Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Детерминант (определитель) матрицы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Линейная комбинация

Определение 1. Линейной комбинацией *матриц* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **с коэффициентами** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *называется матрица*

$$\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 + \ldots + \lambda_n \cdot X_n.$$

II. Линейная функция

Понятие линейной функции будет существенно обобщено в **теории линейных пространств**. Сейчас мы ограничимся следующим «псевдоопределением»:

Пусть в множествах A' и A'' каким-то образом определены операции, соответственно, $+'$ и $+''$, и для любого элемента λ из поля K определены операции λ' и λ'' («умножения» на λ элементов, соответственно, из A' и A''). ***Функция*** *$f : A' \to A''$ называется* **линейной функцией**, *если для любых элементов $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ и любых элементов $a_1; a_2; \ldots; a_n$ множества A' имеет место равенство*

$$f(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_n' a_n) = \lambda_1'' f(a_1) +'' \lambda_2'' f(a_2) +'' \ldots +'' \lambda_n'' f(a_n). \quad (1)$$

II. Линейная функция

Как разобраться с понятием линейной функции?

II. Линейная функция

Как разобраться с понятием линейной функции?

Есть два типовых способа:

II. Линейная функция

Как разобраться с понятием линейной функции?

Есть два типовых способа:

— рассмотрение достаточно большого числа примеров;

II. Линейная функция

Как разобраться с понятием линейной функции?

Есть два типовых способа:

— рассмотрение достаточно большого числа примеров;

— анализ определения (получение следствий).

II. Линейная функция

Начнем с примеров линейных функций. Линейными функциями являются:

1. функция, каждому вектору ставящая в соответствие его проекцию на некоторую ось.

II. Линейная функция

Начнем с примеров линейных функций. Линейными функциями являются:

1. функция, каждому вектору ставящая в соответствие его проекцию на некоторую ось.

2. $f_{ij}(X)$ — функция, каждой матрице X ставящая в соответствие элемент матрицы X, стоящий в i-той строке, j-том столбце матрицы X.

II. Линейная функция

Начнем с примеров линейных функций. Линейными функциями являются:

1. функция, каждому вектору ставящая в соответствие его проекцию на некоторую ось.
2. $f_{ij}(X)$ — функция, каждой матрице X ставящая в соответствие элемент матрицы X, стоящий в i-той строке, j-том столбце матрицы X.
3. $\mathrm{tr}(X)$ — **след** квадратной матрицы X — сумма элементов главной диагонали матрицы X:

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = x_{11} + x_{22} + \dots + x_{nn}.$$

II. Линейная функция

Примером нелинейной функции является функция, каждому вектору плоскости или пространства ставящая в соответствие модуль этого вектора.

Как доказать нелинейность?

II. Линейная функция

Примером нелинейной функции является функция, каждому вектору плоскости или пространства ставящая в соответствие модуль этого вектора.

Так как линейность определяется с помощью тождеств, то опровергнуть линейность можно с помощью контрпримера, например, такого:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right| = \sqrt{2}; \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathbf{j}}\right| = 2 \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right| \neq \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathbf{j}}\right|.$$

III. Критерии линейности функции

Теорема 1 (критерии линейности функции). *Если для любых элементов* $a_1; a_2; a_3$ *из* A *и* $b_1; b_2; b_3$ *из* B *выполняются тождества 1)* $(a_1 +' a_2) +' a_3 = a_1 +' (a_2 +' a_3)$ *(операция* $+'$ *на множестве* A *ассоциативна); 2)* $(b_1 +'' b_2) +'' b_3 = b_1 +'' (b_2 +'' b_3)$ *(операция* $+''$ *на множестве* B *ассоциативна); и для каждого элемента* α ***поля*** K *на множествах* A *и* B *определены одноместные* ***операции*** α' *и, соответственно,* α'' *(«умножение» на* α *элементов из множеств* A *и, соответственно,* B*) то следующие условия эквивалентны: 1)* ***функция*** $f : A \to B$ *является линейной; 2) для* ***функции*** f *выполняется тождество*

$$f(\lambda' a_1 +' \mu' a_2) = \lambda'' f(a_1) +'' \mu'' f(a_2); \tag{2}$$

3) для функции f *выполняются тождества*

$$f(a_1 +' a_2) = f(a_1) +'' f(a_2) \quad \text{и} \quad f(\alpha' a) = \alpha'' f(a). \tag{3}$$

Доказательство. Второе и третье утверждение являются частным случаем линейности функции. Из второго утверждения линейность функции f докажем **индукцией** по n. Если в формуле (1) положить $n = 2$, то получим утверждение второго пункта. База доказана.

Доказательство. Второе и третье утверждение являются частным случаем линейности функции. Из второго утверждения линейность функции f докажем **индукцией** по n. Если в формуле (1) положить $n = 2$, то получим утверждение второго пункта. База доказана.

Докажем шаг индукции. Пусть $k > 2$ и справедливость формулы (1) дооказана для любого натурального числа n, не превосходящего числа k. Тогда, согласно тождеству (2) и гипотезе индукции

$$f\left(\lambda'_1 a_1 +' \lambda'_2 a_2 +' \ldots +' \lambda'_{k-1} a'_{k-1} +' \lambda'_k a'_k\right) =$$

Доказательство. Второе и третье утверждение являются частным случаем линейности функции. Из второго утверждения линейность функции f докажем **индукцией** по n. Если в формуле (1) положить $n = 2$, то получим утверждение второго пункта. База доказана.

Докажем шаг индукции. Пусть $k > 2$ и справедливость формулы (1) дооказана для любого натурального числа n, не превосходящего числа k. Тогда, согласно тождеству (2) и гипотезе индукции

$$f\left(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}' +' \lambda_k' a_k'\right) =$$

$$= f\Big((\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}') +' \lambda_k' a_k'\Big) =$$

Доказательство. Второе и третье утверждение являются частным случаем линейности функции. Из второго утверждения линейность функции f докажем **индукцией** по n. Если в формуле (1) положить $n = 2$, то получим утверждение второго пункта. База доказана.

Докажем шаг индукции. Пусть $k > 2$ и справедливость формулы (1) дооказана для любого натурального числа n, не превосходящего числа k. Тогда, согласно тождеству (2) и гипотезе индукции

$$f\left(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}' +' \lambda_k' a_k'\right) =$$

$$= f\left((\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}') +' \lambda_k' a_k'\right) =$$

$$= f\left(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}'\right) +'' \lambda_k'' f(a_k') =$$

Доказательство. Второе и третье утверждение являются частным случаем линейности функции. Из второго утверждения линейность функции f докажем **индукцией** по n. Если в формуле (1) положить $n = 2$, то получим утверждение второго пункта. База доказана.

Докажем шаг индукции. Пусть $k > 2$ и справедливость формулы (1) дооказана для любого натурального числа n, не превосходящего числа k. Тогда, согласно тождеству (2) и гипотезе индукции

$$f\left(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}' +' \lambda_k' a_k'\right) =$$
$$= f\left(\left(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}'\right) +' \lambda_k' a_k'\right) =$$
$$= f\left(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_{k-1}' a_{k-1}'\right) +'' \lambda_k'' f(a_k') =$$
$$= \lambda_1'' f(a_1) +'' \lambda_2'' f(a_2) +'' \ldots +'' \lambda_{k-1}'' f(a_{k-1}) +'' \lambda_k'' f(a_k).$$

Согласно принципу математической индукции получили, что из утверждения (2) следует линейность функции f.

Осталось доказать, что из формул (3) следует тождество (2):

$$f(\lambda' a_1 +' \mu' a_2) = f(\lambda' a_1) +'' f(\mu' a_2) = \lambda'' f(a_1) +'' \mu'' f(a_2).$$

Критерии линейности функции доказаны.

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 2. Перестановкой *или* **подстановкой** *на множестве* Ω *называется* ***взаимно однозначное отображение*** *множества* Ω *<u>на</u>*[1] *себя.*

[1] Предлог «на» означает, что всякий элемент из Ω имеет прообраз в Ω относительно данной перестановки.

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 2. Перестановкой *или* **подстановкой** *на множестве* Ω *называется* ***взаимно однозначное отображение*** *множества* Ω *<u>на</u> себя.*

Нас сейчас интересует случай $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Такая перестановка является функцией с конечной областью определения, поэтому ее можно задавать таблицей значений. Пусть f — произвольная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, с такой таблицей:

x	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n

.

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 2. Перестановкой *или* **подстановкой** *на множестве* Ω *называется взаимно однозначное отображение множества* Ω *<u>на</u> себя.*

Пусть f — произвольная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, с такой таблицей:

x	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n

.

Попытаемся оптимизировать эту запись для рассматриваемого класса функций. У любой перестановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ первая строка одинакова (с точностью до аргумента этой функции).

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 2. Перестановкой *или* **подстановкой** *на множестве Ω называется взаимно однозначное отображение множества Ω на себя.*

Пусть f — произвольная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, с такой таблицей:

x	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n

. Поэтому, говоря о перестановках этого множества, первую строку таблицы обычно не пишут, а во второй строке опускают обозначение $f(x)$. Таким образом, вместо, например, «перестановка s, заданная таблицей

x	1	2	3	4
$s(x)$	2	4	3	1

», пишут «перестановка (2 4 3 1)».

