Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Тензоры в евклидовых пространствах

Раздел **электронного учебника** для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$;

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\text{Б} = \{x^0, x\}$.

Решение.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Ответ на первый вопрос задачи получим с помощью **стратегии составления уравнений**.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$. *В каком виде представим ответ?*

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$. *В каком виде представим ответ?* Запишем соответствующее выражение.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$. *В каком виде представим ответ?* Запишем соответствующее выражение. *Введем переменные,*

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$. *В каком виде представим ответ?* Запишем соответствующее выражение. *Введем переменные*, поскольку конструктивное построение мы провести не можем (по крайней мере, пока). Обозначим коэффициенты искомого многочлена буквами: $q(x) = \alpha + \beta x$.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$. *В каком виде представим ответ?* Запишем соответствующее выражение. *Введем переменные*, поскольку конструктивное построение мы провести не можем (по крайней мере, пока). Обозначим коэффициенты искомого многочлена буквами: $q(x) = \alpha + \beta x$. *Составим уравнения*,

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. *Что надо найти?* Многочлен $q(x)$. *В каком виде представим ответ?* Запишем соответствующее выражение. *Введем переменные*: обозначим коэффициенты искомого многочлена буквами: $q(x) = \alpha + \beta x$. *Составим уравнения*, для чего вычислим какую-либо величину разными способами.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Используя **типовой изоморфизм**, вычислим двумя способами результат действия функционала F на векторы исходного пространства.

Пример 1. *Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Действуя на векторы базиса **Б**, получаем

$$\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}} \right.$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Действуя на векторы базиса **Б**, получаем

$$\begin{cases} F(x^0) = 1 = \int\limits_0^1 x^0\,(\alpha + \beta x)\;dx = \alpha + \frac{1}{2}\beta, \\ \\ \end{cases}$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Действуя на векторы базиса **Б**, получаем

$$\begin{cases} F(x^0) = 1 = \int\limits_0^1 x^0\,(\alpha + \beta x)\;dx = \alpha + \frac{1}{2}\beta, \\ F(x) = 1 = \int\limits_0^1 x\,(\alpha + \beta x)\;dx = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta. \end{cases}$$

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Действуя на векторы базиса **Б**, получаем

$$\begin{cases} F(x^0) = 1 = \int\limits_0^1 x^0 \, (\alpha + \beta x) \; dx = \alpha + \dfrac{1}{2}\beta, \\ F(x) = 1 = \int\limits_0^1 x \, (\alpha + \beta x) \; dx = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{3}\beta. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Действуя на векторы базиса **Б**, получаем

$$\begin{cases} F(x^0) = 1 = \int\limits_0^1 x^0 \left(\alpha + \beta x\right)\, dx = \alpha + \frac{1}{2}\beta, \\ F(x) = 1 = \int\limits_0^1 x \left(\alpha + \beta x\right)\, dx = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 6 \end{cases}$, то есть $q(x) = -2 + 6x$.

Решение. Положим $q(x) = \alpha + \beta x$. Действуя на векторы базиса **Б**, получаем

$$\begin{cases} F(x^0) = 1 = \int\limits_0^1 x^0 \left(\alpha + \beta x\right)\, dx = \alpha + \dfrac{1}{2}\beta, \\ F(x) = 1 = \int\limits_0^1 x \left(\alpha + \beta x\right)\, dx = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{3}\beta. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 6 \end{cases}$, то есть $q(x) = -2 + 6x$.

Проверим выполнение равенства $F(p) = p(1) = \int\limits_0^1 p(x)(6x - 2)\, dx$ для многочлена $p(x) = 1 + 3x$.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Проверим выполнение равенства $F(p) = p(1) = \int\limits_0^1 p(x)(6x-2)\,dx$ для многочлена $p(x) = 1 + 3x$. Получаем, с одной стороны,

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Проверим выполнение равенства $F(p) = p(1) = \int\limits_0^1 p(x)(6x-2)\,dx$ для многочлена $p(x) = 1 + 3x$. Получаем, с одной стороны,

$$F(1 + 3x) =$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Проверим выполнение равенства $F(p) = p(1) = \int\limits_0^1 p(x)(6x-2)\,dx$ для многочлена $p(x) = 1 + 3x$. Получаем, с одной стороны,

$$F(1+3x) = 1 + 3x\Big|_{x=1} =$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Проверим выполнение равенства $F(p) = p(1) = \int\limits_0^1 p(x)(6x-2)\,dx$ для многочлена $p(x) = 1 + 3x$. Получаем, с одной стороны,

$$F(1+3x) = 1 + 3x\Big|_{x=1} = 4.$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. Проверим выполнение равенства $F(p) = p(1) = \int\limits_0^1 p(x)(6x-2)\,dx$ для многочлена $p(x) = 1 + 3x$. Получаем, с одной стороны, $F(1 + 3x) = 4$.

С другой стороны,

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 (1+3x)(6x-2)\,dx =$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$*, соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$*, то есть такой многочлен* $q(x)$*, что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 (1+3x)(6x-2)\,dx = -2\int\limits_0^1 \left(1-9x^2\right)\,dx =$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$*. Найти*

1) многочлен $q(x)$*, соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$*, то есть такой многочлен* $q(x)$*, что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$*.*

Решение. С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 (1+3x)(6x-2)\,dx = -2\int\limits_0^1 \left(1-9x^2\right)\,dx = 4,$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

1) многочлен $q(x)$, *соответствующий при* ***типовом изоморфизме*** *линейному функционалу* $F(p(x)) = p(1)$, *то есть такой многочлен* $q(x)$, *что* $p(1) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Решение. С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 (1+3x)(6x-2)\,dx = -2\int\limits_0^1 \left(1-9x^2\right)\,dx = 4,$$

то есть равенство $F(1+3x) = \int\limits_0^1 (1+3x)(6x-2)\,dx$ выполняется.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$.

Решение. Осталось вычислить многочлены $r^1(x), r^2(x)$.

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

Решение. Пусть $r^1 = u_1 + u_2x$, $r^2 = v_1 + v_2x$. Из определения взаимного базиса получаем системы равенств:

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

Решение. Пусть $r^1 = u_1 + u_2 x$, $r^2 = v_1 + v_2 x$. Из определения взаимного базиса получаем системы равенств:

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2 x) = \\ 0 = (x, u_1 + u_2 x) = \end{cases}$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

Решение. Пусть $r^1 = u_1 + u_2x$, $r^2 = v_1 + v_2x$. Из определения взаимного базиса получаем системы равенств:

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2x) = u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2x) = \end{cases}$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$.

Решение. Пусть $r^1 = u_1 + u_2x$, $r^2 = v_1 + v_2x$. Из определения взаимного базиса получаем системы равенств:

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2x) = u_1 + \dfrac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2x) = \dfrac{1}{2}u_1 + \dfrac{1}{3}u_2 \end{cases},$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$.

Решение. Пусть $r^1 = u_1 + u_2 x$, $r^2 = v_1 + v_2 x$. Из определения взаимного базиса получаем системы равенств:

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2 x) = u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2 x) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = (x^0, v_1 + v_2 x) = \\ 1 = (x, v_1 + v_2 x) = \end{cases}$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

Решение. Пусть $r^1 = u_1 + u_2x$, $r^2 = v_1 + v_2x$. Из определения взаимного базиса получаем системы равенств:

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2x) = u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2x) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = (x^0, v_1 + v_2x) = v_1 + \frac{1}{2}v_2, \\ 1 = (x, v_1 + v_2x) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2 x) = u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2 x) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = (x^0, v_1 + v_2 x) = v_1 + \frac{1}{2}v_2, \\ 1 = (x, v_1 + v_2 x) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \end{cases}$$

Записывая эти системы в матричном виде, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2 x) = u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2 x) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = (x^0, v_1 + v_2 x) = v_1 + \frac{1}{2}v_2, \\ 1 = (x, v_1 + v_2 x) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \end{cases}$$

Записывая эти системы в матричном виде, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что равносильно (используя умножение матриц на макроуровне),

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 1 = (x^0, u_1 + u_2 x) = u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\ 0 = (x, u_1 + u_2 x) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = (x^0, v_1 + v_2 x) = v_1 + \frac{1}{2}v_2, \\ 1 = (x, v_1 + v_2 x) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \end{cases}$$

Записывая эти системы в матричном виде, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что равносильно (используя умножение матриц на макроуровне),

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторам базиса, взаимного к $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, соответствуют многочлены $r^1(x) = 4 - 6x$ и $-6 + 12x$. Иными словами,

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторам базиса, взаимного к $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, соответствуют многочлены $r^1(x) = 4 - 6x$ и $-6 + 12x$. Иными словами,

$$\int\limits_0^1 (a + bx)(4 - 6x)\,dx = a, \qquad \int\limits_0^1 (a + bx)(-6 + 12x)\,dx = b,$$

Пример 1. *Пусть в эвклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 скалярное произведение задано формулой* $(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$. *Найти*

2) многочлены $r^1(x), r^2(x)$, *соответствующие при* ***типовом изоморфизме*** *базису, взаимному к базису* $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

Решение. Векторам базиса, взаимного к $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, соответствуют многочлены $r^1(x) = 4 - 6x$ и $-6 + 12x$. Иными словами,

$$\int\limits_0^1 (a + bx)(4 - 6x)\,dx = a, \qquad \int\limits_0^1 (a + bx)(-6 + 12x)\,dx = b,$$

что нетрудно проверить непосредственным вычислением.

