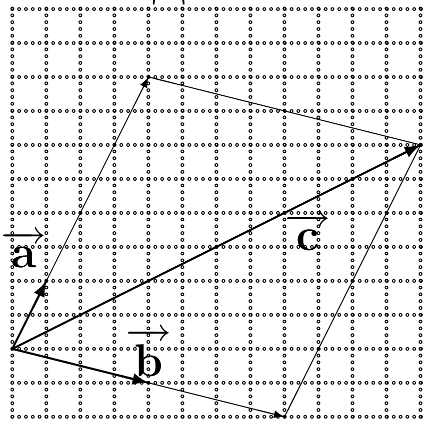
$(12;\ \mathbf{6}) =$

$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ \qquad\quad\ \ = \mathbf{6}. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

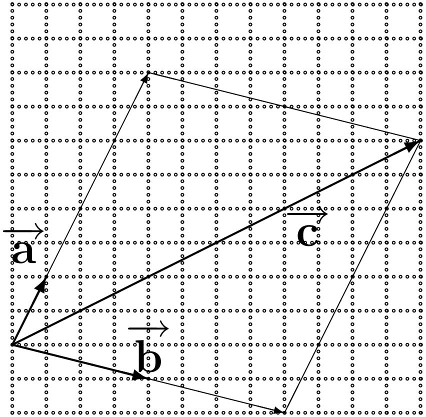
$$(12;\ \mathbf{6}) =$$

$$= \alpha(1;\ \mathbf{2}) + \beta(4;\ \mathbf{-1})$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ \qquad\quad\ = \mathbf{6}. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

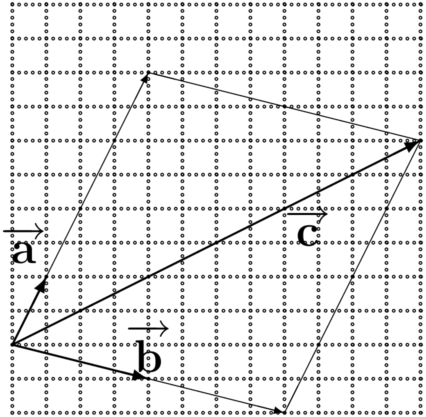
$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$$(12;\ \mathbf{6}) =$$
$$= \alpha(1;\ \mathbf{2}) + \beta(4;\ \mathbf{-1})$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ \mathbf{2}\alpha + (\mathbf{-1})\beta = \mathbf{6}. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2),\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1),$

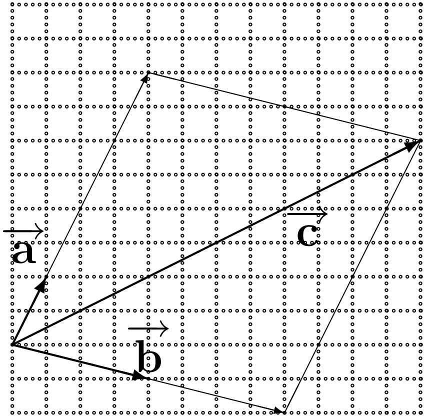
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6),$

$(12;\ 6) =$

$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6. \end{cases}$$

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

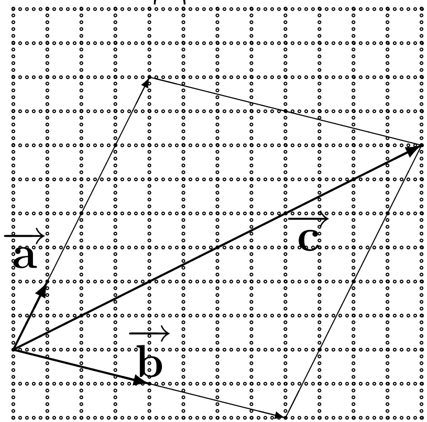
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

I. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

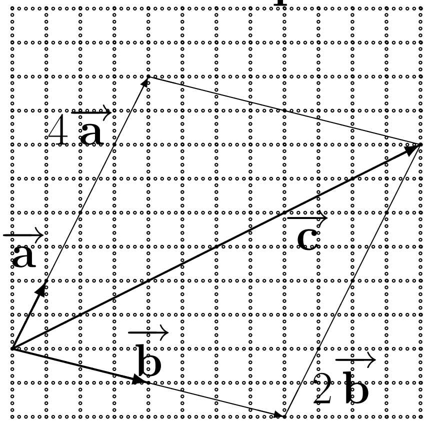
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= \mathbf{4}(1;\ 2) + \mathbf{2}(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

I.1. Векторно-геометрическая модель



Векторно-геометрическая модель

$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

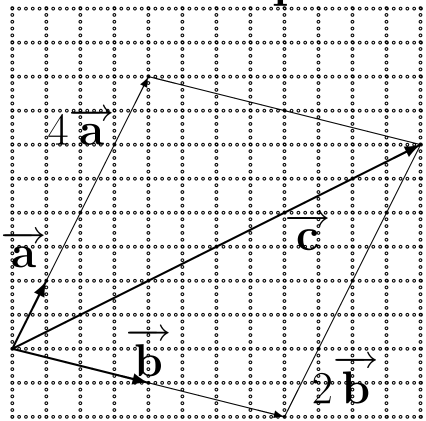
$(12;\ 6) =$

$= \mathbf{4}(1;\ 2) + \mathbf{2}(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Векторная алгебра

I.2. Векторно-символическая модель



$$\vec{\mathbf{c}} = 4\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$$

$$\left(\gamma\vec{\mathbf{a}} + \delta\vec{\mathbf{b}}\right) \perp \vec{\mathbf{c}}$$

$$\left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right) \parallel \vec{\mathbf{c}}$$

$\vec{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\vec{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\vec{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= \mathbf{4}(1;\ 2) + \mathbf{2}(4;\ -1)$

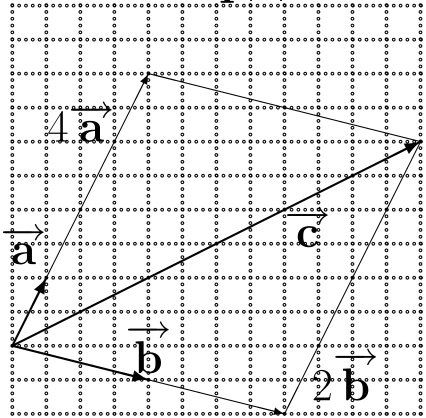
$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Векторно-геометрическая модель

Векторно-символическая модель

Векторная алгебра

I.3. Координатная модель



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$$\left(\gamma\overrightarrow{\mathbf{a}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \perp \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$$\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \parallel \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= \mathbf{4}(1;\ 2) + \mathbf{2}(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Векторно-геометрическая модель | Векторно-символическая модель | Координатная модель

Векторная алгебра

Теорема об эквивалентности минимальности системы порождающих и однозначности разложения

Однозначность и линейная независимость

Теорема о базисе прямой

Теорема о базисе плоскости

Теорема о базисе пространства

Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Координаты вектора

Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Критерий коллинеарности векторов

Переход от одной модели к другой

II. Исследовательские стратегии

Векторная алгебра и основанная на ней аналитическая геометрия фактически «убили» «традиционную» геометрию в том смысле, что геометрия из магистрального, центрального направления развития математики переместилась на периферию.

В школьном курсе математики вектор практически отождествляется с направленным отрезком. Насколько это допустимо? В каких направлениях можно развивать исследование векторов?

Один из механизмов выбора направления исследования основан на *системе исследовательских стратегий*.

II.1. Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций позволяет, например, выделить специальные типы векторов: нулевой и единичный, а также наиболее важные варианты взаимного расположения двух векторов: коллинеарность, ортогональность и компланарность векторов.

II.2. Стратегия поиска аналогии

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия поиска аналогии приводит в переносу некоторых геометрических понятий в векторную алгебру, например, понятия параллельности и перпендикулярности, перенос таких характеристик как длина, угол и др.

II.3. Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов в сочетании с другими стратегиями обеспечивает введение операций и отношений на множестве векторов и переход от изучения отдельных векторов к геометрическим фигурам.

II.4. Стратегия предвкушения

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия предвкушения, как обычно, позволяет строить гипотезы, обосновывать их или опровергать, осуществлять поиск решения задач и др. Она основана на изучении ситуации, когда цель уже достигнута, и, на основе анализа этой ситуации, определении способов достижения цели.

II.5. Стратегия построения модели

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия построения модели является источником таких направлений исследования как выделение стандартных способов задания различных объектов векторной алгебры, в частности, векторов и геометрических фигур, рассматриваемых как совокупности точек (отождествляемых с радиус-векторами этих точек), формированию других моделей векторной алгебры, моделированию операций и отношений и др.

II.6. Стратегия обогащения и редуцирования модели

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия обогащения и редуцирования модели приводит ко введению таких понятий как скалярное, векторное и смешанное произведения, операций сложения векторов и умножения вектора на число. Как применение этой стратегии можно рассматривать введение понятия компланарности векторов.

II.7. Стратегия смены ролей и приоритетов

Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при геометрической интерпретации систем уравнений и других выражений, а также при создании аналитической геометрии и решении задач.

III. Геометрическая модель векторной алгебры

Стандартные способы задания вектора

Операции векторной алгебры и другие функции на векторах

III.1. Стандартные способы задания вектора

Понятие направленного отрезка является *основой* определения вектора. Вектор является абстрактным понятием. Основными характеристиками вектора являются ***длина*** и ***направление***.

Конкретный направленный отрезок рассматривается как *представитель* вектора. Геометрическая работа с вектором основана на процедуре откладывания вектора от точки.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A*. Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A'*, а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки****.*

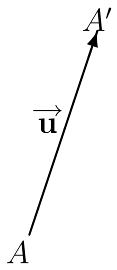


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A. *Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A', *а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки***.

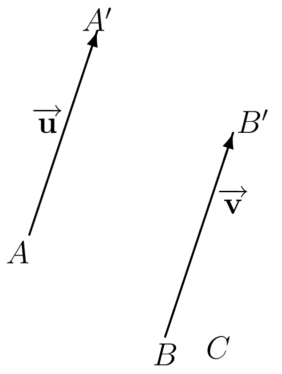


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A*. Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A'*, а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки****.*

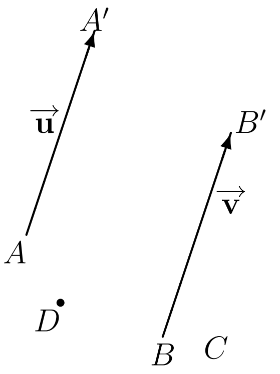


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A. *Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A', *а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки***.

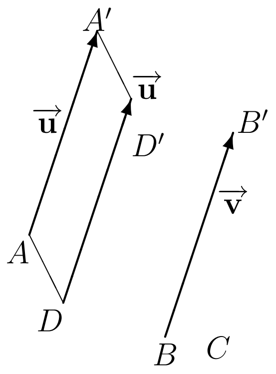


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A. *Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A', *а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки***.

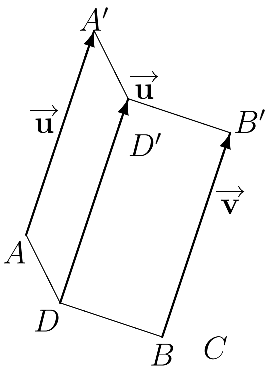


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A. *Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A', *а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки***.

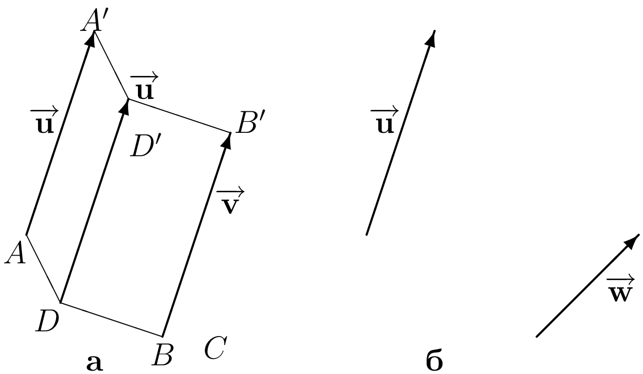


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A*. Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A'*, а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки****.*

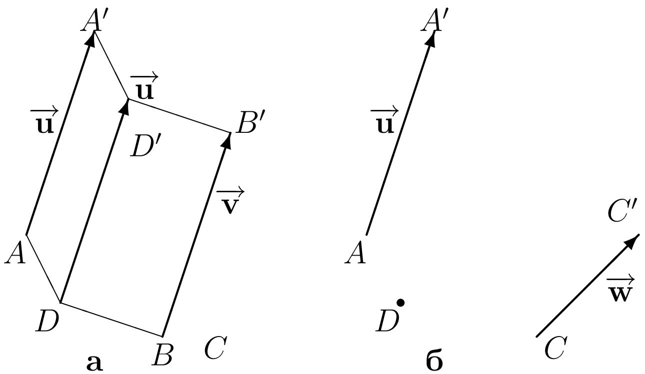


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A. *Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A', *а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки***.

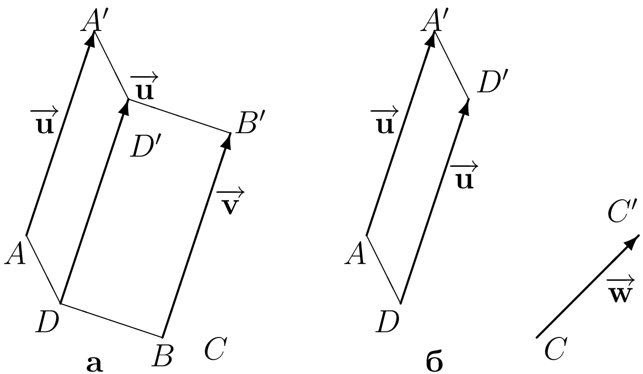


Рисунок к определению равенства векторов.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A*. Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A'*, а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки****.*

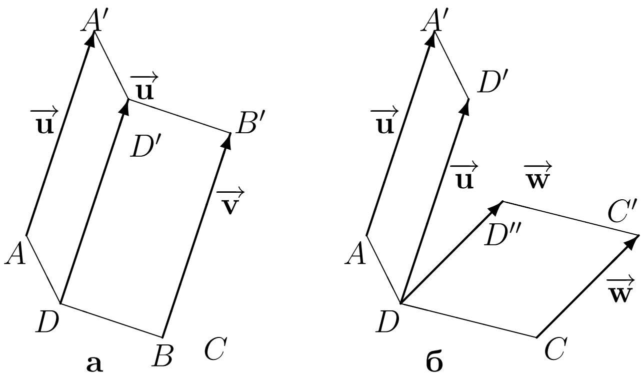


Рисунок к определению равенства векторов. Векторы перенесены из точек A, B и соответственно C в точку D.

III.2. Соглашение о направленном отрезке

Соглашение 1. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *— некоторый вектор, то стандартный переход к конкретному направленному отрезку* AA' *осуществляется откладыванием вектора* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *от точки* A*. Если* AA' *— направленный отрезок, то* $\overrightarrow{AA'}$ *— соответствующий вектор. В частности, направленный отрезок* AA' *идет из точки* A *в точку* A'*, а вектор* $\overrightarrow{AA'}$ ***может быть отложен от любой точки****.*

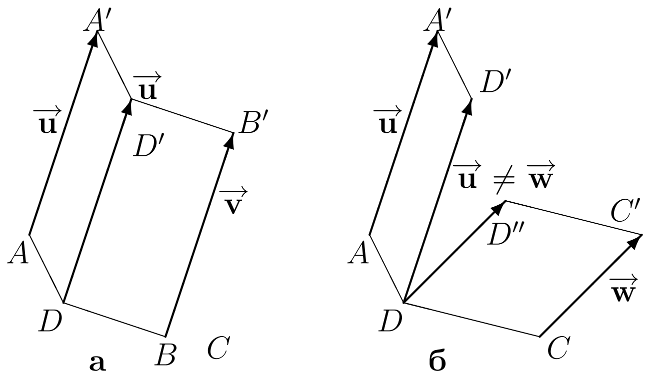
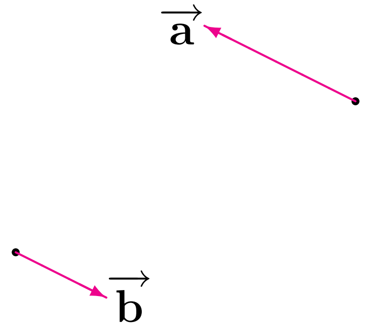


Рисунок к определению равенства векторов. Векторы перенесены из точек A, B и соответственно C в точку D.

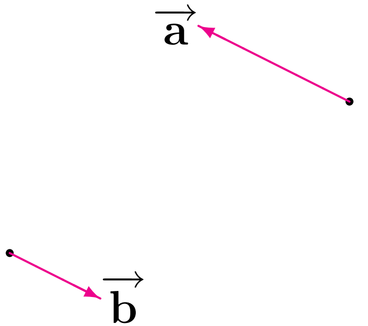
III.3. Коллинеарность векторов



В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

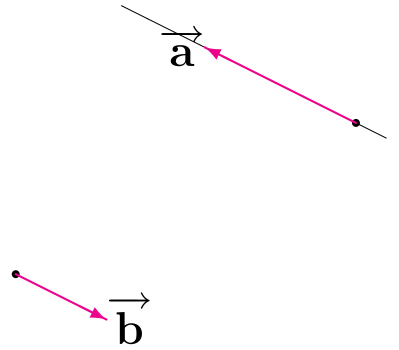
Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.



В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

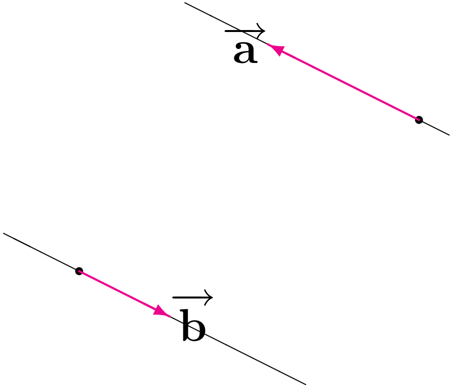
Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.



В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

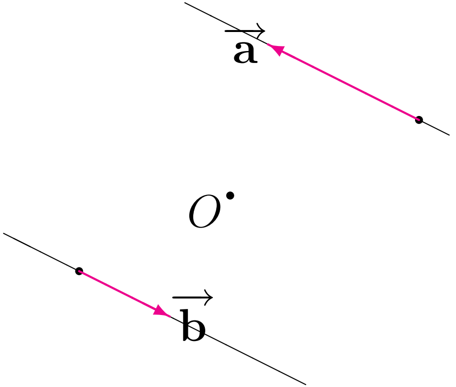


В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

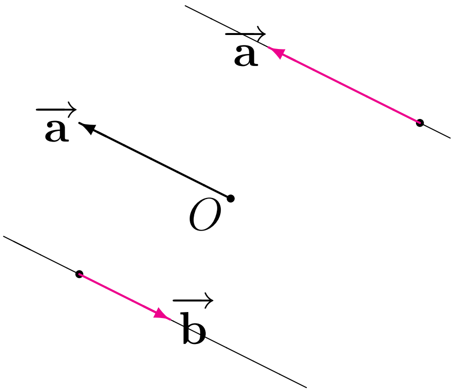
Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.



В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.
Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.

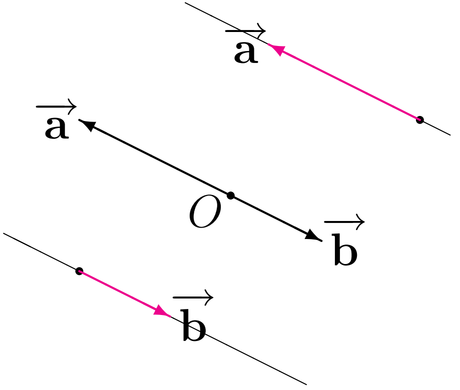


В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.



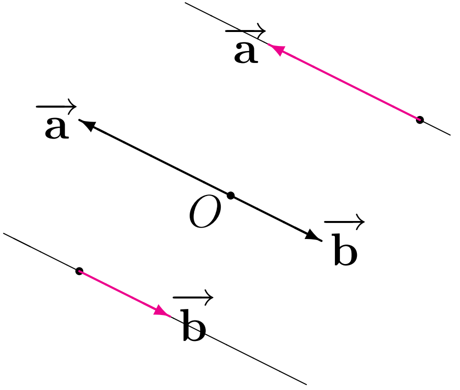
В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.

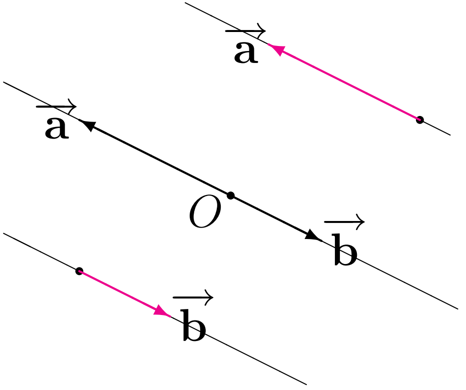
Полученные направленные отрезки теперь лежат на *одной и той же прямой*.



В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.
Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.
Полученные направленные отрезки теперь лежат на *одной и той же прямой*.



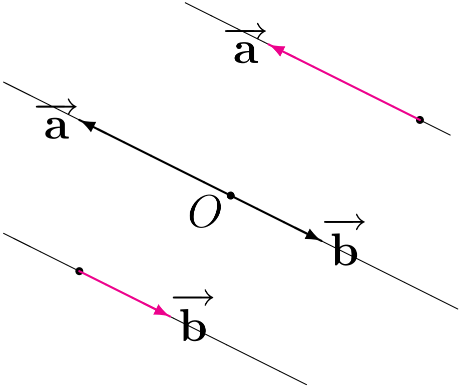
В связи с тем, что вектор может быть отложен от любой точки, понятие «параллельность прямых и отрезков» (включая направленные отрезки) некорректно дословно переносить на векторы.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.

Полученные направленные отрезки теперь лежат на *одной и той же прямой*.



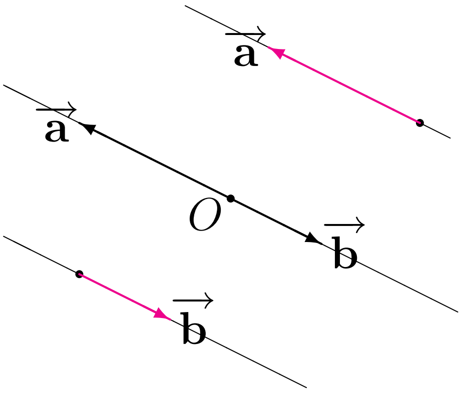
Поэтому в векторной алгебре говорят не о «параллельных», а о **коллинеарных** векторах.

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.

Полученные направленные отрезки теперь лежат на *одной и той же прямой*.



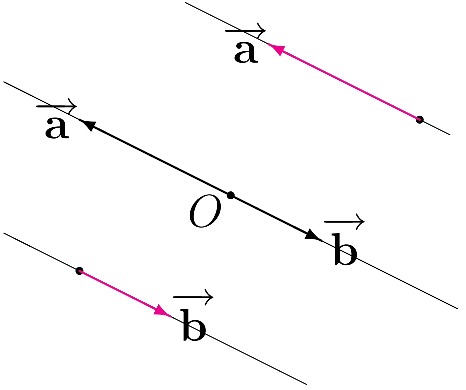
Определение 1. *Векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называются* **коллинеарными**, *если*

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.

Полученные направленные отрезки теперь лежат на *одной и той же прямой*.