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 3. *Если* f *— перестановка множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и* u, v *— такие элементы множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$*, что* $u < v$ *и* $f(u) > f(v)$*, то пара* $\Big(f(u); f(v)\Big)$ *называется* **инверсией** *перестановки* f*.*

Как разобраться?

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 3. *Если* f *— перестановка множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и* u, v *— такие элементы множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *что* $u < v$ *и* $f(u) > f(v)$, *то пара* $\Big(f(u); f(v)\Big)$ *называется* **инверсией** *перестановки* f.

Например, для перестановки $(3;\ 1;\ 2)$ множество всех инверсий состоит из двух элементов: $\{(3;\ 1);\ (3;\ 2)\}$. Для перестановки $(2;\ 4;\ 1;\ 3)$ множество всех инверсий состоит из трех элементов:

$$\{(2;\ 1);\ (4;\ 1);\ (4;\ 3)\}.$$

IV. Перестановки (подстановки)

Определение 3. *Если* f *— перестановка множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и* u, v *— такие элементы множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *что* $u < v$ *и* $f(u) > f(v)$, *то пара* $\Big(f(u); f(v)\Big)$ *называется* **инверсией** *перестановки* f.

Можно сказать, что инверсия означает нарушение порядка $1 < 2 < \ldots < n$, происходящее под действием перестановки f: было $u < v$, а после действия f получаем $f(u) > f(v)$. Таким образом, количество инверсий перестановки f — это количество всех «нарушений» порядка, «вносимых» перестановкой f в последовательность $1, 2, \ldots, n$.

V. Инвариантное определение детерминанта

Определение 4 (инвариантное определение детерминанта). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица размерности* $n \times n$, *то ее* ***детерминантом*** *или* ***определителем*** *называется число*

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}, \quad (4)$$

где $\mu\left(p_1;\ldots;p_n\right)$ *равно числу всех различных инверсий* ***перестановки*** $\left(p_1,\ldots,p_n\right)$. *Детерминант матрицы* $\mathbf{A}$ *обычно обозначается через* $|\mathbf{A}|$ *или* $\det\left(\mathbf{A}\right)$.

V. Инвариантное определение детерминанта

Определение 4 (инвариантное определение детерминанта). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица размерности* $n \times n$, *то ее* ***детерминантом*** *или* ***определителем*** *называется число*

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}, \quad (4)$$

где $\mu\,(p_1;\ldots;p_n)$ *равно числу всех различных инверсий* ***перестановки*** $(p_1,\ldots,p_n)$. *Детерминант матрицы* $\mathbf{A}$ *обычно обозначается через* $|\mathbf{A}|$ *или* $\det(\mathbf{A})$.

Замечание. Могут возникнуть сомнения в корректности этого определения, так как мы не доказали, что функция, заданная формулой $\varphi(i) = p_i$ является **перестановкой**. Мы не сделали этого потому, что взаимная однозначность функции φ следует из того, что согласно равенству (4) номера $p_1,\ldots,p_n$ попарно различны.

V. Инвариантное определение детерминанта

Определение 4 (инвариантное определение детерминанта). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица размерности* $n \times n$, *то ее* ***детерминантом*** *или* ***определителем*** *называется число*

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}, \quad (4)$$

где $\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right)$ *равно числу всех различных инверсий* ***перестановки*** $(p_1, \ldots, p_n)$. *Детерминант матрицы* $\mathbf{A}$ *обычно обозначается через* $|\mathbf{A}|$ *или* $\det\left(\mathbf{A}\right)$.

Как разобраться?

V. Инвариантное определение детерминанта

Определение 4 (инвариантное определение детерминанта). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица размерности* $n \times n$, *то ее* ***детерминантом*** *или* ***определителем*** *называется число*

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}, \quad (4)$$

где $\mu\left(p_1;\ldots;p_n\right)$ *равно числу всех различных инверсий* ***перестановки*** $(p_1,\ldots,p_n)$. *Детерминант матрицы* $\mathbf{A}$ *обычно обозначается через* $|\mathbf{A}|$ *или* $\det(\mathbf{A})$.

Как разобраться?

Обычно применяется два варианта: **рассмотрение примеров** или анализ определения (в частности, изучение свойств с помощью получения следствий, доказательства теорем).

VI. Свойства детерминанта

Теперь применим другой способ усвоения понятия детерминанта: получение следствий из определения.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t$. Согласно формуле (4) получаем

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} b_{1p_1} \cdot b_{2p_2} \cdot \ldots \cdot b_{np_n} =$$

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t$. Согласно формуле (4) получаем

$$\sum_{p_1 \in \{1;\dots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\dots;n\} \setminus \{p_1\}} \dots \sum_{p_n \in \{1;\dots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\dots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\dots;p_n)} b_{1p_1} \cdot b_{2p_2} \cdot \ldots \cdot b_{np_n} =$$

$$= \sum_{p_1 \in \{1;\dots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\dots;n\} \setminus \{p_1\}} \dots \sum_{p_n \in \{1;\dots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\dots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\dots;p_n)} a_{p_1 1} \cdot a_{p_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{p_n n} =$$

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t$. Согласно формуле (4) получаем

$$\sum_{p_1\in\{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1\}} \ldots \sum_{p_n\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} b_{1p_1}\cdot b_{2p_2}\cdot\ldots\cdot b_{np_n} =$$

$$= \sum_{p_1\in\{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1\}} \ldots \sum_{p_n\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{p_1 1}\cdot a_{p_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{p_n n} =$$

$$= \sum_{q_1\in\{1;\ldots;n\}} \sum_{q_2\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{q_1\}} \ldots \sum_{q_n\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{q_1;q_2;\ldots;q_{n-1}\}} (-1)^{\mu(q_1;\ldots;q_n)} a_{1q_1}\cdot a_{2q_2}\cdot\ldots\cdot a_{nq_n},$$

где перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t$. Согласно формуле (4) получаем

$$\sum_{p_1\in\{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1\}} \cdots \sum_{p_n\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} b_{1p_1}\cdot b_{2p_2}\cdot\ldots\cdot b_{np_n} =$$

$$= \sum_{p_1\in\{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1\}} \cdots \sum_{p_n\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{p_1 1}\cdot a_{p_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{p_n n} =$$

$$= \sum_{q_1\in\{1;\ldots;n\}} \sum_{q_2\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{q_1\}} \cdots \sum_{q_n\in\{1;\ldots;n\}\setminus\{q_1;q_2;\ldots;q_{n-1}\}} (-1)^{\mu(q_1;\ldots;q_n)} a_{1q_1}\cdot a_{2q_2}\cdot\ldots\cdot a_{nq_n},$$

где перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$.

Нам осталось показать, что $\mu\left(p_1;\ldots;p_n\right) = \mu\left(q_1;\ldots;q_n\right)$.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\,(p_1; \ldots; p_n) = \mu\,(q_1; \ldots; q_n)$.

Как это доказать?

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\,(p_1; \ldots ; p_n) = \mu\,(q_1; \ldots ; q_n)$.

Как это доказать? Мы к настоящему моменту не доказали практически никаких утверждений о функции μ.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\,(p_1; \ldots; p_n) = \mu\,(q_1; \ldots; q_n)$.

Как это доказать? Мы к настоящему моменту не доказали практически никаких утверждений о функции μ. Поэтому, разумеется, доказательство основывается на определениях.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\,(p_1; \ldots; p_n) = \mu\,(q_1; \ldots; q_n)$.

Мы покажем, что всякой **инверсии перестановки** p взаимно однозначным образом соответствует **инверсия перестановки** q.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\,(p_1; \ldots; p_n) = \mu\,(q_1; \ldots; q_n)$.

Мы покажем, что всякой **инверсии перестановки** p взаимно однозначным образом соответствует **инверсия перестановки** q. По **определению обратной функции** имеем равенства $q(p(k)) = k$, $p(q(k)) = k$.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\,(p_1; \ldots; p_n) = \mu\,(q_1; \ldots; q_n)$.

Мы покажем, что всякой **инверсии перестановки** p взаимно однозначным образом соответствует **инверсия перестановки** q. По **определению обратной функции** имеем равенства $q(p(k)) = k$, $p(q(k)) = k$. Поэтому число инволюций перестановки q равно числу перестановок p.

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right) = \mu\left(q_1; \ldots; q_n\right)$.

Действительно, для любых номеров u, v существуют номера x, y такие, что $q(x) = u$ и $q(y) = v$, откуда $p(q(x)) = p(u)$ и $p(q(y)) = p(v)$, т.е. $x = p(u)$ и $y = p(v)$. Поэтому

$$\begin{cases} u < v; \\ p(u) > p(v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x) < q(y); \\ x > y. \end{cases}$$

VI.1. Теорема о равноправии строк и столбцов

Теорема 2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Перестановка q, заданная формулой $q(k) = q_k$, является **обратной** к перестановке p, заданной формулой $p(k) = p_k$. Нам осталось показать, что $\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right) = \mu\left(q_1; \ldots; q_n\right)$.

