Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы тензорного анализа

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии:

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии: $\begin{cases} x = -v, \\ y = -v^2. \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u=0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии: $\begin{cases} x=-v, \\ y=-v^2. \end{cases}$ Удобнее, конечно, было бы получить «обычное» уравнение, то есть уравнение вида $f(x,y)=0$. Для этого

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Если положить $u = 0$, то получим параметрическое уравнение соответствующей координатной линии: $\begin{cases} x = -v, \\ y = -v^2. \end{cases}$ Удобнее, конечно, было бы получить «обычное» уравнение, то есть уравнение вида $f(x, y) = 0$. Для этого выразим u, v через x, y.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \dfrac{y}{x} - u$.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u+v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u+v)-y=0$. Из этого уравнения получаем $v=\dfrac{y}{x}-u$.

Кроме того, из уравнения $x=u-v$ получим $u=$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \dfrac{y}{x} - u$.

Кроме того, из уравнения $x = u - v$ получим $u = x + v$, откуда $u =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы из условия задачи на $u + v$ и вычтем из полученного уравнения второе уравнение. Получим $x(u + v) - y = 0$. Из этого уравнения получаем $v = \dfrac{y}{x} - u$.

Кроме того, из уравнения $x = u - v$ получим $u = x + v$, откуда $u = x + \dfrac{y}{x} - u$.

Следовательно, $u = \dfrac{x^2 + y}{2x}$.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $v=\dfrac{y}{x}-u$, $u=\dfrac{x^2+y}{2x}$.

В итоге получим $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v= \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $v=\dfrac{y}{x}-u$, $u=\dfrac{x^2+y}{2x}$.

В итоге получим $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}. \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = \\ \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:**

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1 -$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y=2ux-x^2, \\ y=2vx+x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x>0$):

линия $u=-1$**:** $y=-(x+1)^2+1$ — часть параболы;

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $\quad y = -(x+1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $\quad u = 1$**:** $\quad y =$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y=2ux-x^2, \\ y=2vx+x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x>0$):

линия $u=-1$**:** $y=-(x+1)^2+1$ — часть параболы;

линия $u=1$**:** $y=-(x-1)^2+1$ —

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y=2ux-x^2, \\ y=2vx+x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x>0$):

линия $u=-1$**:** $y=-(x+1)^2+1$ — часть параболы;

линия $u=1$**:** $y=-(x-1)^2+1$ — часть параболы;

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=2ux-x^2, \\ y=2vx+x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x>0$):

линия $u=-1$**:** $\quad y=-(x+1)^2+1$ — часть параболы;

линия $u=1$**:** $\quad y=-(x-1)^2+1$ — часть параболы;

линия $v=1$**:** $\quad y=$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y=2ux-x^2, \\ y=2vx+x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x>0$):

линия $u=-1$**:** $y=-(x+1)^2+1$ — часть параболы;

линия $u=1$**:** $y=-(x-1)^2+1$ — часть параболы;

линия $v=1$**:** $y=(x+1)^2-1$

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

линия $u = -1$**:** $y = -(x + 1)^2 + 1$ — часть параболы;

линия $u = 1$**:** $y = -(x - 1)^2 + 1$ — часть параболы;

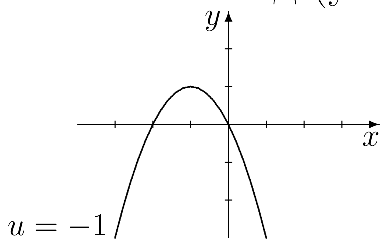
линия $v = 1$**:** $y = (x + 1)^2 - 1$ — часть параболы.

Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

$u = -1$: $y = -(x + 1)^2 + 1$,



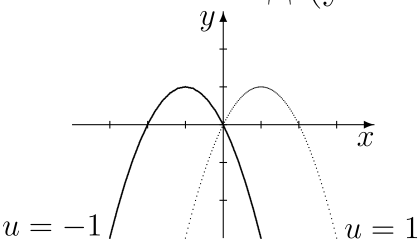
Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u = 0$, $u = -1$, $u = 1$, $v = 1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u, v)$ *первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$

Решение. Итак, $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 + y}{2x}, \\ v = \dfrac{y - x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2ux - x^2, \\ y = 2vx + x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x > 0$):

$u = -1$: $y = -(x + 1)^2 + 1$,

$u = 1$: $y = -(x - 1)^2 + 1$,



Пример 1. *Изобразить координатные линии* $u=0$, $u=-1$, $u=1$, $v=1$ *для криволинейной системы координат* $\Phi(u,v)$ *первой координатной четверти* $x>0, y>0$, *заданной системой координатных функций* $\begin{cases} x=u-v, \\ y=u^2-v^2. \end{cases}$

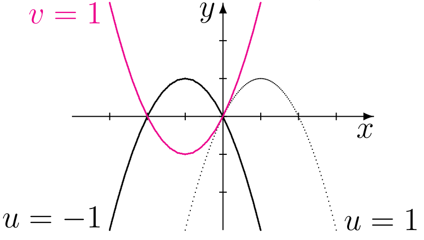
Решение. Итак, $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+y}{2x}, \\ v=\dfrac{y-x^2}{2x}, \end{cases}$ $\begin{cases} y=2ux-x^2, \\ y=2vx+x^2. \end{cases}$

Значит, координатные линии имеют вид (учитывая $x>0$):

$u=-1$: $y=-(x+1)^2+1$,

$u=1$: $y=-(x-1)^2+1$,

$v=1$: $y=(x+1)^2-1$.



Вернуться к лекции?

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u,v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение.

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u =$$

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u,v) = (u - v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial \left((u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial \left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial v} =$$

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial v} = \frac{\partial\left((u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial v} =$$

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$
$$\Phi(u,v) = (u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$
найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

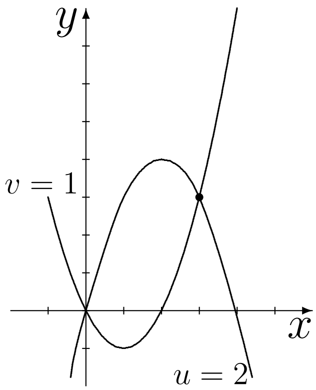
Решение. В **примере 1** локальный базис системы криволинейных координат имеет вид $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right\}$, где
$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial\left((u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial u} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\overrightarrow{\mathbf{j}},$$
$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial v} = \frac{\partial\left((u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (u^2 - v^2)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)}{\partial v} = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1***, *с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u,v) = (u-v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



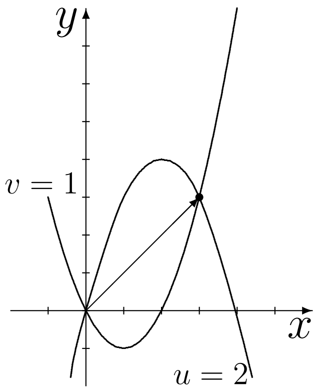
В частности, точке с криволинейными координатами $(u,v) = (2;-1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} =$

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



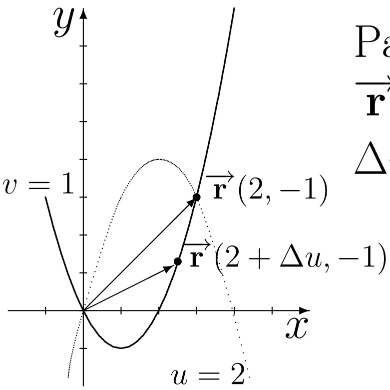
В частности, точке с криволинейными координатами $(u, v) = (2; -1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти $x>0, y>0$*

$$\Phi(u,v) = (u-v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



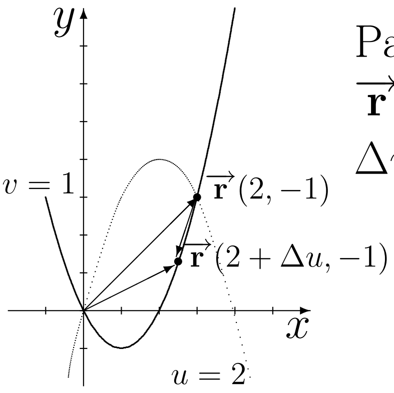
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2+\Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$),

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



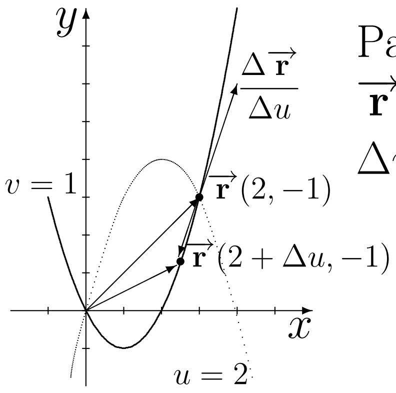
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$), $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1)$,