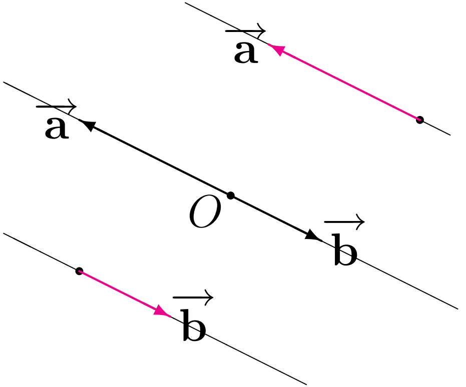
Определение 1. *Векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называются* **коллинеарными**, *если направленные отрезки, полученные откладыванием этих векторов от фиксированной точки,*

III.3. Коллинеарность векторов

Направленные отрезки, полученные откладыванием $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от указанных точек, лежат на параллельных прямых.

Отложим $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ от точки O.

Полученные направленные отрезки теперь лежат на *одной и той же прямой*.



Определение 1. *Векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называются* **коллинеарными**, *если направленные отрезки, полученные откладыванием этих векторов от фиксированной точки, лежат на одной прямой.*

III.4. Операции векторной алгебры и другие функции на векторах

Базовые операции векторной алгебры:

— сложение (суммирование) векторов: $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ (итоговый рис.);

— умножение вектора на число: $\lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$;

— векторное произведение векторов (итоговое определение).

Отношения на множестве векторов:

— коллинеарность векторов;

— компланарность векторов;

Функции, определенные на векторах:

— проекция вектора на ось другого вектора;

— скалярное произведение векторов (определение);

Вторичные операции и функции на векторах:

— смешанное произведение векторов;

— двойное векторное произведение векторов.

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$*, что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O*:* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, *то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB.

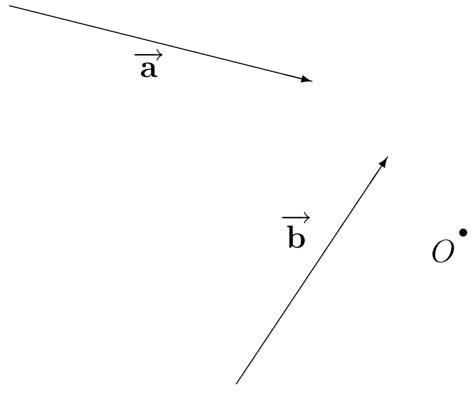


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило параллелограмма»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$*, что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O*:* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$*,* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$*, то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB*.*

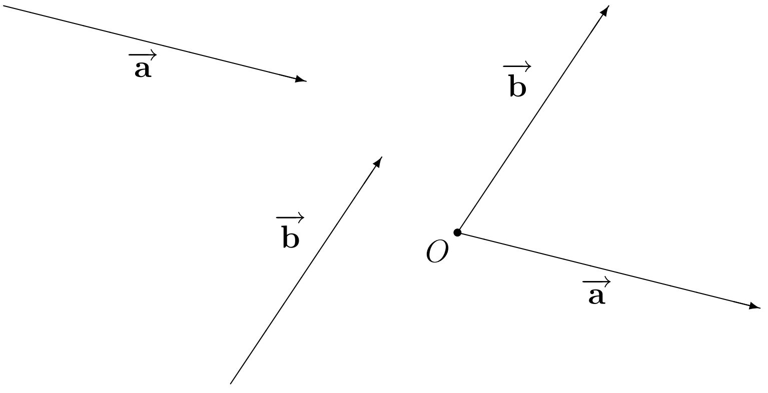


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило параллелограмма»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** *$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ называется такой вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, что, если векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ отложить от произвольной фиксированной точки O: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, то отрезок OC будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами OA и OB.*

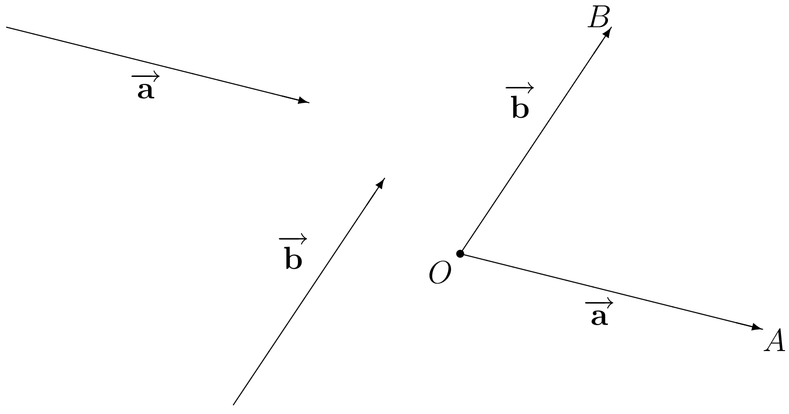


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило параллелограмма»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, *что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, *то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB.

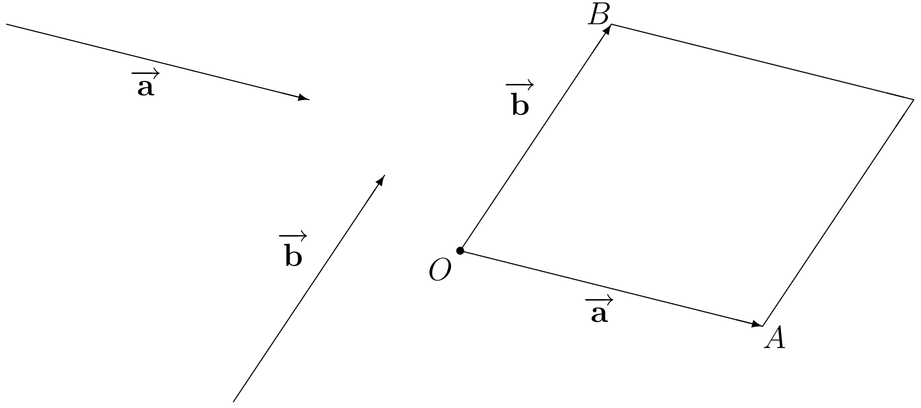


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило параллелограмма»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, *что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, *то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB.

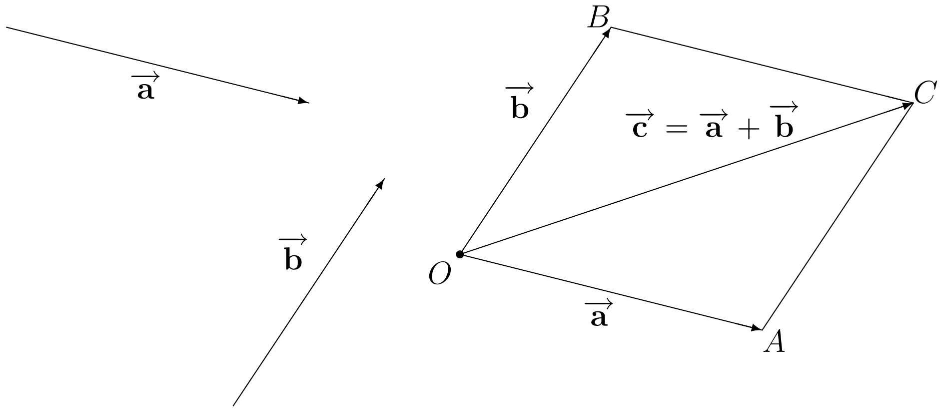


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило параллелограмма»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$*, что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O*:* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$*,* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$*, то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB*.*

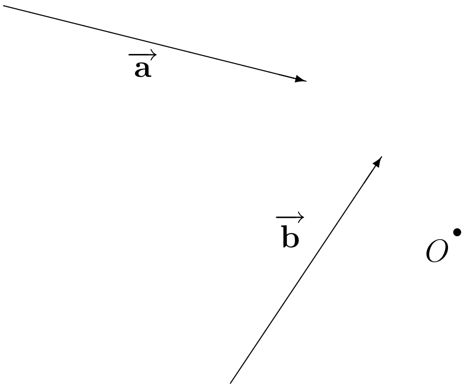


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило треугольника»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$*, что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O*:* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, *то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB.

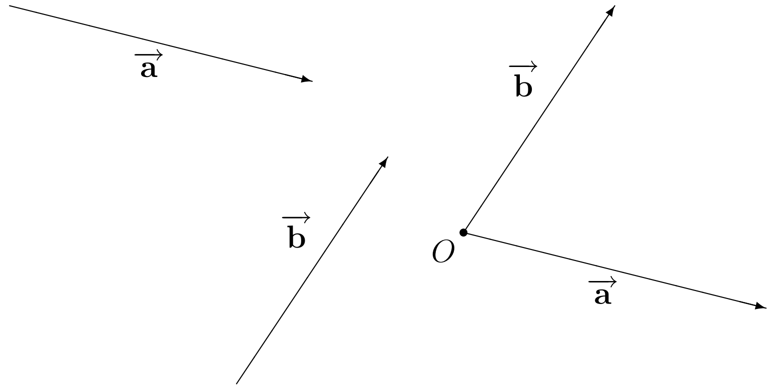


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило треугольника»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, *что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, *то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB.

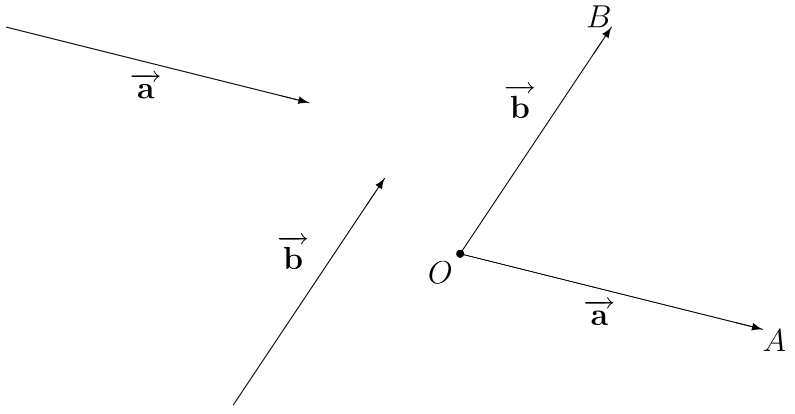


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило треугольника»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$*, что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O*:* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, *то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB.

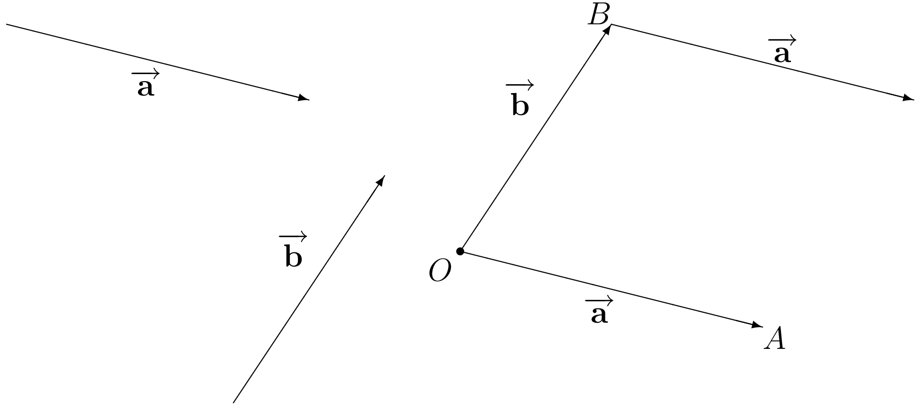


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило треугольника»

III.4.1. Сумма векторов

Определение 2. ***Суммой векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$*, что, если векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *отложить от произвольной фиксированной точки* O*:* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$*,* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$*,* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$*, то отрезок* OC *будет совпадать с диагональю параллелограмма со сторонами* OA *и* OB*.*

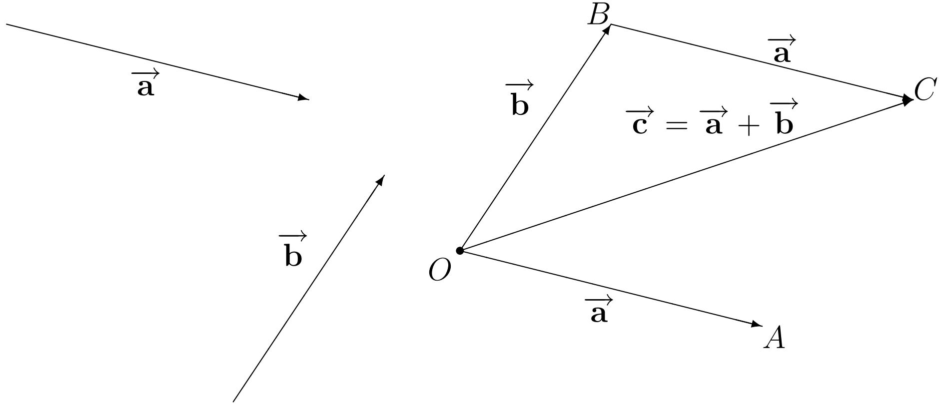


Рисунок к определению суммы векторов. «Правило треугольника»

III.4.2. Произведение вектора на число

Определение операции ***произведения вектора на число*** можно рассматривать как результат применения стратегии

III.4.2. Произведение вектора на число

Определение операции ***произведения вектора на число*** можно рассматривать как результат применения стратегии поиска аналогии и стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций (сложения равных векторов).

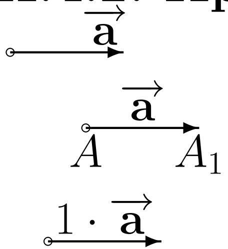
III.4.2. Произведение вектора на число

Определение операции ***произведения вектора на число*** можно рассматривать как результат применения стратегии поиска аналогии и стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций (сложения равных векторов).

Напомним, что умножение натуральных чисел изначально основывалось на кратном сложении ***одного и того же числа***, например

$$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5.$$

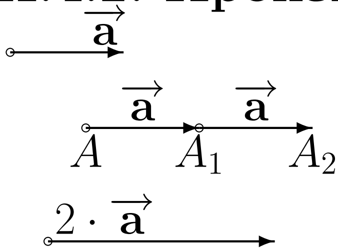
III.4.2. Произведение вектора на число



$$1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}$ — представитель вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

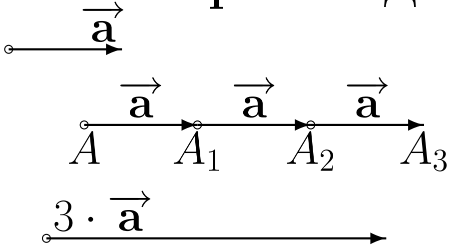
III.4.2. Произведение вектора на число



$$2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}$ — представители вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

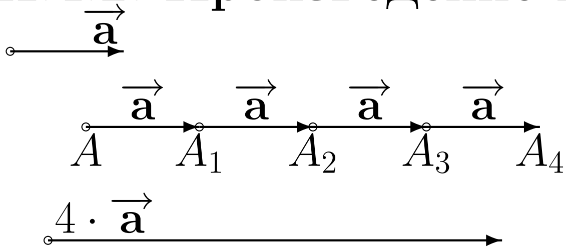
III.4.2. Произведение вектора на число



$$3 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}$ — представители вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

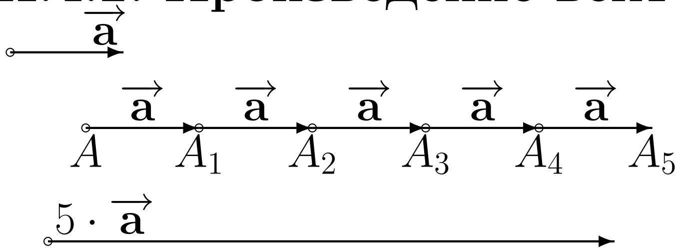
III.4.2. Произведение вектора на число



$$4 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}$ — представители вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

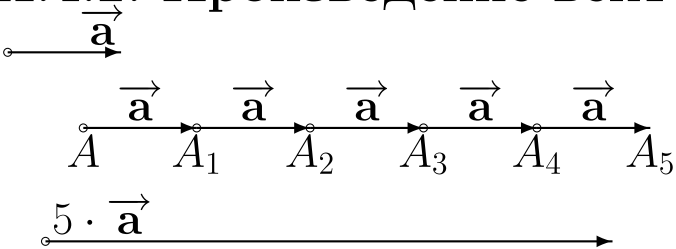
III.4.2. Произведение вектора на число



$$5 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ — представители вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

III.4.2. Произведение вектора на число

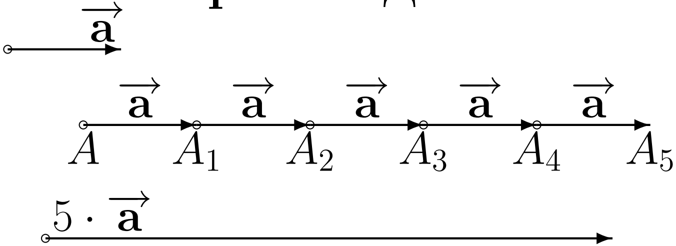


$$5 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}$ — представители вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Каждый из представителей был получен применением **соглашения 1**. Все они обладают одинаковыми характеристиками.

III.4.2. Произведение вектора на число



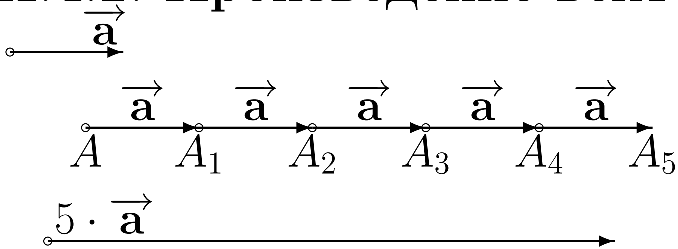
$$5 \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}},$$

где $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ — представители вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

Каждый из представителей был получен применением **соглашения 1**. Все они обладают одинаковыми характеристиками.

Поскольку их направления совпадают, то эти направленные отрезки $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ будут лежать на одной прямой. Поэтому длиной вектора-суммы будет сумма длин векторов-слагаемых.

III.4.2. Произведение вектора на число



$$5 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

Таким образом, операция сложения векторов для системы из одного вектора равносильна операции произведения вектора на число слагаемых. Число слагаемых является числом натуральным. Умножение вектора на натуральное число является одной из «хороших» экстремальных ситуаций для общего случая умножения вектора на произвольное число. Значит, полученный результат требует обобщения.

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*
1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*
1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;
2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$, *то*

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$, *то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$, *то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;

б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$;

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ на число*** λ *назовем вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, удовлетворяющий следующим требованиям:*

1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ и $\lambda \neq 0$, то

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;*

б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$;

в) если $\lambda > 0$, то векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ сонаправлены, а если $\lambda < 0$, то векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ противонаправлены.

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

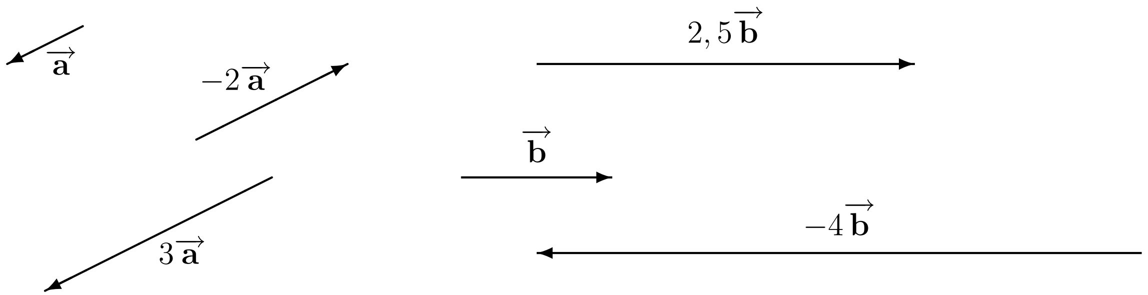
1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$, *то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;

б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$;

в) если $\lambda > 0$, *то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *сонаправлены, а если* $\lambda < 0$, *то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *противонаправлены.*



III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

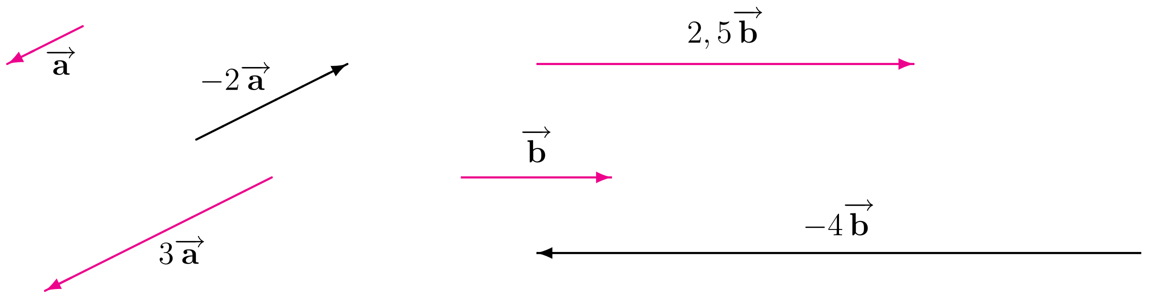
1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$, *то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;

б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$;

в) если $\lambda > 0$, *то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *сонаправлены, а если* $\lambda < 0$, *то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *противонаправлены.*



III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$*, удовлетворяющий следующим требованиям:*

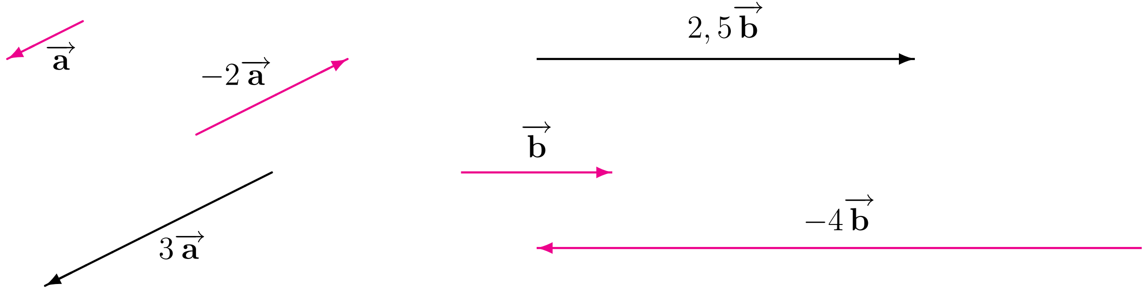
1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$*, то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$*;*

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$*, то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*;*

б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$*;*

в) если $\lambda > 0$*, то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *сонаправлены, а если* $\lambda < 0$*, то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *противонаправлены.*



III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$*, удовлетворяющий следующим требованиям:*
1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$*, то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$*;*
2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$*, то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$*;*

б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$*;*

в) если $\lambda > 0$*, то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *сонаправлены, а если* $\lambda < 0$*, то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *противонаправлены.*

Из этого определения следует, что *ненулевые* векторы **коллинеарны** тогда и только тогда, когда

III.4.3. Определение произведения вектора на число

Определение 3. ***Произведением вектора*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***на число*** λ *назовем вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

1) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *или* $\lambda = 0$, *то* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

2) если $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *и* $\lambda \neq 0$, *то*

а) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ ***коллинеарен*** *вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;

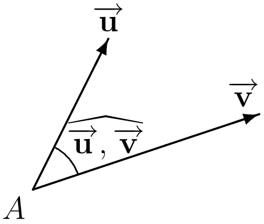
б) $\left|\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$;