Таким образом, мы доказали, между **инверсиями перестановок** p и q существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому $\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right) = \mu\left(q_1; \ldots; q_n\right)$ и, следовательно, теорема доказана.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

Теорема 3 (о перестановке двух строк в детерминанте). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *перестановкой двух строк или двух столбцов, то* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Доказательство.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

Теорема 3 (о перестановке двух строк в детерминанте). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *перестановкой двух строк или двух столбцов, то* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений достаточно доказать это утверждение только для случая перестановки строк. Перестановку любых двух строк можно представить в виде последовательного выполнения нечетного числа перестановок первой строки со строкой с номером k.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

Теорема 3 (о перестановке двух строк в детерминанте). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *перестановкой двух строк или двух столбцов, то* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Из формулы (4) следует, что нам осталось доказать изменение на нечетное число количества **инверсий** при перестановке первой строки со строкой с номером k.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

Теорема 3 (о перестановке двух строк в детерминанте). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *перестановкой двух строк или двух столбцов, то* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right) - \mu\left(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n\right)$$

есть число нечетное.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

Теорема 3 (о перестановке двух строк в детерминанте). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *перестановкой двух строк или двух столбцов, то* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$\mu\left(p_1;\ldots;p_n\right) - \mu\left(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n\right)$$

есть число нечетное.

Обозначим через f и g функции, заданные таблицей

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1;\ldots;p_n) - \mu(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

Пусть среди чисел $p_2;\ldots;p_{k-1}$ α штук больше, чем p_k, а остальные $(k-2-\alpha)$ чисел — меньше, чем p_k, и среди чисел $p_2;\ldots;p_{k-1}$ β штук меньше, чем p_1, а остальные $(k-2-\beta)$ чисел — больше, чем p_1.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1; \ldots; p_n) - \mu(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	...	$k-1$	k	$k+1$	...	n
$f(x)$	p_1	p_2	...	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	...	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	...	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	...	p_n

Пусть среди чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$ α штук больше, чем p_k, а остальные $(k-2-\alpha)$ чисел — меньше, чем p_k, и среди чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$ β штук меньше, чем p_1, а остальные $(k-2-\beta)$ чисел — больше, чем p_1. Тогда при перемещении числа p_k в нижней строке таблицы на первое место за счет изменения положения числа p_k относительно чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$, с одной стороны, количество **инверсий** уменьшится на α (за счет чисел из этого списка, которые больше числа p_k) и, с другой стороны,

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1;\ldots;p_n)-\mu(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

Пусть среди чисел $p_2;\ldots;p_{k-1}$ α штук больше, чем p_k, а остальные $(k-2-\alpha)$ чисел — меньше, чем p_k, и среди чисел $p_2;\ldots;p_{k-1}$ β штук меньше, чем p_1, а остальные $(k-2-\beta)$ чисел — больше, чем p_1. Тогда при перемещении числа p_k в нижней строке таблицы на первое место за счет изменения положения числа p_k относительно чисел $p_2;\ldots;p_{k-1}$, с одной стороны, количество **инверсий** уменьшится на α (за счет чисел из этого списка, которые больше числа p_k) и, с другой стороны, увеличится на $(k-2-\alpha-1)$ (за счет чисел из этого списка, которые меньше числа p_k).

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1; \ldots; p_n) - \mu(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

При перемещении числа p_1 в нижней строке таблицы в столбец с номером k за счет изменения положения числа p_1 относительно чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$ количество **инверсий** уменьшится на β и одновременно увеличится на $(k-2-\beta)$. Кроме того, одна из пар $(p_1; p_k)$ или $(p_k; p_1)$ является инверсией.

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1; \ldots; p_n) - \mu(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

При перемещении числа p_1 в нижней строке таблицы в столбец с номером k за счет изменения положения числа p_1 относительно чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$ количество **инверсий** уменьшится на β и одновременно увеличится на $(k-2-\beta)$. Кроме того, одна из пар $(p_1; p_k)$ или $(p_k; p_1)$ является инверсией.

Положим ε равным 1, если $p_1 < p_k$ и равным -1 в противном случае. Тогда

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right) - \mu\left(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n\right)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

При перемещении числа p_1 в нижней строке таблицы в столбец с номером k за счет изменения положения числа p_1 относительно чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$ количество **инверсий** уменьшится на β и одновременно увеличится на $(k-2-\beta)$. Кроме того, одна из пар $(p_1; p_k)$ или $(p_k; p_1)$ является инверсией.

Положим ε равным 1, если $p_1 < p_k$ и равным -1 в противном случае. Тогда

$$\mu\left(p_1; \ldots; p_n\right) - \mu\left(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n\right) =$$

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1; \ldots; p_n) - \mu(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

При перемещении числа p_1 в нижней строке таблицы в столбец с номером k за счет изменения положения числа p_1 относительно чисел $p_2; \ldots; p_{k-1}$ количество **инверсий** уменьшится на β и одновременно увеличится на $(k-2-\beta)$. Кроме того, одна из пар $(p_1; p_k)$ или $(p_k; p_1)$ является инверсией.

Положим ε равным 1, если $p_1 < p_k$ и равным -1 в противном случае. Тогда

$$\mu(p_1; \ldots; p_n) - \mu(p_k; p_2; \ldots; p_{k-1}; p_1; p_{k+1}; \ldots; p_n) =$$
$$= -\alpha + (k-2-\alpha) - \beta + (k-2-\beta) + \varepsilon =$$

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu\left(p_1;\ldots;p_n\right)-\mu\left(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n\right)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

При перемещении числа p_1 в нижней строке таблицы в столбец с номером k за счет изменения положения числа p_1 относительно чисел $p_2;\ldots;p_{k-1}$ количество **инверсий** уменьшится на β и одновременно увеличится на $(k-2-\beta)$. Кроме того, одна из пар $(p_1;p_k)$ или $(p_k;p_1)$ является инверсией.

Положим ε равным 1, если $p_1<p_k$ и равным -1 в противном случае. Тогда

$$\mu\left(p_1;\ldots;p_n\right)-\mu\left(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n\right)=$$
$$=-\alpha+(k-2-\alpha)-\beta+(k-2-\beta)+\varepsilon=2(k-2-\alpha-\beta)+\varepsilon.$$

VI.2. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте

$\mu(p_1;\ldots;p_n)-\mu(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n)$ есть число нечетное.

x	1	2	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$\ldots$	n
$f(x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\ldots$	p_n
$g(x)$	p_k	p_2	$\ldots$	p_{k-1}	p_1	p_{k+1}	$\ldots$	p_n

Положим ε равным 1, если $p_1<p_k$ и равным -1 в противном случае. Тогда

$$\mu(p_1;\ldots;p_n)-\mu(p_k;p_2;\ldots;p_{k-1};p_1;p_{k+1};\ldots;p_n)=$$
$$=-\alpha+(k-2-\alpha)-\beta+(k-2-\beta)+\varepsilon=2(k-2-\alpha-\beta)+\varepsilon.$$

Таким образом, это число является нечетным. Теорема доказана.

VI.3. Следствие об одинаковых строках в детерминанте

Следствие 1 (об одинаковых строках в детерминанте). *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство.

VI.3. Следствие об одинаковых строках в детерминанте

Следствие 1 (об одинаковых строках в детерминанте). *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме о равноправии строк и столбцов можно ограничиться случаем, когда в матрице $\mathbf{A}$ совпадают строки с номерами i и j, где $i \neq j$. Обозначим через $\mathbf{B}$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой строк с номерами i и j.

VI.3. Следствие об одинаковых строках в детерминанте

Следствие 1 (об одинаковых строках в детерминанте). *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме о равноправии строк и столбцов можно ограничиться случаем, когда в матрице $\mathbf{A}$ совпадают строки с номерами i и j, где $i \neq j$. Обозначим через $\mathbf{B}$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой строк с номерами i и j. В силу равенства этих строк имеем $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, откуда $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$.

VI.3. Следствие об одинаковых строках в детерминанте

Следствие 1 (об одинаковых строках в детерминанте). *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме о равноправии строк и столбцов можно ограничиться случаем, когда в матрице $\mathbf{A}$ совпадают строки с номерами i и j, где $i \neq j$. Обозначим через $\mathbf{B}$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой строк с номерами i и j. В силу равенства этих строк имеем $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, откуда $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$. С другой стороны, согласно теореме о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте, имеем $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$.

VI.3. Следствие об одинаковых строках в детерминанте

Следствие 1 (об одинаковых строках в детерминанте). *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме о равноправии строк и столбцов можно ограничиться случаем, когда в матрице $\mathbf{A}$ совпадают строки с номерами i и j, где $i \neq j$. Обозначим через $\mathbf{B}$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой строк с номерами i и j. В силу равенства этих строк имеем $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, откуда $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$. С другой стороны, согласно теореме о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте, имеем $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$. Следовательно, $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$, откуда $\det(\mathbf{B}) + \det(\mathbf{B}) = 0$, т.е. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$, что и требовалось доказать.

VI.4. Теорема об умножении строки (столбца) на число в детерминанте

Теорема 4 (об умножении строки (столбца) на число в $\det$). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *умножением одной из строк или одного из столбцов на число* λ, *то* $\det(\mathbf{B}) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A})$.

Доказательство.

VI.4. Теорема об умножении строки (столбца) на число в детерминанте

Теорема 4 (об умножении строки (столбца) на число в $\det$). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *умножением одной из строк или одного из столбцов на число* λ, *то* $\det(\mathbf{B}) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Это очевидное следствие равенства (4) из определения детерминанта.

Осторожно! Рассмотрим пример?