Пример 2. *Для* ***примера 1***, *с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$), $\quad \Delta\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1)$,

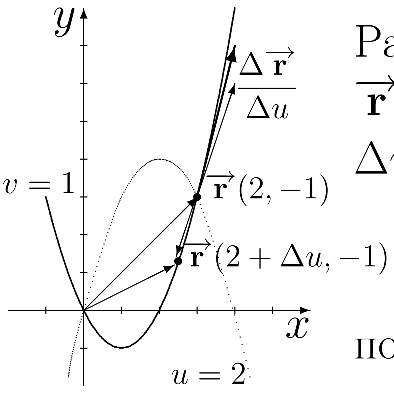
$$\frac{\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\Delta u}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u, v) = (u - v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



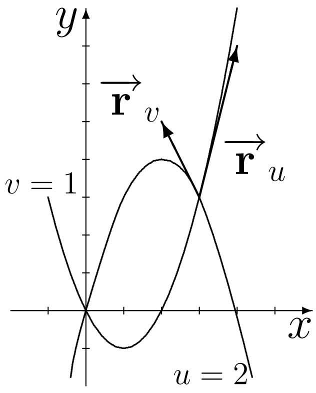
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1) = 3\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1)$ (на рис. представлен случай $\Delta u < 0$), $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(2 + \Delta u;\ -1) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(2;\ -1)$, $\dfrac{\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\Delta u}$. Перейдем к пределу $\Delta u \to 0$, получим вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial u}$.

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u,v) = (u-v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

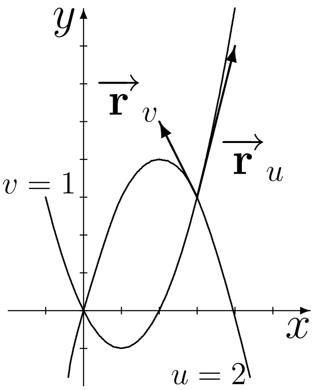
Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u,v) = (2;-1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$
$$\Phi(u,v) = (u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$
найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



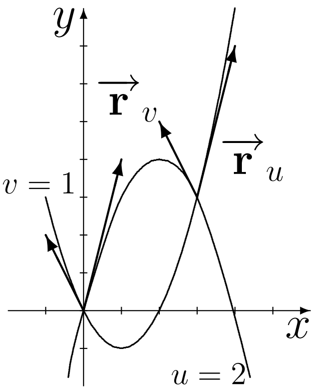
В частности, точке с криволинейными координатами $(u,v) = (2;-1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид
$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}}, -\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}.$$

Пример 2. *Для **примера 1**, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u,v) = (u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u,v) = (2;-1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

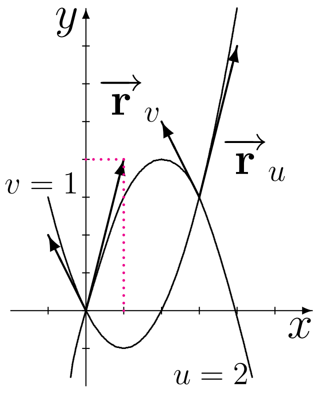
$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{j}}, -\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x>0, y>0$

$$\Phi(u,v)=(u-v)\overrightarrow{\mathbf{i}}+\left(u^2-v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u=\overrightarrow{\mathbf{i}}+2u\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v=-\overrightarrow{\mathbf{i}}-2v\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u,v)=(2;-1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}}=3\overrightarrow{\mathbf{i}}+3\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

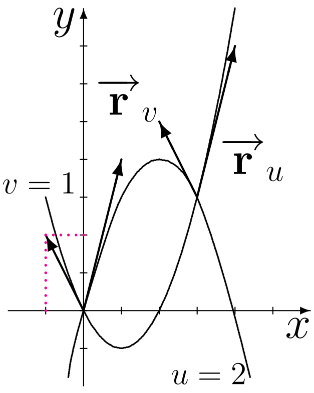
$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}+4\overrightarrow{\mathbf{j}},-\overrightarrow{\mathbf{i}}+2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}.$$

Пример 2. *Для* ***примера 1****, с системой координат первой координатной четверти* $x > 0, y > 0$

$$\Phi(u,v) = (u-v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

найдите локальный базис, в частности, в точке $\Phi(2;-1)$.

Решение. $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$



В частности, точке с криволинейными координатами $(u,v) = (2;-1)$ соответствует точка плоскости $\overrightarrow{\mathbf{r}} = 3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ и локальный базис этой криволинейной системы координат в этой точке имеет вид

$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, -\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}.$$

Вернуться к лекции или **рассмотреть еще один пример?**

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Решение. Мы приведем два способа вычисления этих векторов: чисто геометрический и аналитический. Найдем вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$ этими двумя способами.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Геометрический способ. Как известно,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{1}{\Delta\varphi} \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi + \Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi) \right).$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\big(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)\big)$.

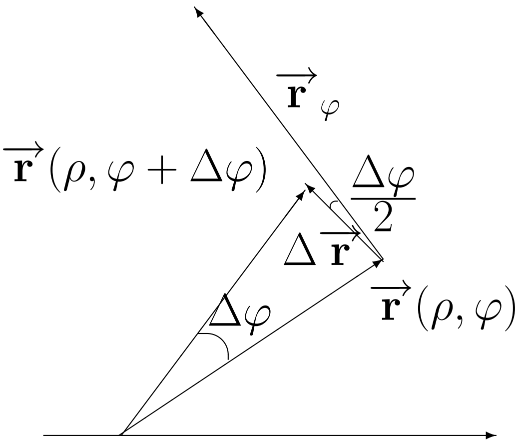


Рис. 1.

Из рис. 1 понятно, что при $\Delta\varphi \to 0$ вектор

$\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi+\Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi)$

в пределе «принимает ортогональное положение» по отношению к радиусу-вектору, то есть стремится к вектору, касательному к окружности $\rho = const$.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi + \Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi)\right)$.

Из рис. 1 понятно, что длина вектора $\Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi)$ с точностью до бесконечно малых порядка, большего $\Delta\varphi$, равна длине дуги координатной линии $\rho = const$, отвечающей изменению параметра $\Delta\varphi$, то есть дуги окружности радиуса $\rho = const$ с углом $\Delta\varphi$.

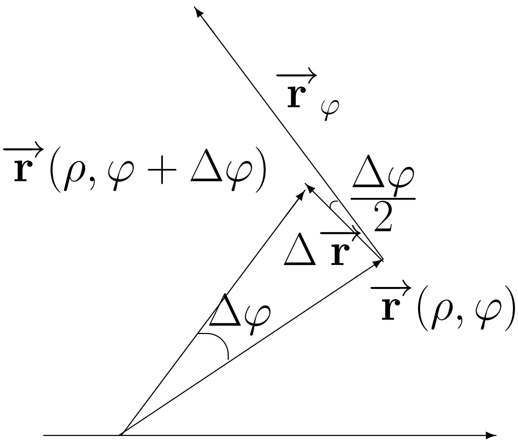


Рис. 1.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \frac{1}{\Delta\varphi}\big(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi + \Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi)\big)$.

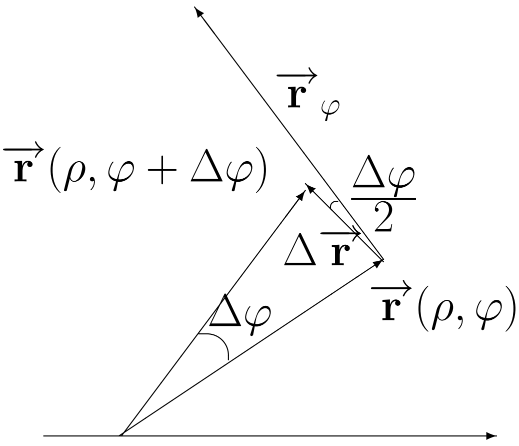


Рис. 1.

Как известно из школьного курса, длина дуги окружности радиуса ρ, соответствующая углу $\Delta\varphi$, равна $\rho \cdot \Delta\varphi$. Поэтому длина вектора $\frac{1}{\Delta\varphi}\big(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi + \Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi)\big)$ с точностью до бесконечно малых порядка, большего, чем $\Delta\varphi$, равна $\frac{1}{\Delta\varphi} \cdot \rho \cdot \Delta\varphi = \rho$.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi + \Delta\varphi) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi)\right)$.

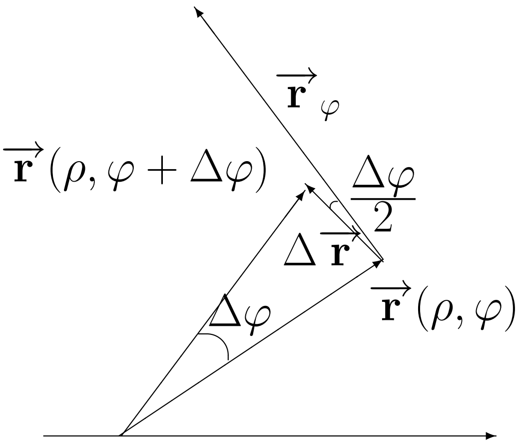


Рис. 1.

Следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$ в точке с радиусом-вектором $\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}$ должен быть вектором, ортогональным к радиусу-вектору, и имеющим длину ρ.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} =$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} =$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Этот вектор, в соответствии с результатами «геометрического метода» имеет длину ρ и перпендикулярен к радиусу-вектору точки, в которой вычисляется этот локальный базис.

Пример 3. *Найти локальный базис полярной системы координат.*

Аналитический способ. Имеем $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Этот вектор, в соответствии с результатами «геометрического метода» имеет длину ρ и перпендикулярен к радиусу-вектору точки, в которой вычисляется этот локальный базис.

Нетрудно вычислить (и геометрически, и аналитически), что вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}$ является ортом радиуса-вектора, то есть $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{r}}|}\overrightarrow{\mathbf{r}} = \dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}$.

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u,v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u,v)$, $y(u,v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v) = \Phi(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат $\Phi(u, v)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, если $y = ux^2$.*

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v. Общее решение $x(u, C)$ или $y(u, C)$ такого уравнения зависит от произвольной константы C.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v. Общее решение $x(u, C)$ или $y(u, C)$ такого уравнения зависит от произвольной константы C. Эта константа C определяется значением переменной v, то есть является функцией от v.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Решение. Как уже отмечалось выше, для задания функции $\Phi(u, v)$ достаточно найти *координатные функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, то есть такие функции, что

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \Phi(u, v) = x(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Для нахождения этих координатных функций мы получим дифференциальные уравнения, связывающие x и u или y и u при фиксированном v. Общее решение $x(u, C)$ или $y(u, C)$ такого уравнения зависит от произвольной константы C. Эта константа C определяется значением переменной v, то есть является функцией от v. Полагая $C = f(v)$ для какой-либо функции f, получаем, учитывая условие $y = ux^2$, искомые координатные функции $x(u, v)$, $y(u, v)$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. Мы ищем такую функцию
$\Phi(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. Мы ищем такую функцию
$\Phi(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию
$\Phi(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат $\Phi(u, v)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, если $y = ux^2$.*

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u \overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial \left(ux^2\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \left(ux^2\right)}{\partial v} = x_u x_v + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2uxx_v =$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат $\Phi(u,v)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, если $y = ux^2$.*

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} = x_u x_v + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2uxx_v =$$

$$= \left(x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2ux\right)x_v.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. Мы ищем такую функцию $\Phi(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, что

$$0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \left(x_u\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_u\overrightarrow{\mathbf{j}}, x_v\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_v\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = x_u x_v + y_u y_v =$$

$$= x_u x_v + \frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\left(ux^2\right)}{\partial v} = x_u x_v + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2uxx_v =$$

$$= \left(x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2ux\right)x_v.$$

Будем искать такую функцию Φ, чтобы $x_v \neq 0$. Тогда получаем

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2ux = 2ux^3 + x_u\left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ.

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2ux = 2ux^3 + x_u \left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Это требуемое дифференциальное уравнение. Теперь надо найти общее решение. Перепишем последнее дифференциальное уравнение в виде $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ.

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right) 2ux = 2ux^3 + x_u \left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Это требуемое дифференциальное уравнение. Теперь надо найти общее решение. Перепишем последнее дифференциальное уравнение в виде $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Теперь видно, что это —

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат $\Phi(u, v)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, если $y = ux^2$.*

Первый способ.

$$0 = x_u + \left(x^2 + 2uxx_u\right)2ux = 2ux^3 + x_u\left(1 + 4u^2x^2\right).$$

Это требуемое дифференциальное уравнение. Теперь надо найти общее решение. Перепишем последнее дифференциальное уравнение в виде $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Теперь видно, что это — уравнение Бернулли. Решаем его стандартным способом.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \dfrac{2g}{x} = 0$, откуда

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \dfrac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \dfrac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2f(x)x}$, откуда

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \dfrac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2f(x)x}$, откуда $2ff' = -x$, то есть $f^2 = \dfrac{C - x^2}{2}$. Итак,

$f(x) =$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \dfrac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2f(x)x}$, откуда $2ff' = -x$, то есть $f^2 = \dfrac{C - x^2}{2}$. Итак, $f(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. $u_x + \dfrac{2u}{x} = -\dfrac{1}{2ux^3}$. Положим $u = f(x)g(x)$, получим

$$f'g + f\left(g' + \frac{2g}{x}\right) = -\frac{1}{2fgx^3},$$

Функцию g выберем из условия $g' + \dfrac{2g}{x} = 0$, откуда $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x)\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2f(x)x}$, откуда $2ff' = -x$, то есть $f^2 = \dfrac{C-x^2}{2}$. Итак, $f(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$u(x) = f(x)g(x) = \pm\frac{\sqrt{C-x^2}}{\sqrt{2}x^2}.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат $\Phi(u, v)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, если $y = ux^2$.*

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть $x^2 + 2y^2 = C$.

Как мы уже отмечали выше, значение константы C определяется значением переменной v. Например, в качестве C можно взять v. Итак, получили систему

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C - x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть $x^2 + 2y^2 = C$.

Как мы уже отмечали выше, значение константы C определяется значением переменной v. Например, в качестве C можно взять v. Итак, получили систему

$$\begin{cases} y = ux^2, \\ x^2 + 2y^2 = v, \end{cases}$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u,v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Первый способ. $u(x) = f(x)g(x) = \pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{\sqrt{2}x^2}$.

Учитывая данное в условии тождество $y = ux^2$, получаем $y = \pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{\sqrt{2}}$, то есть $x^2 + 2y^2 = C$.

Как мы уже отмечали выше, значение константы C определяется значением переменной v. Например, в качестве C можно взять v. Итак, получили систему

$$\begin{cases} y = ux^2, \\ x^2 + 2y^2 = v, \end{cases}$$

задающую координатные линии этой системы координат. Можно выразить из нее $x(u,v)$ и $y(u,v)$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Первый способ. $\begin{cases} y = ux^2, \\ x^2 + 2y^2 = v, \end{cases}$

Приведенные на рис.2 графики некоторых координатных линий подтверждают «разумность» полученного ответа:

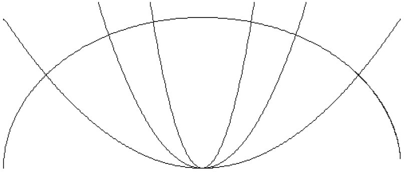


Рис. 2.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Второй способ. Возьмем произвольную точку с криволинейными координатами (u_0, v_0). Тогда касательная к координатной линии $u = u_0$, то есть, по условию, к кривой $y = u_0x^2$, будет нормалью к координатной линии $v = v_0$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ. Возьмем произвольную точку с криволинейными координатами (u_0, v_0). Тогда касательная к координатной линии $u = u_0$, то есть, по условию, к кривой $y = u_0x^2$, будет нормалью к координатной линии $v = v_0$. Таким образом, из соотношения между угловыми коэффициентами ортогональных линий, получаем, что угол наклона касательной к координатной кривой $v = v_0$ равен $-\dfrac{1}{2u_0x}$.

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Второй способ. Итак, если координатная линия $v = v_0$ в декартовой системе координат имеет уравнение $y = \psi(x, v_0)$, то угловой коэффициент касательной к ней, с одной стороны, равен $\psi'(x, v_0)$, а с другой стороны $-\dfrac{1}{2u_0x}$. Следовательно, получили уравнение

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0x}. \tag{1}$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$, *если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Это прекрасное уравнение, но у него есть один недостаток — «лишняя буква» u_0. Дело в том, что именно u определяет положение точки на координатной линии $v = v_0$, то есть x, y зависят от u. Но все не так уж плохо, так как у нас в запасе «неизрасходованное» равенство $y = ux^2$. С его помощью можно «выполоть» u из уравнения (1).

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Для точки с криволинейными координатами (u_0, v_0) получаем $u_0 = \dfrac{y}{x^2}$. Подставим это выражение в (1):

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Для точки с криволинейными координатами (u_0, v_0) получаем $u_0 = \dfrac{y}{x^2}$. Подставим это выражение в (1):

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

Для точки с криволинейными координатами (u_0, v_0) получаем $u_0 = \dfrac{y}{x^2}$. Подставим это выражение в (1):

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$.