в) если $\lambda > 0$, *то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *сонаправлены, а если* $\lambda < 0$, *то векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *противонаправлены.*

Из этого определения следует, что *ненулевые* векторы **коллинеарны** тогда и только тогда, когда

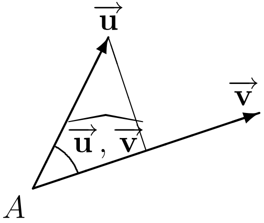
$$\exists\lambda \neq 0 \quad \overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}. \tag{1}$$

III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



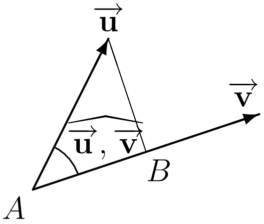
Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

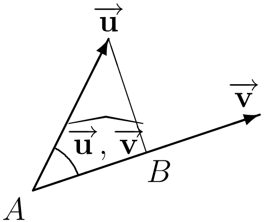
III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



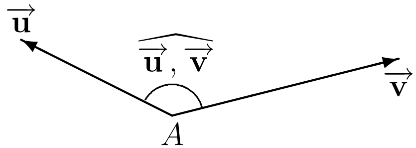
a

Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора

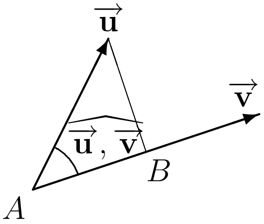


a

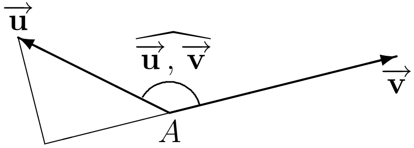


Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



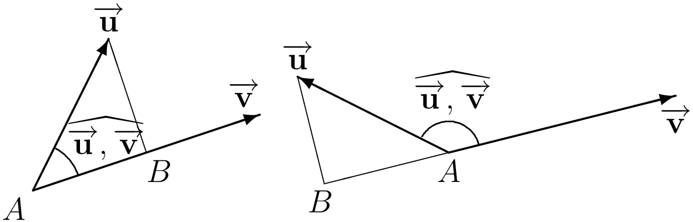
а



б

Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

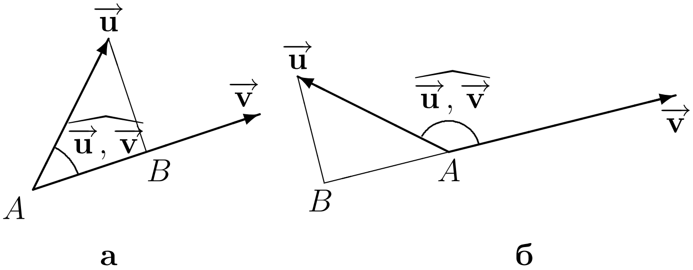
III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



а **б**

Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

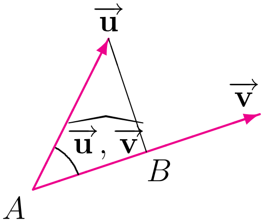
III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



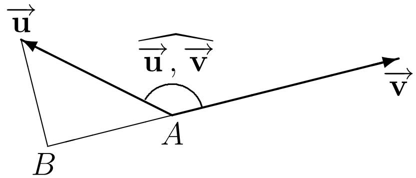
Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} \overrightarrow{\mathbf{u}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}}\right). \tag{2}$$

III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



а



б

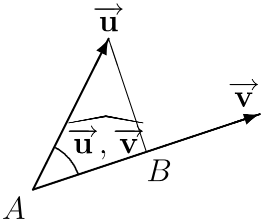
Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}}\right). \tag{2}$$

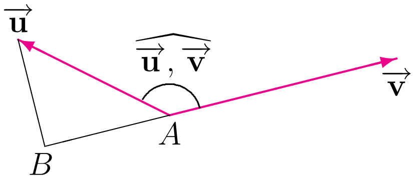
При **остром угле** между векторами $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ эта проекция равна длине отрезка AB,

а при тупом угле проекция равна длине отрезка AB, взятой с обратным знаком.

III.5. Проекция (алгебраическая) вектора на ось другого вектора



а



б

Из рис. видно, что одним из естественных способов введения проекции вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является ее задание формулой

$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}}\right). \tag{2}$$

При остром угле между векторами $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ эта проекция равна длине отрезка AB,

а при **тупом угле** проекция равна длине отрезка AB, взятой с обратным знаком.

III.6. Определение алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

Определение 4. Алгебраической проекцией *ненулевого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *называется*

III.6. Определение алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

Определение 4. **Алгебраической проекцией** *ненулевого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *называется*

число,

III.6. Определение алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

Определение 4. Алгебраической проекцией *ненулевого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *называется*

число, равное

III.6. Определение алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

Определение 4. **Алгебраической проекцией** *ненулевого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *называется число, равное* $пр_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos(\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}})$, *где* $\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}}$ — *угол между векторами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

III.6. Определение алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

Определение 4. Алгебраической проекцией *ненулевого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *называется*
число, равное $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos(\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}})$, *где* $\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}}$ *— угол между векторами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.
Проекция нулевого вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *считается равной нулю.*

Что здесь понимается под осью?

III.6. Определение алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

Определение 4. Алгебраической проекцией *ненулевого вектора* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *называется число, равное* $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos(\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}})$, *где* $\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}}$ — *угол между векторами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.
Проекция нулевого вектора на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *считается равной нулю.*

Определение 5. Осью *называется прямая с заданным на ней направлением.*

Рассмотрим пример?

III.7. Скалярное произведение векторов

$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}}\right). \tag{2}$$

Основной недостаток формулы (2) — ее несимметричность относительно переменных $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

III.7. Скалярное произведение векторов

$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}}\right). \tag{2}$$

Основной недостаток формулы (2) — ее несимметричность относительно переменных $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

В данном случае симметричность нетрудно обеспечить, домножив выражение в правой части формулы (2) на $\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|$. В итоге получаем конструкцию, называемую **скалярным произведением векторов**.

III.7. Скалярное произведение векторов

Определение 6. Скалярным произведением *ненулевых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется число, определяемое выражением*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \overset{note}{=} \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \overset{def}{=} |\overrightarrow{\mathbf{a}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{b}}| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}}\right), \tag{3}$$

где $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}}$ *— угол между векторами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$. *Если хотя бы один из множителей скалярного произведения есть нулевой вектор, то скалярное произведение этих векторов считается равным 0.*

III.7. Скалярное произведение векторов

Определение 6. Скалярным произведением *ненулевых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется число, определяемое выражением*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \overset{note}{=} \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \overset{def}{=} |\overrightarrow{\mathbf{a}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{b}}| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}}\right), \tag{3}$$

где $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}}$ *— угол между векторами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*. Если хотя бы один из множителей скалярного произведения есть нулевой вектор, то скалярное произведение этих векторов считается равным 0.*

В качестве основного мы примем первое обозначение скалярного обозначения: $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.

Рассмотрим пример?

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Перейти к определению компланарных векторов, правой и левой тройки векторов?

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Что значит «определить операцию»?

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Что значит «определить операцию»?

Представить в одной из стандартных форм задания функции:

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Что значит «определить операцию»?

Представить в одной из стандартных форм задания функции: графиком, таблицей, формулой.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Что значит «определить операцию»?

Представить в одной из стандартных форм задания функции: графиком, таблицей, формулой.

Варианты задания графиком и таблицей выглядят более чем сомнительно.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Что значит «определить операцию»?

Представить в одной из стандартных форм задания функции: графиком, таблицей, формулой.

Варианты задания графиком и таблицей выглядят более чем сомнительно.

Остается вариант задания операции формулой.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Как задать операцию формулой?

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Как задать операцию формулой?

Надо взять два произвольных вектора пространства и описать результат операции.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Как задать операцию формулой?

Надо взять два произвольных вектора пространства и описать результат операции.

С чего начать описание?

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Как задать операцию формулой?

Надо взять два произвольных вектора пространства и описать результат операции.

С чего начать описание?

Мы хотим получить равенство. Поэтому применим **стратегию составления уравнений**.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?*

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?* Формулой.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?* Формулой. *Введем переменные.*

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?* Формулой. *Введем переменные.* Обозначим исходные векторы через $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, а результат операции — векторное произведение этих векторов — через $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?* Формулой. *Введем переменные.* Обозначим исходные векторы через $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, а результат операции — векторное произведение этих векторов — через $\overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Составим уравнение. Значение какой характеристики вычислим двумя способами?*

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?* Формулой. *Введем переменные.* Обозначим исходные векторы через $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, а результат операции — векторное произведение этих векторов — через $\overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Составим уравнение. Значение какой характеристики вычислим двумя способами?* Вектор определяется направлением и длиной.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Вектор. *В каком виде представим ответ?* Формулой. *Введем переменные.* Обозначим исходные векторы через $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, а результат операции — векторное произведение этих векторов — через $\overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Составим уравнение. Значение какой характеристики вычислим двумя способами?* Вектор определяется направлением и длиной.

Начнем с выбора направления.

III.8. Векторное произведение векторов

Поставим задачу в «формате свободного исследования». Даны два вектора в пространстве. Надо определить операцию «векторное произведение» наиболее перспективным образом.

Как выбрать направление вектора $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ — векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

III.8. Векторное произведение векторов

Как выбрать направление вектора $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ — векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

Воспользуемся исследовательскими стратегиями!!!

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;

2) стратегия поиска аналогии;

3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;

4) стратегия предвкушения;

5) стратегия построения модели;

6) стратегия обогащения модели;

7) стратегия смены ролей и приоритетов.

III.8. Векторное произведение векторов

Применение исследовательских стратегий показало, что наиболее перспективным является вариант, когда результат $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ является ортогональным к сомножителям, т.е. к векторам $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

По какую сторону от плоскости векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ должен быть направлен вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$?

III.8. Векторное произведение векторов

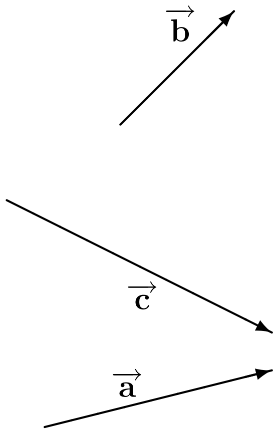
Применение исследовательских стратегий показало, что наиболее перспективным является вариант, когда результат $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ является ортогональным к сомножителям, т.е. к векторам $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

По какую сторону от плоскости векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ должен быть направлен вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$?

Ясно, что это вопрос соглашения. В основу этого соглашения положили понятие **системы компланарных векторов**, **правой тройки векторов** и **левой тройки векторов**.

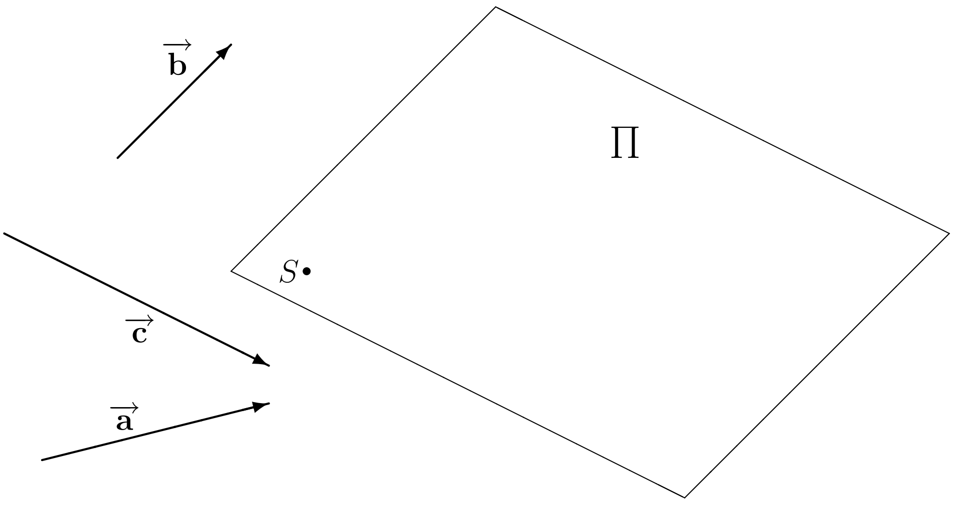
III.9. Система компланарных векторов

Определение 7. *Говорят, что* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— система* **компланарных векторов**, *если существует такая плоскость* Π *и такая точка* S *на ней, что в эту плоскость включаются направленные отрезки* SA, SB *и* SC, *полученные откладыванием от точки* S *векторов, соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.



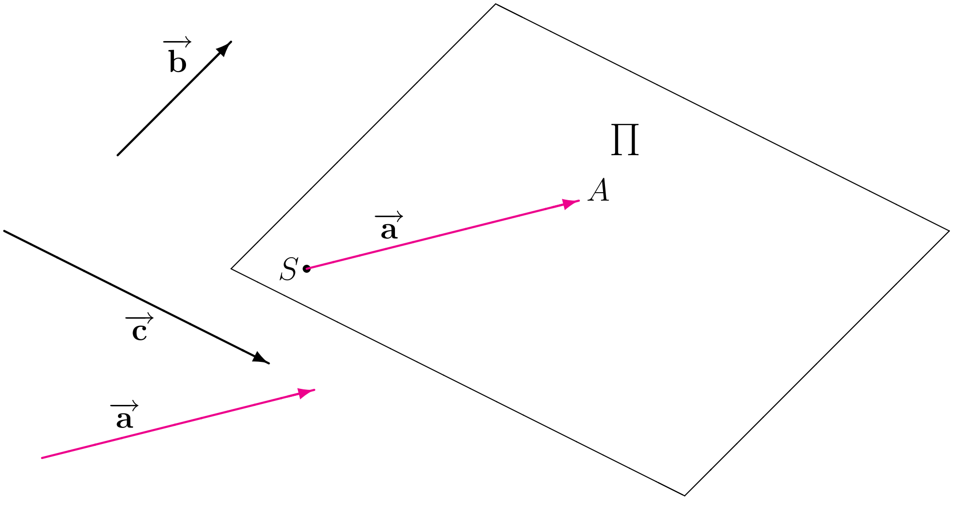
III.9. Система компланарных векторов

Определение 7. *Говорят, что* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— система* **компланарных векторов**, *если существует такая плоскость* Π *и такая точка* S *на ней, что в эту плоскость включаются направленные отрезки* SA, SB *и* SC, *полученные откладыванием от точки* S *векторов, соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.



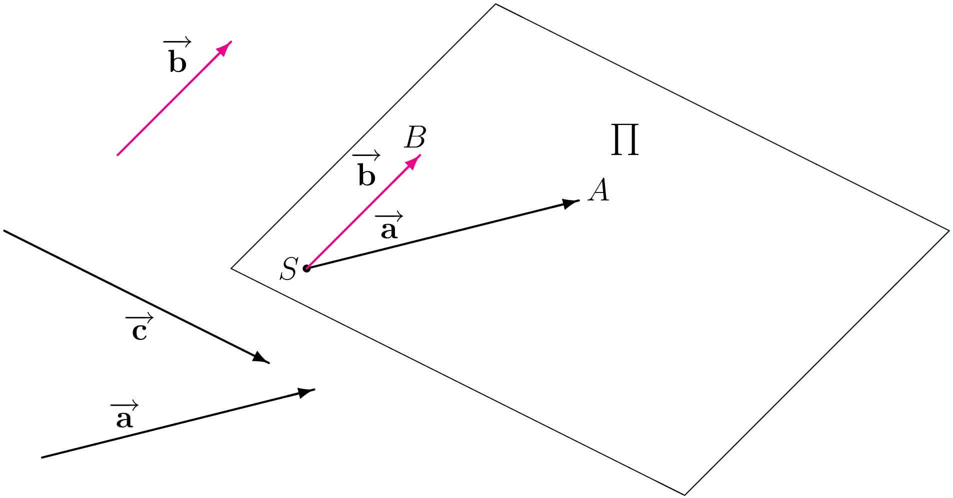
III.9. Система компланарных векторов

Определение 7. *Говорят, что* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— система* **компланарных векторов**, *если существует такая плоскость* Π *и такая точка* S *на ней, что в эту плоскость включаются направленные отрезки* SA, SB *и* SC, *полученные откладыванием от точки* S *векторов, соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.



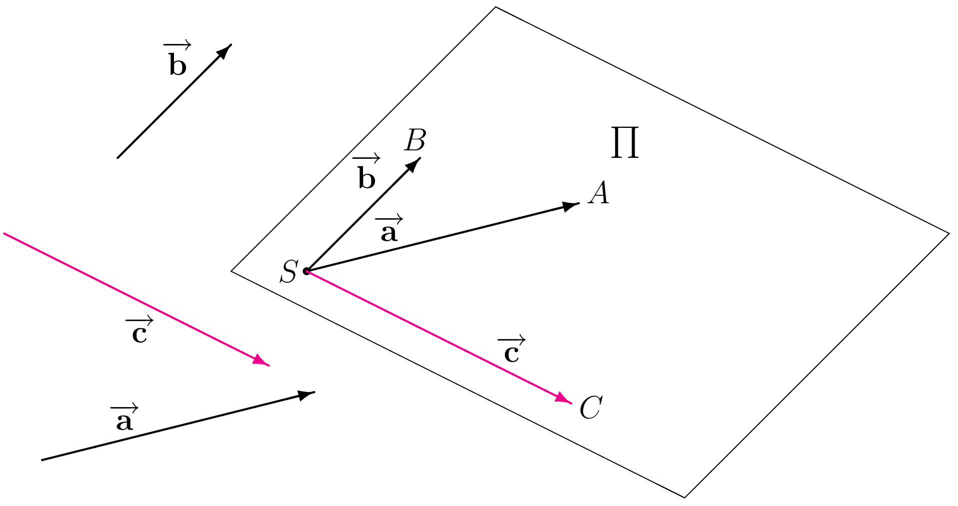
III.9. Система компланарных векторов

Определение 7. *Говорят, что* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— система* **компланарных векторов**, *если существует такая плоскость* Π *и такая точка* S *на ней, что в эту плоскость включаются направленные отрезки* SA, SB *и* SC, *полученные откладыванием от точки* S *векторов, соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.



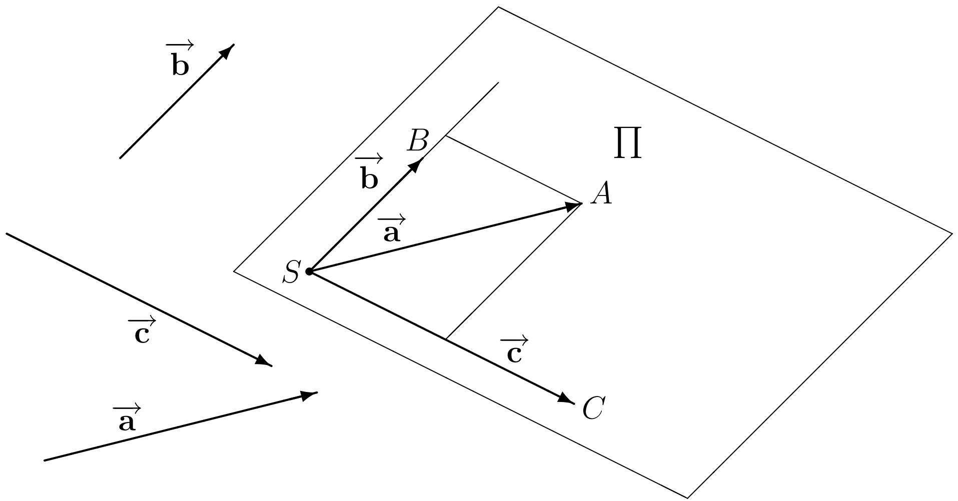
III.9. Система компланарных векторов

Определение 7. *Говорят, что* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— система* **компланарных векторов**, *если существует такая плоскость* Π *и такая точка* S *на ней, что в эту плоскость включаются направленные отрезки* SA, SB *и* SC, *полученные откладыванием от точки* S *векторов, соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.



III.9. Система компланарных векторов

Определение 7. *Говорят, что* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— система* **компланарных векторов**, *если существует такая плоскость* Π *и такая точка* S *на ней, что в эту плоскость включаются направленные отрезки* SA, SB *и* SC, *полученные откладыванием от точки* S *векторов, соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.



Перейти:

к определению компланарных векторов,

к определению правой тройки векторов,

к определению левой тройки векторов,

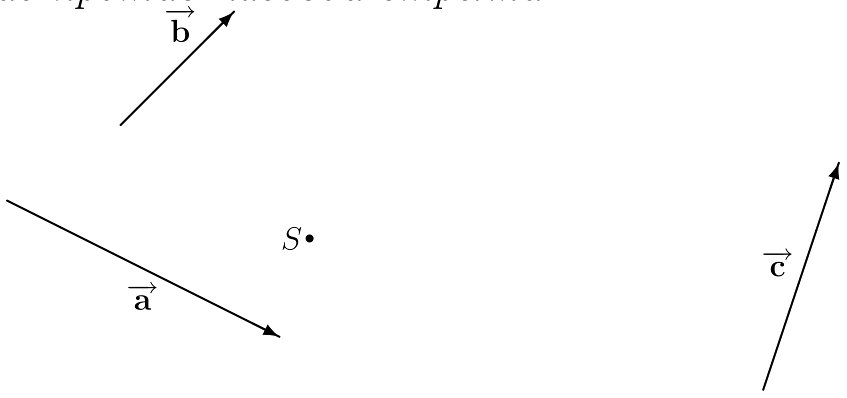
к началу определения векторного произведения векторов,

к продолжению определения векторного произведения векторов,

к окончательной формулировке определения векторного произведения векторов.