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Пусть V — линейное пространство кососимметрических матриц размерности 3×3, и*

$$\text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

— его базис.

Требуется найти в V взаимный базис Б^* *к базису* **Б** *и вектор, соответствующий функции* $f(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, *если скалярное произведение введено формулой* $(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Решение.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

У нас описано два метода нахождения базиса $\mathbf{Б}^*$:

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

У нас описано два метода нахождения базиса $\mathbf{Б}^*$:

— использование **определения взаимного базиса**;

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

У нас описано два метода нахождения базиса $\mathbf{Б}^*$:

— использование **определения взаимного базиса**;

— применения **свойств метрического тензора**.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

У нас описано два метода нахождения базиса $\mathbf{Б}^*$:

— использование **определения взаимного базиса**;

— применения **свойств метрического тензора**.

Проделаем вычисления и по первому, и по второму методу, чтобы сравнить их эффективность.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f:

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $\quad f(y) = (y, x)$.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Итак, пусть $e^1 = u \cdot h_1 + v \cdot h_2 + w \cdot h_3$. По определению **взаимного базиса**

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Итак, пусть $e^1 = u \cdot h_1 + v \cdot h_2 + w \cdot h_3$. По определению **взаимного базиса**
$$\begin{cases} (e^1, h_1) = 1, \\ (e^1, h_2) = 0, \\ (e^1, h_3) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Итак, пусть $e^1 = u \cdot h_1 + v \cdot h_2 + w \cdot h_3$. По определению **взаимного базиса**
$$\begin{cases} (e^1, h_1) = 1, \\ (e^1, h_2) = 0, \\ (e^1, h_3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + w = 1, \\ u + v + w = 0, \\ -v + w = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Решая полученную систему $\begin{cases} u + w = 1, \\ u + v + w = 0, \\ -v + w = 0, \end{cases}$ получаем искомые координаты

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Решая полученную систему $\begin{cases} u + w = 1, \\ u + v + w = 0, \\ -v + w = 0, \end{cases}$ получаем искомые координаты $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}'$.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Получили искомые координаты $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}'$, откуда

$e^1 =$

$$\text{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Получили искомые координаты $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}'$, откуда

$$e^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Первый метод. Как известно, при отождествлении V с V^* каждому вектору x **ставится в соответствие функция** f: $f(y) = (y, x)$. Координаты векторов из $\mathbf{Б}^*$ удобнее искать в естественном базисе

$$\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Для нахождения e^2, e^3 надо составить и решить еще две системы линейных уравнений.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Мы хотим воспользоваться **соответствующей формулой**. Матрица Грама (то есть значение метрического тензора в базисе $\mathbf{Б}'$, если мы под тензором понимаем тензор-функцию,

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Мы хотим воспользоваться **соответствующей формулой**. Матрица Грама (то есть значение метрического тензора в базисе $\mathbf{Б}'$, если мы под тензором понимаем тензор-функцию, или просто метрический тензор в базисе $\mathbf{Б}'$, если мы под тензором понимаем тензор-массив)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Мы хотим воспользоваться **соответствующей формулой**. Матрица Грама (то есть значение метрического тензора в базисе $\mathbf{Б}'$, если мы под тензором понимаем тензор-функцию, или просто метрический тензор в базисе $\mathbf{Б}'$, если мы под тензором понимаем тензор-массив) равна $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} ??? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t).$

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & 3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & ??? & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & 3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad} \begin{pmatrix} 6 & 4 & ??? \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad\qquad\qquad} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad\qquad} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ ??? & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & ??? & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t).$

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & ??? \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t).$

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ ??? & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad\qquad} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 3 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & ??? & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 3 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad\qquad} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad\qquad\qquad} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & ??? \end{pmatrix}^t$$

(сначала составим матрицу из миноров)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^t$$

(теперь сменим знаки в соответствующих местах)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{4} & -3 \\ \mathbf{4} & 3 & \mathbf{-2} \\ -3 & \mathbf{-2} & 2 \end{pmatrix}^t$$

(теперь сменим знаки в соответствующих местах)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{-4} & -3 \\ \mathbf{-4} & 3 & \mathbf{2} \\ -3 & \mathbf{2} & 2 \end{pmatrix}^t$$

(теперь найдем детерминант)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\qquad\qquad} \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t$$

(теперь найдем детерминант)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 6 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-3)} \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t$$

(теперь найдем детерминант)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t$$

(Проверим)

$$1 =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t$$

(Проверим)

$$1 = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}^t$$

(Проверим)

$$1 = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}^t$$

(Проверим)

$$1 = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

<u>Второй метод.</u> $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}^t$$

(остается выполнить транспонирование)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Применим **метод присоединенной матрицы**

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

(остается выполнить транспонирование, что в данном случае упрощается симметричностью матрицы)

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j = 6 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 =$$

$$\textbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j = 6 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 =$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j = 6 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 =$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j = 6 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что совпадает с результатом, вычисленным первым методом. Теперь легко находятся e^2, e^3.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = g^{2j} e_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Второй метод. Итак $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. Значит, по **соответствующей формуле**,

$$e^1 = g^{1j} e_j = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = g^{2j} e_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^3 = g^{3j} e_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Для этого проще всего найти координаты функции f в базисе $\mathbf{В} = \left\{ f^1, f^2, f^3 \right\}$ пространства V^*, взаимном к $\mathbf{Б}$, это будут координаты искомой матрицы в базисе $\mathbf{Б}^*$.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = f\left(x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + x^3 \cdot e_3\right) =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = f\left(x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + x^3 \cdot e_3\right) =$$

$$= f \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 & x^2 - x^3 \\ -x^1 - x^2 & 0 & x^1 + x^2 + x^3 \\ x^3 - x^2 & -x^1 - x^2 - x^3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = f\left(x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + x^3 \cdot e_3\right) =$$

$$= f \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 & x^2 - x^3 \\ -x^1 - x^2 & 0 & x^1 + x^2 + x^3 \\ x^3 - x^2 & -x^1 - x^2 - x^3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{tr}(-x^2 + 2x^3) =$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = f\left(x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + x^3 \cdot e_3\right) =$$

$$= f \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 & x^2 - x^3 \\ -x^1 - x^2 & 0 & x^1 + x^2 + x^3 \\ x^3 - x^2 & -x^1 - x^2 - x^3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{tr}(-x^2 + 2x^3) = -x^2 + 2x^3.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = \mathrm{tr}(-x^2 + 2x^3) = -x^2 + 2x^3.$$

Заметим, что операция tr здесь служит только одной цели — она «извлекает» из матрицы ее единственный элемент.

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = \mathrm{tr}(-x^2 + 2x^3) = -x^2 + 2x^3.$$

Итак, $f(x^i \cdot e_i) = -x^2 + 2x^3$. С другой стороны,

$$f = y_i \cdot f^i = y_1 \cdot f^1 + y_2 \cdot f^2 + y_3 \cdot f^3.$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = -x^2 + 2x^3 = x^1 \cdot y_1 + x^2 \cdot y_2 + x^3 \cdot y_3.$$

Следовательно,

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = -x^2 + 2x^3 = x^1 \cdot y_1 + x^2 \cdot y_2 + x^3 \cdot y_3.$$

Следовательно, $y_1 = 0, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2$. Итак,

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = -x^2 + 2x^3 = x^1 \cdot y_1 + x^2 \cdot y_2 + x^3 \cdot y_3.$$

Следовательно, $y_1 = 0, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2$. Итак, $f = -f^2 + 2 \cdot f^3$. Значит, функции f соответствует матрица

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \operatorname{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = -x^2 + 2x^3 = x^1 \cdot y_1 + x^2 \cdot y_2 + x^3 \cdot y_3.$$

Следовательно, $y_1 = 0, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2$. Итак,
$f = -f^2 + 2 \cdot f^3$. Значит, функции f соответствует матрица

$F = -e^2 + 2 \cdot e^3 =$

$$\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(X, Y) = 0.5 \cdot \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$.