VI.4. Теорема об умножении строки (столбца) на число в детерминанте

Теорема 4 (об умножении строки (столбца) на число в $\det$**).** *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *умножением одной из строк или одного из столбцов на число* λ, *то* $\det(\mathbf{B}) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. Это очевидное следствие равенства (4) из определения детерминанта.

Осторожно! Рассмотрим пример?

Как показывает приведенный пример, ***для матрицы* A *размерности*** $n \times n$ ***имеет место равенство***

$$\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A}). \tag{5}$$

VI.5. Следствие о детерминанте с пропорциональными строками

Следствие 2 (о детерминанте с пропорциональными строками

Если в матрице $\mathbf{A}$ *есть две пропорциональные строки, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство.

VI.5. Следствие о детерминанте с пропорциональными строками

Следствие 2 (о детерминанте с пропорциональными строками
Если в матрице $\mathbf{A}$ *есть две пропорциональные строки, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 4 об умножении строки (столбца) на число в детерминанте и следствия 1 о детерминанте матрицы с одинаковыми строками.

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

Комментарий. Таким образом, если det рассматривать, как функцию от i-той строки матрицы $\mathbf{A}$ (то есть предполагается, что аргументы функции det различаются только i-той строкой), то det является линейной функцией (см. пример и «контрпример»).

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

Доказательство теоремы. Договоримся краткости ради в этом доказательстве в формуле (4) заменить «цепочку» символов суммирования

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}}$$

заменить на один символ $\sum$. С учетом этого соглашения имеем

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

Доказательство теоремы.

$$\det(\mathbf{C}) = \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha u_{ip_i} + \beta v_{ip_i}) \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

Доказательство теоремы.

$$\det(\mathbf{C}) = \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha u_{ip_i} + \beta v_{ip_i}) \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

$$= \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot \alpha u_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} +$$

$$+ \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot \beta v_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

Доказательство теоремы.

$$\det(\mathbf{C}) = \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha u_{ip_i} + \beta v_{ip_i}) \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

$$= \alpha \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot u_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} +$$

$$+ \beta \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot v_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

VI.6. Теорема о линейности детерминанта по строке

Теорема 5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* $w = \alpha u + \beta v$, *где* u, v, w *-* i*-тые строки матриц, соответственно,* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$. *Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B})$.

Доказательство теоремы.

$$\det(\mathbf{C}) = \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha u_{ip_i} + \beta v_{ip_i}) \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

$$= \alpha \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot u_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} +$$

$$+ \beta \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot v_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} =$$

$$= \alpha \det(\mathbf{A}) + \beta \det(\mathbf{B}).$$

VII. Индуктивное вычисление детерминанта

Наше восприятие мира, основанное на понятии модели, предполагает выделение в объекте составных элементов, установление характеристик и отношений. Например, определение 4, основано на разложении детерминанта в сумму. Каждое слагаемое в формуле (4) является весьма непростым для вычисления. Упрощения процесса вычисления можно добиться двумя путями. Наиболее эффективным вариантом является преобразование исходной матрицы к виду, более удобному для вычисления, причем преобразование должно приводить к предсказуемому изменению значения детерминанта.

VII. Индуктивное вычисление детерминанта

Вместе с тем имеется еще один способ, практически значимый не только для практических вычислений, но и в теоретических выкладках. Мы применили его в ходе изучения матричной алгебры. Мы свели умножение матриц к умножению матрицы на матрицу-столбец и матрицы-строки на матрицу. Таким образом, мы в некотором смысле свели изучение исходного объекта к аналогичным объектам, но некоторого специфического вида, частного случая. Подобный подход оказался плодотворным и при изучении детерминанта матрицы.

VII. Индуктивное вычисление детерминанта

Вместе с тем имеется еще один способ, практически значимый не только для практических вычислений, но и в теоретических выкладках. Мы применили его в ходе изучения матричной алгебры. Мы свели умножение матриц к умножению матрицы на матрицу-столбец и матрицы-строки на матрицу. Таким образом, мы в некотором смысле свели изучение исходного объекта к аналогичным объектам, но некоторого специфического вида, частного случая. Подобный подход оказался плодотворным и при изучении детерминанта матрицы.

Детерминант является функцией от *квадратной* матрицы. Поэтому естественным является выделение в исходной матрице «квадратные подматрицы».

VII.1. Минор и алгебраическое дополнение

Определение 5. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— матрица размерности* $m \times n$, k *— натуральное число и фиксированы номера* $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$. *Тогда* **матрицей-минором**, *построенном на строках с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *и столбцах с номерами* $j_1, j_2, \ldots, j_k$, *называется матрица* $\mathbf{B}$, *полученная из матрицы* $\mathbf{A}$ *вычеркиванием всех строк с номерами, отличными от номеров* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *и вычеркиванием столбцов с номерами, отличными от номеров* $j_1, j_2, \ldots, j_k$. *Детерминант матрицы-минора* $\mathbf{B}$ *называется* **минором** *матрицы* $\mathbf{A}$, *построенным на строках с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *и столбцах с номерами* $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

VII.1. Минор и алгебраическое дополнение

Замечание 1. *Обычно в словосочетании* ***матрица-минор*** *опускают термин «матрица», и говорят* ***минор****. Таким образом, в каком именно смысле использован термин «минор», необходимо устанавливать с помощью анализа контекста.*

Комментарий к замечанию.

VII.1. Минор и алгебраическое дополнение

Замечание 1. *Обычно в словосочетании* ***матрица-минор*** *опускают термин «матрица», и говорят* ***минор****. Таким образом, в каком именно смысле использован термин «минор», необходимо устанавливать с помощью анализа контекста.*

Комментарий к замечанию.

Определение 6. *Для квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ **дополнительным минором** *элемента* a_{ij} *в матрице* $\mathbf{A}$ *называется детерминант* M_{ij} *матрицы, полученной из матрицы* $\mathbf{A}$ *вычеркиванием строки с номером* i *и столбца с номером* j*.*

VII.1. Минор и алгебраическое дополнение

Замечание 1. *Обычно в словосочетании* ***матрица-минор*** *опускают термин «матрица», и говорят* ***минор****. Таким образом, в каком именно смысле использован термин «минор», необходимо устанавливать с помощью анализа контекста.*

Комментарий к замечанию.

Определение 6. *Для квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ **дополнительным минором** *элемента* a_{ij} *в матрице* $\mathbf{A}$ *называется детерминант* M_{ij} *матрицы, полученной из матрицы* $\mathbf{A}$ *вычеркиванием строки с номером* i *и столбца с номером* j.

Определение 7. *Для квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ **алгебраическим дополнением** *элемента* a_{ij} *в матрице* $\mathbf{A}$ *называется произведение числа* $(-1)^{i+j}$ *на дополнительный минор элемента* a_{ij} *в матрице* $\mathbf{A}$.

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}, \qquad (6)$$

где A_{km} — алгебраическое дополнение элемента a_{km} в матрице $\mathbf{A}$.

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk},$ *(6)*

где A_{km} *— алгебраическое дополнение элемента* a_{km} *в матрице* $\mathbf{A}$*.*

Комментарий. Применение одной из формул (6) называется **раскрытием детерминанта** по строке (или столбцу) с номером k.

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}, \qquad (6)$$

где A_{km} — алгебраическое дополнение элемента a_{km} в матрице $\mathbf{A}$.

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы свести рассуждения к случаю, когда в матрице $\mathbf{X}$ все элементы последней строки нулевые, кроме самого последнего из элементов последней строки, т.е. элемента x_{nn}. Нетрудно показать (мы это сделаем ниже), что детерминант такой матрицы равен произведению числа x_{nn} на минор этого элемента в матрице $\mathbf{X}$.

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}.$ (6)

Доказательство. Представим k-ю строку матрицы $\mathbf{A}$ в виде

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \tag{6}$$

Доказательство. Представим k-ю строку матрицы $\mathbf{A}$ в виде

$$\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} +$$

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Представим k-ю строку матрицы $\mathbf{A}$ в виде

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \\ = &\begin{pmatrix} a_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \\ + &\begin{pmatrix} 0 & a_{k2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}$. (6)

Доказательство. Представим k-ю строку матрицы $\mathbf{A}$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} = \\
= &\begin{pmatrix} a_{k1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \\
+ &\begin{pmatrix} 0 & a_{k2} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \\
+ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{k3} & \ldots & 0 \end{pmatrix} +
\end{aligned}
$$

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}.$ (6)

Доказательство. Представим k-ю строку матрицы $\mathbf{A}$ в виде

$$
\begin{array}{cl}
 & (a_{k1}\ \ a_{k2}\ \ a_{k3}\ \ \dots\ \ a_{kn}) = \\
= & (a_{k1}\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0) + \\
+ & (0\ \ a_{k2}\ \ 0\ \ \dots\ \ 0) + \\
+ & (0\ \ 0\ \ a_{k3}\ \ \dots\ \ 0) + \\
 & + \dots + \\
+ & (0\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ a_{kn}).
\end{array}
$$

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Согласно теореме 5 о линейности детерминанта по строке нам осталось доказать, что

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Согласно теореме 5 о линейности детерминанта по строке нам осталось доказать, что

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{kj} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{kj}(-1)^{k+j} M_{kj}.$$

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Комментарий к теореме о разложении детерминанта по строке или столбцу

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим последнюю матрицу через $\mathbf{A}_j$, и через $\mathbf{B}$ — матрицу, полученную из $\mathbf{A}_j$ последовательной перестановкой сначала k-й и $(k+1)$-й строк,

потом...