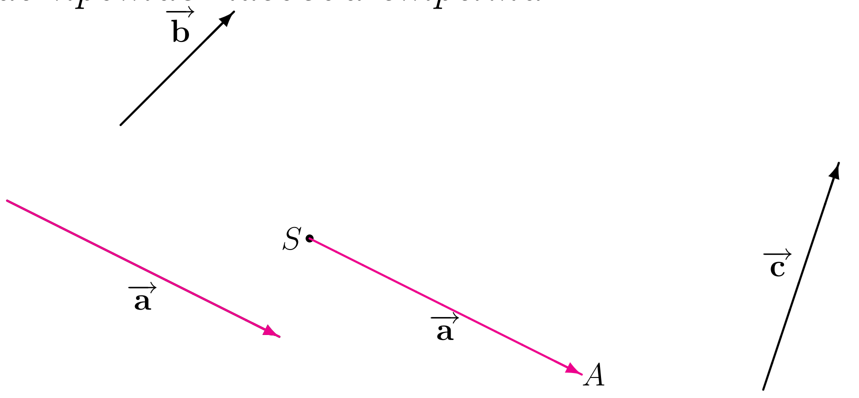
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



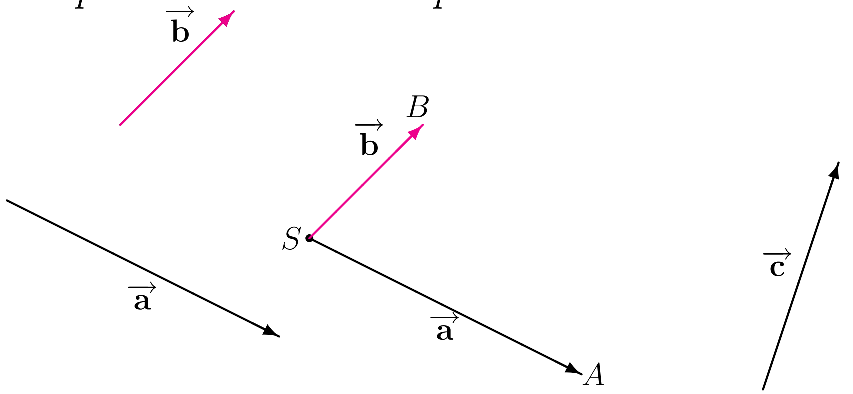
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



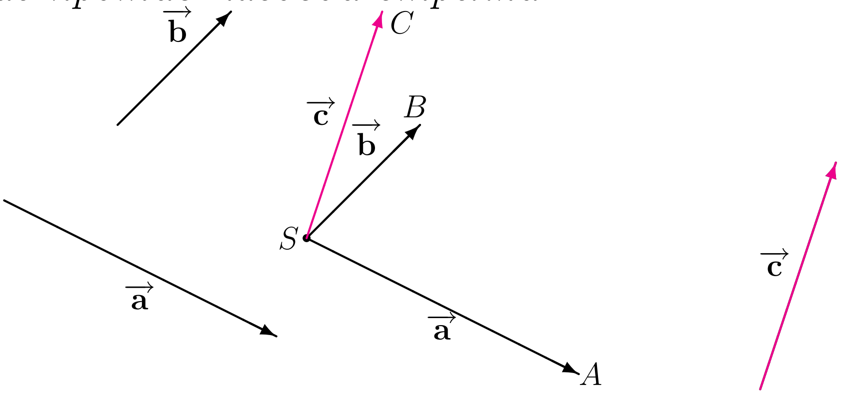
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка SA к направленному отрезку SB по кратчайшей из дуг видится из точки C как вращение против часовой стрелки.*



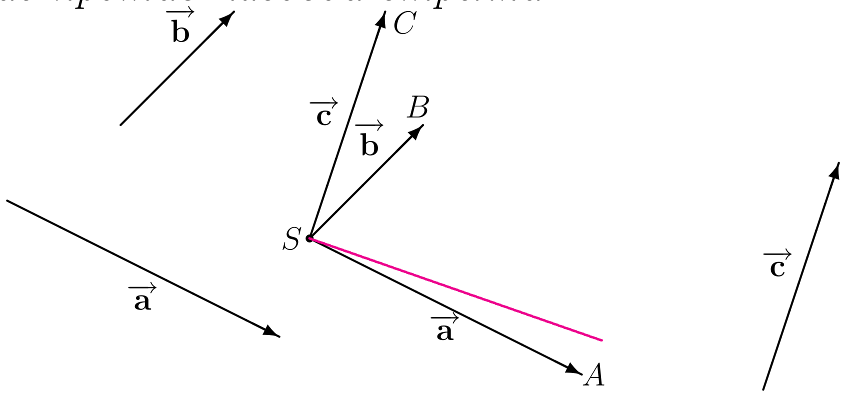
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



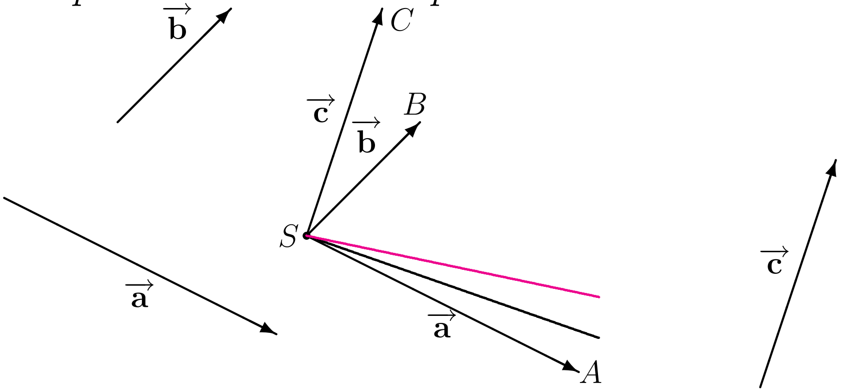
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



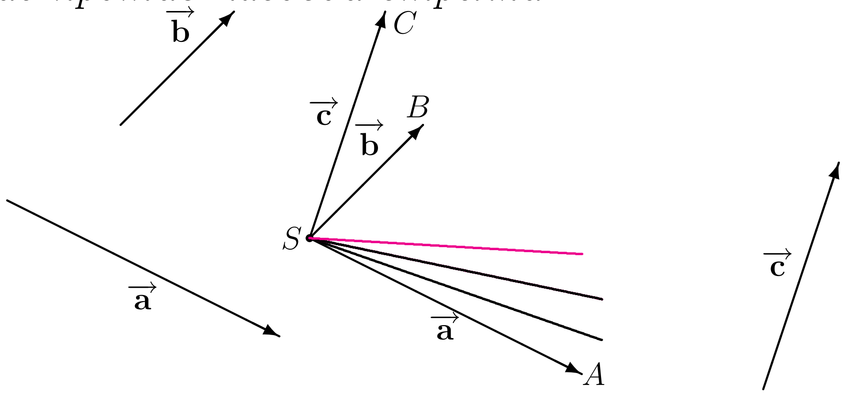
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



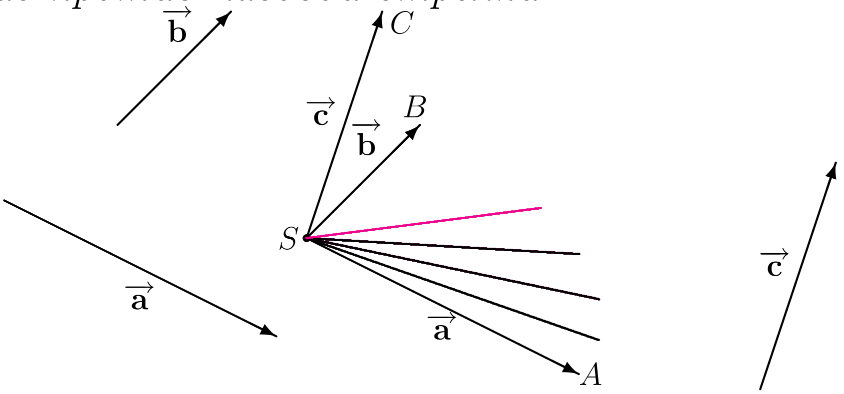
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



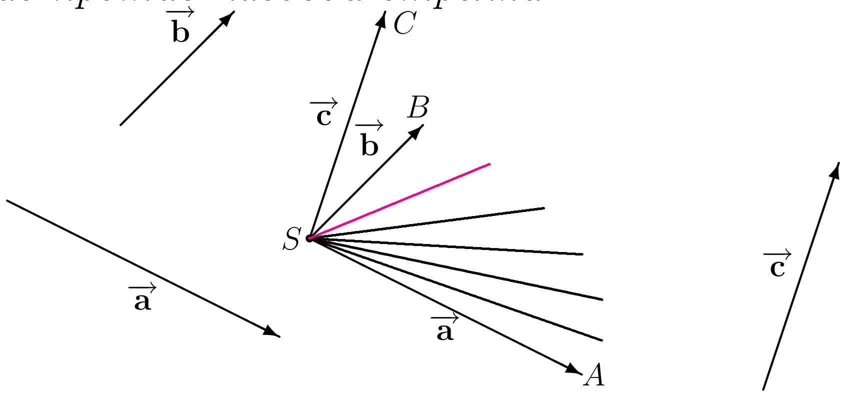
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



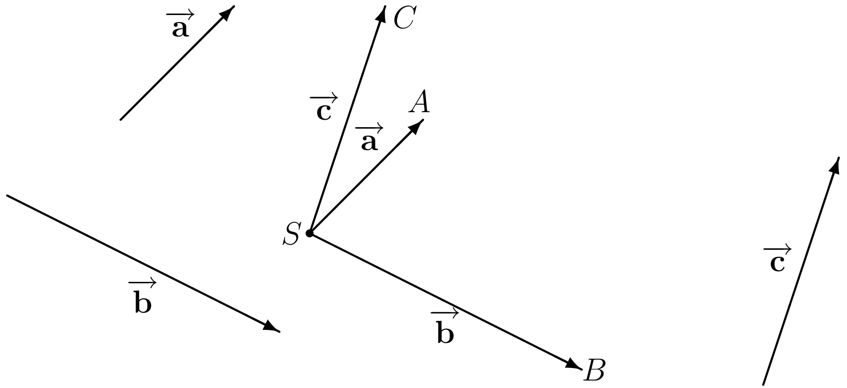
III.10. Правая тройка векторов

Определение 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *— некомпланарные векторы и* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. *Тогда упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **правой тройкой векторов**, *если вращение от направленного отрезка* SA *к направленному отрезку* SB *по кратчайшей из дуг видится из точки* C *как вращение против часовой стрелки.*



III.11. Левая тройка векторов

Определение 9. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется* **левой тройкой векторов**, *если после переноса начала всех трех векторов в одну точку вращение от вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *к вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *по кратчайшей из дуг видится с конца вектора* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *как вращение по часовой стрелке.*



Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то правыми тройками векторов будут $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, -\overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ и др.

Перейти:

к определению компланарных векторов,

к определению правой тройки векторов,

к определению левой тройки векторов,

началу определения векторного произведения векторов,

продолжению определения векторного произведения векторов,

окончательной формулировке определения векторного произведения векторов.

III.12. Векторное произведение векторов: формулируем определение

Напомним, что мы решили, что результат $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ должен быть ортогонален к сомножителям. Выбор того, в какую сторону от плоскости векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ будет направлен вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, будет определяться соглашением: *тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$; $\overrightarrow{\mathbf{b}}$; $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *должна быть правой тройкой.*

В физике с понятием правой тройки векторов вы сталкивались, например, при формулировании «правила буравчика».

III.12. Векторное произведение векторов: формулируем определение

Осталось определиться с длиной результата $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

Воспользуемся исследовательскими стратегиями!!!

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;

2) стратегия поиска аналогии;

3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;

4) стратегия предвкушения;

5) стратегия построения модели;

6) стратегия обогащения модели;

7) стратегия смены ролей и приоритетов.

III.12. Векторное произведение векторов: формулируем определение

Определение 10. Векторным произведением *векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется вектор, обозначаемый через* $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ *или* $\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}}$, *обладающий следующими свойствами:*

1. $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \sin(\varphi_{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}})$;

2. $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ *ортогонален к вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и к вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$;

3. $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ *образуют* ***правую тройку векторов***.

Рассмотрим пример?

III.13. Смешанное произведение векторов

Поскольку результатом векторного умножения векторов снова является вектор, то он может участвовать во всех видах умножения векторов. При его векторном умножении на некоторый $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ получаем **двойное векторное произведение**, рассмотренное ниже. Рассмотрим результат скалярного умножения векторного произведения векторов на произвольный вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

III.13. Смешанное произведение векторов

Поскольку результатом векторного умножения векторов снова является вектор, то он может участвовать во всех видах умножения векторов. При его векторном умножении на некоторый $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ получаем **двойное векторное произведение**, рассмотренное ниже. Рассмотрим результат скалярного умножения векторного произведения векторов на произвольный вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Определение 11. Смешанным произведением векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *называется число, определяемое формулой*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right). \tag{4}$$

III.14. Двойное векторное произведение векторов

В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций было бы интересно изучить результат кратного применения операции. Обычно рассматривается кратное применение операции к одному и тому же вектору, но в данном случае уже $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, поскольку модуль этого вектора — нулевой, см. **определение векторного произведения**.

III.14. Двойное векторное произведение векторов

В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций было бы интересно изучить результат кратного применения операции. Обычно рассматривается кратное применение операции к одному и тому же вектору, но в данном случае уже $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, поскольку модуль этого вектора — нулевой, см. **определение векторного произведения**.

Поэтому известность получил только один результат в этом направлении: это результат изучения выражения $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left[\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$, которое называется **двойным векторным произведением**.

III.15. Формула «бац минус цаб»

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{5}$$

III.15. Формула «бац минус цаб»

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{5}$$

Доказательство этой теоремы в рамках векторно-геометрической модели является весьма громоздким. Мы **проведем его** позже средствами координатной модели.

IV. Векторно-символическая модель векторной алгебры

Стандартные способы задания вектора

Представление отношений в виде равенств

Некоторые критерии векторной алгебры

IV. Векторно-символическая модель векторной алгебры

В математике наиболее популярны знаково-символические модели, позволяющие заменить работу с объектами на оперирование с их обозначениями, идентификаторами:

- $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\overrightarrow{\mathbf{m}}\ldots$;
- $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{MT}\ldots$

Иными словами, исследования в векторной алгебре основаны на векторном исчислении.

IV. Векторно-символическая модель векторной алгебры

В математике наиболее популярны знаково-символические модели, позволяющие заменить работу с объектами на оперирование с их обозначениями, идентификаторами:

- $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\overrightarrow{\mathbf{m}}$...;
- $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{MT}$...

Важнейшими инструментами для обработки информации в векторно-символической модели являются *тождественные преобразования* алгебраических выражений и *равносильные преобразования* равенств. Именно поэтому столь важно представлять отношения и свойства векторных операций в виде тождеств. Естественно, что речь идет об операциях, определенных в рамках векторно-геометрической модели.

IV.1. Стандартные способы задания вектора в векторно-символической модели векторной алгебры

В рамках векторно-символической модели стандартный способ задания вектора состоит в представлении вектора как результата применения операций векторной алгебры к некоторому набору векторов.

IV.1. Стандартные способы задания вектора в векторно-символической модели векторной алгебры

В рамках векторно-символической модели стандартный способ задания вектора состоит в представлении вектора как результата применения операций векторной алгебры к некоторому набору векторов.

Например, векторы в векторно-символической модели представлены выражениями вида $2\overrightarrow{\mathbf{a}} - 3\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\left[2\overrightarrow{\mathbf{a}} - 3\overrightarrow{\mathbf{b}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] + \overrightarrow{\mathbf{a}}$.

IV.1. Стандартные способы задания вектора в векторно-символической модели векторной алгебры

В рамках векторно-символической модели стандартный способ задания вектора состоит в представлении вектора как результата применения операций векторной алгебры к некоторому набору векторов.

Основными средствами обработки информации в векторно-символической модели векторной алгебры являются преобразования. Поэтому нам следует зафиксировать отношения и свойства рассмотренных выше операций в виде равенств: **свойств алгебраической проекции вектора на ось другого вектора**, в частности, **свойств векторного произведения**, а также **свойств алгебраической проекции**, и **свойств скалярного произведения векторов**,

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);
3. Для вектора $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ (начало и конец которого совпадают), и любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ выполняется равенство $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);

Какая-то громоздкая формулировка...

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);
4. для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из V существует вектор $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ такой, что $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);
4. для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из V существует вектор $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ такой, что $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;
5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);

2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);

3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);

4. для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из V существует вектор $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ такой, что $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;

5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;

6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}}$;

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);
4. для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из V существует вектор $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ такой, что $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;
5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}}$;
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda(\mu\overrightarrow{\mathbf{x}})$;

IV.2. Свойства операций сложения векторов и произведения вектора на число

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (коммутативность);
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ (ассоциативность);
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (существование нулевого вектора);
4. для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из V существует вектор $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ такой, что $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;
5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}}$;
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda(\mu\overrightarrow{\mathbf{x}})$;
8. $1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$.

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}.$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

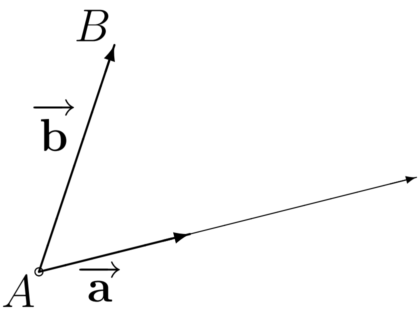
2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)

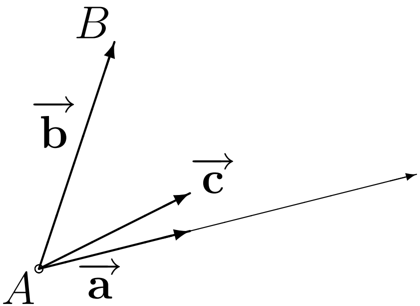


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)

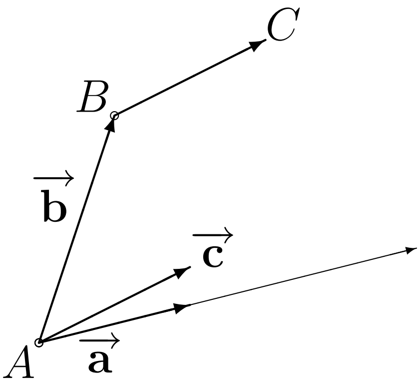


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)

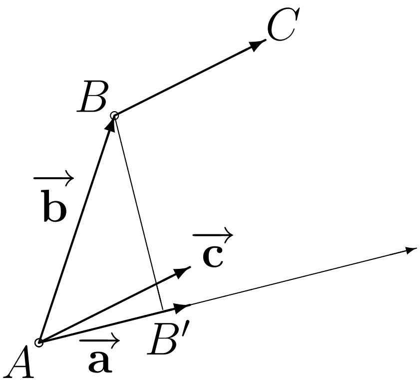


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)

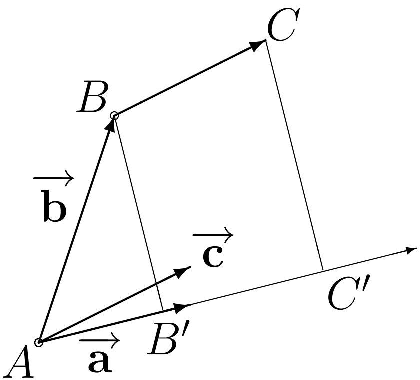


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)

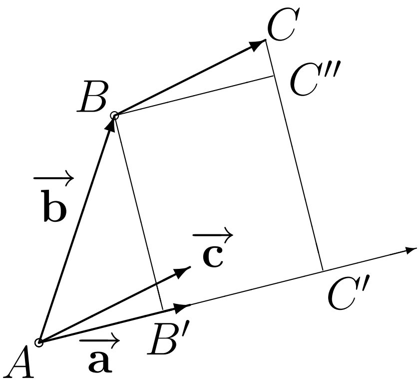


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)

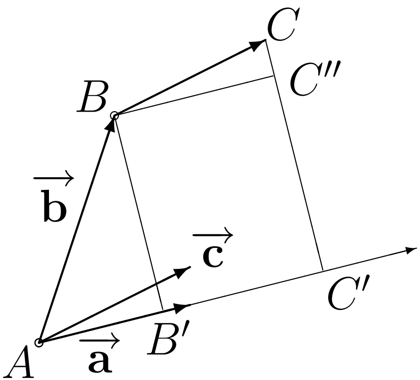


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)



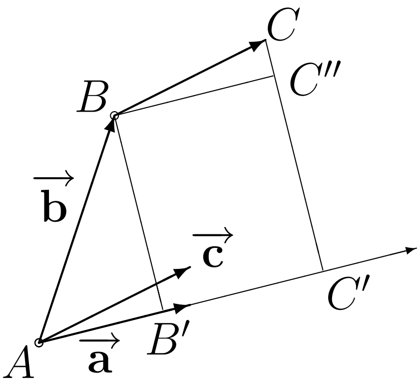
$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)



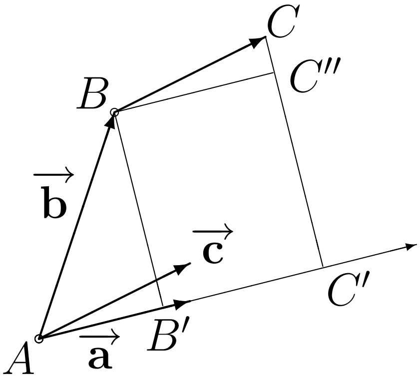
$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AC'}=$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)



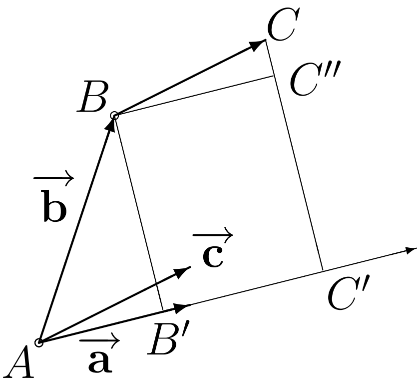
$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AC'}=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AB'}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{B'C'}=$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)



$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AC'}=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AB'}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{B'C'}=$$

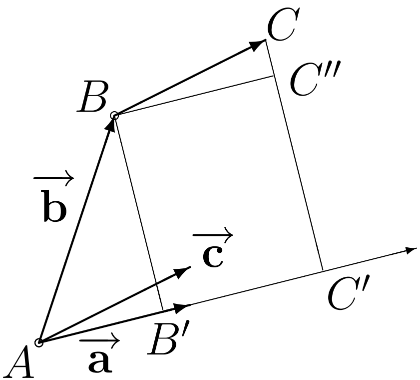
$$=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AB'}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{BC''}=$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 1)



$$\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AC'}=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AB'}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{B'C'}=$$

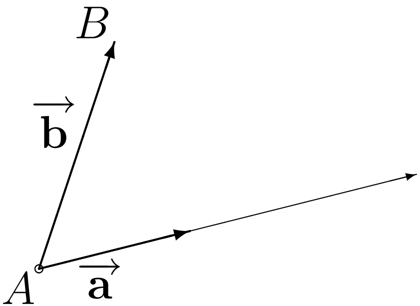
$$=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{AB'}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{BC''}=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}} + \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \lambda \cdot \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 2)

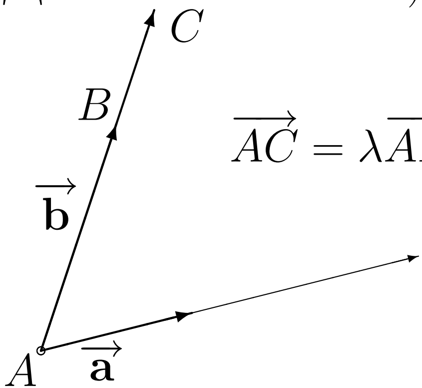


IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 2)



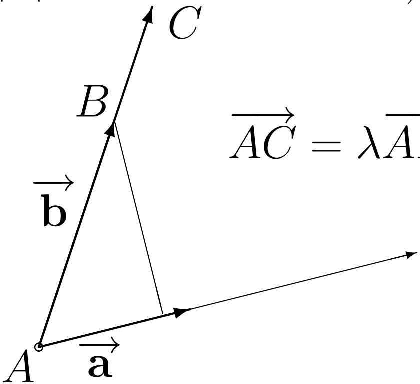
$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 2)



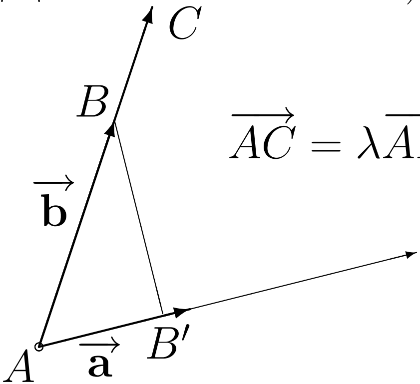
$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 2)



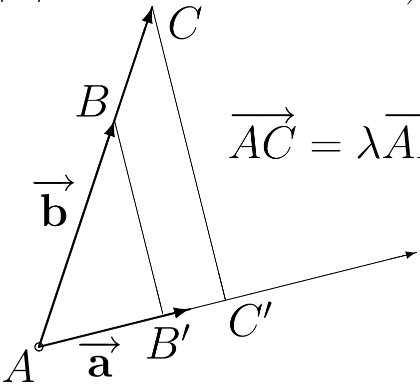
$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}.$

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 2)



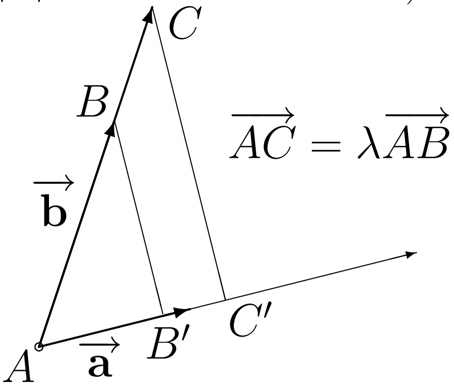
$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

IV.3. Свойства алгебраической проекции вектора на ось другого вектора

1) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)=\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}+\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2) $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}}$, где λ — число.