Осталось выполнить последнее задание: найти матрицу из V, соответствующую функции $f(X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$f\left(x^i \cdot e_i\right) = -x^2 + 2x^3 = x^1 \cdot y_1 + x^2 \cdot y_2 + x^3 \cdot y_3.$$

Следовательно, $y_1 = 0, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2$. Итак,
$f = -f^2 + 2 \cdot f^3$. Значит, функции f соответствует матрица
$F = -e^2 + 2 \cdot e^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **Вернуться к лекции?**

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Это прекрасная задача, но у нее есть один недостаток — ее нельзя решить. Дело в том, что

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Это прекрасная задача, но у нее есть один недостаток — ее нельзя решить. Дело в том, что она некорректно поставлена: не указано, как введено скалярное произведение.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$;

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$.

С чего начнем решение?

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx;$

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1).$

Сначала договоримся, как будем задавать тензор.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$;

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$.

Зададим его, как тензор-массив.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$;

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$.

Зададим его, как тензор-массив. Следовательно, надо выбрать базис.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x) g(x)\, dx;$
2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1).$

Зададим его, как тензор-массив. Пусть $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Зададим сначала линейный оператор естественным образом — как **смешанный тензор**, то есть

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$;

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$.

Зададим его, как тензор-массив. Пусть $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Зададим сначала линейный оператор естественным образом — как **смешанный тензор**, то есть найдем **матрицу этого оператора** в этом базисе.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$;
2. $(f,g) = f(0)\cdot g(0) + f(-1)\cdot g(-1)$.

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \left(\qquad\qquad\right).$$

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Имеем $\left(x^0\right)' = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x$, значит, **первый столбец матрицы** D —

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x) g(x)\, dx$;
2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$.

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \left(\qquad \right).$$

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Имеем $\left(x^0\right)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x$, значит, **первый столбец матрицы** D — нулевой.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$;

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$.

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Имеем $\left(x^0\right)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x$, значит, **первый столбец матрицы** D — нулевой.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x) g(x)\, dx;$

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1).$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}$. Далее, $x' = 1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x$, поэтому **второй столбец матрицы** D равен

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\, dx;$

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1).$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$. Далее, $x' = 1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x$, поэтому **второй столбец матрицы** D равен $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx;$

2. $(f,g) = f(0)\cdot g(0) + f(-1)\cdot g(-1).$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$. Далее, $x' = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x$, поэтому **второй столбец матрицы** D равен $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. Мы решим эту задачу для двух случаев:

1. $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx;$

2. $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1).$

$$\mathbf{D_{Б}} = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Б} = \left\{x^0, x\right\}.$$

Теперь приступим к «жонглированию».

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. **Дважды ковариантный метрический тензор** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, очевидно, равен $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. По **соответствующей формуле** получаем, что

$$(D_{ij}) =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. **Дважды ковариантный метрический тензор** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, очевидно, равен $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. По **соответствующей формуле** получаем, что

$$(D_{ij}) = \left(g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}\right) =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. **Дважды ковариантный метрический тензор** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, очевидно, равен $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. По **соответствующей формуле** получаем, что

$$(D_{ij}) = \left(g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}\right) = (g_{ik}) \cdot \left(D^k_{\bullet j}\right) =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. **Дважды ковариантный метрический тензор** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, очевидно, равен $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. По **соответствующей формуле** получаем, что

$$(D_{ij}) = \left(g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}\right) = (g_{ik}) \cdot \left(D^k_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. **Дважды ковариантный метрический тензор** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$, очевидно, равен $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. По **соответствующей формуле** получаем, что

$$(D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = (g_{ik}) \cdot (D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тензоры D_{ij} и $D^i_{\bullet j}$ явно различны: и координаты, и структура неодинаковы. Почему мы говорим, что это один и тот же тензор?

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**,

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = \mathbf{6} \cdot e^1 + \mathbf{3} \cdot e^2$,

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$\left(D^i_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = \left(g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$,

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = \mathbf{3} \cdot e^1 + \mathbf{2} \cdot e^2$,

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому

$$D^i_{\bullet j} \cdot e_i \otimes e^j =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому

$$D^i_{\bullet j} \cdot e_i \otimes e^j = e_1 \otimes e^2 =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f, g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$\left(D^i_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(D_{ij}\right) = \left(g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому, **по формуле**

$$D^i_{\bullet j} \cdot e_i \otimes e^j = e_1 \otimes e^2 =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

$$\left(D^i_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(D_{ij}\right) = \left(g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому, **по формуле**

$$D^i_{\bullet j} \cdot e_i \otimes e^j = e_1 \otimes e^2 = \left(6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2\right) \otimes e^2 =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{6} \\ 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому, **по формуле**

$$D^i_{\bullet j} \cdot e_i \otimes e^j = e_1 \otimes e^2 = \left(6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2\right) \otimes e^2 =$$

$$= \mathbf{6} \cdot e^1 \otimes e^2 + \mathbf{3} \cdot e^2 \otimes e^2 =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 1) $(f,g) = 6 \cdot \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

$$(D^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_{ij}) = (g_{ik} \cdot D^k_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{6} \\ 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это массивы координат одного тензор-вектора в разных базисах. В нашем примере, как нетрудно **подсчитать**, $1 = 6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2$, $x = 3 \cdot e^1 + 2 \cdot e^2$, поэтому, **по формуле**

$$D^i_{\bullet j} \cdot e_i \otimes e^j = e_1 \otimes e^2 = \left(6 \cdot e^1 + 3 \cdot e^2\right) \otimes e^2 =$$

$$= \mathbf{6} \cdot e^1 \otimes e^2 + \mathbf{3} \cdot e^2 \otimes e^2 = D_{ij} \cdot e^i \otimes e^j.$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем:

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f, g) = f(0) \cdot g(0) + f(-1) \cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$(D_{ij}) =$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f,g) = f(0)\cdot g(0) + f(-1)\cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(D_{ij}) = \left(g_{ik}\cdot D^{k}_{\bullet j}\right) =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f,g) = f(0)\cdot g(0) + f(-1)\cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$(D_{ij}) = \left(g_{ik}\cdot D^{k}_{\bullet j}\right) = (g_{ik})\cdot\left(D^{k}_{\bullet j}\right) =$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f,g) = f(0)\cdot g(0) + f(-1)\cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(D_{ij}) = \left(g_{ik}\cdot D^{k}_{\bullet j}\right) = (g_{ik})\cdot\left(D^{k}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. 2) $(f,g)=f(0)\cdot g(0)+f(-1)\cdot g(-1)$. Проделывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем: $(g_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(D_{ij})=\left(g_{ik}\cdot D^{k}_{\bullet j}\right)=(g_{ik})\cdot\left(D^{k}_{\bullet j}\right)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. В первом случае получили $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. В первом случае получили $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а во втором случае — $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. В первом случае получили $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а во втором случае — $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тензор D_{ij}, полученный во втором случае, существенно отличается от первого. Что это, ошибка?

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. В первом случае получили $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а во втором случае — $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тензор D_{ij}, полученный во втором случае, существенно отличается от первого. Что это, ошибка?

Скалярное произведение в первом и во втором случае резко отличаются (метрические тензоры различны), поэтому отождествление V^* с V осуществляется по-разному.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. В первом случае получили $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а во втором случае — $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тензору $D^i_{\bullet j}$ соответствует линейный оператор $\hat{D}$, а тензору D_{ij} — билинейная форма D. Оказывается, они связаны между собой достаточно естественным (с точки зрения теории линейных пространств) образом.

Пример 3. *Задать линейный оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени, не выше 1, как дважды ковариантный тензор.*

Решение. В первом случае получили $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а во втором случае — $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тензору $D^{i}_{\bullet j}$ соответствует линейный оператор $\hat{D}$, а тензору D_{ij} — билинейная форма D. Нетрудно понять, что для любых $x, y \in U$

$$D(x, y) = \left(x, \hat{D}(y)\right).$$

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение.