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим последнюю матрицу через $\mathbf{A}_j$, и через $\mathbf{B}$ — матрицу, полученную из $\mathbf{A}_j$ последовательной перестановкой сначала k-й и $(k+1)$-й строк,
потом $(k+1)$-й и $(k+2)$-й и т.п.
(всего перестановок)...

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим последнюю матрицу через $\mathbf{A}_j$, и через $\mathbf{B}$ — матрицу, полученную из $\mathbf{A}_j$ последовательной перестановкой
сначала k-й и $(k+1)$-й строк,
потом $(k+1)$-й и $(k+2)$-й и т.п.
(всего $(n-k)$ перестановок),
а затем...

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим последнюю матрицу через $\mathbf{A}_j$, и через $\mathbf{B}$ — матрицу, полученную из $\mathbf{A}_j$ последовательной перестановкой
сначала k-й и $(k+1)$-й строк,
потом $(k+1)$-й и $(k+2)$-й и т.п.
(всего $(n-k)$ перестановок),
а затем j-го и $(j+1)$-го столбцов,
потом…

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим последнюю матрицу через $\mathbf{A}_j$, и через $\mathbf{B}$ — матрицу, полученную из $\mathbf{A}_j$ последовательной перестановкой
сначала k-й и $(k+1)$-й строк,
потом $(k+1)$-й и $(k+2)$-й и т.п.
(всего $(n-k)$ перестановок),
а затем j-го и $(j+1)$-го столбцов,
потом $(j+1)$-го и $(j+2)$-го столбцов и т.д.
(всего перестановок).

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим последнюю матрицу через $\mathbf{A}_j$, и через $\mathbf{B}$ — матрицу, полученную из $\mathbf{A}_j$ последовательной перестановкой
сначала k-й и $(k+1)$-й строк,
потом $(k+1)$-й и $(k+2)$-й и т.п.
(всего $(n-k)$ перестановок),
а затем j-го и $(j+1)$-го столбцов,
потом $(j+1)$-го и $(j+2)$-го столбцов и т.д.
(всего $(n-j)$ перестановок).

Комментарий к теореме о разложении детерминанта по строке или столбцу

По теореме 3 $\quad \det(\mathbf{A}_j) = (-1)^{n-k+n-j} \det(\mathbf{B}) =$

$$= (-1)^{k+j} \det \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,j-1} & b_{1,j} & \dots & b_{1,n-1} & a_{1j} \\ & & & \dots & & & \\ b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,j-1} & b_{k-1,j} & \dots & b_{k-1,n-1} & a_{k-1,j} \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j-1} & b_{k,j} & \dots & b_{k,n-1} & a_{k+1,j} \\ & & & \dots & & & \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,j-1} & b_{n-1,j} & \dots & b_{n-1,n-1} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kj} \end{pmatrix} =$$

По теореме 3 $\quad \det(\mathbf{A}_j) = (-1)^{n-k+n-j} \det(\mathbf{B}) =$

$$= (-1)^{k+j} \det \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,j-1} & b_{1,j} & \dots & b_{1,n-1} & a_{1j} \\ & & & \dots & & & \\ b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,j-1} & b_{k-1,j} & \dots & b_{k-1,n-1} & a_{k-1,j} \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j-1} & b_{k,j} & \dots & b_{k,n-1} & a_{k+1,j} \\ & & & \dots & & & \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,j-1} & b_{n-1,j} & \dots & b_{n-1,n-1} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+j} \sum (-1)^{\mu(p_1;\dots p_{n-1})} \cdot b_{1p_1} \cdot b_{2p_2} \cdot \ldots b_{n-1,p_{n-1}} \cdot a_{kj},$$

где $\sum$ обозначает следующую цепочку символов суммирования:

$$\sum_{p_1 \in \{1;\dots;n-1\}} \sum_{p_2 \in \{1;\dots;n-1\} \setminus \{p_1\}} \dots \sum_{p_{n-1} \in \{1;\dots;n-1\} \setminus \{p_1;p_2;\dots;p_{n-2}\}}$$

По теореме 3 $\quad \det(\mathbf{A}_j) = (-1)^{n-k+n-j} \det(\mathbf{B}) =$

$$= (-1)^{k+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} & a_{1j} \\ & & & \ldots & & & \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \ldots & a_{k-1,n} & a_{k-1,j} \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \ldots & a_{k+1,n} & a_{k+1,j} \\ & & & \ldots & & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+j} \sum (-1)^{\mu(p_1;\ldots p_{n-1})} \cdot b_{1p_1} \cdot b_{2p_2} \cdot \ldots b_{n-1,p_{n-1}} \cdot a_{kj},$$

где $\sum$ обозначает следующую цепочку символов суммирования:

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n-1\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n-1\} \setminus \{p_1\}} \ldots \sum_{p_{n-1} \in \{1;\ldots;n-1\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-2}\}}$$

По теореме 3 $\det(\mathbf{A}_j) = (-1)^{n-k+n-j}\det(\mathbf{B}) =$

$$= (-1)^{k+j}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ & & & \dots & & & \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} & a_{k-1,j} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} & a_{k+1,j} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+j}\sum(-1)^{\mu(p_1;\dots p_{n-1})}\cdot b_{1p_1}\cdot b_{2p_2}\cdot\ldots b_{n-1,p_{n-1}}\cdot a_{kj},$$

Сумма по элементам последней строки матрицы $\mathbf{B}$ выродилась в одно слагаемое, так как все элементы последней строки матрицы $\mathbf{B}$ нулевые, кроме последнего и, следовательно, все остальные слагаемые суммы (4) равны 0.

По теореме 3 $\quad \det(\mathbf{A}_j) = (-1)^{n-k+n-j} \det(\mathbf{B}) =$

$$= (-1)^{k+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ & & & \dots & & & \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} & a_{k-1,j} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} & a_{k+1,j} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+j} \sum (-1)^{\mu(p_1;\dots p_{n-1})} \cdot b_{1p_1} \cdot b_{2p_2} \cdot \ldots b_{n-1,p_{n-1}} \cdot a_{kj},$$

Согласно формуле (4) выражение

$$\sum (-1)^{\mu(p_1;\dots p_{n-1})} \cdot b_{1p_1} \cdot b_{2p_2} \cdot \ldots b_{n-1,p_{n-1}}$$

равно детерминанту матрицы

$$
\begin{pmatrix}
b_{11} & \dots & b_{1,j-1} & b_{1,j} & \dots & b_{1,n-1} \\
 & & & \dots & & \\
b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,j-1} & b_{k-1,j} & \dots & b_{k-1,n-1} \\
b_{k,1} & \dots & b_{k,j-1} & b_{k,j} & \dots & b_{k,n-1} \\
 & & & \dots & & \\
b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,j-1} & b_{n-1,j} & \dots & b_{n-1,n-1}
\end{pmatrix} =
$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,j-1} & b_{1,j} & \dots & b_{1,n-1} \\ & & & \dots & & \\ b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,j-1} & b_{k-1,j} & \dots & b_{k-1,n-1} \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j-1} & b_{k,j} & \dots & b_{k,n-1} \\ & & & \dots & & \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,j-1} & b_{n-1,j} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & & \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,j-1} & b_{1,j} & \dots & b_{1,n-1} \\ & & & \dots & & \\ b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,j-1} & b_{k-1,j} & \dots & b_{k-1,n-1} \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j-1} & b_{k,j} & \dots & b_{k,n-1} \\ & & & \dots & & \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,j-1} & b_{n-1,j} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & & \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Детерминант последней матрицы представляет собой дополнительный минор элемента a_{kj} в исходной матрице $\mathbf{A}$. Теорема доказана.

VII.2. Теорема о разложении детерминанта по строке или столбцу

Теорема 6. $$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}. \qquad (6)$$

Рассмотреть пример?

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 4 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 5 & 7 & 5 & -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 4 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 5 & 7 & 5 & -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} & 1 & -2 & \mathbf{4} \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & \mathbf{5} & 7 & 5 & \mathbf{-1} \\ -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

$$M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix},$$

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} & 1 & -2 & \mathbf{4} \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & \mathbf{5} & 7 & 5 & \mathbf{-1} \\ -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

$$M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix},$$

Минор построенный на остальных строках и столбцах,
т.е.