Доказательство. 2)



Утверждение 2) следует из подобия $\triangle ABB'\sim\triangle ACC'$.

IV.4. Геометрические свойства скалярного произведения векторов

1. $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = |\overrightarrow{\mathbf{a}}|\, \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}} \overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{b}}} \overrightarrow{\mathbf{a}}$; 2. $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})$;

3. $(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) + (\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})$,
   $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) + (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})$;

4. $(\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})$, где λ — число;

5. Критерий ортогональности ненулевых векторов: $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = 0$;

6. $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}) = |\overrightarrow{\mathbf{a}}|^2$;

7. **формула для вычисления скалярного произведения с помощью координат векторов**.

IV.4. Геометрические свойства скалярного произведения векторов

1. $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = |\overrightarrow{\mathbf{a}}|\,\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}}\overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\,\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{b}}}\overrightarrow{\mathbf{a}}$; 2. $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})$;

3. $(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) + (\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})$,
   $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) + (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})$;

4. $(\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})$, где λ — число;

5. $\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}}$ тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = 0$;

6. $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}) = |\overrightarrow{\mathbf{a}}|^2$;

Доказательство. Все эти свойства являются очевидными следствиями **определения скалярного произведения**, **определения проекции вектора на ось другого вектора**, непосредственного следующего из них свойства 1, а также **свойств проекции вектора на ось другого вектора**. Рассмотреть пример?

IV.5. Свойства векторного произведения векторов

Антикоммутативность: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]$.

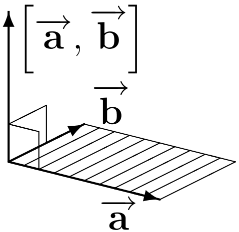
Линейность по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right], \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Следствие из антикоммутативности и линейности: линейность по второму сомножителю. Рассмотрим пример?

Критерий коллинеарности $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

Геометрический смысл: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ — вектор, перпендикулярный параллелограмму, построенному на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, причем $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади этого параллелограмма.



Координатная формула вычисления $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$.

IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$

Ясно, что $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|$:

IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = - \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$

Ясно, что $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|$:

$$\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \qquad\qquad = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|.$$

IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$

Ясно, что $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|$:

$$\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin \widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}} = \qquad = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|.$$

IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$

Ясно, что $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|$:

$$\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin \widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \sin \widehat{\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}} = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|.$$

IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

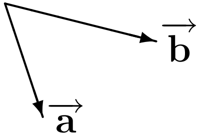
$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$

Ясно, что $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|$.

Осталось проверить противонаправленность векторов $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]$.

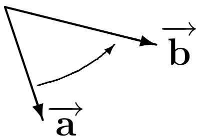
IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$



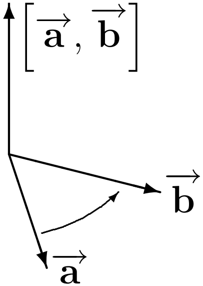
IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$



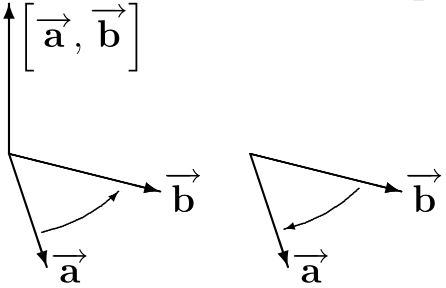
IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$



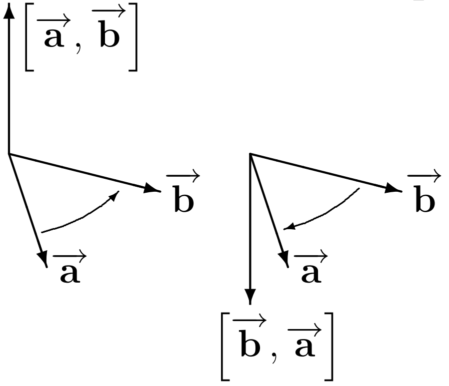
IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$



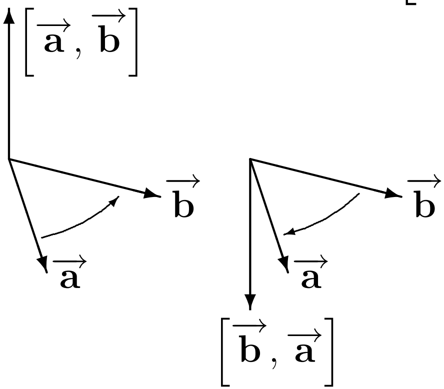
IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$



IV.5.1. Доказательство антикоммутативности векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right].$$



Значит, векторы $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]$ противонаправлены, и $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]\right|$.

Свойство доказано.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Второе утверждение следует непосредственно из **определения векторного произведения** определения операции **умножения вектора на число** и определения **правой тройки векторов** и **левой тройки векторов**

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Остается доказать первое утверждение.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$,

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$,

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Если векторы $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ коллинеарны, то утверждение очевидно. Значит, можно считать, что они не коллинеарны.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau\in\mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Можно считать, что $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны. Векторы $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}$ компланарны, то есть параллельны некоторой плоскости.

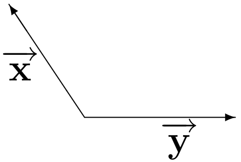


Рис. 3.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}\,,$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Можно считать, что $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны. Векторы $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ компланарны, то есть параллельны некоторой плоскости.

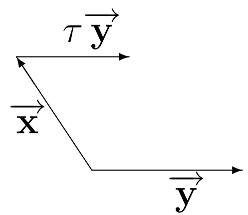


Рис. 3.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}\,,$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}]\,. \tag{6}$$

Можно считать, что $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны. Векторы $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ компланарны, то есть параллельны некоторой плоскости.

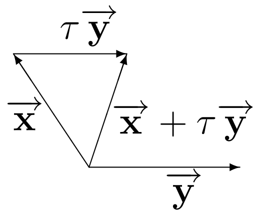


Рис. 3.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$,

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]. \tag{6}$$

Можно считать, что $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны. Векторы $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ компланарны, то есть параллельны некоторой плоскости.

Векторы $[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]$ и $[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]$ перпендикулярны этой плоскости, значит, эти векторы коллинеарны.

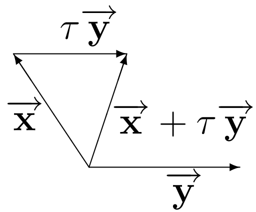


Рис. 3.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\quad\text{и}\quad\left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau\in\mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$,

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right].\tag{6}$$

Можно считать, что $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны. Векторы $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ компланарны, то есть параллельны некоторой плоскости.

Векторы $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ перпендикулярны этой плоскости, значит, эти векторы коллинеарны.

Из **определения правой тройки** следует, что векторы $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ сонаправлены.

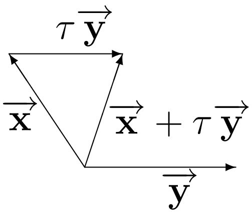


Рис. 3.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau\in\mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\,$,

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Мы показали, что если $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны, то векторы $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ коллинеарны и сонаправлены.

Осталось доказать равенство длин векторов $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$.

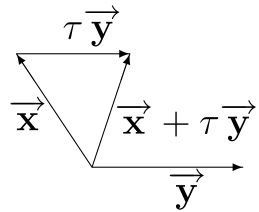


Рис. 3.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Сначала проверим, что для $\tau\in\mathbb{R}$ и любых векторов $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Мы показали, что если $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ не коллинеарны, то векторы $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ коллинеарны и сонаправлены.

Длины векторов $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ и $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]$ численно равны площади равновеликих параллелограммов $OAC'C$ и $OC'C''C$.

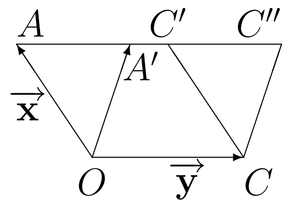


Рис. 3.

Формула (6) доказана.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]. \tag{6}$$

Теперь докажем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

Нетрудно подобрать числа α, β так, чтобы вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}' = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha \overrightarrow{\mathbf{c}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}' = \overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{c}}$ перпендикулярны вектору $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Теперь докажем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

Нетрудно подобрать числа α,β так, чтобы вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}'=\overrightarrow{\mathbf{a}}+\alpha\overrightarrow{\mathbf{c}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}'=\overrightarrow{\mathbf{b}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{c}}$ перпендикулярны вектору $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$\begin{cases} 0=\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}+\alpha\overrightarrow{\mathbf{c}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)= \\ 0=\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{c}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)= \end{cases}$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}\,, \overrightarrow{\mathbf{y}}]\,. \tag{6}$$

Теперь докажем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.
Нетрудно подобрать числа α, β так, чтобы вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,' = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha\, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,' = \overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta\, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ перпендикулярны вектору $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$\begin{cases} 0 = (\overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}) + \alpha\, (\overrightarrow{\mathbf{c}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}})\,, \\ 0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\,, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \end{cases}$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

Теперь докажем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

Нетрудно подобрать числа α, β так, чтобы вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}' = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha \overrightarrow{\mathbf{c}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}' = \overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{c}}$ перпендикулярны вектору $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$\begin{cases} 0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) + \alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right), \\ 0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) + \beta \left(\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]. \tag{6}$$

Теперь докажем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

Нетрудно подобрать числа α, β так, чтобы вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}' = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha \overrightarrow{\mathbf{c}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}' = \overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{c}}$ перпендикулярны вектору $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$\begin{cases} 0 = (\overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) + \alpha (\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}), \\ 0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) + \beta (\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})}{(\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})}, \\ \beta = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right)}{(\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})}. \end{cases}$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}]=[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\overrightarrow{\mathbf{y}}]\,. \tag{6}$$

Теперь докажем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

Итак, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'=\overrightarrow{\mathbf{a}}+\alpha\overrightarrow{\mathbf{c}}\perp\overrightarrow{\mathbf{c}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}'=\overrightarrow{\mathbf{b}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{c}}\perp\overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}=\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}'$.

Так как $\overrightarrow{\mathbf{d}}=\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)+(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{\mathbf{c}}$, то, **по (6)**, имеем

$$[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}]=[\overrightarrow{\mathbf{a}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}]\,,\ \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right],\ \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{d}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]. \tag{7}$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\overrightarrow{\mathbf{y}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right],\ \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}'\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right],\ \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{d}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]. \tag{7}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}'=\overrightarrow{\mathbf{a}}+\alpha\overrightarrow{\mathbf{c}}\perp\overrightarrow{\mathbf{c}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}}'=\overrightarrow{\mathbf{b}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{c}}\perp\overrightarrow{\mathbf{c}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{d}}=\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}'\perp\overrightarrow{\mathbf{c}},$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\perp\overrightarrow{\mathbf{c}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}'\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\perp\overrightarrow{\mathbf{c}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{d}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\perp\overrightarrow{\mathbf{c}},$$

значит, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}'\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{d}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$ компланарны.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Перенесем все векторы в одну точку, которую обозначим буквой O. Пусть $A', A'', B'.B'', D', D''$ — концы векторов, соответственно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'$, $[\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}]$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

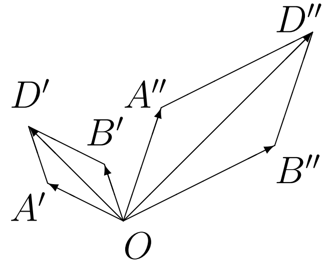


Рис. 4.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Перенесем все векторы в одну точку, которую обозначим буквой O. Пусть $A', A'', B'.B'', D', D''$ — концы векторов, соответственно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'$, $[\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}]$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

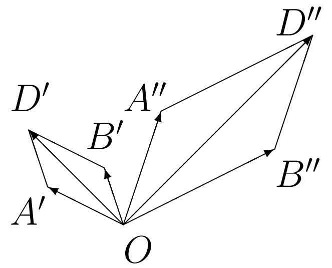


Рис. 4.

Заметим, что $\triangle A'OA'' \sim \triangle B'OB'' \sim \triangle D'OD''$, причем коэффициент подобия равен $\left|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$. Поэтому $OA''D''B''$ — параллелограмм.

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Перенесем все векторы в одну точку, которую обозначим буквой O. Пусть $A', A'', B'.B'', D', D''$ — концы векторов, соответственно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}\,',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,'+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,'+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

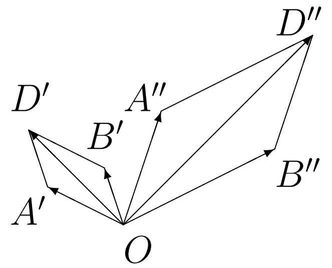


Рис. 4.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}\,'+\overrightarrow{\mathbf{b}}\,',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\overrightarrow{OD''}=$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Перенесем все векторы в одну точку, которую обозначим буквой O. Пусть $A', A'', B'.B'', D', D''$ — концы векторов, соответственно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

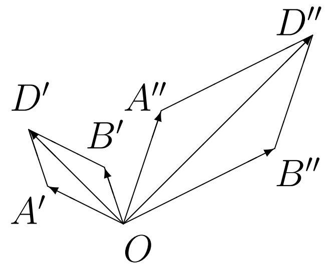


Рис. 4.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \overrightarrow{OD''} =$$

$$= \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} =$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=[\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{c}}]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Перенесем все векторы в одну точку, которую обозначим буквой O. Пусть $A', A'', B'.B'', D', D''$ — концы векторов, соответственно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'$, $[\overrightarrow{\mathbf{a}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}]$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

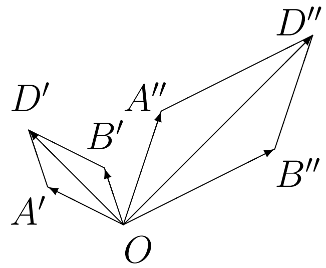


Рис. 4.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\overrightarrow{OD''}=$$

$$=\overrightarrow{OA''}+\overrightarrow{OB''}=\left[\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Перенесем все векторы в одну точку, которую обозначим буквой O. Пусть $A', A'', B'.B'', D', D''$ — концы векторов, соответственно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}'$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$.

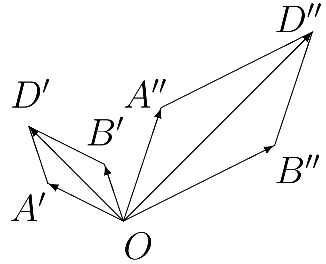


Рис. 4.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\overrightarrow{OD''}=$$

$$=\overrightarrow{OA''}+\overrightarrow{OB''}=\left[\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}',\overrightarrow{\mathbf{c}}\right].$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right]. \tag{6}$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right], \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right], \left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]. \tag{7}$$

Используя полученное равенство

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$$

и равенства (6), (7), получаем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] =$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=[\overrightarrow{\mathbf{a}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{a}},\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}},\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}}+\tau\,\overrightarrow{\mathbf{y}},\,\overrightarrow{\mathbf{y}}]=[\overrightarrow{\mathbf{x}},\,\overrightarrow{\mathbf{y}}]\,. \tag{6}$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{a}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}]=[\overrightarrow{\mathbf{a}}',\,\overrightarrow{\mathbf{c}}]\,,\ \left[\overrightarrow{\mathbf{b}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}',\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right],\ \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathbf{d}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]. \tag{7}$$

Используя полученное равенство

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}',\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=[\overrightarrow{\mathbf{a}}',\,\overrightarrow{\mathbf{c}}]+\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}',\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$$

и равенства (6), (7), получаем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}},\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=$

$$=\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}'+\overrightarrow{\mathbf{b}}',\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right]=$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]. \tag{6}$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}], \ \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right], \ \left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]. \tag{7}$$

Используя полученное равенство

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$$

и равенства (6), (7), получаем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] =$

$$= \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] =$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}} + \tau\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}] = [\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}]. \tag{6}$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}], \ \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right], \ \left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]. \tag{7}$$

Используя полученное равенство

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]$$

и равенства (6), (7), получаем $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] =$

$$= \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}' + \overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}', \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right].$$

IV.5.2. Доказательство линейности векторного произведения по первому сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] + \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

Линейность векторного произведения по первому множителю доказана.

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] =$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] =$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] =$$

$$= -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}},\right] - \left[\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] =$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] =$$

$$= -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}},\right] - \left[\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right],$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] =$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] =$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] = -\lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] =$$

IV.5.3. Доказательство линейности векторного произведения по второму сомножителю

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + [\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}] \quad \text{и} \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] = -\lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right].$$

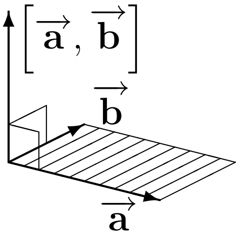
IV.5.4. Доказательство критерия коллинеарности

$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

Утверждение очевидно, достаточно вычислить длину вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$.

IV.5.5. Доказательство геометрического смысла векторного произведения

Геометрический смысл: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ — вектор, перпендикулярный параллелограмму, построенному на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, причем $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади этого параллелограмма.



Это следствие из определения векторного произведения.

IV.5.6. Свойства смешанного произведения векторов

Геометрический смысл смешанного произведения векторов:

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Критерий правой и левой тройки векторов:

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Критерий компланарности векторов:

Утверждение IV.3. *Векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *компланарны тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = 0$.

IV.5.6. Свойства смешанного произведения векторов

Полилинейность смешанного произведения векторов:

Утверждение IV.4.

$$\left(\alpha \overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{d}} = \alpha \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{d}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{d}};$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \left(\alpha \overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) \overrightarrow{\mathbf{d}} = \alpha \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{d}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{d}};$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\alpha \overrightarrow{\mathbf{c}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \alpha \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{d}}.$$

Циклическое свойство смешанного произведения:

Утверждение IV.5.

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}} = -\overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}} = -\overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}}\, \overrightarrow{\mathbf{a}} = -\overrightarrow{\mathbf{a}}\, \overrightarrow{\mathbf{c}}\, \overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

IV.5.6. Свойства смешанного произведения векторов

Передём к координатной формуле вычисления смешанного произведения или продолжим развитие векторно-символической модели?

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Поэтому в силу **линейности скалярного произведения** можно считать, что тройка векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — правая, в противном случае можно заменить вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ на $-\overrightarrow{\mathbf{c}}$, что не изменит абсолютной величины числа $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

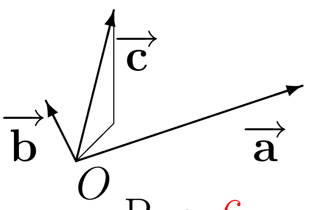


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Согласно **свойствам векторного произведения**, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен

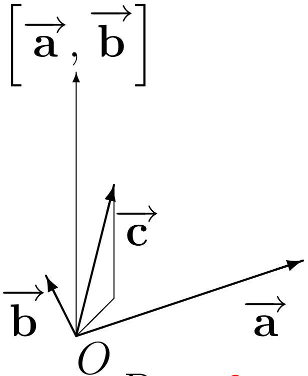


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Согласно **свойствам векторного произведения**, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен

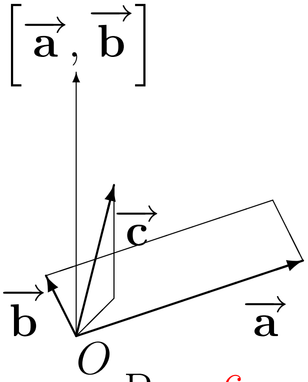


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Согласно **свойствам векторного произведения**, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади параллелограмма на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

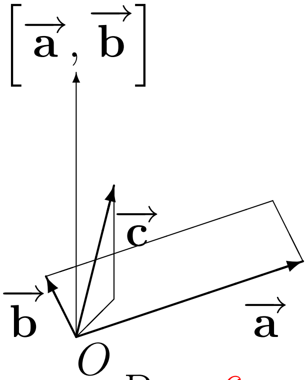


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Согласно **свойствам векторного произведения**, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади параллелограмма на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

$\text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}$ равна длине отрезка OH, то есть

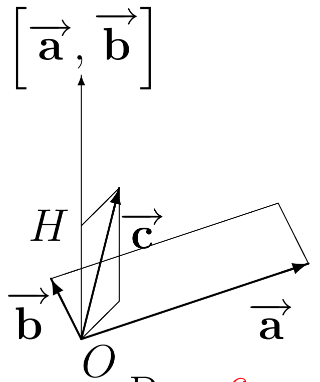


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Согласно **свойствам векторного произведения**, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади параллелограмма на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$.
$\text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}$ равна длине отрезка OH, то есть

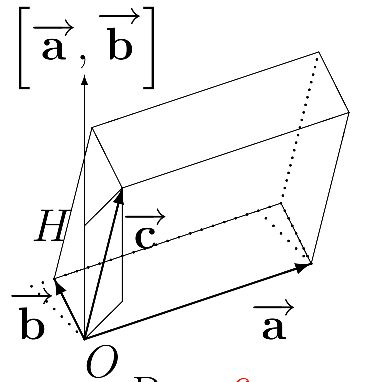


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Согласно **свойствам векторного произведения**, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади параллелограмма на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$.
$\text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}$ равна длине отрезка OH, то есть длине высоты параллелепипеда с ребрами $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

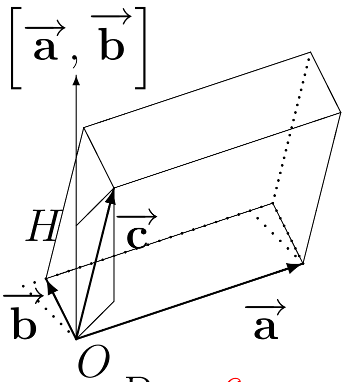


Рис. 6.

IV.5.7. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Утверждение IV.1. $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ *равен объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Доказательство. По определению

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Итак, $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right| \cdot \text{пр}_{\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]} \overrightarrow{\mathbf{c}}$ численно равно объему параллелепипеда с ребрами $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$, что и требовалось доказать.