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = 1$. Согласно **формуле** получаем

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = 1$. Согласно **формуле** получаем

$$[x, y] =$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = 1$. Согласно **формуле** получаем

$$[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k =$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = 1$. Согласно **формуле** получаем

$$[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = \left(e_{231} \cdot x^2 \cdot y^3 + e_{321} \cdot x^3 \cdot y^2\right) \cdot v^1 +$$

$$+ \left(e_{132} \cdot x^1 \cdot y^3 + e_{312} \cdot x^3 \cdot y^1\right) \cdot v^2 + \left(e_{123} \cdot x^1 \cdot y^2 + e_{213} \cdot x^2 \cdot y^1\right) \cdot v^3 =$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = 1$. Согласно **формуле** получаем

$$[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = \left(e_{231} \cdot x^2 \cdot y^3 + e_{321} \cdot x^3 \cdot y^2\right) \cdot v^1 +$$

$$+ \left(e_{132} \cdot x^1 \cdot y^3 + e_{312} \cdot x^3 \cdot y^1\right) \cdot v^2 + \left(e_{123} \cdot x^1 \cdot y^2 + e_{213} \cdot x^2 \cdot y^1\right) \cdot v^3 =$$

$$= v^1 - v^2 + v^3.$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = 1$. Согласно **формуле** получаем

$$[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3.$$

Проверим верность результата независимыми расчетами.

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров:

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} ??? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3.$

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3,$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & ??? & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Примени **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & ??? \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \mathbf{2} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ ??? & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & \mathbf{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & ??? & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & \mathbf{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{1} & \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & ??? \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} \\ & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ ??? & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Примени **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & ??? & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \mathbf{1} & \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & ??? \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Матрица из дополнительных миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2$, $\quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Сменим знаки в нужных местах, чтобы получить матрицу из миноров: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Примени́м **метод присоединенной матрицы**. Сменим знаки в нужных местах, чтобы получить матрицу из миноров: $\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Сменим знаки в нужных местах, чтобы получить матрицу из миноров:

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2$, $\quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\det(g_{ij}) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\det(g_{ij}) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 1$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$,

$\det(g_{ij}) = 1 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$,

$\det(g_{ij}) = 1 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & -1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$,

$\det(g_{ij}) = 1 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & -1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$,

$\det(g_{ij}) = 1 = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3$.

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Применим **метод присоединенной матрицы**. Осталось транспонировать полученную матрицу и найти детерминант исходной матрицы: $\mathbf{P}_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\det(g_{ij}) = 1$.

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = \mathbf{2}v_1 + (\mathbf{-1})v_2 + \mathbf{2}v_3 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$v^1 = \mathbf{2}v_1 + (\mathbf{-1})v_2 + \mathbf{2}v_3 = 2\,(e_1 - e_2) - (e_1 - e_3) + 2e_2 =$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$v^1 = \mathbf{2}v_1 + (\mathbf{-1})v_2 + \mathbf{2}v_3 = 2(e_1 - e_2) - (e_1 - e_3) + 2e_2 = e_1 + e_3,$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 2 \cdot v_3 = e_1 + e_3$,

$v^2 = -v_1 + v_2 - v_3 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 2 \cdot v_3 = e_1 + e_3$,

$v^2 = -v_1 + v_2 - v_3 = -(e_1 - e_2) + (e_1 - e_3) - e_2 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 2 \cdot v_3 = e_1 + e_3$,

$v^2 = -v_1 + v_2 - v_3 = -(e_1 - e_2) + (e_1 - e_3) - e_2 = -e_3$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & -1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 2 \cdot v_3 = e_1 + e_3$,

$v^2 = -v_1 + v_2 - v_3 = -e_3$,

$v^3 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & -1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 2 \cdot v_3 = e_1 + e_3$,

$v^2 = -v_1 + v_2 - v_3 = -e_3$,

$v^3 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3 = 2\,(e_1 - e_2) - (e_1 - e_3) + 3e_2 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3,$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & -1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 2 \cdot v_3 = e_1 + e_3,$

$v^2 = -v_1 + v_2 - v_3 = -e_3,$

$v^3 = 2 \cdot v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3 = 2\,(e_1 - e_2) - (e_1 - e_3) + 3e_2 = e_1 + e_2 + e_3.$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = e_1 + e_3, \quad v^2 = -e_3, \quad v^3 = e_1 + e_2 + e_3$.

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем

$v^1 = e_1 + e_3, \quad v^2 = -e_3, \quad v^3 = e_1 + e_2 + e_3$.

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = (e_1 - e_2) + (e_1 - e_3) =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = (e_1 - e_2) + (e_1 - e_3) = 2 \cdot e_1 - e_2 - e_3$,

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = (e_1 - e_2) + (e_1 - e_3) = 2 \cdot e_1 - e_2 - e_3$,

$y = (e_1 - e_3) + e_2 =$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = (e_1 - e_2) + (e_1 - e_3) = 2 \cdot e_1 - e_2 - e_3$,

$y = (e_1 - e_3) + e_2 = e_1 + e_2 - e_3$,

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = 2e_1 - e_2 - e_3, \quad y = e_1 + e_2 - e_3$. **Поэтому**

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = 2e_1 - e_2 - e_3, \quad y = e_1 + e_2 - e_3$. **Поэтому**

$$[x, y] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3$.

С другой стороны, $x = 2e_1 - e_2 - e_3, \quad y = e_1 + e_2 - e_3$. **Поэтому**

$$[x, y] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3.$$

Пример 4. *Пусть дан ОНБ* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *и* $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$. *Необходимо найти векторное произведение векторов* $x = v_1 + v_2, \quad y = v_2 + v_3$.

Решение. $[x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = v^1 - v^2 + v^3$,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $[x, y] = v^1 - v^2 + v^3 = \mathbf{2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3}$.

С другой стороны, $x = 2e_1 - e_2 - e_3, \quad y = e_1 + e_2 - e_3$. **Поэтому**

$$[x, y] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{2 \cdot e_1 + e_2 + 3 \cdot e_3}.$$

Еще пример или **вернуться к лекции?**

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$([a, b], [c, d]) = (a, c) \cdot (b, d) - (a, d) \cdot (b, c).$$

Решение.

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$([a,b],[c,d]) = (a,c)\cdot(b,d) - (a,d)\cdot(b,c).$$

Решение. Зафиксируем произвольный базис. Согласно **формуле** и **свойству 4)** символа Леви-Чивита, получаем

$$([a,b],[c,d]) = \varepsilon_{ikl}\cdot a^k\cdot b^l\cdot\varepsilon^{ipr}\cdot c_p\cdot d_r =$$

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$([a, b], [c, d]) = (a, c) \cdot (b, d) - (a, d) \cdot (b, c).$$

Решение. Зафиксируем произвольный базис. Согласно **формуле** и **свойству 4)** символа Леви-Чивита, получаем

$$([a, b], [c, d]) = \varepsilon_{ikl} \cdot a^k \cdot b^l \cdot \varepsilon^{ipr} \cdot c_p \cdot d_r =$$

$$= (\delta_k^p \cdot \delta_l^r - \delta_k^r \cdot \delta_l^p) \cdot a^k \cdot b^l \cdot c_p \cdot d_r =$$

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$([a, b], [c, d]) = (a, c) \cdot (b, d) - (a, d) \cdot (b, c).$$

Решение. Зафиксируем произвольный базис. Согласно **формуле** и **свойству 4)** символа Леви-Чивита, получаем

$$([a, b], [c, d]) = \varepsilon_{ikl} \cdot a^k \cdot b^l \cdot \varepsilon^{ipr} \cdot c_p \cdot d_r =$$

$$= (\delta_k^p \cdot \delta_l^r - \delta_k^r \cdot \delta_l^p) \cdot a^k \cdot b^l \cdot c_p \cdot d_r = a^k \cdot c_k \cdot b^l \cdot d_l - a^k \cdot d_k \cdot b^l \cdot c_l =$$

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$([a,b],[c,d]) = (a,c)\cdot(b,d) - (a,d)\cdot(b,c).$$

Решение. Зафиксируем произвольный базис. Согласно **формуле** и **свойству 4)** символа Леви-Чивита, получаем

$$([a,b],[c,d]) = \varepsilon_{ikl}\cdot a^k\cdot b^l\cdot\varepsilon^{ipr}\cdot c_p\cdot d_r =$$

$$= (\delta_k^p\cdot\delta_l^r - \delta_k^r\cdot\delta_l^p)\cdot a^k\cdot b^l\cdot c_p\cdot d_r = a^k\cdot c_k\cdot b^l\cdot d_l - a^k\cdot d_k\cdot b^l\cdot c_l =$$

$$= (a,c)\cdot(b,d) - (a,d)\cdot(b,c),$$

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$([a, b], [c, d]) = (a, c) \cdot (b, d) - (a, d) \cdot (b, c).$$

Решение. Зафиксируем произвольный базис. Согласно **формуле** и **свойству 4)** символа Леви-Чивита, получаем

$$([a, b], [c, d]) = \varepsilon_{ikl} \cdot a^k \cdot b^l \cdot \varepsilon^{ipr} \cdot c_p \cdot d_r =$$

$$= (\delta_k^p \cdot \delta_l^r - \delta_k^r \cdot \delta_l^p) \cdot a^k \cdot b^l \cdot c_p \cdot d_r = a^k \cdot c_k \cdot b^l \cdot d_l - a^k \cdot d_k \cdot b^l \cdot c_l =$$

$$= (a, c) \cdot (b, d) - (a, d) \cdot (b, c),$$

что и требовалось доказать.