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} & 1 & -2 & \mathbf{4} \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & \mathbf{5} & 7 & 5 & \mathbf{-1} \\ -3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

$$M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix},$$

Минор построенный на остальных строках и столбцах, т.е. $M_{\{2;\,3;\,5\},\{1;\,3;\,4\}}$,

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} & 1 & -2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & -2 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 3 \\ -1 & \mathbf{5} & 7 & 5 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & 3 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

$$M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix},$$

Минор построенный на остальных строках и столбцах, т.е. $M_{\{2;\,3;\,5\},\{1;\,3;\,4\}}$,

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} & 1 & -2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & -2 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 3 \\ -1 & \mathbf{5} & 7 & 5 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & 3 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

$$M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}, \quad M_{\{2;\,3;\,5\},\{1;\,3;\,4\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}.$$

Минор построенный на остальных строках и столбцах, т.е. $M_{\{2;\,3;\,5\},\{1;\,3;\,4\}}$,

VII.3. Минор, дополнительный к минору

$$\left(\begin{array}{r|r|rr|r}
\hline
3 & \mathbf{2} & 1 & -2 & \mathbf{4} \\
\hline
\mathbf{4} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\
\mathbf{2} & -2 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 3 \\
\hline
-1 & \mathbf{5} & 7 & 5 & \mathbf{-1} \\
\hline
\mathbf{-3} & 3 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 2
\end{array}\right)$$

Рассмотрим минор, построенный на строках с номерами 1 и 4 и столбцах с номерами 2 и 5:

$$M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}, \quad M_{\{2;\,3;\,5\},\{1;\,3;\,4\}} = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}.$$

Минор построенный на остальных строках и столбцах, т.е. $M_{\{2;\,3;\,5\},\{1;\,3;\,4\}}$, называется **минором, дополнительным к** $M_{\{1;\,4\},\{2;\,5\}}$.

VII.3. Минор, дополнительный к минору

Определение 8. *Пусть* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$, $1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-k} \leq n$, $1 \leq q_1 < q_2 < \ldots < q_{n-k} \leq n$, *причем* $\{p_1; \ldots; p_{n-k}\} = \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\} \backslash \{i_1; \ldots; i_k\}$, $\{q_1; \ldots; q_{n-k}\} = \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\} \backslash \{j_1; \ldots; j_k\}$. *Тогда минор* $M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$, *построенный на строках с номерами* $p_1, \ldots, p_{n-k}$ *и столбцах с номерами* $q_1, \ldots, q_{n-k}$, *называется* **дополнительным** *к минору* $M_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}}$, *построенному на строках с номерами* $i_1, \ldots, i_k$ *и столбцах с номерами* $j_1, \ldots, j_k$.

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\dots;i_k\},\{j_1;\dots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\dots;i_k\},\{j_1;\dots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\dots+p_{n-k}+q_1+\dots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}}$.
В самом деле,

$$(-1)^{p_1+\dots+p_{n-k}+q_1+\dots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}} =$$

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\dots;i_k\},\{j_1;\dots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\dots;i_k\},\{j_1;\dots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\dots+p_{n-k}+q_1+\dots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}}$.
В самом деле,

$$(-1)^{p_1+\dots+p_{n-k}+q_1+\dots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{n-i_1-\dots-ip_k+n-j_1-\dots-j_k} M_{\{p_1;\dots;p_{n-k}\},\{q_1;\dots;q_{n-k}\}} =$$

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.
В самом деле,

$$(-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{n-i_1-\ldots-ip_k+n-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{-i_1-\ldots-i_k-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.
В самом деле,

$$(-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{n-i_1-\ldots-ip_k+n-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{-i_1-\ldots-i_k-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

Число $-i_1 - \ldots - i_k - j_1 - \ldots - j_k$ является чётным тогда и только тогда число $i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k$ — чётное.

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.
В самом деле,

$$(-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{n-i_1-\ldots-ip_k+n-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{-i_1-\ldots-i_k-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

VII.4. Алгебраическое дополнение к минору

Определение 9. *В обозначениях* ***определения 8*** **алгебраическим дополнением к минору** *называется число* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.

Нетрудно понять, что
$A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} = (-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}}$.
В самом деле,

$$(-1)^{p_1+\ldots+p_{n-k}+q_1+\ldots+q_{n-k}} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{n-i_1-\ldots-ip_k+n-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{-i_1-\ldots-i_k-j_1-\ldots-j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{\{p_1;\ldots;p_{n-k}\},\{q_1;\ldots;q_{n-k}\}} =$$

$$= A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}},$$

VII.5. Теорема Лапласа

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— матрица размерности* $n \times n$ *и* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. *Тогда* $\det \mathbf{A}$ *равен сумме произведений вида*

$$M_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} \cdot A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}},$$

по всем допустимым $j_1;\ldots;j_k$, *где* $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ *и* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}}$ *—* ***алгебраическое дополнение к минору*** $M_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}}$.

VII.5. Теорема Лапласа

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— матрица размерности* $n \times n$ *и* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. *Тогда* $\det \mathbf{A}$ *равен сумме произведений вида*

$$M_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}} \cdot A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}},$$

по всем допустимым $j_1;\ldots;j_k$, *где* $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ *и* $A_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}}$ *—* ***алгебраическое дополнение к минору*** $M_{\{i_1;\ldots;i_k\},\{j_1;\ldots;j_k\}}$.

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

Рассмотреть пример?

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$*.*

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$, *то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Комментарий. В данной теореме речь идет детерминантах матриц, которые отличаются линейной комбинацей строк. Поэтому естественно, что в нашем доказательстве мы будем опираться на теорему 5 о линейности детерминанта по строке. Совершенно естественно, что доказательство теоремы мы начнем с перевода условия и заключения теорем на язык равенств.

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$*.*

Доказательство. Пусть строка V_i с номером i матрицы $\mathbf{B}$ имеет вид

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j \quad \text{т.е.} \quad b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk},$$

где $\lambda_i = 1$ и U_i — i-я строка матрицы $\mathbf{A}$. Обозначим через $\mathbf{A}_j$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ заменой строки с номером i на строку матрицы $\mathbf{A}$ с номером j.

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. $V_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j U_j$, т.е. $b_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk}$, где $\lambda_i = 1$.

Обозначим через $\mathbf{A}_j$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ заменой строки с номером i на строку матрицы $\mathbf{A}$ с номером j.

По теореме 5 о линейности детерминанта по строке определитель матрицы $\mathbf{B}$ представим в виде

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. $V_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j,$ т.е. $b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk},$ где $\lambda_i = 1.$

Обозначим через $\mathbf{A}_j$ матрицу, полученную из матрицы $\mathbf{A}$ заменой строки с номером i на строку матрицы $\mathbf{A}$ с номером j.

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det\left(\mathbf{A}_j\right).$$

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$*.*

$$\textbf{Доказательство. } V_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j, \text{ т.е. } b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk}, \text{ где } \lambda_i = 1.$$

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det\left(\mathbf{A}_j\right).$$

Согласно следствию 1, имеем для номеров $j \neq i$, что $\det\left(\mathbf{A}_j\right) = 0$. Следовательно, учитывая равенство $\lambda_i = 1$, получаем

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. $V_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j U_j$, т.е. $b_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk}$, где $\lambda_i = 1$.

$$\det(\mathbf{B}) =$$

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. $V_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j U_j,$ т.е. $b_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk},$ где $\lambda_i = 1.$

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det\left(\mathbf{A}_j\right) =$$

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$). *Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ совпадают, кроме i-той строки, причем i-тая строка матрицы $\mathbf{B}$ является суммой i-той строки матрицы $\mathbf{A}$ и линейной комбинации остальных строк матрицы $\mathbf{A}$, то $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.*

Доказательство. $V_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j U_j$, т.е. $b_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk}$, где $\lambda_i = 1$.

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det\left(\mathbf{A}_j\right) =$$

$$= \ldots + \lambda_{i-1} \cdot 0 + 1 \cdot \det(\mathbf{A}) + \lambda_{i+1} \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 =$$

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$**).** *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме* i*-той строки, причем* i*-тая строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой* i*-той строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Доказательство. $V_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j$, т.е. $b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk}$, где $\lambda_i = 1$.

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det\left(\mathbf{A}_j\right) =$$

$$= \ldots + \lambda_{i-1} \cdot 0 + 1 \cdot \det(\mathbf{A}) + \lambda_{i+1} \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 = \det(\mathbf{A}).$$

VII.6. Теорема о комбинации строк и столбцов в детерминанте

Теорема 8 (о комбинации строк и столбцов в $\det$). *Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ совпадают, кроме i-той строки, причем i-тая строка матрицы $\mathbf{B}$ является суммой i-той строки матрицы $\mathbf{A}$ и линейной комбинации остальных строк матрицы $\mathbf{A}$, то $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.*

$$\textbf{Доказательство. } V_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j, \text{ т.е. } b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk}, \text{ где } \lambda_i = 1.$$

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det\left(\mathbf{A}_j\right) =$$

$$= \ldots + \lambda_{i-1} \cdot 0 + 1 \cdot \det(\mathbf{A}) + \lambda_{i+1} \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 = \det(\mathbf{A}).$$

Теорема доказана.

VII.7. Признак вырожденности матрицы

Теорема 9 (признак вырожденности матрицы). *Если одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных строк или один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных столбцов, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

VII.7. Признак вырожденности матрицы

Теорема 9 (признак вырожденности матрицы). *Если одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных строк или один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных столбцов, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Комментарий. Оказывается, это утверждение можно усилить до критерия, т.е. справедливо и обратное: если детерминант матрицы нулевой, то хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных строк (аналогично и для столбцов). Это утверждение составляет содержание **критерия вырожденности матрицы**, для доказательства которой мы привлечем аппарат, существенно выходящий за пределы аппарата матричной алгебры.