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, из него находим

$$2yy' = -x,$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0 x}. \tag{1}$$

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, из него находим

$$2yy' = -x, \quad 2y^2 + x^2 = v_0.$$

Пример 4. *Найдите какую-либо ортогональную криволинейную систему координат* $\Phi(u, v)$ *плоскости* $\mathbb{R}^2$*, если* $y = ux^2$*.*

Второй способ.

$$y' = \psi'(x, v_0) = -\frac{1}{2u_0x}. \tag{1}$$

$$y'(x, v_0) = -\frac{x^2}{2yx} \quad \Rightarrow \quad y'(x, v_0) = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, из него находим

$$2yy' = -x, \quad 2y^2 + x^2 = v_0.$$

Полученный результат совпадает с результатом первого способа.

Вернуться к лекции?

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Имеем:

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}=r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Имеем:

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

откуда

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = q^1(q'^1, q'^2, q'^3) = q^1(r, \varphi, \theta) = r\sin\theta \\ \varphi = q^2(q'^1, q'^2, q'^3) = q^2(r, \varphi, \theta) = \varphi \\ z = q^3(q'^3, q'^2, q'^3) = q^3(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta \end{array}\right. \tag{2}$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Имеем:

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}=r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

откуда

$$\begin{cases} \rho = q^1(q'^1, q'^2, q'^3) = q^1(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta \\ \varphi = q^2(q'^1, q'^2, q'^3) = q^2(r,\varphi,\theta) = \varphi \\ z = q^3(q'^3, q'^2, q'^3) = q^3(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

Например, найдем матрицу перехода от цилиндрической системы координат к сферической.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\left(\qquad\qquad\qquad\right).$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta,$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = \frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi}=0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=1,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & \\ 0 & & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}=1,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \cos \theta\right)}{\partial r} = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(r \cos \theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos \theta & & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \sin\theta\right)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \cos\theta\right)}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r \sin\theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r \cos\theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\theta}=r\cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\theta}=r\cos\theta,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & r\cos\theta\\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\theta}=r\cos\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & r\cos\theta\\ 0 & 1 & \\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial \left(r \cos \theta\right)}{\partial r} = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(r \cos \theta\right)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \left(r \sin \theta\right)}{\partial \theta} = r \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0,$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right) = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & r \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\theta}=r\cos\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\theta}=-r\sin\theta.$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & r\cos\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \cos\theta & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Из **формулы (2)** и **определения матрицы перехода из одной системы координат в другую** следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\theta}=r\cos\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial\left(r\cos\theta\right)}{\partial\theta}=-r\sin\theta.$$

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\right)=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & r\cos\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода. На первый взгляд достаточно

просто вычислить обратную матрицу:

Пример 5. *Найти матрицу перехода от цилиндрической к сферической системе координат.*

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Найдем матрицу обратного перехода. На первый взгляд достаточно просто вычислить обратную матрицу: $(b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\cos\theta}{r} & 0 & -\dfrac{\sin\theta}{r} \end{pmatrix}$.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от цилиндрической к сферической системе координат.*

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Найдем матрицу обратного перехода. На первый взгляд достаточно просто вычислить обратную матрицу. Однако этот «чисто алгебраический» подход в данном случае нуждается в существенном уточнении: для осуществления перехода к цилиндрической системе координат необходимо еще *выразить коэффициенты полученной матрицы через цилидрические координаты.*

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r =$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,
$\sin\theta =$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,
$\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$,

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,

$\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \cos\theta =$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Таким образом, **матрица перехода от цилиндрической к сферической системе координат** имеет вид

$$\left(a^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Найдем матрицу обратного перехода.

Используя **формулы (2)**, получаем $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,
$\sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\quad \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$.

$$(a^{i}_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$. Поэтому матрицу перехода от сферической к цилиндрической системе координат следует записать так:

$$
(a^i_{\bullet j}) = \left(\frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{3}
$$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\quad \sin\theta = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\quad \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$. Поэтому матрицу перехода от сферической к цилиндрической системе координат следует записать так:

$$
(b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\cos\theta}{r} & 0 & -\dfrac{\sin\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2 + z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2 + z^2} \end{pmatrix}. \tag{4}
$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение.

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial r} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от **цилиндрической** к **сферической системе координат**.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial r} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_r.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\vec{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\vec{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\vec{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\vec{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\vec{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{j}}\right) + 1\left(-\rho\sin\varphi\,\vec{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\vec{\mathbf{j}}\right) + 0\,\vec{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат.***

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 1\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= 0\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 1\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы (a^i_j).

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= r\cos\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат***.

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a_j^i\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= r\cos\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= r\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\theta} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\theta.$$

Пример 5. *Найти матрицу перехода от* ***цилиндрической*** *к* ***сферической системе координат****.*

Решение. Проверим правильность вычисления матрицы $\left(a^i_j\right)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & -\dfrac{\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

$$= r\cos\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + 0\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + -r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} =$$

$$= r\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial\theta} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\theta.$$

Значит, матрица $\left(a^i_j\right)$ найдена правильно. **Вернуться к лекции?**

Пример 6. *Найти* ***символы Кристоффеля*** *в примере 1.*

В последующем примере 8 (см. стр. 192) мы **символы Кристоффеля** будем находить с помощью **операций матричной алгебры**, здесь же мы это сделаем с помощью индивидуального подбора, так как значения **символов Кристоффеля** в рассматриваемой криволинейной системе координат подбираются устно. Имеем:
$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 - v^2, \end{cases}$ откуда $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = (u-v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2u\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = -\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2v\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{1}{u-v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \frac{1}{u-v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \Gamma_{11}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = \Gamma_{12}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \Gamma_{21}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = -\frac{1}{u-v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \frac{1}{u-v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \Gamma_{22}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{22}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

Таким образом, массив **символов Кристоффеля** в системе координат примера 1 имеет вид:

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u-v} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{u-v} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u-v} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{u-v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Тензорное поле.

В каком виде запишем ответ? Формулой.

Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами?

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами? «Канонически» с линейным оператором связывают тензор, ставящий каждому **базису Б** в соответствие **матрицу этого оператора** в базисе **Б**.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Введем аргумент искомой функции: пусть радиус-вектор точки имеет цилиндрические координаты (ρ, φ, z).

Составим уравнение. Какую величину вычислим разными способами? «Канонически» с линейным оператором связывают тензор, ставящий каждому **базису Б** в соответствие **матрицу этого оператора** в базисе **Б**. Как известно из курса линейной алгебры, для того, чтобы найти матрицу линейного оператора $\hat{L}$, надо найти в базисе **Б** координаты образов векторов базиса **Б** относительно действия оператора $\hat{L}$.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид:

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**,

$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) =$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right\}$ получаем

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ получаем

$\hat{L}(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho) =$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}})}\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ получаем

$$\hat{L}(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho) = \frac{(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho)}{|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z|^2}(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. Очевидно, что радиус-вектор с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) имеет в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ следующий вид: $\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z$.

Согласно **примеру задания геометрических операторов**, $\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Поэтому для векторов локального базиса $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi, \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\}$ получаем

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах* ρ, φ, z *координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right)}{\left|\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) =$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)=\frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\frac{\rho}{\rho^{2}+z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)=\frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\frac{z}{\rho^{2}+z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right).$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение.

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)=\frac{\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)}{\left|\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\frac{\rho}{\rho^{2}+z^{2}}\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)=\frac{\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)}{\left|\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\frac{\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)}{\left|\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)=\frac{z}{\rho^{2}+z^{2}}\left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}+z \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right).$$

Следовательно, **матрица этого оператора** в локальном базисе $\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\}$, имеет вид

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{\rho}{\rho^{2} + z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{z}{\rho^{2} + z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right).$$

$$\left(L^{i}_{\bullet j}(\rho, \varphi, z)\right) = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right).$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{\rho}{\rho^{2}+z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{z}{\rho^{2}+z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right).$$

$$\left(L^{i}_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^{2}}{\rho^{2}+z^{2}} & & \\ 0 & & \\ \dfrac{z\rho}{\rho^{2}+z^{2}} & & \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\rho}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right|^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right) = \frac{z}{\rho^2+z^2}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_z\right).$$

$$\left(L^i_{\bullet j}(\rho,\varphi,z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^2}{\rho^2+z^2} & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} & 0 & \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{\rho}{\rho^{2} + z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right),$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

$$\hat{L}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right)}{\left|\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right|^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right) = \frac{z}{\rho^{2} + z^{2}}\left(\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right).$$

$$\left(L^{i}_{\bullet j}(\rho, \varphi, z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^{2}}{\rho^{2} + z^{2}} & 0 & \dfrac{z\rho}{\rho^{2} + z^{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{z\rho}{\rho^{2} + z^{2}} & 0 & \dfrac{z^{2}}{\rho^{2} + z^{2}} \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Задать в цилиндрических координатах ρ, φ, z координатные функции тензорного поля линейных операторов, ставящего каждой точке в соответствие оператор ортогонального проецирования на ось радиуса-вектора этой точки.*

Решение. $\left(L^{i}_{\bullet j}(\rho, \varphi, z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^2}{\rho^2+z^2} & 0 & \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{z\rho}{\rho^2+z^2} & 0 & \dfrac{z^2}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}.$

Таким образом, соответствующий тензор (точнее, значение тензорного поля в точке $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z)$) равен

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = L^{i}_{j} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{j} = \frac{\rho^2}{\rho^2+z^2} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + \frac{z\rho}{\rho^2+z^2} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{z} +$$

$$+ \frac{z\rho}{\rho^2+z^2} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + \frac{z^2}{\rho^2+z^2} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{z}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 8. *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *— тензорное поле ранга 2, заданное формулой*

$$\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = T^{i}_{j}\overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u =$$

$$= 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v + uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u$$

в криволинейной системе координат $\Phi(u, v)$, *координатные линии которой имеют вид*

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Найти ковариантную производную тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *в системе координат* $\Phi(u, v)$. *Найти* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *в прямоугольной декартовой системе координат. Убедиться в справедливости* ***теоремы «о тензоре ковариантной производной»*** *сравнением найденных ковариантных производных в точке* $\Phi(1;\ 2)$.