Вернуться к лекции?

Задачи для самостоятельного решения

Задача II.1. (Ответ приведен на стр.229.) В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение определено формулой $(p(x);\ q(x)) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} p(x) q(x)\, dx$. Найдите базис, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}$.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.233.) На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.248.) Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты

$$T(\mathbf{Б}) = (T^{\bullet j}_{i \cdot k}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T^{ij}_{\bullet\bullet k}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Задача III.4. (Ответ приведен на стр.265.) На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.289.) В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.335.) $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение определено формулой $(p(x);\ q(x)) = \int\limits_0^\infty e^{-x} p(x) q(x)\, dx$. Найдите базис, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Задача 1. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение определено формулой $(p(x);\ q(x)) = \int\limits_0^\infty e^{-x} p(x) q(x)\, dx$. Найдите базис, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Ответ. Коэффициенты матрицы Грама (дважды коваринтного метрического тензора) можно найти, например, как **значения гамма-функции**: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 1. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение определено формулой $(p(x);\ q(x)) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} p(x) q(x)\, dx$. Найдите базис, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Ответ. Коэффициенты матрицы Грама (дважды коваринтного метрического тензора) можно найти, например, как **значения гамма-функции**: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Получаем $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 1. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение определено формулой $(p(x);\ q(x)) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} p(x) q(x)\, dx$. Найдите базис, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Ответ. Коэффициенты матрицы Грама (дважды коваринтного метрического тензора) можно найти, например, как **значения гамма-функции**: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Получаем $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, по **формуле получения взаимного базиса с помощью метрического тензора**

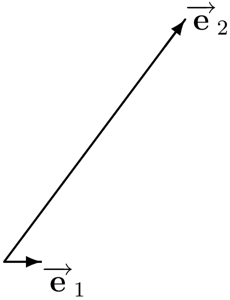
$\mathbf{Б}^* = \{1 - 2x + x^2,\ x^2 - 2,\ 1 + x - x^2\}$.

Решение задачи 2.

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

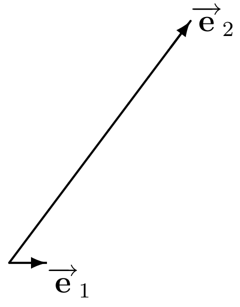
Ответ.



Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2$, $|e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

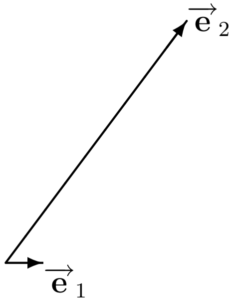
Ответ.

Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**



Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

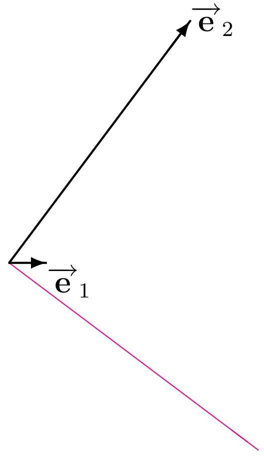
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0. \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.

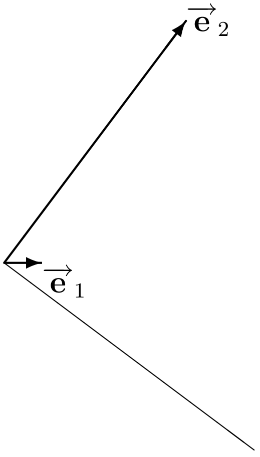
Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0. \end{cases}$$



Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1, \ e_2\}$.

Ответ.



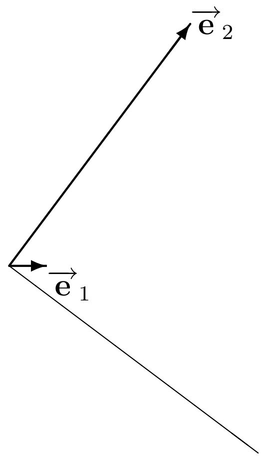
Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1, \ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1, \ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1, \ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2$, $|e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

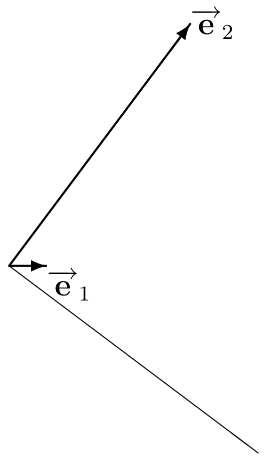
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^{1},\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_{1}\right) = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^{1},\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_{2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_{1}\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_{1}} \overrightarrow{\mathbf{e}}^{1} = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^{1},\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_{2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/2)\, \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_{1}} \overrightarrow{\mathbf{e}}^{1} = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^{1},\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_{2}\right) = 0, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

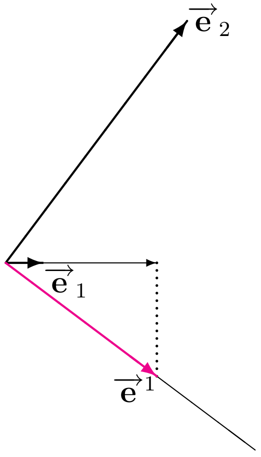
$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/2)\, \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2$, $|e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

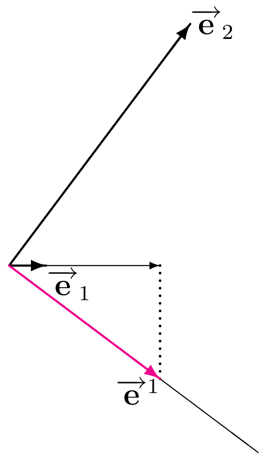
$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/2)\, \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 1, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



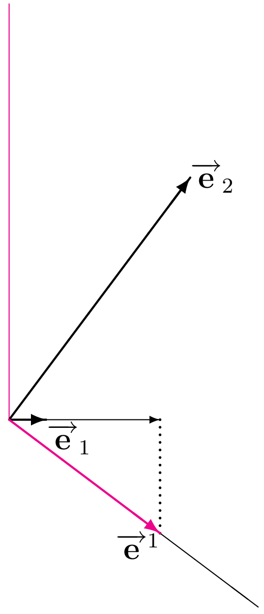
Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 1, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



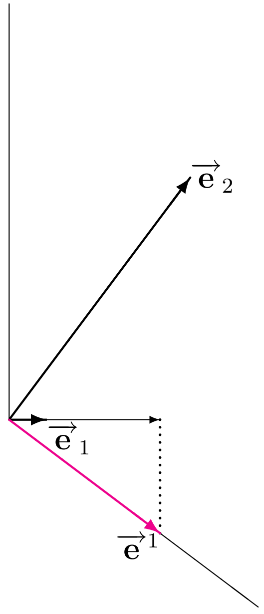
Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 1, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

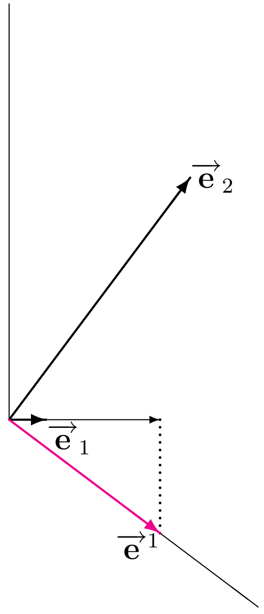
$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2} \overrightarrow{\mathbf{e}}^2 = 1, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2$, $|e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$

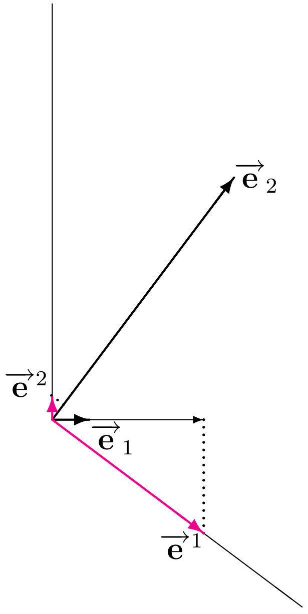
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2} \overrightarrow{\mathbf{e}}^2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ 4\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2} \overrightarrow{\mathbf{e}}^2 = 1, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.