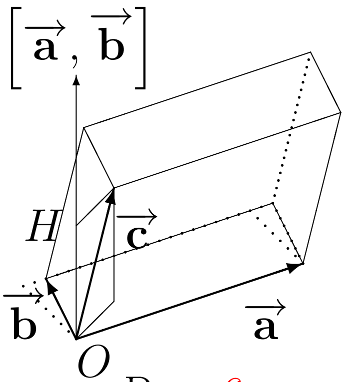


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — правая тройка векторов, то $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$, поскольку это число равно объему параллелепипеда на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

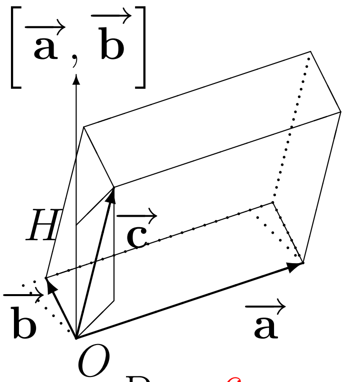


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то тройка $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, (-\overrightarrow{\mathbf{c}})$ является правой, поэтому в силу **линейности скалярного произведения**

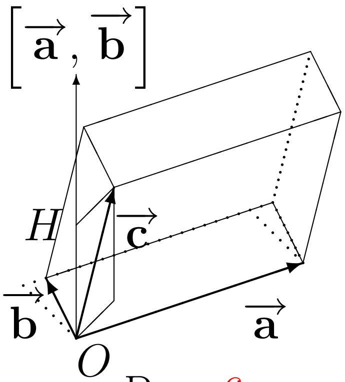


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то тройка $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, (-\overrightarrow{\mathbf{c}})$ является правой, поэтому в силу **линейности скалярного произведения** $0 < \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}(-\overrightarrow{\mathbf{c}}) =$

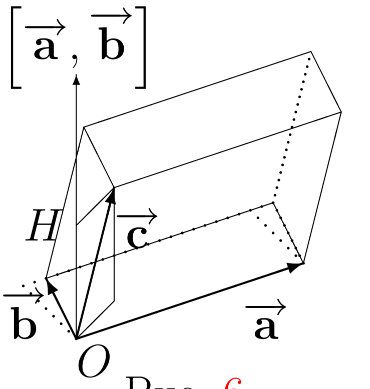


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то тройка $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, (-\overrightarrow{\mathbf{c}})$ является правой, поэтому в силу **линейности скалярного произведения** $0 < \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}(-\overrightarrow{\mathbf{c}}) = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], (-\overrightarrow{\mathbf{c}})\right) =$

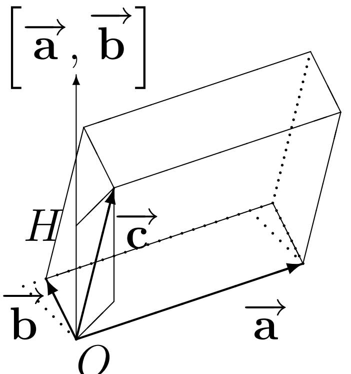


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.
Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то тройка $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, (-\overrightarrow{\mathbf{c}})$ является правой, поэтому в силу **линейности скалярного произведения** $0 < \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}(-\overrightarrow{\mathbf{c}}) = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], (-\overrightarrow{\mathbf{c}})\right) =$

$$= -\left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) =$$

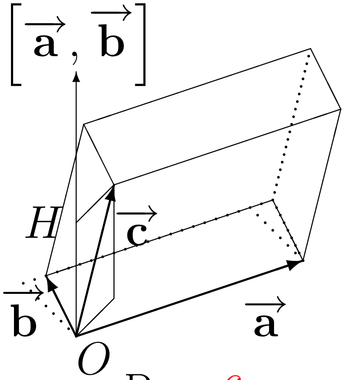


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то тройка $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, (-\overrightarrow{\mathbf{c}})$ является правой, поэтому в силу **линейности скалярного произведения** $0 < \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}(-\overrightarrow{\mathbf{c}}) = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], (-\overrightarrow{\mathbf{c}})\right) =$

$$= -\left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = -\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

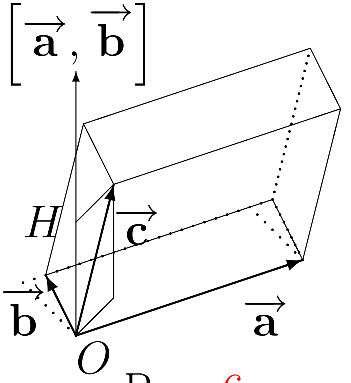


Рис. 6.

IV.5.8. Критерий правой и левой тройки векторов

Утверждение IV.2. *Тройка векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *является правой (левой) тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$ *(соответственно,* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$*).*

Доказательство.

Если $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов, то тройка $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, (-\overrightarrow{\mathbf{c}})$ является правой, поэтому в силу **линейности скалярного произведения** $0 < \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}(-\overrightarrow{\mathbf{c}}) = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], (-\overrightarrow{\mathbf{c}})\right) =$

$$= -\left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = -\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

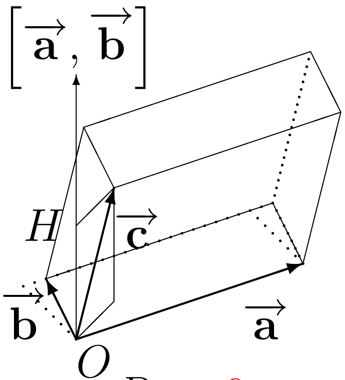


Рис. 6.

Следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$. Свойство доказано.

IV.5.9. Критерий компланарности векторов

Утверждение IV.3. *Векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *компланарны тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = 0.$

Доказательство.

IV.5.9. Критерий компланарности векторов

Утверждение IV.3. *Векторы* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *компланарны тогда и только тогда, когда* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = 0$.

Доказательство. Это очевидное следствие из **геометрического смысла смешанного произведения векторов**.

IV.5.10. Полилинейность смешанного произведения векторов

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}};$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{b}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)\overrightarrow{\mathbf{d}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}};$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{c}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{d}}\right)=\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}}.$$

Доказательство. Это свойство является следствием **определения смешанного произведения** векторов, **линейности скалярного** и **линейности векторного произведения** векторов.

IV.5.11. Циклическое свойство смешанного произведения векторов

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = -\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = -\overrightarrow{\mathbf{d}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} = -\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

Доказательство.

IV.5.11. Циклическое свойство смешанного произведения векторов

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = -\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = -\overrightarrow{\mathbf{d}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} = -\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

Доказательство. Это очевидное следствие из **геометрического смысла смешанного произведения** в сочетании с **критерием правой и левой тройки векторов** и **критерием компланарности векторов**.

IV.6. Представление отношений в виде равенств

$\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$	
Коллинеарность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}};$

IV.6. Представление отношений в виде равенств

$\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$	
Коллинеарность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}};$
Ортогональность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0;$

IV.6. Представление отношений в виде равенств

$\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$	
Коллинеарность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}};$
Ортогональность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0;$
Компланарность	
$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\ \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0;$

IV.6. Представление отношений в виде равенств

$\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$	
Коллинеарность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}};$
Ортогональность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0;$
Компланарность	
$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\ \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0;$
Вычисления значений величин	
длина вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$: $\left\|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\|$	$\left\|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\| = \sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}})};$

IV.6. Представление отношений в виде равенств

$\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$	
Коллинеарность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}};$
Ортогональность	
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0;$
Компланарность	
$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu \overrightarrow{\mathbf{b}}$	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\ \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0;$
Вычисления значений величин	
длина вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$: $\left\lvert\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\rvert$	$\left\lvert\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\rvert = \sqrt{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)};$
угол между $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$: $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}}$	$\cos \widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}} = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}{\left\lvert\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\rvert \cdot \left\lvert\overrightarrow{\mathbf{b}}\right\rvert}$

IV.7. Некоторые критерии векторной алгебры

Некоторые критерии ($\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$)	
Особенность расположения векторов	*Характеристическое свойство*
Коллинеарность (параллельность)	$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}$ $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$
Ортогональность	$(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = 0$
Компланарность	$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = 0$
$\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ — правая тройка векторов	$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0$
$\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ — левая тройка векторов	$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0$

Координатная модель векторной алгебры

Постановка задачи о задании вектора с помощью чисел

Линейная комбинация

Эквивалентность однозначности и минимальности

Теорема об эквивалентности минимальности системы порождающих и однозначности разложения

Однозначность и линейная независимость

Теорема о базисе прямой

Теорема о базисе плоскости

Теорема о базисе пространства

Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Координаты вектора

Формулы для вычислений с помощью координат

V.1. Постановка задачи о задании вектора с помощью чисел

Векторно-символическая модель позволяет свести операции и отношения к *векторным равенствам.* Однако наиболее мощный аналитический аппарат в математике развит для *числовых равенств*. Поэтому нам следует разработать стандартную форму задания вектора, позволяющую свести проблемы векторной алгебры к *числовым* равенствам и неравенствам.

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору* <u>*числовых*</u> *параметров.*

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору <u>числовых</u> параметров.*

Построим произвольные комбинации векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$3\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} - 2\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{c}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору* <u>*числовых*</u> *параметров.*

Построим произвольные комбинации векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$3\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} - 2\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{c}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= 3\overrightarrow{\mathbf{c}} - 6\overrightarrow{\mathbf{a}} + 6\overrightarrow{\mathbf{c}} - 12\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}} =$$

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору* <u>*числовых*</u> *параметров.*

Построим произвольные комбинации векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$:

$$3\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} - 2\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{c}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= 3\overrightarrow{\mathbf{c}} - 6\overrightarrow{\mathbf{a}} + 6\overrightarrow{\mathbf{c}} - 12\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}} = -7\overrightarrow{\mathbf{a}} - 13\overrightarrow{\mathbf{b}} + 9\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору <u>числовых</u> параметров.*

Другой пример:

$$\alpha\left(2\,\overrightarrow{\mathbf{a}}-\beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)-\gamma\,(\delta\,\overrightarrow{\mathbf{c}}-3\,\overrightarrow{\mathbf{a}})=$$

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору числовых параметров.*

Другой пример:

$$\alpha\left(2\overrightarrow{\mathbf{a}} - \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) - \gamma\left(\delta\overrightarrow{\mathbf{c}} - 3\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = 2\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} - (\alpha\beta)\overrightarrow{\mathbf{b}} - (\gamma\delta)\overrightarrow{\mathbf{c}} - 3\gamma\overrightarrow{\mathbf{a}} =$$

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору* <u>*числовых*</u> *параметров.*

Другой пример:

$$\alpha\left(2\overrightarrow{\mathbf{a}}-\beta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)-\gamma\left(\delta\overrightarrow{\mathbf{c}}-3\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)=2\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}-(\alpha\beta)\overrightarrow{\mathbf{b}}-(\gamma\delta)\overrightarrow{\mathbf{c}}-3\gamma\overrightarrow{\mathbf{a}}=$$

$$=(2\alpha-3\gamma)\overrightarrow{\mathbf{a}}+(-\alpha\beta)\overrightarrow{\mathbf{b}}+(-\gamma\delta)\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Цель 1. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор выразить через векторы этой системы с использованием операций произведения вектора на число, сложения векторов. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора и свести задание вектора к набору* *<u>числовых</u> параметров.*

Вывод. Таким образом, любое выражение от векторов $\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}$ с использованием операций «умножение вектора на число» и «сложение векторов» можно представить в виде

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые числа.

V.2. Линейная комбинация

Определение 12. *Выражение*

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \tag{8}$$

*называется **линейной комбинацией** векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Вывод: **в качестве стандартного представления вектора можно взять его разложение в линейную комбинацию некоторого фиксированного набора векторов.**

Вывод: **в качестве стандартного представления вектора можно взять его разложение в линейную комбинацию некоторого фиксированного набора векторов.**

Следовательно, цель 1, связанную с поиском стандартного представления векторов, можно уточнить следующим образом.

Вывод: **в качестве стандартного представления вектора можно взять его разложение в линейную комбинацию некоторого фиксированного набора векторов.**

Следовательно, цель 1, связанную с поиском стандартного представления векторов, можно уточнить следующим образом.

Цель 2. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было бы представить* ***линейной комбинацией векторов*** *этой системы. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора.*

Цель 2. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было бы представить* ***линейной комбинацией векторов*** *этой системы. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора.*

Для выбора такой системы векторов попробуем применить исследовательские стратегии.

Цель 2. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было бы представить* ***линейной комбинацией векторов*** *этой системы. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора.*

Для выбора такой системы векторов попробуем применить исследовательские стратегии.

Используя стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций, хотелось бы минимальной формы представления вектора, который бы однозначно его определял в данной системе векторов.

Цель 2. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было бы представить* ***линейной комбинацией векторов*** *этой системы. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора.*

Для выбора такой системы векторов попробуем применить исследовательские стратегии.

Используя стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций, хотелось бы минимальной формы представления вектора, который бы однозначно его определял в данной системе векторов.

Используя эту стратегию, данную цель сводим к ряду вопросов.

Цель 2. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было бы представить* ***линейной комбинацией векторов*** *этой системы. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора.*

Первый вопрос: будет ли однозначным стандартное представление вектора через выбранную систему векторов (т.е. можно ли представить вектор двумя различными комбинациями фиксированной системой векторов).

Цель 2. *Найти способ выбора такой системы векторов, чтобы любой вектор можно было бы представить* ***линейной комбинацией векторов*** *этой системы. Такое представление вектора мы могли бы взять в качестве стандартного представления вектора.*

Первый вопрос: будет ли однозначным стандартное представление вектора через выбранную систему векторов (т.е. можно ли представить вектор двумя различными комбинациями фиксированной системой векторов).

Второй вопрос: какое минимальное количество векторов достаточно для стандартного представления вектора.

V.3. Эквивалентность однозначности и минимальности

Первый вопрос: будет ли однозначным стандартное представление вектора через выбранную систему векторов (т.е. можно ли представить вектор двумя различными комбинациями фиксированной системой векторов).

Второй вопрос: какое минимальное количество векторов достаточно для стандартного представления вектора.

Эти вопросы подводят к формулировке требований соответствующих экстремальных характеристик системы векторов, а именно:

V.3. Эквивалентность однозначности и минимальности

Первый вопрос: будет ли однозначным стандартное представление вектора через выбранную систему векторов (т.е. можно ли представить вектор двумя различными комбинациями фиксированной системой векторов).

Второй вопрос: какое минимальное количество векторов достаточно для стандартного представления вектора.

Эти вопросы подводят к формулировке требований соответствующих экстремальных характеристик системы векторов, а именно:

1) выбор системы векторов $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ должен гарантировать однозначность представления вектора в виде (8);
2) минимизация числа векторов в системе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ при условии, что любой вектор раскладывается в линейную комбинацию векторов этой системы.

V.3. Эквивалентность однозначности и минимальности

Одним из проявлений эффективности стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций является тот факт, что эти требования оказались равносильными!

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ однозначно, то система $\mathbf{Б}$ является минимальной системой порождающих.

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно, то система $\mathbf{Б}$ является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ не является минимальной системой порождающих.

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ однозначно, то система **Б** является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б'} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\}$ остается системой порождающих.

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно, то система $\mathbf{Б}$ является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б'} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\right\}$ остается системой порождающих.

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}$.

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно, то система **Б** является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б'} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\right\}$ остается системой порождающих.

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} \\ \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \end{cases}$$

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно, то система **Б** является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б'} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\right\}$ остается системой порождающих.

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \end{cases}$$

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно, то система $\mathbf{Б}$ является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б'} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\right\}$ остается системой порождающих.

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + \mathbf{0} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \end{cases}$$

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ однозначно, то система **Б** является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б'} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\}$ остается системой порождающих.

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + \mathbf{0} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \end{cases}$$

но $0 \neq 1$.

Сначала докажем, что если любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ однозначно, то система **Б** является минимальной системой порождающих.

Пусть система $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ не является минимальной системой порождающих.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что после удаления $\overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ система $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\}$ остается системой порождающих.

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + \mathbf{0} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{a_n}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_1}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}} + \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_n}}, \end{cases}$$

но $0 \neq 1$. Это противоречит определению однозначности разложения, поэтому *система* **Б** *является минимальной системой порождающих.*

Теперь докажем, что если система $\mathbf{Б}$ является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ однозначно.

В математике наиболее мощным является *аналитический аппарат обработки равенств*. Требование однозначности разложения на языке равенств (если имеем два разложения одного и того же вектора, то эти разложения совпадают, т.е. совпадают соответствующие коэффициенты) «на языке равенств» выглядит следующим образом:

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

В математике наиболее мощным является *аналитический аппарат обработки равенств*. Требование однозначности разложения на языке равенств (если имеем два разложения одного и того же вектора, то эти разложения совпадают, т.е. совпадают соответствующие коэффициенты) «на языке равенств» выглядит следующим образом:

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{array}\right. \qquad (9)$$

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $\quad \alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}}.$

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}}$.

Тогда $(\alpha_1-\beta_1)\,\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+(\alpha_2-\beta_2)\,\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\,\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}}$.

Тогда $(\alpha_1 - \beta_1)\,\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + (\alpha_2 - \beta_2)\,\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Пусть хотя бы одна из разностей $(\alpha_i - \beta_i)$ отлична от нуля. Без ограничения общности можно считать, что $(\alpha_n - \beta_n) \neq 0$.

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}}$.

Тогда $(\alpha_1-\beta_1)\,\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+(\alpha_2-\beta_2)\,\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\,\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Пусть хотя бы одна из разностей $(\alpha_i-\beta_i)$ отлична от нуля. Без ограничения общности можно считать, что $(\alpha_n-\beta_n)\neq 0$.

$$\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_n-\alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \frac{\alpha_2-\beta_2}{\beta_n-\alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}}{\beta_n-\alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}.$$

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

Итак, предположение о неоднозначности разложения, например, $\alpha_n \neq \beta_n$, приводит к равенству

$$\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_n - \alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\beta_n - \alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}}{\beta_n - \alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}.$$

Теперь докажем, что если система **Б** является минимальной системой порождающих, то любой вектор раскладывается по $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ однозначно.

Надо доказать, что

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \qquad (9)$$

Итак, предположение о неоднозначности разложения, например, $\alpha_n \neq \beta_n$, приводит к равенству

$$\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_n - \alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\beta_n - \alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}}{\beta_n - \alpha_n}\overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}.$$

Значит, система $\mathbf{Б'} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_{n-1}}}\right\}$ тоже, как и **Б**, является системой порождающих. Следовательно, система порождающих **Б** не является минимальной, противоречие.

V.4. Теорема об эквивалентности минимальности системы порождающих и однозначности разложения

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Любой вектор раскладывается по системе векторов* $\text{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ *однозначно тогда и только тогда, когда система векторов* Б *является минимальной системой порождающих.*

V.5. Однозначность и линейная независимость

Однозначность

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \;\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

равносильна

$$(\alpha_1 - \beta_1)\,\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \iff \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ \ldots \\ \alpha_n - \beta_n = 0, \end{cases} \tag{10}$$

V.5. Однозначность и линейная независимость

Однозначность

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \beta_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \tag{9}$$

равносильна

$$(\alpha_1 - \beta_1)\,\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \iff \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ \ldots \\ \alpha_n - \beta_n = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{a_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \ldots \\ \lambda_n = 0. \end{cases} \tag{11}$$

V.5. Однозначность и линейная независимость

Линейная комбинация векторов, в которой коэффициенты равны нулю, называется тривиальной. Условие (11) можно представить в виде удобной для запоминания «словесной формулы»: ***Только тривиальная линейная комбинация дает нулевой вектор.***

V.5. Однозначность и линейная независимость

Линейная комбинация векторов, в которой коэффициенты равны нулю, называется тривиальной. Условие (11) можно представить в виде удобной для запоминания «словесной формулы»: ***Только тривиальная линейная комбинация дает нулевой вектор.***

Определение 13. *Система векторов* $\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\}$ *называется* ***линейно независимой*** *тогда и только тогда, когда* ***только*** *тривиальная линейная комбинация дает нулевой вектор. В противном случае: если линейная комбинация равна нулю и хотя бы один из ее коэффициентов отличен от нуля, то она называется* ***линейно зависимой****.*

V.5. Однозначность и линейная независимость

В процессе вывода условия (11) мы доказали следующую теорему:

Теорема 3 (критерий однозначности разложения). *Вектор раскладывается в линейную комбинацию векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}$ *однозначным образом (9) тогда и только тогда, когда система векторов* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a_1}}, \overrightarrow{\mathbf{a_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{a_n}}\right\}$ *является линейно независимой.*

V.5. Однозначность и линейная независимость

Требование однозначности искомой системы векторов мы осуществим, выбрав линейно независимую систему векторов. Необходимо для линейно независимых систем векторов осуществить второе требование — минимальности количества векторов в системе (для выражения любого вектора через векторы этой системы). Для удобства введем термин для обозначения системы векторов, соответствующей выдвинутым требованиям.

V.5. Однозначность и линейная независимость

Определение 14. Максимальной линейно независимой системой *из n векторов называется система:*
1) линейно независимая;
2) такая, что при добавлении к ней любого вектора получается линейно зависимая система.

V.6. База и базис

Определение 14. Максимальной линейно независимой системой *из n векторов называется система:*
1) линейно независимая;
2) такая, что при добавлении к ней любого вектора получается линейно зависимая система.

Определение 15. *Максимальная линейно независимая упорядоченная система векторов называется **базисом**.*

V.6. База и базис

Определение 14. Максимальной линейно независимой системой *из n векторов называется система:*

1) линейно независимая;

2) такая, что при добавлении к ней любого вектора получается линейно зависимая система.

Определение 15. *Максимальная линейно независимая упорядоченная система векторов называется* ***базисом****.*

Замечание 1. *Упорядоченность системы означает, что в выбранной системе нам важен порядок перечисления векторов. Например, упорядоченные системы векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *различны.*

V.7. Примеры базисов

Пусть L — некоторая прямая, P — плоскость. **Вектором прямой** L назовем любой вектор, обладающий следующим свойством: если его отложить от любой точки прямой L, то конец полученного направленного отрезка будет принадлежать прямой L.

V.7. Примеры базисов

Пусть L — некоторая прямая, P — плоскость. **Вектором прямой** L назовем любой вектор, обладающий следующим свойством: если его отложить от любой точки прямой L, то конец полученного направленного отрезка будет принадлежать прямой L.

Вектором плоскости P назовем любой такой вектор, что конец направленного отрезка, полученного откладыванием этого вектора от произвольной точки плоскости P, принадлежит плоскости P.

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство.

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой.

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Осталось показать, что

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Осталось показать, что эта система векторов является максимальной среди линейно независимых. Как это доказать?

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Осталось показать, что эта система векторов является максимальной среди линейно независимых. Как это доказать? Максимальность такой системы векторов означает, что

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Осталось показать, что эта система векторов является максимальной среди линейно независимых. Как это доказать? Максимальность такой системы векторов означает, что при добавлении в нее любого вектора плоскости получающаяся система векторов окажется линейно зависимой.

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Осталось показать, что эта система векторов является максимальной среди линейно независимых. Как это доказать? Максимальность такой системы векторов означает, что при добавлении в нее любого вектора плоскости получающаяся система векторов окажется линейно зависимой. Из определения произведения вектора на число следует, что для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ прямой имеем $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, откуда $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\right\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Из определения произведения вектора на число следует, что для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ прямой имеем $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, откуда $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Таким образом, получили представление нулевого вектора в виде линейной комбинации $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + (-1)\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, в которой есть ненулевые коэффициенты: $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0}\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

V.8. Теорема о базисе прямой

Теорема 4 (о базисе прямой). *Система из одного ненулевого вектора прямой является базисом этой прямой.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой вектор на прямой. Все векторы прямой коллинеарны. Система векторов $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\}$ является линейно независимой, так как равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ выполняется только при $\alpha = 0$, поскольку вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ — ненулевой.

Из определения произведения вектора на число следует, что для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ прямой имеем $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$, откуда $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Таким образом, получили представление нулевого вектора в виде линейной комбинации: $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0}\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Поэтому при добавлении любого вектора прямой к системе $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}\}$ система векторов становится линейно зависимой. Теорема доказана.