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \dfrac{e^x}{v} = 0$, то есть

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \dfrac{e^x}{v} = 0$, то есть $x =$

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \dfrac{e^x}{v} = 0$, то есть $x = \ln uv$. Поэтому $y =$

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \dfrac{e^x}{v} = 0$, то есть $x = \ln uv$. Поэтому $y = \dfrac{2}{uv} + u$. Итак получили, что

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u,v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

Прежде всего найдем координатные функции. Если из первого уравнения вычесть второе уравнение, то получим $u - \dfrac{e^x}{v} = 0$, то есть $x = \ln uv$. Поэтому $y = \dfrac{2}{uv} + u$. Итак получили, что

$$\Phi(u,v) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v) = \ln uv \, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{2}{uv} + u \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u, v) \;\middle|\; u > 0, v > 0 \right\}.$$

$$\Phi(u, v) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = \ln uv \, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{2}{uv} + u \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Следовательно,

Решение.

$$y = 2e^{-x} + u, \quad y = 2e^{-x} + \frac{e^x}{v}, \quad D = \left\{ (u,v) \,\middle|\, u > 0, v > 0 \right\}.$$

$$\Phi(u,v) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v) = \ln uv\, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{2}{uv} + u \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v} \right) \overrightarrow{\mathbf{j}}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^i_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_i = \Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^i_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_i = \Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

$$= \Gamma^1_{11}\left(\frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \Gamma^2_{11}\left(\frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right).$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Найдем символы Кристоффеля.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^i_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_i = \Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v =$$

$$= \Gamma^1_{11}\left(\frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \Gamma^2_{11}\left(\frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right).$$

Таким образом, сравнивая коэффициенты перед векторами $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ 1 - \frac{2}{u^2 v} & -\frac{2}{uv^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} \\ \frac{4}{u^3 v} \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{11}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{11}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{12}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{12}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{21}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{21}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma_{22}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma_{22}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Вычислим остальные производные:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{21}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{21}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{22}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{22}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

При этом получим еще три матричных уравнения.

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{u^3 v}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{uv} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vu} = \frac{2}{u^2 v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{21}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{21}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{vv} = -\frac{1}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{uv^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{22}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u + \Gamma^2_{22}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

У всех четырех полученных уравнений матрица коэффициентов одна и та же, что позволяет свести их к одному матричному уравнению (умножение матриц «на макроуровне»):

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ 1 - \frac{2}{u^2v} & -\frac{2}{uv^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{4}{u^3v} & \frac{2}{u^2v^2} & \frac{2}{u^2v^2} & \frac{4}{uv^3} \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{u} & \dfrac{1}{v} \\ 1 - \dfrac{2}{u^2 v} & -\dfrac{2}{uv^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{u^2} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{v^2} \\ \dfrac{4}{u^3 v} & \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{4}{uv^3} \end{pmatrix}$$

Решая это уравнение каким-либо стандартным методом: с помощью обратной матрицы или методом Гаусса, получаем массив символов Кристоффеля системы координат $\Phi(u, v)$:

Решение.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\left(\Gamma^{k}_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3 v} & \dfrac{2}{u^2 v^2} \\ \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3 v} \\ -\dfrac{2}{u^3 v} & -\dfrac{2}{u^2 v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} =$

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^{i}_{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?}$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^{i}_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?}$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^{i}_{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{?}_{?}$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^i_{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^k \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j$.

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^{i}_{\bullet j}\, \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}$.

Заметим, что массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$, заданного выражением

Решение. Заметим, что до этого момента тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ еще не использовалось. Мы работали только с криволинейной системой координат.

Найденные символы Кристоффеля характеризуют только саму систему координат $\Phi(u, v)$, и их можно использовать для вычислений для *любого* тензорного поля.

Напомним, что, в соответствии с обозначениями **теоремы о ковариантной производной**, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_k T^{i}_{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}$.

Заметим, что массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$, заданного выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}}(u, v) = uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} =$

$$= 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} + uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + 0\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v},$$

имеет вид $\left(T^{i}_{\bullet j}\right) =$

$$(\Gamma^{k}_{\bullet ij}) = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \right), \quad (T^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^{i}_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3v} & \frac{2}{u^2v^2} \\ \frac{2}{u^2v^2} & \frac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3v} \\ -\frac{2}{u^3v} & -\frac{2}{u^2v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\bigtriangledown_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\bigtriangledown_1 T^1_1 =$

$$(\Gamma^{k}_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3 v} & \dfrac{2}{u^2 v^2} \\ \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3 v} \\ -\dfrac{2}{u^3 v} & -\dfrac{2}{u^2 v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array} \right), \quad (T^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^{i}_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$(\Gamma^{k}_{\bullet ij}) = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \right), \quad (T^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^{i}_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} +$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} +$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right), \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} -$$

$$
(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right), \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}
$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s}T^s_1 - \Gamma^s_{11}T^1_s =$

$$
= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11}T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12}T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11}T^1_{\bullet 1} -
$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3v} & \frac{2}{u^2v^2} \\ \frac{2}{u^2v^2} & \frac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3v} \\ -\frac{2}{u^3v} & -\frac{2}{u^2v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \ (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \frac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s}T^s_1 - \Gamma^s_{11}T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11}T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12}T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11}T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11}T^1_{\bullet 2} =$$

$$(\Gamma^{k}_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array} \right), \quad (T^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^{i}_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T_1^1 = \dfrac{\partial T_1^1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T_1^s - \Gamma^s_{11} T_s^1 =$

$$= \frac{\partial T^{1}_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^{1}_{\bullet 11} T^{1}_{\bullet 1} + \Gamma^{1}_{\bullet 12} T^{2}_{\bullet 1} - \Gamma^{1}_{\bullet 11} T^{1}_{\bullet 1} - \Gamma^{2}_{\bullet 11} T^{1}_{\bullet 2} =$$

$$= 0 +$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3v} \cdot 0 +$$

$$(\Gamma^{k}_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right), \quad (T^{i}_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^{i}_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^{1}_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^{1}_{\bullet 11} T^{1}_{\bullet 1} + \Gamma^{1}_{\bullet 12} T^{2}_{\bullet 1} - \Gamma^{1}_{\bullet 11} T^{1}_{\bullet 1} - \Gamma^{2}_{\bullet 11} T^{1}_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2v^2} \cdot uv -$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right), \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2v^2} \cdot uv - \frac{2}{u^3v} \cdot 0 -$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3v} & \dfrac{2}{u^2v^2} \\ \dfrac{2}{u^2v^2} & \dfrac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3v} \\ -\dfrac{2}{u^3v} & -\dfrac{2}{u^2v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2v^2} \cdot uv - \frac{2}{u^3v} \cdot 0 - \left(-\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2}\right) \cdot 0 =$$

$$(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3 v} & \dfrac{2}{u^2 v^2} \\ \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3 v} \\ -\dfrac{2}{u^3 v} & -\dfrac{2}{u^2 v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right), \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s =$

$$= \frac{\partial T^1_{\bullet 1}}{\partial u} + \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} + \Gamma^1_{\bullet 12} T^2_{\bullet 1} - \Gamma^1_{\bullet 11} T^1_{\bullet 1} - \Gamma^2_{\bullet 11} T^1_{\bullet 2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 + \frac{2}{u^2 v^2} \cdot uv - \frac{2}{u^3 v} \cdot 0 - \left(-\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2}\right) \cdot 0 = \frac{2}{uv}.$$

$$
(\Gamma^k_{\bullet ij}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3 v} & \dfrac{2}{u^2 v^2} \\ \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{2}{u v^3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3 v} \\ -\dfrac{2}{u^3 v} & -\dfrac{2}{u^2 v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array} \right), \quad (T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix}
$$

Вычислим $\nabla_k T^i_{\bullet j}$ с помощью **теоремы о ковариантной производной**. Получим $\nabla_1 T^1_1 = \dfrac{\partial T^1_1}{\partial u} + \Gamma^1_{1s} T^s_1 - \Gamma^s_{11} T^1_s = \dfrac{2}{uv}$.