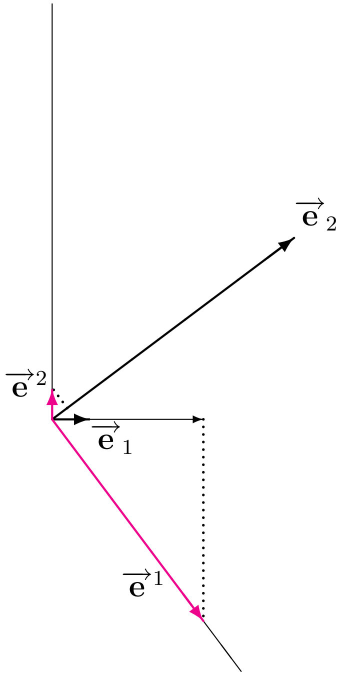
Согласно **определению взаимного базиса** и **правилу отождествления вектора с линейным функционалом**

$$\begin{cases} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1} \overrightarrow{\mathbf{e}}^1 = 2, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right| \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2} \overrightarrow{\mathbf{e}}^2 = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}}^2,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1\right) = 0, \\ 4\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2} \overrightarrow{\mathbf{e}}^2 = 1, \end{cases}$$

Задача 2. На плоскости геометрических векторов имеем $|e_1| = 1/2, \quad |e_2| = 4$ и $\widehat{e_1, e_2} = \alpha$. Найти базис $\mathbf{Б}^*$, взаимный к базису $\mathbf{Б} = \{e_1,\ e_2\}$.

Ответ.

А если изменяется угол α...



Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T^{ij}_{\bullet\bullet k}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) =$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{rr} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{array} \right\} \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{rr} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T^{ij}_{\bullet\bullet k}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) =$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T^{ij}_{\bullet\bullet k}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\left(T_{\bullet\bullet k}^{ij}\right) =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\left(T_{\bullet\bullet k}^{ij}\right) = \left(g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}\right) =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{rr} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{array} \right\} \end{array} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\left(T_{\bullet\bullet k}^{ij}\right) = \left(g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{rr} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{array} \right\} \end{array} \right) =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(T_{\bullet\bullet k}^{ij}) = (g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \\ \\ \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(T_{\bullet\bullet k}^{ij}) = (g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\left(T_{\bullet\bullet k}^{ij}\right) = \left(g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(T_{\bullet\bullet k}^{ij}) = (g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \atop 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям метрического тензора и матрицы Грама, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(T_{\bullet\bullet k}^{ij}) = (g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\left(T_i^{\bullet jk}\right) = (T_{i\bullet p}^{\bullet j} g^{pk}) =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(T_{\bullet\bullet k}^{ij}) = (g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right),$$

$$\left(T_i^{\bullet jk}\right) = (T_{i\bullet p}^{\bullet j} \mathbf{g}^{\mathbf{pk}}) = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right)$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\left(T_{\bullet\bullet k}^{ij}\right) = \left(g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}\right) = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right),$$

$$\left(T_i^{\bullet jk}\right) = \left(T_{i\bullet p}^{\bullet j} g^{pk}\right) = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right),$$

Задача 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ, и в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1 - e_2, e_1\}$ тензор T имеет координаты $T(\mathbf{Б}) = (T_{i\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найдите, с помощью жонглирования индексами, координаты тензоров $T_{\bullet\bullet k}^{ij}$, $T_i^{\bullet jk}$, и T_{ijk}.

Ответ. Согласно определениям **метрического тензора** и **матрицы Грама**, получаем $\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(T_{\bullet\bullet k}^{ij}) = (g^{ip} T_{p\cdot k}^{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\left(T_i^{\bullet jk}\right) = (T_{i\bullet p}^{\bullet j} g^{pk}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$(T_{ijk}) = (T_{i\bullet k}^{\bullet p} \mathbf{g_{pj}}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?*

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?*

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.*

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \Big(p, \hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) =$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \int_0^1 x^0 x^0\,dx & \\ & \\ & \end{pmatrix} =$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g_{ij})=\begin{pmatrix}\int_0^1 x^0x^0\,dx & \int_0^1 x^0x\,dx\\ & \end{pmatrix}=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g_{ij})=\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^1 x^0x^0\,dx & \displaystyle\int_0^1 x^0x\,dx\\ \displaystyle\int_0^1 x\,x^0\,dx & \end{pmatrix}=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g_{ij})=\begin{pmatrix}\int_0^1 x^0x^0\,dx & \int_0^1 x^0x\,dx\\ \int_0^1 x\,x^0\,dx & \int_0^1 x\,x\,dx\end{pmatrix}=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g_{ij})=\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^1 x^0x^0\,dx & \displaystyle\int_0^1 x^0x\,dx\\ \displaystyle\int_0^1 x\,x^0\,dx & \displaystyle\int_0^1 x\,x\,dx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 x^0 x^0\,dx & \displaystyle\int_0^1 x^0 x\,dx \\ \displaystyle\int_0^1 x\,x^0\,dx & \displaystyle\int_0^1 x\,x\,dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = \left(g^{ij}\right) = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} =$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Линейный оператор. *В каком виде представим ответ?* Укажем матрицу этого оператора в каком-либо базисе. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Введем естественный базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$. Имеем согласно **определению метрического тензора** и определению скалярного произведения в рассматриваемом пространстве

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g_{ij})=\begin{pmatrix}\int_0^1 x^0x^0\,dx & \int_0^1 x^0x\,dx\\ \int_0^1 x\,x^0\,dx & \int_0^1 x\,x\,dx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=\left(g^{ij}\right)=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}.$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=\left(g^{ij}\right)=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{Б}\right)=\left(F_{ij}\right)=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat F$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat F(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=\left(g^{ij}\right)=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}(\mathbf{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix} f\left(x^0,x^0\right) & f\left(x^0,x\right) \\ f\left(x,x^0\right) & f\left(x,x\right) \end{pmatrix}=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=\left(g^{ij}\right)=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}(\mathbf{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix} f(x^0,x^0) & f(x^0,x) \\ f(x,x^0) & f(x,x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=\left(g^{ij}\right)=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}.$$

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{Б}\right)=\left(F_{ij}\right)=\begin{pmatrix}f\left(x^0,x^0\right) & f\left(x^0,x\right)\\ f\left(x,x^0\right) & f\left(x,x\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому, используя **«жонглирование индексами»**, получаем, что линейный оператор $\hat{F}$ имеет в базисе $\mathbf{Б}$ матрицу

$$\left(F^i_{\bullet j}\right)=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=\left(g^{ij}\right)=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}(\mathbf{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix} f\left(x^0,x^0\right) & f\left(x^0,x\right) \\ f\left(x,x^0\right) & f\left(x,x\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, используя **«жонглирование индексами»**, получаем, что линейный оператор $\hat{F}$ имеет в базисе $\mathbf{Б}$ матрицу

$$\left(F^i_{\bullet j}\right)=\left(g^{ik}F_{kj}\right)=$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p, q) = p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p, q) = \left(p, \hat{F}(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б}) = \left(g^{ij}\right) = \Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}(\mathbf{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} f\left(x^0, x^0\right) & f\left(x^0, x\right) \\ f\left(x, x^0\right) & f(x, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, используя **«жонглирование индексами»**, получаем, что линейный оператор $\hat{F}$ имеет в базисе $\mathbf{Б}$ матрицу

$$\left(F^i_{\bullet j}\right) = \left(g^{ik}F_{kj}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$, $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g^{ij})=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}(\mathbf{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^i_{\bullet j})=\left(g^{ik}F^{kj}\right)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$ следует из формулы $F_{ij}=g_{ik}F^k_j$.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$, $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\quad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g^{ij})=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12\end{pmatrix}$.