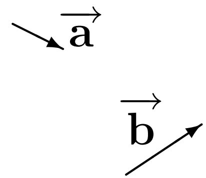
V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*

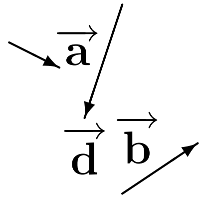
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.



V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*

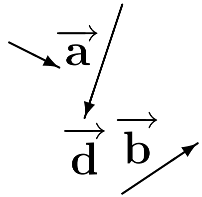
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.



Иными словами надо доказать, что при добавлении любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ плоскости в эту систему она станет линейно зависимой, т.е. что для некоторых чисел α, β, γ, не все из которых равны 0, имеет место равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}} + \gamma\overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*



Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

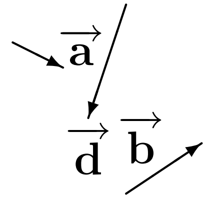
Иными словами надо доказать, что при добавлении любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ плоскости в эту систему она станет линейно зависимой, т.е. что для некоторых чисел α, β, γ, не все из которых равны 0, имеет место равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}} + \gamma\overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Ясно, что $\gamma \neq 0$, иначе, вопреки условию, линейно зависимой была бы исходная система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*

Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.



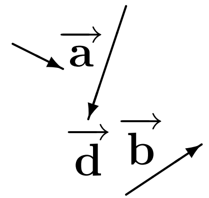
Иными словами надо доказать, что при добавлении любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ плоскости в эту систему она станет линейно зависимой, т.е. что для некоторых чисел α, β, γ, не все из которых равны 0, имеет место равенство $\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}} + \gamma\overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Итак, $\gamma \neq 0$, откуда $\overrightarrow{\mathbf{d}} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{\beta}{\gamma}\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*

Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

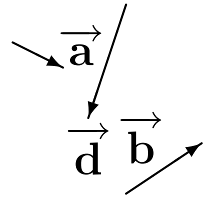


Линейная зависимость системы векторов $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}\right\}$ равносильна $\overrightarrow{\mathbf{d}} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{\beta}{\gamma}\overrightarrow{\mathbf{b}}$. Иными словами, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*

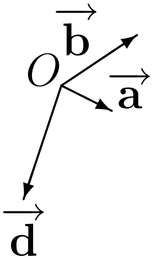
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.



Итак, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu \overrightarrow{\mathbf{b}}$

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*



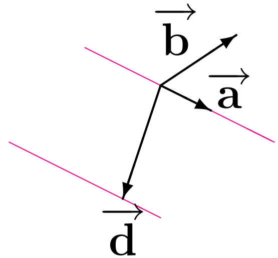
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

Итак, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Для удобства зафиксируем на плоскости точку O и отложим векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от этой точки.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*



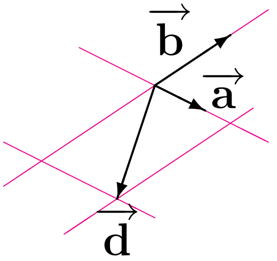
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

Итак, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Для удобства зафиксируем на плоскости точку O и отложим векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от этой точки.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*



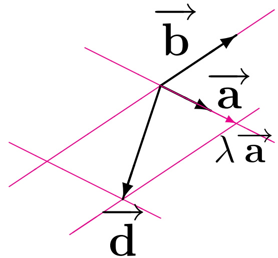
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

Итак, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Для удобства зафиксируем на плоскости точку O и отложим векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от этой точки.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*



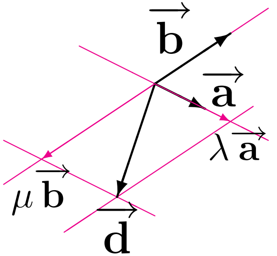
Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

Итак, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Для удобства зафиксируем на плоскости точку O и отложим векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от этой точки.

V.9. Теорема о базисе плоскости

Теорема 5 (о базисе плоскости). *Система из любых двух линейно независимых векторов плоскости является базисом этой плоскости.*



Доказательство. Пусть система $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ векторов плоскости является линейно независимой. Нам остается доказать ее максимальность.

Итак, нам надо найти такие коэффициенты λ и μ, что $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Для удобства зафиксируем на плоскости точку O и отложим векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от этой точки.

Таким образом, равенство $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$, а вместе с тем и теорема, доказаны.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство использует ту же идею, что и доказательство теоремы 5 о базисе плоскости с естественными отличиями.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Если D принадлежит одной из плоскостей: OAB, OAC или OBC, то достаточно сослаться на теорему 5 о базисе плоскости.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Поэтому можно считать, что D не принадлежит плоскостям OAB, OAC и OBC.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Рассмотрим параллелепипед, ограниченный плоскостями OAB, OAC и OBC, а также параллельным им плоскостями, проведенными через D.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Направленный отрезок OD — диагональ параллепипеда — представим в виде суммы ребер OA', OB' и OC', где A' точка пересечения прямой OA с плоскостью, проходящей через D параллельно плоскости OBC и т.д.

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Тогда
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} =$

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Тогда
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

V.10. Теорема о базисе пространства

Теорема 6 (о базисе пространства). *Система из любых трех некомпланарных векторов пространства является базисом этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right\}$ — система некомпланарных векторов и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ — произвольный вектор пространства. Отложим эти векторы от произвольной фиксированной точки O, получим направленные такие отрезки, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

Тогда

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

откуда

$$\overrightarrow{\mathbf{d}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Теорема доказана.

V.11. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Обобщением данных теорем является следующая теорема.

Теорема 7 (о линейных комбинациях базисных векторов). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства U тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) *всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. *Необходимость.*

V.11. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Обобщением данных теорем является следующая теорема.

Теорема 7 (**о линейных комбинациях базисных векторов**). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства U тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы **Б**.

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем произвольный вектор x из U с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда $\{e_1, \ldots, e_n, x\}$ — линейно зависимая система векторов (в силу максимальности **Б**).

V.11. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Обобщением данных теорем является следующая теорема.

Теорема 7 (о линейных комбинациях базисных векторов). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства* U *тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) всякий вектор пространства U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б***.*

Доказательство. *Необходимость.* Поэтому для подходящих элементов поля $\mathbf{K}$ имеем $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \mu x = \mathbf{0}$, и не все коэффициенты равны 0.

V.11. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Обобщением данных теорем является следующая теорема.

Теорема 7 (о линейных комбинациях базисных векторов). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства* U *тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) *всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. *Необходимость.* Поэтому для подходящих элементов поля $\mathbf{K}$ имеем $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \mu x = \mathbf{0}$, и не все коэффициенты равны 0. Если бы $\mu = 0$, то **Б** было бы линейно зависимой системой, следовательно, $\mu \neq 0$. Значит, x является линейной комбинацией векторов из **Б**.

V.11. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Обобщением данных теорем является следующая теорема.

Теорема 7 (о линейных комбинациях базисных векторов). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства* U *тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) *всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. *Достаточность.*

V.11. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Обобщением данных теорем является следующая теорема.

Теорема 7 (о линейных комбинациях базисных векторов). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства* U *тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) *всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. *Достаточность.* Тот факт, что **Б** — максимальная линейно независимая система — очевиден, поскольку всякий другой вектор выражается через векторы из **Б**. Теорема доказана.

Значимость теорем о базисе заключается в том, что они позволяют нам определить минимальное количество векторов (и их характеристики), необходимых для описания основных геометрических объектов. Нуль-вектор задает точку, ненулевой вектор определяет направление прямой, два неколлинеарных вектора описывают любой вектор соответствующей плоскости, три некомпланарных вектора — любой вектор трехмерного пространства.

V.12. Координаты вектора

Критерий 3 однозначности разложения и теорема 7 о линейных комбинациях базисных векторов позволили достигнуть цели 2, и предоставили условие, обеспечивающее однозначность разложения вектора по базису.

Если $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1;\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2;\ \ldots;\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ — базис, то каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ мы однозначным образом ставим в соответствие набор координат $(\lambda_1;\ \ldots;\ \lambda_n)$ этого вектора тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{e}}_n$. Тот факт, что у вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ координаты равны $(\lambda_1;\ \ldots;\ \lambda_n)$, обычно записывают так: $\overrightarrow{\mathbf{x}}\,(\lambda_1;\ \ldots;\ \lambda_n)$. Таким образом, ***координаты вектора определяются формулой***

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}\,(\lambda_1;\ \ldots;\ \lambda_n) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{e}}_n. \qquad (12)$$

V.12. Координаты вектора

В дальнейшем «по умолчанию» в пространстве фиксируется так называемый **ортонормированный базис** $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$, для которого справедливы утверждения 1) $\left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{j}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = 1$; 2) $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}} = \widehat{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}} = \widehat{\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}} = \dfrac{\pi}{2}$; 3) $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$ — правая тройка векторов.

V.12. Координаты вектора

Поэтому «по умолчанию» формула (12) уточняется следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}\,(x;\ y;\ z) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{13}$$

В частности, для векторов плоскости

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}\,(x;\ y) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

V.12. Координаты вектора

Поэтому «по умолчанию» формула (12) уточняется следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}\,(x;\ y;\ z)\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{13}$$

$$A(A_1; A_2; A_3)\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA} = A_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + A_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + A_3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{14}$$

Внимание! Равенства (13) и (14) играют ключевую роль для координатного метода в векторной алгебре и аналитической геометрии (с которой мы познакомимся ниже).

V.12. Координаты вектора

Достижение цели 2, стр.310, позволяет определить новый тип моделей векторов. Ключевая идея, положенная в основу этой модели, состоит в том, чтобы заменить работу с вектором на работу со строкой (или столбцом) его координат, что позволяет быстро сводить векторные равенства к системам числовых равенств. Таким образом, в случае успеха один из наиболее трудоемких этапов решения задачи значительно упрощается. Итак, простой и взаимно однозначный способ[1] перехода от вектора к строке его координат, определяемый равенством (13), выдвигает на первый план следующую цель.

[1] При фиксированном выборе базиса.

V.12. Координаты вектора

Цель 2. *Для любого отношения и операции на множестве векторов найти стандартный способ представления этого отношения или операции с помощью формул для* ***координат векторов****. Коротко мы будем формулировать эту цель как требование «сформулировать... на языке координат».*

V.13. Формулы для вычислений с помощью координат

Цель 2. *Для любого отношения и операции на множестве векторов найти стандартный способ представления этого отношения или операции с помощью формул для* ***координат векторов****. Коротко мы будем формулировать эту цель как требование «сформулировать... на языке координат».*

Результаты достижения **цели 2** представлены в следующих теоремах.

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство.

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 1). По условию вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$. Значит, в силу **равенства (13)**,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} =$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$*;*

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 1). По условию вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$. Значит, в силу **равенства (13)**,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda\left(a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 1). По условию вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$. Значит, в силу **равенства (13)**,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda\left(a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= (\lambda a_1)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (\lambda a_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (\lambda a_3)\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 1). По условию вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$. Значит, в силу **равенства (13)**,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda\left(a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= (\lambda a_1)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (\lambda a_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (\lambda a_3)\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Еще раз используя **равенство (13)**, получаем требуемое утверждение: вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Доказательство. 2) Согласно **равенству (13)**,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = b_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 2) Согласно **равенству (13)**,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = b_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}} =$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 2) Согласно **равенству (13)**,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = b_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3\overrightarrow{\mathbf{k}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}} = \left(a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(b_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Доказательство. 2) Согласно **равенству (13)**,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3 \overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = b_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3 \overrightarrow{\mathbf{k}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} = \left(a_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3 \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(b_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3 \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= (a_1 + b_1) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (a_2 + b_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_3 + b_3) \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

V.13.1. Теорема о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$

Теорема 8. *Пусть вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$, *а вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) вектор $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Доказательство. 2) Согласно **равенству (13)**,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}} = (a_1+b_1)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (a_2+b_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_3+b_3)\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

В силу **равенства (13)**, получаем требуемое утверждение: вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}$ имеет координаты $(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$. Теорема доказана.

V.13.2. Следствие о координатах линейной комбинации

Следствие 1 (**о координатах линейной комбинации**). *Если вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *имеет координаты* $(a_1; a_2; a_3)$ *и вектор* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — $(b_1; b_2; b_3)$, *то вектор* $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *имеет координаты* $(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$.

V.13.3. Теорема о координатах вектора $\overrightarrow{AB}$

Теорема 9 (о координатах вектора $\overrightarrow{AB}$). *Если координаты точек* A *и* B *равны* $(A_x; A_y; A_z)$ *и соответственно* $(B_x; B_y; B_z)$, *то* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, *поэтому координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ *равны* $(B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z)$, *то есть*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (B_x - A_x)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (B_y - A_y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (B_z - A_z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \quad (15)$$

Доказательство.

V.13.3. Теорема о координатах вектора $\overrightarrow{AB}$

Теорема 9 (о координатах вектора $\overrightarrow{AB}$). *Если координаты точек A и B равны $(A_x; A_y; A_z)$ и соответственно $(B_x; B_y; B_z)$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, поэтому координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $(B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z)$, то есть*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (B_x - A_x)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (B_y - A_y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (B_z - A_z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \quad (15)$$

Доказательство. Это прямое следствие из соглашения о связи вектора и направленного отрезка, из формулы (14), и теоремы 8 о координатах векторов $\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

V.13.4. Теорема о вычислении скалярного произведения с помощью координат

Пусть нам известны координаты векторов: $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$. Как с помощью этих координат найти скалярное произведение $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$?

V.13.4. Теорема о вычислении скалярного произведения с помощью координат

Пусть нам известны координаты векторов: $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$. Как с помощью этих координат найти скалярное произведение $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$?

Получим самостоятельно формулировку и доказательство?

V.13.4. Теорема о вычислении скалярного произведения с помощью координат

Теорема 10. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$*, то*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{16}$$

Доказательство было получено в ходе **решения примера**.

V.13.4. Теорема о вычислении скалярного произведения с помощью координат

Теорема 10. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{16}$$

Рассмотреть пример применения?

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Доказательство.

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}},$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{i}},$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{i}},$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{i}},$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{i}},$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Доказательство. Непосредственно из определения векторного произведения следуют равенства

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{i}},$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Теорема 11. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$, *то*

$$\left[a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Доказательство. $\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{j}}.$

Используя **линейность векторного произведения**, получаем

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Доказательство. $\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Используя линейность векторного произведения, получаем

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= a_x b_x \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right]} + a_x b_y \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right]} + a_x b_z \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right]} +$$

$$+ a_y b_x \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right]} + a_y b_y \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right]} + a_y b_z \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right]} +$$

$$+ a_z b_x \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right]} + a_z b_y \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right]} + a_z b_z \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right]} =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Доказательство. $\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{j}}.$

Используя **линейность векторного произведения**, получаем

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= a_x b_x \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right]}_{=\overrightarrow{\mathbf{0}}} + a_x b_y \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right]}_{=\overrightarrow{\mathbf{k}}} + a_x b_z \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right]}_{=-\overrightarrow{\mathbf{j}}} +$$

$$+ a_y b_x \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right]}_{=-\overrightarrow{\mathbf{k}}} + a_y b_y \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right]}_{=\overrightarrow{\mathbf{0}}} + a_y b_z \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right]}_{=\overrightarrow{\mathbf{i}}} +$$

$$+ a_z b_x \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right]}_{=\overrightarrow{\mathbf{j}}} + a_z b_y \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right]}_{=-\overrightarrow{\mathbf{i}}} + a_z b_z \underbrace{\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right]}_{=\overrightarrow{\mathbf{0}}} =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Доказательство. $\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{j}}.$

Используя **линейность векторного произведения**, получаем

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= a_x b_x \overrightarrow{\mathbf{0}} + a_x b_y \overrightarrow{\mathbf{k}} + a_x b_z \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) +$$

$$+ a_y b_x \left(-\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + a_y b_y \overrightarrow{\mathbf{0}} + a_y b_z \overrightarrow{\mathbf{i}} +$$

$$+ a_z b_x \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z b_y \left(-\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) + a_z b_z \overrightarrow{\mathbf{0}} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \overrightarrow{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x) \overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x) \overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

V.13.5. Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат

Доказательство. $\left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{i}}, \quad \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{j}}.$

Используя **линейность векторного произведения**, получаем

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\overrightarrow{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство.

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} =$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} =$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\vec{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\vec{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} =$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\,c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} =$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) =$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) =$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) =$

$$= \left((a_y b_z - a_z b_y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, c_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

V.13.6. Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат

Теорема 12. *Если* $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y, b_z)$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{c}}\,(c_x, c_y, c_z)$, *то*

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя теоремы о **вычислении скалярного** и **векторного** произведений, получаем $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right], \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) =$

$$= \left((a_y b_z - a_z b_y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, c_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y\overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\,c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство.

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Выберем ОНБ, чтобы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ был параллелен $\overrightarrow{\mathbf{i}}$. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a}} =$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Выберем ОНБ, чтобы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ был параллелен $\overrightarrow{\mathbf{i}}$. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Выберем ОНБ, чтобы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ был параллелен $\overrightarrow{\mathbf{i}}$. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

Вычислим левую и правую части равенства с помощью координат. Левая часть равенства (5) равна: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] =$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Выберем ОНБ, чтобы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ был параллелен $\overrightarrow{\mathbf{i}}$. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

Вычислим левую и правую части равенства с помощью координат. Левая часть равенства (5) равна: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] =$

$$= \left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}, (b_y c_z - b_z c_y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (b_x c_z - b_z c_x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (b_x c_y - b_y c_x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Выберем ОНБ, чтобы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ был параллелен $\overrightarrow{\mathbf{i}}$. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

Вычислим левую и правую части равенства с помощью координат. Левая часть равенства (5) равна: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] =$

$$= \left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}, (b_y c_z - b_z c_y) \overrightarrow{\mathbf{i}} - (b_x c_z - b_z c_x) \overrightarrow{\mathbf{j}} + (b_x c_y - b_y c_x) \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

$$= a_x (b_y c_x - b_x c_y) \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x (b_z c_x - b_x c_z) \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = a_x\,(b_y c_x - b_x c_y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x\,(b_z c_x - b_x c_z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Правая часть доказываемого равенства: $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = a_x\,(b_y c_x - b_x c_y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x\,(b_z c_x - b_x c_z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Правая часть доказываемого равенства: $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$

$$= \left(b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) a_x c_x - \left(c_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) a_x b_x =$$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = a_x (b_y c_x - b_x c_y) \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x (b_z c_x - b_x c_z) \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Правая часть доказываемого равенства: $\overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$

$$= \left(b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) a_x c_x - \left(c_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) a_x b_x =$$

$$= (b_x a_x c_x - c_x a_x b_x) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (b_y a_x c_x - c_y a_x b_x) \overrightarrow{\mathbf{j}} + (b_z a_x c_x - c_z a_x b_x) \overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = a_x \left(b_y c_x - b_x c_y\right) \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x \left(b_z c_x - b_x c_z\right) \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Правая часть доказываемого равенства: $\overrightarrow{\mathbf{b}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}} \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$

$$= \left(b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) a_x c_x - \left(c_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) a_x b_x =$$

$$= \left(b_x a_x c_x - c_x a_x b_x\right) \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(b_y a_x c_x - c_y a_x b_x\right) \overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(b_z a_x c_x - c_z a_x b_x\right) \overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= a_x \left(b_y c_x - c_y b_x\right) \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x \left(b_z c_x - c_z b_x\right) \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

V.13.7. Формула «бац—цаб» для $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right]$

Теорема 1. *Для любых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ *имеет место равенство (формула «бац минус цаб»)*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right]\right] = a_x\,(b_y c_x - b_x c_y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x\,(b_z c_x - b_x c_z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Правая часть доказываемого равенства: $\overrightarrow{\mathbf{b}}\,(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$

$$= a_x\,(b_y c_x - c_y b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_x\,(b_z c_x - c_z b_x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Таким образом, левая и правая части доказываемого **равенства (5)** эквивалентными преобразованиями мы привели к одному и тому же выражению. Формула доказана.

V.13.8. Критерий коллинеарности векторов

Теорема 13. *Для ненулевых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *имеющих координаты* $(a_x;\ a_y;\ a_z)$ *и соответственно* $(b_x;\ b_y;\ b_z)$, *следующие утверждения равносильны:*

1) векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *коллинеарны;*

2) существует такое число λ, *что справедливо равенство*

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \tag{18}$$

равносильное системе равенств

$$\begin{cases} b_x = \lambda a_x, \\ b_y = \lambda a_y, \\ b_z = \lambda a_z. \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство.

V.13.8. Критерий коллинеарности векторов

Теорема 13. *Для ненулевых векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *имеющих координаты* $(a_x;\ a_y;\ a_z)$ *и соответственно* $(b_x;\ b_y;\ b_z)$, *следующие утверждения равносильны:*

1) векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *коллинеарны;*

2) существует такое число λ, *что справедливо равенство*

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \tag{18}$$

равносильное системе равенств

$$\begin{cases} b_x = \lambda a_x, \\ b_y = \lambda a_y, \\ b_z = \lambda a_z. \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство.

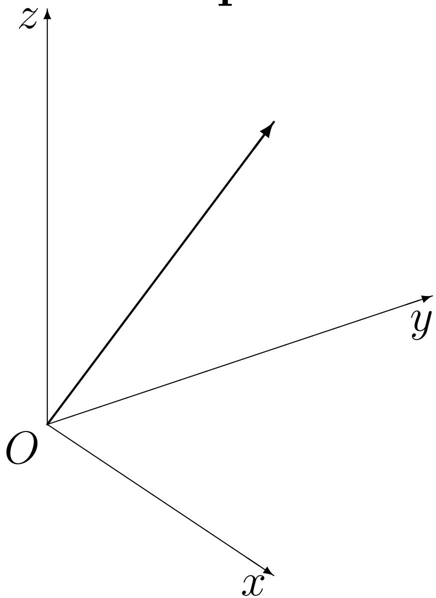
Равносильность утверждений 1) и 2) получена в ходе доказательства **теоремы 4 о базисе прямой**. Равносильность равенств (18) и (19) следует из **теоремы 8**. Теорема доказана.

V.14. Направляющие косинусы

Часто в приложениях вектор используется только для задания *направления*, при этом *длина* вектора несущественна. Такова, например, ситуация при задании **оси** в пространстве, то есть *прямой с указанным на ней направлением*. Такая ось определяется *любым* вектором, параллельным этой оси и сонаправленным[2] с ней. В этом случае иногда указывают не *координаты* вектора, а так называемые **направляющие косинусы**, то есть тройку чисел $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, где α, β, γ — углы, образуемые вектором или осью с координатными осями, соответственно, Ox, Oy, Oz.

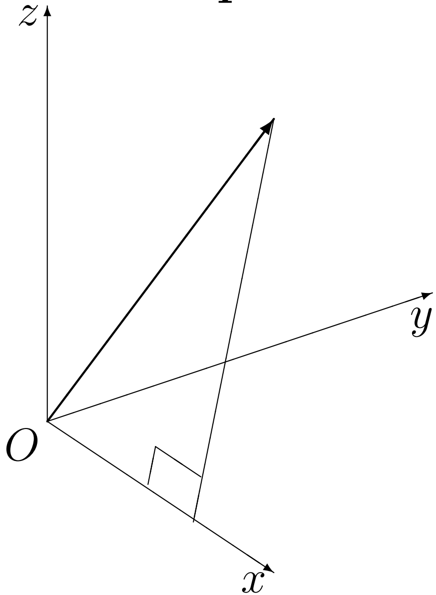
[2]направленным в ту же сторону, а не в противоположную.