Нам надо выполнить еще 7 подобных вычислений. Однако эту работу можно несколько облегчить, если применить операции матричной алгебры. Правда, для этого придется «реорганизовать» массив символов Кристоффеля, так как сейчас порядок индексов в этом массиве $(\,{}^{*}_{\bullet **})$ отличается от необходимого нам $(\,{}^{\bullet *}_{* \bullet *})$. Для этого выполним транспонирование массива (напомним, что этот массив тензором не является) по 1-2 индексам, (i-тая строка j-той матрицы становится j-той строкой i-той матрицы):

$$\left(\Gamma^{\bullet j}_{i\,\bullet\,k}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^3 v} & \dfrac{2}{u^2 v^2} \\ -\dfrac{2}{u^4} - \dfrac{v}{u^2} & -\dfrac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u^2 v^2} & \dfrac{2}{u v^3} \\ -\dfrac{2}{u^3 v} & -\dfrac{2}{u^2 v^2} - \dfrac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Получаем:

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \left(\frac{\partial T^{j}_{\bullet k}}{\partial q^i} + \Gamma^{\bullet j}_{i\,\bullet\,s} T^{s}_{\bullet k} - \Gamma^{\bullet s}_{i\,\bullet\,k} T^{j}_{\bullet s}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{uv^3} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} -$$

$$-\left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{u^3 v} & \frac{2}{u^2 v^2} \\ -\frac{2}{u^4} - \frac{v}{u^2} & -\frac{2}{u^3 v} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2 v^2} & \frac{2}{u v^3} \\ -\frac{2}{u^3 v} & -\frac{2}{u^2 v^2} - \frac{1}{v} \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$
= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{2}{u^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ u - \dfrac{2}{uv} - u & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2}{u^2} & \dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2}{uv} & \dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix},
$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u, v) =$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u +$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u, v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} +$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \qquad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} +$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} +$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} +$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u, v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right) \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \frac{2}{uv} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} +$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} +$$

$$+ \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} -$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} -$$

$$\left(\triangledown_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ & \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\triangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\triangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \triangledown_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+ \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u -$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{v}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} +$$

$$+\frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} - \frac{4}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} -$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{k} =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} +$$

$$+\frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} - \frac{4}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} - \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{u} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{v} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{v}.$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{uv} & 0 \\ v - \frac{4}{u^2} & -\frac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{v^2} & 0 \\ -\frac{4}{uv} & -\frac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Мы нашли массив координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Значит, тензорное поле можно задать следующим выражением:

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}(u,v) = \nabla_i T^{j}_{\bullet k} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

$$= \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \left(v - \frac{4}{u^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u + \frac{2}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v +$$

$$+\frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \frac{4}{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}^v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u - \frac{2}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}^u \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^v.$$

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{uv} & 0 \\ v - \dfrac{4}{u^2} & -\dfrac{2}{uv} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{v^2} & 0 \\ \\ -\dfrac{4}{uv} & -\dfrac{2}{v^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

В точке $\Phi(1;\ 2)$ получаем, соответственно, массив

$$\left(\nabla_i T^{j}_{\bullet k}\right)\Big|_{(u;v)=(1;2)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Вычислим ковариантную производную в прямоугольной декартовой системе координат. Сначала переведем тензор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в эту систему координат. Надо сначала найти явные выражения для координатных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Это нетрудно сделать:

$$u(x,y) = y - 2e^{-x} = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^x}{y - 2e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2}.$$

В массиве координат тензора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ проведем замену $u = \dfrac{ye^x - 2}{e^x}$, $v = \dfrac{e^{2x}}{ye^x - 2}$, получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектора взаимного базиса $\overrightarrow{\mathbf{r}}^u$ и $\overrightarrow{\mathbf{r}}^v$. Это можно сделать как с помощью формулы $\overrightarrow{\mathbf{r}}^i = g^{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_j$, так и непосредственно, по определению, из системы равенств $(\overrightarrow{\mathbf{r}}^i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j) = 0$. Имеем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2 v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{e^x}{ye^x - 2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{ye^x - 4}{ye^x - 2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{ye^x - 2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x - 2}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

Заметим, что тензор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ имеет вид $uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u$, то есть нам нужен только вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}^u$. Его проще найти непосредственно, чем вычислять дважды ковариантный метрический тензор, и обратный к нему. Если $\overrightarrow{\mathbf{r}}^u = \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, то имеем:

$$\begin{cases} 1 = (\overrightarrow{\mathbf{r}}^u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_u) = \dfrac{e^x}{ye^x - 2}\alpha + \dfrac{ye^x - 4}{ye^x - 2}\beta \\ 0 = (\overrightarrow{\mathbf{r}}^u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v) = \dfrac{ye^x - 2}{e^{2x}}\alpha - 2\dfrac{ye^x - 2}{e^{3x}}\beta \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $\alpha = 2\dfrac{\beta}{e^x}$, подставив в первое уравнение имеем $\beta = 1$, $\alpha = \dfrac{2}{e^x}$.

Поэтому

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = uv\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^u = e^x \left(\frac{ye^x - 2}{e^{2x}} \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x - 2}{e^{3x}} \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) \otimes \left(\left(\frac{2}{e^x} \right) \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) =$$

$$= 2\frac{ye^x - 2}{e^{2x}} \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{ye^x - 2}{e^x} \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - 4\frac{ye^x - 2}{e^{3x}} \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x - 2}{e^{2x}} \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

Значит, так как символы Кристоффеля системы координат x, y — нулевые, то

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = -2\frac{ye^x - 4}{e^{2x}} \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2}{e^x} \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+8\frac{ye^x - 3}{e^{3x}} \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\frac{ye^x - 4}{e^{2x}} \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+\frac{2}{e^x} \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{4}{e^{2x}} \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{e^x} \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = -2\frac{ye^x-4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+8\frac{ye^x-3}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\frac{ye^x-4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} +$$

$$+\frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = -2\frac{ye^x-4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}+\frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}+$$

$$+8\frac{ye^x-3}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}+2\frac{ye^x-4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}+$$

$$+\frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}+\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}-\frac{4}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}-\frac{2}{e^x}\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}+\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}+\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}+$$

$$+\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} +$$
$$+ \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

Значит, массив координат $\left(P_{i\bullet k}^{\bullet j}\right)$ тензора $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ равен

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем тензор-вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} +$$
$$+ \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

Значит, массив координат $\left(P_{i\bullet k}^{\bullet j}\right)$ тензора $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ равен

$$\left(P_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, так как

$$u(x, y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x, y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j}) =$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y) = \frac{ye^x - 2}{e^x}, \quad v(x,y) = \frac{e^{2x}}{ye^x - 2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}' = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y)=\frac{ye^x-2}{e^x},\quad v(x,y)=\frac{e^{2x}}{ye^x-2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б}=\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}'=\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^x} & 1\\ e^{2x}\dfrac{ye^x-4}{(ye^x-2)^2} & -\dfrac{e^{3x}}{(ye^x-2)^2}\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, так как

$$u(x,y)=\frac{ye^x-2}{e^x},\quad v(x,y)=\frac{e^{2x}}{ye^x-2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б}=\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}'=\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j})=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{e^x} & 1\\ e^{2x}\frac{ye^x-4}{(ye^x-2)^2} & -\frac{e^{3x}}{(ye^x-2)^2}\end{pmatrix}.$$

Матрица обратного перехода равна:

С другой стороны, так как

$$u(x,y)=\frac{ye^x-2}{e^x},\quad v(x,y)=\frac{e^{2x}}{ye^x-2},$$

то матрица перехода от локального базиса $\mathbf{Б}=\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_u,\overrightarrow{\mathbf{r}}_v\}$ к локальному базису $\mathbf{Б}'=\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ имеет вид:

$$(a^i_{\bullet j})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^x} & 1\\ e^{2x}\dfrac{ye^x-4}{(ye^x-2)^2} & -\dfrac{e^{3x}}{(ye^x-2)^2}\end{pmatrix}.$$

Матрица обратного перехода равна:

$$(b^i_{\bullet j})=\begin{pmatrix}\dfrac{e^x}{ye^x-2} & \dfrac{ye^x-2}{e^{2x}}\\ \\ \dfrac{ye^x-4}{ye^x-2} & -2\dfrac{ye^x-2}{e^{3x}}\end{pmatrix}.$$

$$(a^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^x} & 1 \\ e^{2x}\dfrac{ye^x-4}{(ye^x-2)^2} & -\dfrac{e^{3x}}{(ye^x-2)^2} \end{pmatrix}, \quad (b^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^x}{ye^x-2} & \dfrac{ye^x-2}{e^{2x}} \\ \dfrac{ye^x-4}{ye^x-2} & -2\dfrac{ye^x-2}{e^{3x}} \end{pmatrix}.$$