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad (F^{i}_{\bullet j})=\left(g^{ik}F^{kj}\right)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 0\end{pmatrix}.$$

Равенство $f(p,q)=\Big(p,\hat{F}(q)\Big)$ следует из формулы $F_{ij}=g_{ik}F^k_j$. В самом деле, векторам p и q соответствуют **контравариантные тензоры первого ранга**, а именно, тензоры P и Q, каждому базису ставящие в соответствие столбец координат вектора p или, соответственно, q в этом базисе.

Задача 4. На евклидовом пространстве многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$ задана билинейная форма $f(p,q)=p(0)q(0)$. Найдите линейный оператор $\hat{F}$, соответствующий этой билинейной форме, то есть оператор, матрица которого получается из матрицы билинейной формы f с помощью «жонглирования индексами». Проверьте, что этот линейный оператор позволяет выразить билинейную форму с помощью скалярного произведения следующим образом: $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$.

Ответ. $\mathbf{Б}=\{x^0,x\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}}=(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{Б})=(g^{ij})=\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}$.

Билинейной форме f соответствует **дважды ковариантный тензор**

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \left(F^{i}_{\bullet j}\right)=\left(g^{ik}F^{kj}\right)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -6 & 0\end{pmatrix}.$$

Равенство $f(p,q)=\left(p,\hat{F}(q)\right)$ следует из формулы $F_{ij}=g_{ik}F^k_j$. В самом деле, векторам p и q соответствуют **контравариантные тензоры первого ранга**, а именно, тензоры P и Q, каждому базису ставящие в соответствие столбец координат вектора p или, соответственно, q в этом базисе. Поэтому $f(p,q)=F_{ij}P^iQ^j$ и, учитывая **формулу**, получаем $\left(p,\hat{F}(q)\right)=P^ig_{ik}F^k_jQ^j$. Из формулы $F_{ij}=g_{ik}F^k_j$ следует, что

$$f(p,q)=F_{ij}P^iQ^j=P^ig_{ik}F^k_jQ^j=\left(p,\hat{F}(q)\right),$$

что и требовалось доказать.

Решение задачи 5.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Используем стратегию составления уравнений.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?*

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?*

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.*

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости $\mathbf{P}$ с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости **P** с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.

Традиционные методы аналитической геометрии не «срабатывают», так как рассматриваемый нами базис **Б** не является ортонормированным. В частности, вектор с координатами $(2; -1; 3)$ не перпендикулярен плоскости с уравнением $2x - y + 3z + 2 = 0$.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости $\mathbf{P}$ с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.
Однако, рассматривая вывод параметрических уравнений прямой, нетрудно убедиться, что вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ **из таблицы**, по-прежнему параллелен прямой.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис **Б** $= \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости **P** с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.
Однако, рассматривая вывод параметрических уравнений прямой, нетрудно убедиться, что вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ **из таблицы**, по-прежнему параллелен прямой и, значит, перпендикулярен плоскости **P**.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3 \right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости **P** с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.
Однако, рассматривая вывод параметрических уравнений прямой, нетрудно убедиться, что вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ **из таблицы**, по-прежнему параллелен прямой и, значит, перпендикулярен плоскости **P**. Вектор, перпендикулярный к плоскости **P**, можно найти как ненулевое **векторное произведение** двух векторов, параллельных этой плоскости, которое найдем **по формуле**, использующей **тензор Леви-Чивита**. Подберем три точки на этой плоскости, не лежащие на одной прямой, то есть три решения уравнения $2x - y + 3z + 2 = 0$. Например, можно взять

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости $\mathbf{P}$ с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.

Однако, рассматривая вывод параметрических уравнений прямой, нетрудно убедиться, что вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ **из таблицы**, по-прежнему параллелен прямой и, значит, перпендикулярен плоскости $\mathbf{P}$. Вектор, перпендикулярный к плоскости $\mathbf{P}$, можно найти как ненулевое **векторное произведение** двух векторов, параллельных этой плоскости, которое найдем **по формуле**, использующей **тензор Леви-Чивита**. Подберем три точки на этой плоскости, не лежащие на одной прямой, то есть три решения уравнения $2x - y + 3z + 2 = 0$. Например, можно взять $A(0; 2; 0)$, $B(1; 1; -1)$, $C(-1; 0; 0)$.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\vec{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\vec{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\vec{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\vec{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Используем **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Точку. *В каком виде представим ответ?* Укажем координаты этой точки. *Введем переменные или найдем «объект» конструктивно.* Искомая проекция содержится в пересечении плоскости **P** с прямой, проходящей через M перпендикулярно этой плоскости.

Однако, рассматривая вывод параметрических уравнений прямой, нетрудно убедиться, что вектор $\vec{\mathbf{l}}$ **из таблицы**, по-прежнему параллелен прямой и, значит, перпендикулярен плоскости **P**. Вектор, перпендикулярный к плоскости **P**, можно найти как ненулевое **векторное произведение** двух векторов, параллельных этой плоскости, которое найдем **по формуле**, использующей **тензор Леви-Чивита**. Подберем три точки на этой плоскости, не лежащие на одной прямой, то есть три решения уравнения $2x - y + 3z + 2 = 0$. Например, можно взять $A(0; 2; 0)$, $B(1; 1; -1)$, $C(-1; 0; 0)$. При этом $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = e_1 - e_2 - e_3 \\ \overrightarrow{BC} = -2e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$. Согласно **формуле**, координаты $(z^1; z^2; z^3)$ вектора $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right]$ равны $z^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j$, где x^i, y^j — ковариантные координаты векторов, соответственно, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3 \right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Найдем координаты тензора Леви-Чивита в базисе **Б**. Имеем, с помощью **определения скалярного произведения**,

$$\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Найдем координаты тензора Леви-Чивита в базисе $\mathbf{Б}$. Имеем, с помощью **определения скалярного произведения**,

$$\underline{\mathbf{G}}\left(\mathbf{Б}\right) = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \left|\underline{\mathbf{G}}\left(\mathbf{Б}\right)\right| =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Найдем координаты тензора Леви-Чивита в базисе **Б**. Имеем, с помощью **определения скалярного произведения**,

$$\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = |\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Найдем координаты тензора Леви-Чивита в базисе $\mathbf{Б}$. Имеем, с помощью **определения скалярного произведения**,

$$\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = |\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Найдем координаты тензора Леви-Чивита в базисе **Б**. Имеем, с помощью **определения скалярного произведения**,

$$\underline{\mathbf{G}}\left(\mathbf{Б}\right) = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \left|\underline{\mathbf{G}}\left(\mathbf{Б}\right)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Согласно **определению тензора Леви-Чивита**

$$\left(e^{ijk}\right) = \left(\sqrt{g}^{-1} \cdot \varepsilon^{ijk}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Найдем координаты тензора Леви-Чивита в базисе $\mathbf{Б}$. Имеем, с помощью **определения скалярного произведения**,

$$\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б}) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = |\underline{\mathbf{G}}\,(\mathbf{Б})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Согласно **определению тензора Леви-Чивита**

$$\left(e^{ijk}\right) = \left(\sqrt{g}^{-1} \cdot \varepsilon^{ijk}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис **Б** $= \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем **координаты векторного произведения**:

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем **координаты векторного произведения**:

$$\left(z^k\right) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем **координаты векторного произведения**:

$$(z^k) = (e^{ijk}x_iy_j) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем **координаты векторного произведения**:

$$\left(z^k\right) = \left(e^{ijk}x_iy_j\right) = \left(e^{kij}x_iy_j\right) =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем **координаты векторного произведения**:

$$(z^k) = \left(e^{ijk}x_iy_j\right) = \left(e^{kij}x_iy_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = (g_{im}x^m) = (g_{im})\,(x^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(y_i) = (g_{im}y^m) = (g_{im})\,(y^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем **координаты векторного произведения**:

$$(z^k) = (e^{ijk}x_iy_j) = (e^{kij}x_iy_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (z^k) = (e^{kij} x_i y_j) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз).