VII.7. Признак вырожденности матрицы

Теорема 9 (признак вырожденности матрицы). *Если одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных строк или один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных столбцов, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$*.*

Доказательство. В силу **теоремы 3 о перестановке двух строк (столбцов) в детерминанте**, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что n-ая строка является линейной комбинацией остальных:

$$a_{nj} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_{k,j}.$$

VII.7. Признак вырожденности матрицы

Теорема 9 (признак вырожденности матрицы). *Если одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных строк или один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных столбцов, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство.

$$a_{nj} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_{k,j}.$$

Тогда, прибавляя к n-ной строке матрицы $\mathbf{A}$ линейную комбинацию остальных строк с коэффициентами, имеющими обратные знаки, получим нулевую строку.

VII.7. Признак вырожденности матрицы

Теорема 9 (признак вырожденности матрицы). *Если одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных строк или один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных столбцов, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Доказательство.

$$a_{nj} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_{k,j}.$$

Тогда, прибавляя к n-ной строке матрицы $\mathbf{A}$ линейную комбинацию остальных строк с коэффициентами, имеющими обратные знаки, получим нулевую строку.

Согласно теореме 8 о комбинации строк и столбцов в детерминанте детерминант при этом не изменится. «Раскрывая» по полученной нулевой строке, получим нулевой детерминант. Теорема доказана.

VII.8. Теорема о детерминанте полураспавшейся матрицы

Теорема 10 (о детерминанте полураспавшейся матрицы). *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times m}$ *и* $\mathbf{C}_{n\times n}$ *— квадратные матрицы. Тогда*

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{C}),$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m\times m} & \mathbf{O}_{m\times n} \\ \mathbf{B}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{C}),$$

где $\mathbf{O}_{p\times q}$ *— нулевая матрица размерности* $p \times q$*.*

VII.8. Теорема о детерминанте полураспавшейся матрицы

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству строк матрицы $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix}$. «Раскроем» этот детерминант по первому столбцу, пользуясь **теоремой 6 о разложении детерминанта по строке или столбцу**:

$$\det \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{m+n} d_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}^{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}^{\mathbf{D}},$$

так как $\begin{cases} d_{11} = a_{11}, \\ \ldots \\ d_{m1} = a_{m1}, \\ d_{m+1,1} = \ldots = d_{m+n,1} = 0. \end{cases}$

VII.8. Теорема о детерминанте полураспавшейся матрицы

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству строк матрицы $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix}$. «Раскроем» этот детерминант по первому столбцу, пользуясь **теоремой 6 о разложении детерминанта по строке или столбцу**:

$$\det \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{m+n} d_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}^{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}^{\mathbf{D}}.$$

В частности, если $m = 1$, то утверждение доказано, так как в этом случае $a_{11} = \det \mathbf{A}$ и $M_{11}^{\mathbf{D}} = \det \mathbf{C}$.

VII.8. Теорема о детерминанте полураспавшейся матрицы

Доказательство.

$$\det \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{m+n} d_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}^{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}^{\mathbf{D}}.$$

Пусть теперь $m > 1$ и для числа строк, меньшего этого значения m, утверждение верно. Заметим, что для $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ минор $M_{i1}^{\mathbf{C}}$ представляет собой детерминант полураспавшейся матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(m-1)\times(m-1)}^{(i,1)} & \mathbf{B}_{(m-1)\times n}^{(i)} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix}$, где матрица $\mathbf{A}_{(m-1)\times(m-1)}^{(i,1)}$ получена из матрицы $\mathbf{A}$ вычеркиванием i-й стоки и первого столбца, а матрица $\mathbf{B}_{(m-1)\times n}^{(i)}$ — вычеркиванием i-й строки. По предположению индукции, так как число строк в матрице $\mathbf{A}_{(m-1)\times(m-1)}^{(i,1)}$ меньше m, то

VII.8. Теорема о детерминанте полураспавшейся матрицы

Доказательство.

$$M_{i1}^{\mathbf{D}} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(m-1)\times(m-1)}^{(i,1)} & \mathbf{B}_{(m-1)\times n}^{(i)} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \mathbf{A}_{(m-1)\times(m-1)}^{(i,1)} \cdot \det \mathbf{C}_{n\times n} = M_{i1}^{\mathbf{A}} \cdot \det \mathbf{C}.$$

Следовательно,

VII.8. Теорема о детерминанте полураспавшейся матрицы

Доказательство.

$$M_{i1}^{\mathbf{D}} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(i,1)}_{(m-1)\times(m-1)} & \mathbf{B}^{(i)}_{(m-1)\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \mathbf{A}^{(i,1)}_{(m-1)\times(m-1)} \cdot \det \mathbf{C}_{n\times n} = M_{i1}^{\mathbf{A}} \cdot \det \mathbf{C}.$$

Следовательно,

$$\det \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(-1)^{1+i} M_{i1}^{\mathbf{A}} \cdot \det \mathbf{C} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}(-1)^{1+i} M_{i1}^{\mathbf{A}} \right) \cdot \det \mathbf{C} =$$

$$= \det \mathbf{A} \det \mathbf{C},$$

что и требовалось доказать.

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство можно ограничить случаем верхней треугольной матрицы в силу **теоремы 2 о равноправии строк и столбцов**.

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство. Применим **индукцию** по числу строк матрицы. Отметим, что случай матрицы размерности 1×1 формально не удовлетворяет утверждению теоремы, поскольку «по зравому смыслу» в произведении не может быть только один сомножитель. Однако в математике обычно используются правила для символов суммирования и произведения, что позволяет утверждать, что теорема верна даже для одноэлементной матрицы.

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство. Применим **индукцию** по числу строк матрицы.

«Для очистки совести» рассмотрим также случай матрицы размерности 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} =$$

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство. Применим **индукцию** по числу строк матрицы.

«Для очистки совести» рассмотрим также случай матрицы размерности 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} =$$

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство. Применим **индукцию** по числу строк матрицы.

«Для очистки совести» рассмотрим также случай матрицы размерности 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22}.$$

База индукции доказана.

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство. Докажем шаг индукции. Пусть n — число строк матрицы $\mathbf{A}$, причем $n > 2$ и для любой треугольной матрицы с числом строк, меньшим n, теорема верна. Тогда по **теореме 10 о детерминанте полураспавшейся матрицы** и предположению индукции имеем

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \cdot a_{nn} =$$

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \cdot a_{nn} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

VII.9. Следствие о детерминанте треугольной матрицы

Следствие 3. *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \cdot a_{nn} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Шаг индукции доказан. Согласно принципу математической индукции утверждение теоремы выполняется для любой треугольной матрицы.

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

Теорема 11 (о детерминанте произведения матриц). *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *квадратные матрицы. Тогда* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

Доказательство.

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

Теорема 11 (о детерминанте произведения матриц). *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *квадратные матрицы. Тогда* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$*.*

Доказательство. Среди доказанных теорем в заключении только одной теоремы присутствует утверждение о произведении детерминантов: это **теорема 10 о детерминанте полураспавшейся матрицы**. Поэтому мы рассмотрим доказательство, основанное на этой теореме.

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

Теорема 11 (о детерминанте произведения матриц). *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *квадратные матрицы. Тогда* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

Доказательство. По **теореме 10 о детерминанте полураспавшейся матрицы**, имеем

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В последней матрице с помощью «минус-единиц» в столбцах с номерами $(n+1), \dots, 2n$ получим нули в «верхней части» (первых n строках) ее первого столбца. Воспользуемся тем, что **по свойству 8**, детерминант матрицы из правой части последнего равенства не изменится, если к ее первому столбцу прибавить линейную комбинацию столбцов с номерами $n+1, n+2, \dots, 2n$ с коэффициентами $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}$. Получим

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & & & \ldots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \ldots & b_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & & & \ldots & & \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots a_{1n}b_{n1} & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots a_{2n}b_{n1} & 0 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & & & \ldots & & \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots a_{nn}b_{n1} & 0 & \ldots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \dots & & \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots a_{1n}b_{n1} & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots a_{2n}b_{n1} & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & & & \dots & & \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots a_{nn}b_{n1} & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь аналогичным образом получим нули в первых n строках второго столбца последней матрицы, для чего к ее второму столбцу прибавим линейную комбинацию столбцов с номерами $n+1, n+2, \dots, 2n$ с коэффициентами $b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}$. Получим

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \dots & & \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots a_{1n}b_{n1} & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots a_{2n}b_{n1} & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & & & \dots & & \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots a_{nn}b_{n1} & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j2} & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & & & & \dots & & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{j2} & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

Продолжая в том же духе, на n-ом шаге получим

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & & & \dots & & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами первую и $(n+1)$-ю строки (детерминант сменит знак), потом — вторую и $(n+2)$-ю строки (детерминант вновь сменит знак), и т.д. После n-й перестановки строк в силу теоремы 10 о детерминанте полураспавшейся матрицы, получим

VII.10. Теорема о детерминанте произведения матриц

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} =$$

$$= (-1)^n \det \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \det(\mathbf{AB}) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^n \det(\mathbf{AB}) \cdot (-1)^n =$$

$= \det(\mathbf{AB})$, что и требовалось доказать.

VII.11. Теорема о разложении детерминанта по «чужой» строке

Теорема 12. *Если* $p \neq q$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip} A_{iq} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj} A_{qj} = 0$.

Доказательство.

VII.11. Теорема о разложении детерминанта по «чужой» строке

Теорема 12. *Если* $p \neq q$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip}A_{iq} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj}A_{qj} = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим иллюстративный пример к доказательству?