Кстати, правильность вычисления матрицы $(b^i_{\bullet j})$ легко проверить, поскольку мы уже нашли координатные функции векторов $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_v$:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = \frac{1}{u}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(1 - \frac{2}{u^2v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{e^x}{ye^x-2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{ye^x-4}{ye^x-2}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_v = \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{uv^2}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{ye^x-2}{e^{2x}}\overrightarrow{\mathbf{i}} - 2\frac{ye^x-2}{e^{3x}}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

В точке $\Phi(1;\ 2) = \ln 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ получаем

$$\left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Если $P_{m \bullet s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u, v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

Если $P_{m \bullet s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u, v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

$$\left(a_i^m \cdot b_n^j \cdot a_k^s \cdot P_{m \bullet s}^{\bullet n}\right) =$$

Если $P_{m\bullet\ \ s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u, v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

$$\left(a_{i}^{m} \cdot b_{n}^{j} \cdot a_{k}^{s} \cdot P_{m\bullet\ \ s}^{\bullet n}\right) = \left(a_{\bullet i}^{m}\right)^{t} \left(\begin{array}{c} \left(b_{\bullet n}^{j}\right) \left(P_{1\bullet s}^{n}\right) \left(a_{\bullet k}^{s}\right) \\ \left(b_{\bullet n}^{j}\right) \left(P_{2\bullet s}^{n}\right) \left(a_{\bullet k}^{s}\right) \end{array} \right) =$$

Если $P_{m\bullet s}^{\bullet n}$ — массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе координат $\Phi(u, v)$, то в прямоугольной декартовой системе координат массив координат тензора $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ можно вычислить, используя **тензорный закон**:

$$\left(a_i^m \cdot b_n^j \cdot a_k^s \cdot P_{m\bullet s}^{\bullet n}\right) = \left(a_{\bullet i}^m\right)^t \begin{pmatrix} \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{1\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \\ \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{2\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\left(a^m_i \cdot b^j_n \cdot a^s_k \cdot P^{\bullet n}_{m\bullet s}\right) = (a^m_{\bullet i})^t \begin{pmatrix} \left(b^j_{\bullet n}\right) (P^n_{1\bullet s}) \left(a^s_{\bullet k}\right) \\ \left(b^j_{\bullet n}\right) (P^n_{2\bullet s}) \left(a^s_{\bullet k}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\left(a_i^m \cdot b_n^j \cdot a_k^s \cdot P_{m\,\bullet\,s}^{\bullet n}\right) = \left(a_{\bullet i}^m\right)^t \left(\begin{array}{c} \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{1\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \\ \left(b_{\bullet n}^j\right)\left(P_{2\bullet s}^n\right)\left(a_{\bullet k}^s\right) \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Полученный этим способом массив совпадает с **полученным выше «по-честному»**.

$$\left(a^m_i \cdot b^j_n \cdot a^s_k \cdot P^{\bullet n}_{m \bullet s}\right) = \left(a^m_{\bullet i}\right)^t \begin{pmatrix} \left(b^j_{\bullet n}\right) \left(P^n_{1\bullet s}\right) \left(a^s_{\bullet k}\right) \\ \left(b^j_{\bullet n}\right) \left(P^n_{2\bullet s}\right) \left(a^s_{\bullet k}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Полученный этим способом массив совпадает с **полученным выше «по-честному»**. Это подтверждает **теорему о тензоре ковариантной производной**.

$$\left(a^{m}_{i} \cdot b^{j}_{n} \cdot a^{s}_{k} \cdot P^{\bullet n}_{m\bullet s}\right) = \left(a^{m}_{\bullet i}\right)^{t} \begin{pmatrix} \left(b^{j}_{\bullet n}\right)\left(P^{n}_{1\bullet s}\right)\left(a^{s}_{\bullet k}\right) \\ \left(b^{j}_{\bullet n}\right)\left(P^{n}_{2\bullet s}\right)\left(a^{s}_{\bullet k}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Полученный этим способом массив совпадает с **полученным выше «по-честному»**. Это подтверждает **теорему о тензоре ковариантной производной**. **Вернуться к лекции?**

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.307.) Найдите в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\varphi(u, v, w)$, заданной формулой $\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & 0 & w \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \\ w & w \end{pmatrix}$, где $u, v, w \geq 0$. Найдите вектор с криволинейными координатами $(1, 1, 2)$, то есть вектор $\Phi(1, 1, 2)$. Найдите базис, соответствующий вектору $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.310.) Найдите матрицу перехода из полярной системы координат в систему координат $\Phi(u, v)$, где координатные линии системы координат $\Phi(u, v)$ имеют вид $x + y = u$, $y = vx$.

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.312.) Найдите в базисе $\mathbf{Б}' = \left\{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\Phi(u, v, w)$, заданной формулой $\left(\Phi(u, v, w)\right)(x) = (u + vx)(v - wx)$.

Задача IV.4. (Ответ приведен на стр.314.) Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ux^k$.

Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.318.) Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ue^x$.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.320.) Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = e^{ux}$.

Задача V.7. (Ответ приведен на стр.322.) Пусть в полярной системе координат $\Phi(\rho,\varphi)$ векторное поле задано формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$. Задайте это поле геометрически, найдите разложение этого поля по локальному базису системы координат $\Psi(u,v) = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $D = \{(u,v) \mid u > 0,\ v > 0\}$.

Задача V.8. (Ответ приведен на стр.326.) Вычислите в цилиндрических координатах компоненты поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\big(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\big)\,(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \big(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}}\big)\,.$$

Задача V.9. (Ответ приведен на стр.329.) Вычислите в сферических координатах компоненты поля линейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие функцию

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}).$$

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.331.) Вычислите в полярных координатах компоненты тензорного поля, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}|\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\,.$$

Задача V.11. (Ответ приведен на стр.334.) Найдите координаты тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left(uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right) \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ в системе координат $\Psi(\alpha, \beta)$, если

$$\Phi(u, v) = u\overrightarrow{\mathbf{i}} + uv\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}} + \ln\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача V.12. (Ответ приведен на стр.337.) Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле $\mathcal{F}$ билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}[f]\big((u(x), v(x)\big) = f(0)u(0)v(0) + f(1)u(1)v(1).$$

Задача V.13. (Ответ приведен на стр.339.) Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}_f\left((u(x), v(x))\right) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Задача V.14. (Ответ приведен на стр.341.) В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Задача V.15. (Ответ приведен на стр.352.) В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени, не выше 1, криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $(\Phi(u,v))(x) = uv + ux$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v)$ тензорное поле линейных операторов, каждому многочлену $f(x)$ ставящее в соответствие линейный оператор $\widehat{\mathbf{P}(f)}$, задаваемый формулой $\left(\widehat{\mathbf{P}(f)}\right)(g) = \dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}$.

Задача V.16. (Ответ приведен на стр.354.) С помощью матрицы перехода найдите в системе координат $\Phi(u, v)$ первой координатной четверти координаты тензорного поля, заданного в полярной системе координат выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$, если координатные линии системы координат Φ имеют вид: $xy = u^2, \quad x = v^2 y$. Здесь $u, v, x, y > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Задача VI.17. (Ответ приведен на стр.357.) В линейном пространстве $\mathcal{P}_1(x)$ многочленов степени не выше 1 криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x$. Найдите ковариантную производную оператора дифференцирования в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v)$.

Задача VI.18. (Ответ приведен на стр.361.) Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Задача VI.19. (Ответ приведен на стр.372.) Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Задача VI.20. (Ответ приведен на стр.379.) Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найдите в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\varphi(u, v, w)$, заданной формулой $\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & 0 & w \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \\ w & w \end{pmatrix}$, где $u, v, w \geq 0$. Найдите вектор с криволинейными координатами $(1, 1, 2)$, то есть вектор $\Phi(1, 1, 2)$. Найдите базис, соответствующий вектору $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 1. Найдите в базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\varphi(u,v,w)$, заданной формулой $\varphi(u,v,w) = \begin{pmatrix} u & 0 & w \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \\ w & w \end{pmatrix}$, где $u,v,w \geq 0$. Найдите вектор с криволинейными координатами $(1,1,2)$, то есть вектор $\Phi(1,1,2)$. Найдите базис, соответствующий вектору $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ. Имеем $\varphi(u,v,w) = \begin{pmatrix} u^2+w^2 & w^2 \\ w^2 & v^2+w^2 \end{pmatrix}$. Поэтому в базисе $\mathbf{Б}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ координатные функции системы координат φ имеют вид

$$(u^2+w^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (v^2+w^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $B = T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}}$ находится непосредственно с помощью формулы[1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

[1] Учтите, что мы договорились матрицу перехода обозначать буквами A и B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

то есть $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\varphi(u,v,w) = \psi_1(u,v,w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \psi_2(u,v,w) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \psi_3(u,v,w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi_1(u,v,w) \\ \psi_2(u,v,w) \\ \psi_3(u,v,w) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2+w^2 \\ w^2 \\ v^2+w^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ 2w^2 \\ u^2-v^2 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$\frac{u^2+v^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{u^2-v^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2+v^2 & w^2 \\ w^2 & v^2+w^2 \end{pmatrix} = \varphi(u,v,w),$$

что и требовалось.