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости **P** имеют вид $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t. \end{cases}$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости **P** имеют вид $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t. \end{cases}$

Координаты искомой точки удовлетворяют и этим уравнениям и **уравнению плоскости** **P**:

$$\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости $\mathbf{P}$ перпендикулярен вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости $\mathbf{P}$ имеют вид $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t. \end{cases}$

Координаты искомой точки удовлетворяют и этим уравнениям и **уравнению плоскости** $\mathbf{P}$:

$\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$ Эта система легко решается: $2(-4 - t) - (5 + 2t) + 3(-5 - 3t) + 2 = 0$,

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости **P** имеют вид $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t. \end{cases}$

Координаты искомой точки удовлетворяют и этим уравнениям и **уравнению плоскости** **P**:

$\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$ Эта система легко решается: $2(-4 - t) - (5 + 2t) + 3(-5 - 3t) + 2 = 0$,

$-13t = 26$,

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\vec{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\vec{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\vec{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\vec{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\vec{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости **P** имеют вид $\begin{cases} \mathbf{x = -4 - t}, \\ \mathbf{y = 5 + 2t}, \\ \mathbf{z = -5 - 3t}. \end{cases}$

Координаты искомой точки удовлетворяют и этим уравнениям и **уравнению плоскости** **P**: $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$ Эта система легко решается: $2(-4 - t) - (5 + 2t) + 3(-5 - 3t) + 2 = 0$,

$-13t = 26$, то есть $t = -2$. Следовательно, $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\vec{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\vec{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\vec{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\vec{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\vec{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости **P** имеют вид $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t. \end{cases}$

Координаты искомой точки удовлетворяют и этим уравнениям и **уравнению плоскости** **P**:
$\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$ Эта система легко решается: $2(-4 - t) - (5 + 2t) + 3(-5 - 3t) + 2 = 0$, $-13t = 26$, то есть $t = -2$. Следовательно, $\begin{cases} x = -4 - (-2) = \\ y = 5 + 2 \cdot (-2) = \\ z = -5 - 3 \cdot (-2) = \end{cases}$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе **Б** плоскость **P** имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость **P**.

Ответ. Согласно **формуле жонглирования индексами**,

$$(x_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left(z^k\right) = \left(e^{kij} x_i y_j\right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, плоскости **P** перпендикулярен вектор $\overrightarrow{\mathbf{l}} = e^{ijk} x_i y_j e_k = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$ (мы уменьшили длину векторного произведения в $\sqrt{2}$ раз). **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости **P** имеют вид $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t. \end{cases}$

Координаты искомой точки удовлетворяют и этим уравнениям и **уравнению плоскости** **P**: $\begin{cases} x = -4 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -5 - 3t, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$ Эта система легко решается: $2(-4 - t) - (5 + 2t) + 3(-5 - 3t) + 2 = 0$, $-13t = 26$, то есть $t = -2$. Следовательно, $\begin{cases} x = -4 - (-2) = -2, \\ y = 5 + 2 \cdot (-2) = 1, \\ z = -5 - 3 \cdot (-2) = 1. \end{cases}$

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Проекция N точки M на плоскость $\mathbf{P}$ имеет радиус-вектор $-2e_1 + e_2 + e_3$.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\right\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Проекция N точки M на плоскость $\mathbf{P}$ имеет радиус-вектор $-2e_1 + e_2 + e_3$.

Проверка. Во-первых, $2 \cdot (-2) - 1 + 3 \cdot 1 + 2 = 0$, то есть точка N принадлежит плоскости $\mathbf{P}$. Во-вторых, если считать, что мы верно нашли два вектора, параллельных плоскости $\mathbf{P}$: $\overrightarrow{AB} = e_1 - e_2 - e_3$, $\quad \overrightarrow{BC} = -2e_1 - e_2 + e_3$, то вектор

$$\overrightarrow{MN} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3 - (-2e_1 + e_2 + e_3) = -2e_1 + 4e_2 - 6e_3$$

должен быть ортогонален векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Проверим это с помощью **формулы**[1]:

[1] В тензорных обозначениях это **свойство метрического тензора**.

Задача 5. В пространстве геометрических векторов задан базис $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$, где $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_2| = 2$, $|\overrightarrow{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{2}$, угол между $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ с векторами $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ и $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$. В базисе $\mathbf{Б}$ плоскость $\mathbf{P}$ имеет уравнение $2x - y + 3z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции точки с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ на плоскость $\mathbf{P}$.

Ответ. Проекция N точки M на плоскость $\mathbf{P}$ имеет радиус-вектор $-2e_1 + e_2 + e_3$.

Проверка. Во-первых, $2 \cdot (-2) - 1 + 3 \cdot 1 + 2 = 0$, то есть точка N принадлежит плоскости $\mathbf{P}$. Во-вторых, если считать, что мы верно нашли два вектора, параллельных плоскости $\mathbf{P}$: $\overrightarrow{AB} = e_1 - e_2 - e_3$, $\quad \overrightarrow{BC} = -2e_1 - e_2 + e_3$, то вектор

$$\overrightarrow{MN} = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3 - (-2e_1 + e_2 + e_3) = -2e_1 + 4e_2 - 6e_3$$

должен быть ортогонален векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Проверим это с помощью формулы:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

чего и следовало ожидать.

Решение задачи 6.

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$.

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right) \left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \left(z^m\right) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk}x^i y^j e^k = e_{ijk}x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk}x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk}x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1}x^i y^j \\ e_{ij2}x^i y^j \\ e_{ij3}x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231}x^2y^3 + e_{321}x^3y^2 \\ e_{312}x^3y^1 + e_{132}x^1y^3 \\ e_{123}x^1y^2 + e_{213}x^2y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}^t$$

Сначала составим матрицу из дополнительных миноров элементов матрицы Грама (дважды ковариантного метрического тензора)...

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^t$$

Сначала составим матрицу из дополнительных миноров элементов матрицы Грама (дважды ковариантного метрического тензора)...

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right) \left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^{t}$$

Сменим знак в соответствующих местах...

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right) \left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Матрица симметричная, поэтому транспонирование ее не изменяет...

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Найдем детерминант: $1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Найдем детерминант: $1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Найдем детерминант: $1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$,

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$.
Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1/2} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot x^2 \cdot y^3 - 1 \cdot x^3 \cdot y^2 \\ 1 \cdot x^3 \cdot y^1 - 1 \cdot x^1 \cdot y^3 \\ 1 \cdot x^1 \cdot y^2 - 1 \cdot x^2 \cdot y^1 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{1} \cdot e_1 + \boxed{0} \cdot e_2 + \boxed{0} \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = \boxed{0} \cdot e_1 + \mathbf{1} \cdot e_2 + \boxed{0} \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right) \left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot \boxed{0} \cdot \boxed{0} - 1 \cdot \boxed{0} \cdot \mathbf{1} \\ 1 \cdot \boxed{0} \cdot \boxed{0} - 1 \cdot \mathbf{1} \cdot \boxed{0} \\ 1 \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} - 1 \cdot \boxed{0} \cdot \boxed{0} \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix}\right) =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$.
Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} =$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right) \left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e_{ijk} x^i y^j e^k = e_{ijk} x^i y^j g^{km} e_m = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \left(z^m\right) = \left(e_{ijk} x^i y^j g^{km}\right) = \left(g^{km}\right)\left(e_{ijk} x^i y^j\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{ij1} x^i y^j \\ e_{ij2} x^i y^j \\ e_{ij3} x^i y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{231} x^2 y^3 + e_{321} x^3 y^2 \\ e_{312} x^3 y^1 + e_{132} x^1 y^3 \\ e_{123} x^1 y^2 + e_{213} x^2 y^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{AB} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{AD}$. Можно было иначе.

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Другой способ: согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e^{ijk} x_i y_j e_k = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_m) = \left(g_{mk} x^k\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_m) = \left(g_{mk} y^k\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

Задача 6. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребрами длины 1. Найдите разложение вектора $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$ по базису $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right\}$.

Ответ. Для использования тензорных обозначений введем обозначения: положим $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $\quad e_3 = \overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = x^i e_i$, $\quad \overrightarrow{AC} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = y^i e_i$. Другой способ: согласно **формуле вычисления векторного произведения**

$$\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = e^{ijk} x_i y_j e_k = z^m e_m.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = (z^m) = \left(e^{ijk} x_i y_j\right) = \begin{pmatrix} e^{ij1} x_i y_j \\ e^{ij2} x_i y_j \\ e^{ij3} x_i y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{231} x_2 y_3 + e^{321} x_3 y_2 \\ e^{312} x_3 y_1 + e^{132} x_1 y_3 \\ e^{123} x_1 y_2 + e^{213} x_2 y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right] = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{AB} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{AD}$.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?