V.14. Направляющие косинусы



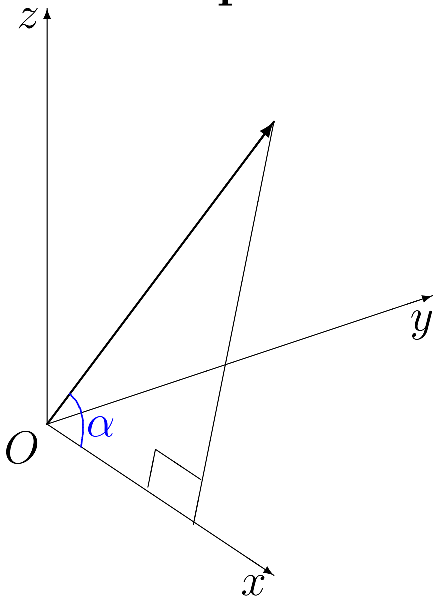
Опустим перпендикуляры на ось Ox (ось абсцисс),

V.14. Направляющие косинусы



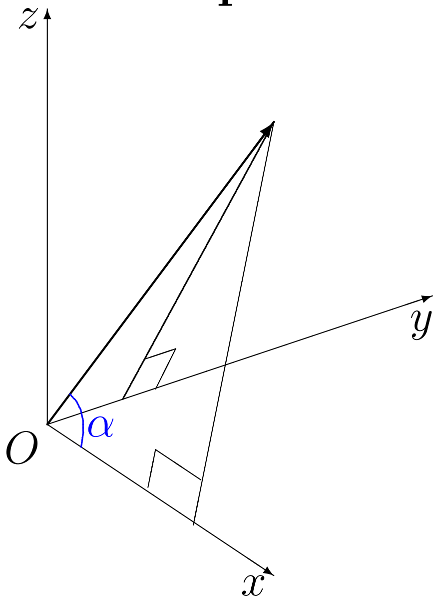
Опустим перпендикуляры на ось Ox (ось абсцисс),

V.14. Направляющие косинусы



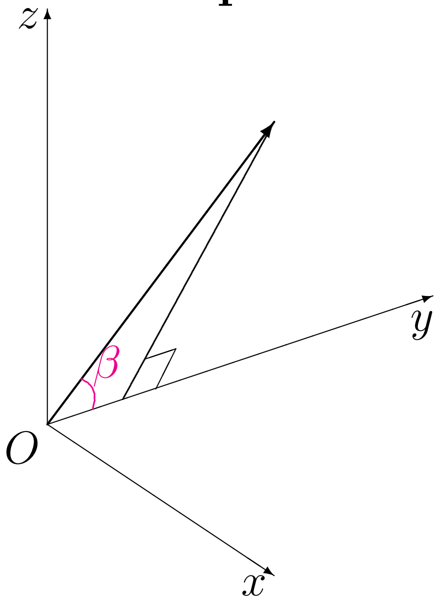
Опустим перпендикуляры на ось Ox (ось абсцисс),

V.14. Направляющие косинусы



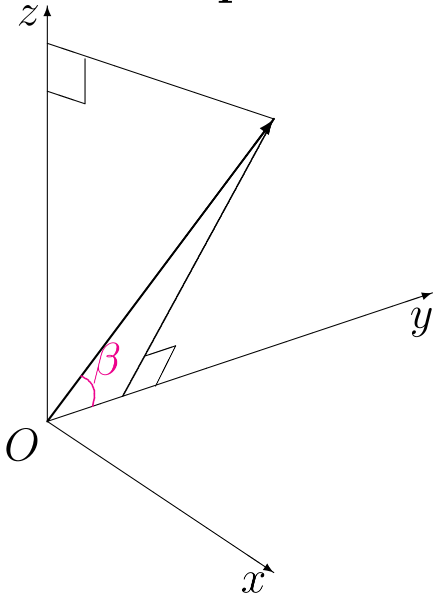
Опустим перпендикуляры
на ось Ox (ось абсцисс),
на ось Oy (ось ординат),

V.14. Направляющие косинусы



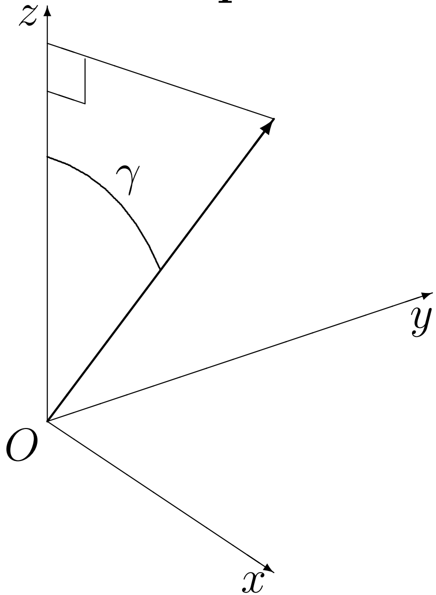
Опустим перпендикуляры
на ось Ox (ось абсцисс),
на ось Oy (ось ординат),

V.14. Направляющие косинусы



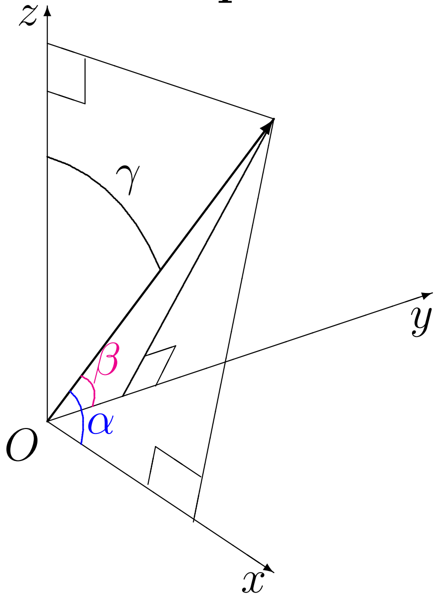
Опустим перпендикуляры
на ось Ox (ось абсцисс),
на ось Oy (ось ординат),
на ось Oz (ось аппликат).

V.14. Направляющие косинусы



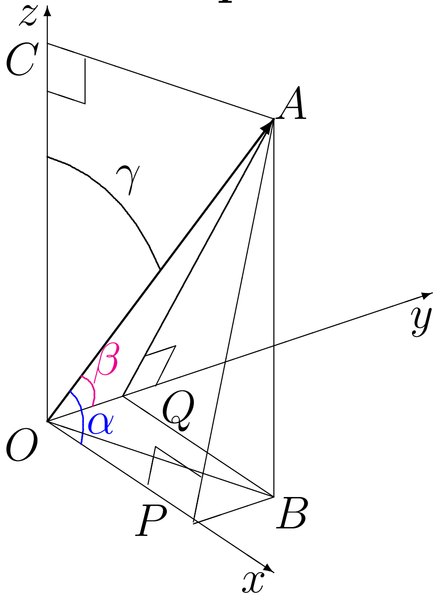
Опустим перпендикуляры
на ось Ox (ось абсцисс),
на ось Oy (ось ординат),
на ось Oz (ось аппликат).

V.14. Направляющие косинусы



Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

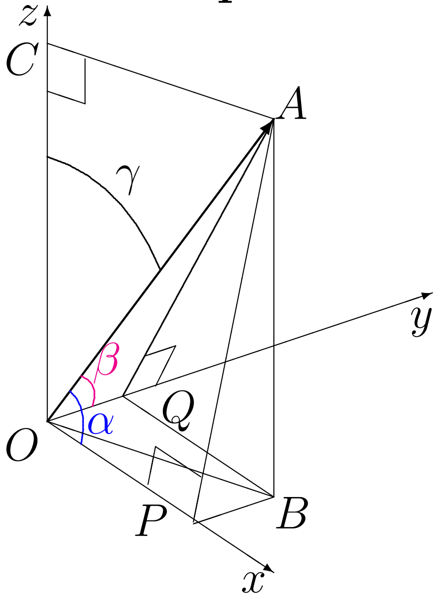
V.14. Направляющие косинусы



Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

V.14. Направляющие косинусы

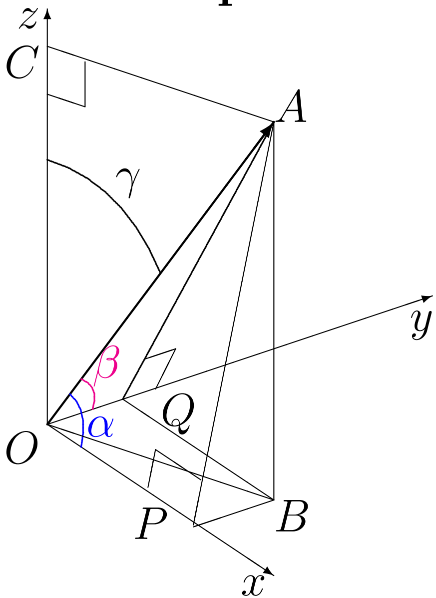


Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{OA}$ является **ортом**, т.е. имеет единичный модуль (длина равна 1).

V.14. Направляющие косинусы



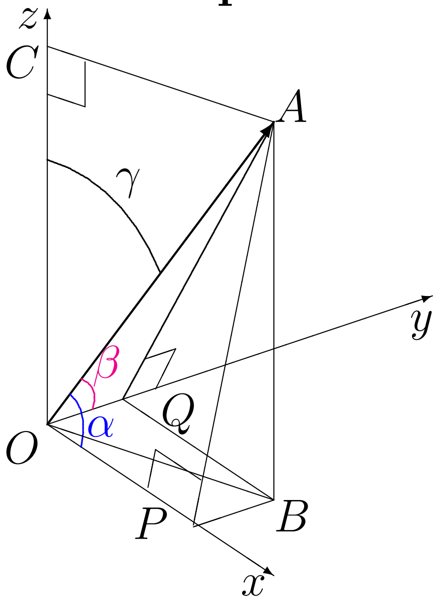
Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{OA}$ является **ортом**, т.е. имеет единичный модуль (длина равна 1).

$$1 = OA^2 =$$

V.14. Направляющие косинусы



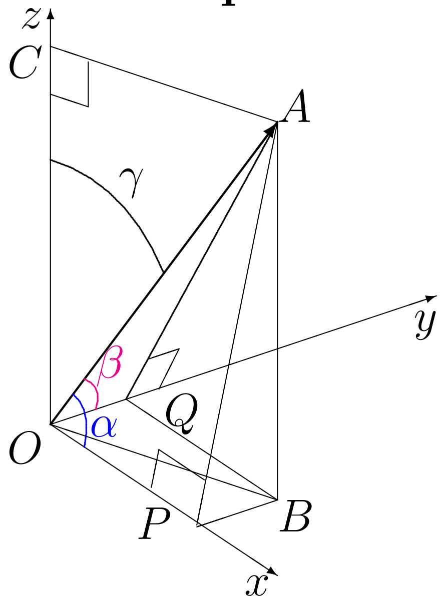
Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{OA}$ является **ортом**, т.е. имеет единичный модуль (длина равна 1).

$$1 = OA^2 = OB^2 + AB^2 =$$

V.14. Направляющие косинусы



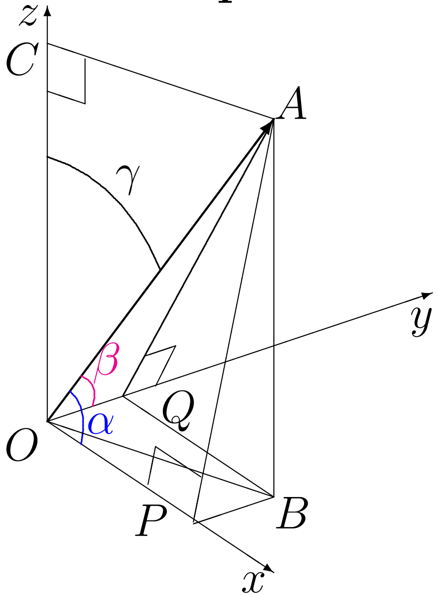
Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{OA}$ является **ортом**, т.е. имеет единичный модуль (длина равна 1).

$$1 = OA^2 = OB^2 + AB^2 = OB^2 + \cos^2\gamma =$$

V.14. Направляющие косинусы



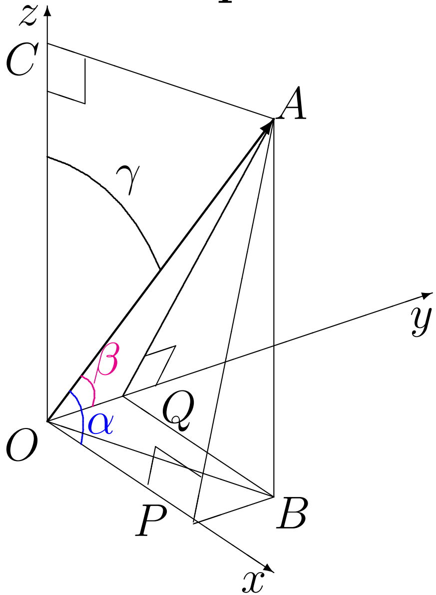
Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{OA}$ является **ортом**, т.е. имеет единичный модуль (длина равна 1).

$$1 = OA^2 = OB^2 + AB^2 = OB^2 + \cos^2\gamma = OP^2 + OQ^2 + \cos^2\gamma =$$

V.14. Направляющие косинусы



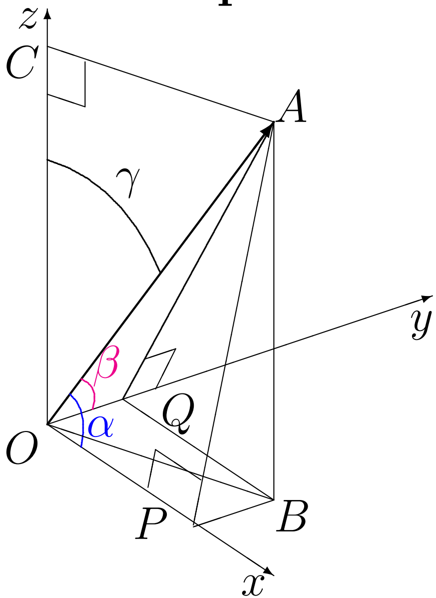
Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{OA}$ является **ортом**, т.е. имеет единичный модуль (длина равна 1).

$$1 = OA^2 = OB^2 + AB^2 = OB^2 + \cos^2\gamma = OP^2 + OQ^2 + \cos^2\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

V.14. Направляющие косинусы



Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Спроецируем точку A на плоскость xOy и спроецируем полученную точку B на оси Ox и Oy.

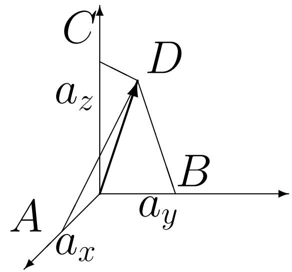
Орт — это вектор, имеющий единичный модуль (длина равна 1).

Справедливо и обратное: для направляющих косинусов вектора

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т.е. ***вектор*** $\cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ ***является ортом***.

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

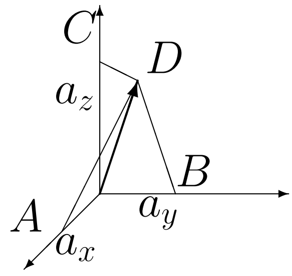


Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*

Доказательство.

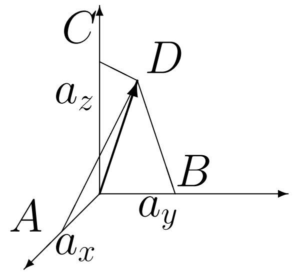
V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*



Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$.

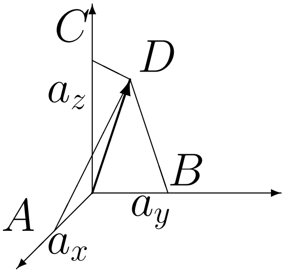
V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора



Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *равны координатам орта этого вектора в ОНБ* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$. Рассматривая изображенные на рисунке прямоугольные треугольники $\triangle OAD$, $\triangle OBD$, $\triangle OCD$, получаем что

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

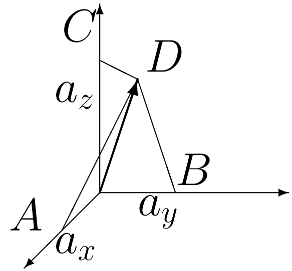


Теорема 14. *В системе координат Oxyz направляющие косинусы* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *равны координатам орта этого вектора в ОНБ* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$. Рассматривая изображенные на рисунке прямоугольные треугольники $\triangle OAD$, $\triangle OBD$, $\triangle OCD$, получаем что

$$\begin{cases} a_x = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle AOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha, \\ a_y = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle BOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\beta, \\ a_z = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle COD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\gamma \end{cases} \Rightarrow$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

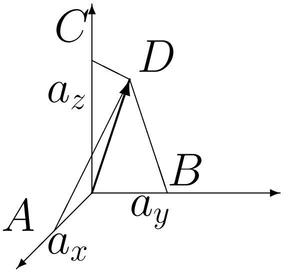


Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$. Рассматривая изображенные на рисунке прямоугольные треугольники $\triangle OAD$, $\triangle OBD$, $\triangle OCD$, получаем что

$$\begin{cases} a_x = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle AOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha, \\ a_y = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle BOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\beta, \\ a_z = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle COD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a_x / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\beta = a_y / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\gamma = a_z / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|. \end{cases} \Rightarrow$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора



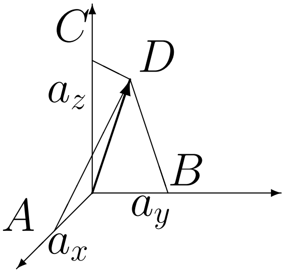
Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$. Рассматривая изображенные на рисунке прямоугольные треугольники $\triangle OAD$, $\triangle OBD$, $\triangle OCD$, получаем что

$$\begin{cases} a_x = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle AOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha, \\ a_y = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle BOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\beta, \\ a_z = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle COD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a_x / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\beta = a_y / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\gamma = a_z / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора



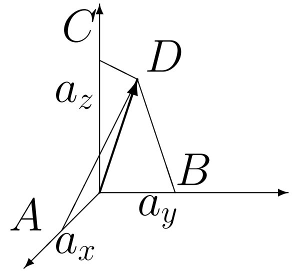
Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$. Рассматривая изображенные на рисунке прямоугольные треугольники $\triangle OAD$, $\triangle OBD$, $\triangle OCD$, получаем что

$$\begin{cases} a_x = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle AOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha, \\ a_y = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle BOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\beta, \\ a_z = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle COD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a_x / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\beta = a_y / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\gamma = a_z / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\, \overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\, \overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора



Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*

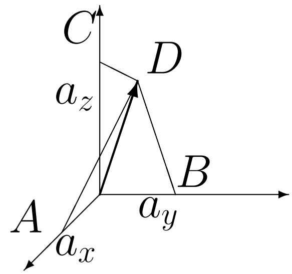
Доказательство. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ имеет координаты $(a_x; a_y; a_z)$. Рассматривая изображенные на рисунке прямоугольные треугольники $\triangle OAD$, $\triangle OBD$, $\triangle OCD$, получаем что

$$\begin{cases} a_x = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle AOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha, \\ a_y = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle BOD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\beta, \\ a_z = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\angle COD = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a_x / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\beta = a_y / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|, \\ \cos\gamma = a_z / \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*



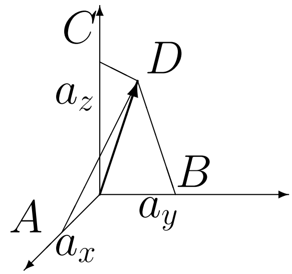
Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| =$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*



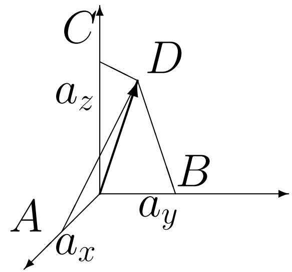
Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| =$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

Теорема 14. *В системе координат* $Oxyz$ *направляющие косинусы* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *равны координатам орта этого вектора в ОНБ* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.

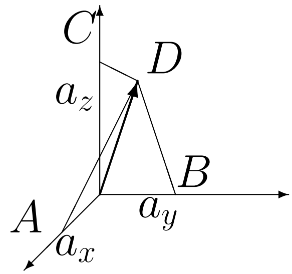


Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| =$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора



Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*

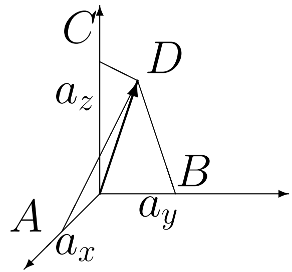
Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1.$$

V.15. Теорема о направляющих косинусах и орте вектора

Теорема 14. *В системе координат $Oxyz$ направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ равны координатам орта этого вектора в ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$.*



Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{a_x}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{a_y}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{a_z}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1.$$

Теорема доказана.

VI. Векторная алгебра как модель-триада: резюме

Мы систематизируем полученные результаты, используя, в основном, **векторно-символическую** и **координатную** модели.

VI.1. Свойства скалярного произведения векторов

1) $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}} \overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{b}}} \overrightarrow{\mathbf{a}}$;

2) $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})$;

3) $(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}) + (\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})$,
$(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) + (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}})$;

4) $(\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})$, где λ — число;

5) Критерий ортогональности ненулевых векторов: $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = 0$;

6) $(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}) = |\overrightarrow{\mathbf{a}}|^2$;

7) Если $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + a_3\overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + b_3\overrightarrow{\mathbf{k}}$, тогда

$$(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{20}$$

VI.2. Свойства векторного произведения векторов

Антикоммутативность: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right]$.

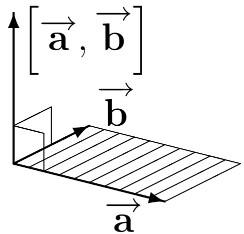
Линейность:

$$\left[\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right] + \mu\left[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right],$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{c}}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] + \mu\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right].$$

Критерий коллинеарности: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

Геометрический смысл: $\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$ — вектор, перпендикулярный параллелограмму, построенному на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, причем $\left|\left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]\right|$ численно равен площади этого параллелограмма.



VI.2. Свойства векторного произведения векторов

Антикоммутативность.

Линейность.

Критерий коллинеарности.

Геометрический смысл.

Теорема о вычислении векторного произведения с помощью координат:

$$\left[a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

VI.3. Свойства смешанного произведения векторов

Геометрический смысл смешанного произведения векторов:

$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|$ равен объему параллелепипеда с ребрами $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

Критерий правой и левой тройки векторов и критерий компланарности:

$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} > 0 \;\Leftrightarrow$ тройка векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ является правой;

$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} < 0 \;\Leftrightarrow$ тройка векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ является левой;

$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = 0 \;\Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ компланарны.

Полилинейность смешанного произведения векторов:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{d}};$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{b}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{c}}\right)\overrightarrow{\mathbf{d}} = \ldots; \qquad \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{c}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \ldots.$$

VI.3. Свойства смешанного произведения векторов

Геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Критерий правой и левой тройки векторов.

Критерий компланарности векторов.

Полилинейность смешанного произведения векторов.

Циклическое свойство смешанного произведения:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = -\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = -\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} = -\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

VI.3. Свойства смешанного произведения векторов

Геометрический смысл смешанного произведения векторов:

Критерий правой и левой тройки векторов:

Критерий компланарности векторов:

Полилинейность смешанного произведения векторов:

Циклическое свойство смешанного произведения:

Теорема о вычислении смешанного произведения с помощью координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru,   melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru,   http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?