VII.11. Теорема о разложении детерминанта по «чужой» строке

Теорема 12. *Если* $p \neq q$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip} A_{iq} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj} A_{qj} = 0$.

Доказательство. Докажем только $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip} A_{iq} = 0$, второе равенство доказывается аналогично. Рассмотрим матрицу $\mathbf{B}$, в которой $b_{ij} = a_{ij}$ для всех i, j, кроме $j = q$. Для $j = q$ положим $b_{iq} = a_{ip}$. Таким образом, матрица $\mathbf{B}$ получена из матрицы $\mathbf{A}$ удалением q-того столбца и заменой его копией p-того столбца матрицы $\mathbf{A}$.

VII.11. Теорема о разложении детерминанта по «чужой» строке

Теорема 12. *Если* $p \neq q$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip}A_{iq} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj}A_{qj} = 0.$

Доказательство. Матрица $\mathbf{B}$ получена из матрицы $\mathbf{A}$ удалением q-того столбца и заменой его копией p-того столбца матрицы $\mathbf{A}$. С одной стороны, по **следствию 1 о детерминанте матрицы с равными строками**, $\det(\mathbf{B}) = 0$, так как в ней p-тый и q-тый столбцы одинаковы.

VII.11. Теорема о разложении детерминанта по «чужой» строке

Теорема 12. *Если* $p \neq q$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip} A_{iq} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj} A_{qj} = 0$.

Доказательство. Матрица $\mathbf{B}$ получена из матрицы $\mathbf{A}$ удалением q-того столбца и заменой его копией p-того столбца матрицы $\mathbf{A}$. С одной стороны, $\det(\mathbf{B}) = 0$. С другой стороны, по **теореме 6 о разложении детерминанта по строке или столбцу**

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{iq} A'_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} A'_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} A_{iq},$$

VII.11. Теорема о разложении детерминанта по «чужой» строке

Теорема 12. *Если* $p \neq q$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip}A_{iq} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj}A_{qj} = 0$.

Доказательство. Матрица $\mathbf{B}$ получена из матрицы $\mathbf{A}$ удалением q-того столбца и заменой его копией p-того столбца матрицы $\mathbf{A}$.

$$0 = \det(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{iq}A'_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}A'_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}A_{iq},$$

так как алгебраические дополнения A_{iq} в матрице $\mathbf{A}$ и A'_{iq} в матрице $\mathbf{B}$ совпадают, поскольку при их вычислении столбец с номером q вычеркивается, а это единственный столбец, которым отличаются матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Свойство доказано.

Пример использования свойств детерминанта

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Рассмотрим плоскость с декартовой прямоугольной системой координат xOy, и множество векторов, выходящих из начала координат. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — единичные векторы координатных осей.

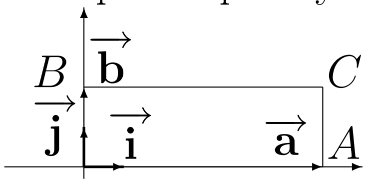
VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Рассмотрим функцию S, каждой паре векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$ ставящую в соответствие число $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Рассмотрим функцию S, каждой паре векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_x\overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{j}}$ ставящую в соответствие число $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

Начнем с простого случая: пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x\overrightarrow{\mathbf{i}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_y\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Обозначим через A конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, через B — конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, и рассмотрим прямоугольник $OACB$, построенный на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$:

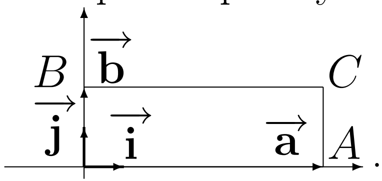


.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Рассмотрим функцию S, каждой паре векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$ ставящую в соответствие число $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

Начнем с простого случая: пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$. Обозначим через A конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, через B — конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, и рассмотрим прямоугольник $OACB$, построенный на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$:

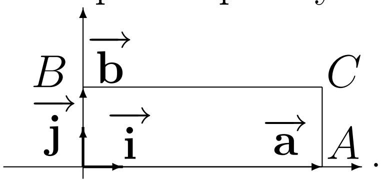


Тогда $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} =$

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Рассмотрим функцию S, каждой паре векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$ ставящую в соответствие число $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

Начнем с простого случая: пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$. Обозначим через A конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, через B — конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, и рассмотрим прямоугольник $OACB$, построенный на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$:



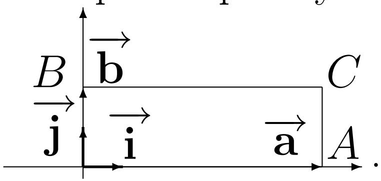
.

Тогда $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y$

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

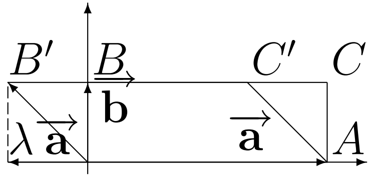
Рассмотрим функцию S, каждой паре векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$ ставящую в соответствие число $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

Начнем с простого случая: пусть $\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x \overrightarrow{\mathbf{i}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}} = b_y \overrightarrow{\mathbf{j}}$. Обозначим через A конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, через B — конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, и рассмотрим прямоугольник $OACB$, построенный на векторах $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:



Тогда $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y$ — это либо площадь прямоугольника $OACB$, либо значение этой площади, взятое со знаком «минус».

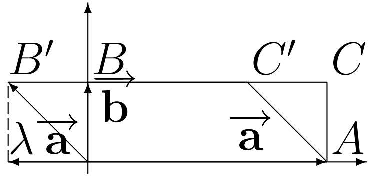
VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Пусть λ — произвольное вещественное число. Обозначим через C' конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$: 

(чертеж соответствует отрицательному значению λ). В силу свойств детерминанта $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Пусть λ — произвольное вещественное число. Обозначим через C' конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$:

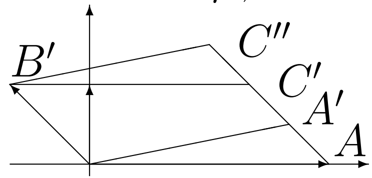


(чертеж соответствует отрицательному значению λ). В силу свойств детерминанта $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.

Отметим, что площади прямоугольника $OACB$ и параллелограмма $OAC'B'$ также равны. поэтому значение $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$ по модулю равно площади параллелограмма $OAC'B'$.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

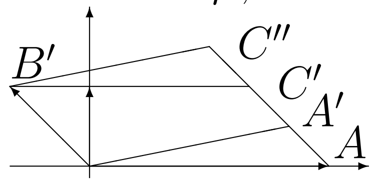
Теперь возьмем произвольное вещественное число μ, и обозначим через A' конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$:



С одной стороны, по свойствам детерминанта имеем $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}), \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$, с другой стороны, площади параллелограммов $OAC'B'$ и $OA'C''B'$ равны.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Теперь возьмем произвольное вещественное число μ, и обозначим



через A' конец вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$:

С одной стороны, по свойствам детерминанта имеем $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}), \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$, с другой стороны, площади параллелограммов $OAC'B'$ и $OA'C''B'$ равны.

Таким образом, значение $S\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}), \overrightarrow{\mathbf{b}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$ по модулю равно площади параллелограмма $OA'C''B'$.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Следовательно, мы можем сформулировать правило: *абсолютная величина числа* $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}}$ *и* $\gamma \overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta \overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Аналогично можно показать, что *абсолютная величина числа* $\det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$ *равна объему параллелепипеда, построенного на векторах* $a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}$ *и* $c_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

VIII. Геометрическая интерпретация детерминанта

Следовательно, мы можем сформулировать правило: *абсолютная величина числа* $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}}$ *и* $\gamma \overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta \overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Аналогично можно показать, что *абсолютная величина числа* $\det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$ *равна объему параллелепипеда, построенного на векторах* $a_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $b_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{k}}$ *и* $c_x \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_y \overrightarrow{\mathbf{j}} + c_z \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Значение этого детерминанта называют еще **ориентированной площадью** или, соответственно, **ориентированным объемом.**

IX. Аксиоматическое определение детерминанта

Оказывается, рассмотренная геометрическая интерпретация детерминанта приводит к весьма неожиданному[2] результату. А именно, справедлива следующая теорема.

[2]При принятой нами схеме изложения понятия детерминанта.

IX. Аксиоматическое определение детерминанта

Теорема 13 (об аксиоматическом определении детерминанта). *Пусть функция* $\det^*$ *каждой квадратной матрице ставит в соответствие число, причем выполняются следующие утверждения:*

1. *если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *умножением* i*-той строки на число* λ*, то* $\det^*(\mathbf{B}) = \lambda \cdot \det^*(\mathbf{A})$*;*

2. *если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *прибавлением к* i*-той строке другой строки матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det^*(\mathbf{B}) = \det^*(\mathbf{A})$*;*

3. *если* $\mathbf{E}$ *— единичная матрица, то* $\det^*(\mathbf{E}) = 1$*.*

Тогда $\det^*(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$*.*

IX. Аксиоматическое определение детерминанта

Доказательство теоремы об аксиоматическом определении детерминанта мы приводить не будем, с ним можно ознакомиться, например, в учебнике «Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М:. Наука.— 1968.— 431 с.».

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?