Решение задачи 2.

Задача 2. Найдите матрицу перехода из полярной системы координат в систему координат $\Phi(u, v)$, где координатные линии системы координат $\Phi(u, v)$ имеют вид $x + y = u$, $y = vx$.

Задача 2. Найдите матрицу перехода из полярной системы координат в систему координат $\Phi(u,v)$, где координатные линии системы координат $\Phi(u,v)$ имеют вид $x+y=u$, $y=vx$.

Ответ. Как известно, $a^i_{\bullet j}=\dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$. Поэтому надо выразить ρ, φ через u,v. Для этого выразим x,y через u,v, и попробуем получить требуемые выражения, сравнивая выражения для x,y. По условию имеем $x(1+v)=u$, откуда $x=\dfrac{u}{v+1}$, $y=\dfrac{uv}{v+1}$. Поэтому $\begin{cases} x=\dfrac{u}{v+1}=\rho\cos\varphi \\ y=\dfrac{uv}{v+1}=\rho\sin\varphi \end{cases}$.

Имеем $\rho^2=\dfrac{u^2}{(v+1)^2}+\dfrac{u^2v^2}{(v+1)^2}$, откуда $\rho=\dfrac{u\sqrt{v^2+1}}{v+1}$. Далее, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}=v$. Поэтому, учитывая условие $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, получаем

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{u\sqrt{v^2+1}}{v+1} \\ \varphi=\operatorname{arctg} v \end{cases}$$

Поэтому

$$\left(a^i_{\bullet j}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\rho}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{v^2+1}}{v+1} & \dfrac{u(v-1)}{\sqrt{v^2+1}(v+1)^2} \\ 0 & \dfrac{1}{v^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$\left(b^i_{\bullet j}\right)=\left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{v+1}{\sqrt{v^2+1}} & -\dfrac{u(v-1)}{v+1} \\ 0 & v^2+1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Найдите в базисе $\mathbf{Б}' = \{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\Phi(u, v, w)$, заданной формулой $\big(\Phi(u, v, w)\big)(x) = (u + vx)(v - wx)$.

Задача 3. Найдите в базисе $\mathbf{Б}' = \{1-x, 1+x, 1-x^2\}$ координатные функции криволинейной системы координат $\Phi(u,v,w)$, заданной формулой $\big(\Phi(u,v,w)\big)(x) = (u+vx)(v-wx)$.

Ответ. $\Phi(u,v,w) = uv + (v^2 - uw)\,x - vwx^2 =$

$$= \psi_1(u,v,w)(1-x) + \psi_2(u,v,w)(1+x) + \psi_3(u,v,w)\left(1-x^2\right),$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi_1(u,v,w) \\ \psi_2(u,v,w) \\ \psi_3(u,v,w) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} uv + uw - vw - v^2 \\ uv - uw - vw + v^2 \\ 2vw \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ux^k$.

Задача 4. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ux^k$.

Ответ. **Ответ.** Решая аналогично примеру 4, стр.67, получаем $x^2 + ky^2 = v$.

Задача 4.

Решение (в общем виде).

Случай $y = u \cdot f(x)$. Пусть $y = u \cdot f(x)$ — уравнения координатных линий $u = const$ ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Надо найти линии $v = const$. Пусть $y = y(x)$ — координатная функция $v = const$. Имеем:

$$y' = -\frac{1}{u \cdot f'(x)} = -\frac{f(x)}{y \cdot f'(x)},$$

откуда

$$y\,dy = -\frac{f(x)}{f'(x)}\,dx,$$

$$y^2 = C(v) - \int \frac{f(x)}{f'(x)}\,dx.$$

Случай $y = u + f(x)$. Пусть $y = u + f(x)$ — уравнения координатных линий $u = const$ ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Надо найти линии $v = const$. Пусть $y = y(x)$ — координатная функция $v = const$. Имеем:

$$y' = -\frac{1}{f'(x)},$$

откуда

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)}.$$

Случай $u = f(x, y)$. Пусть $u = f(x, y)$ — уравнения координатных линий $u = const$ ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Надо найти линии $v = const$. Пусть $y = y(x)$ — координатная функция $v = const$. Имеем, что тангенс наклона кривой $u = const$ равен

$$0 = f_x(x, y) + f_y(x, y)y', \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Следовательно, в точке пересечения угол наклона координатной линии $v = const$ должен быть равен

$$y' = \frac{f_y}{f_x}.$$

Это дифференциальное уравнение и надо решать.

Случай $x = f(u, v)$, $y = f(v, u)$. Итак, $x = f(u, v)$, $y = f(v, u)$ — координатные функции ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$. Найти функцию f. Будем считать, что «стандартные названия» переменных функции f — это α, β, то есть $f(u, v)$, $f(v, u)$ — результат подстановки соответствующих переменных в выражение $F(\alpha, \beta)$, задающее функцию f. Здесь уместно заметить, что следует различать *функцию* и *выражение*, задающее эту функцию. В частности, одна и та же функция может быть задана различными выражениями, например, $\sin^2 x$ и $1 - \cos^2 x$ задают одну и ту же функцию, а выражение AX может задавать различные функции даже при фиксированной матрице A: дело в том, что под X можно понимать как матрицу-столбец, так и матрицу из нескольких столбцов, и можно даже считать, что X — это скаляр!

$$0 = (\overrightarrow{\mathbf{r}}_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}_v) = f_\alpha(u, v)f_\beta(v, u) + f_\beta(u, v)f_\alpha(v, u).$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ue^x$.

Задача 5. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = ue^x$.

Ответ. $2x = v - y^2$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = e^{ux}$.

Задача 6. Найдите координатные линии $v = const$ какой-либо ортогональной криволинейной системы координат $\Phi(u, v)$, для которой координатные линии $u = const$ имеют вид $y = e^{ux}$.

Ответ. $x^2 = v - \frac{y^2}{4}(2\ln y - 1)$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Пусть в полярной системе координат $\Phi(\rho,\varphi)$ векторное поле задано формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$. Задайте это поле геометрически, найдите разложение этого поля по локальному базису системы координат $\Psi(u,v) = uv\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $D = \{(u,v) \mid u > 0,\ v > 0\}$.

Задача 7. Пусть в полярной системе координат $\Phi(\rho, \varphi)$ векторное поле задано формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$. Задайте это поле геометрически, найдите разложение этого поля по локальному базису системы координат $\Psi(u, v) = uv\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, где $D = \{(u, v) \mid u > 0,\ v > 0\}$.

Ответ. Из решения примера 3, стр.56 следует, что $\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ равен радиусу-вектору, а вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$ перпендикулярен радиусу-вектору и равен ему по длине. Поэтому из рис 1, стр.58 векторное поле поворачивает каждый вектор на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки и растягивает его в $\sqrt{2}$ раз. Теперь найдем его разложение по локальному базису системы координат Ψ. Возьмем в качестве «основы» базис $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. Имеем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = uv\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_u = v\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = u\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{u}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Из сравнения выражений для радиуса-вектора получаем, что $\begin{cases} \rho\cos\varphi = uv \\ \rho\sin\varphi = \frac{u}{v} \end{cases}$, откуда $\rho^2 = u^2v^2 + \frac{u^2}{v^2}$. Учитывая положительность u и v, получаем $\rho = \frac{u}{v}\sqrt{v^4+1}$. Так как u, v положительны, то конец радиуса-вектора $\Psi(u, v)$ находится в первой четверти, то есть можно считать, что $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому из $\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{v \cdot uv} = \frac{1}{v^2}$ следует, что $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{v^2}$. Согласно **формуле** получаем матрицу A перехода из полярной системы координат в систему Ψ и, находя обратную матрицу, например, с помощью **присоединенной матрицы**, получаем матрицу B обратного перехода

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{v^4+1}}{v} & \dfrac{v^4-1}{v^2\sqrt{v^4+1}} \\ 0 & \dfrac{-2v}{v^4+1} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} \dfrac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \dfrac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}$$

Поэтому столбец координат вектора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ равен

$$\begin{pmatrix} \dfrac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \dfrac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{u}{v}\sqrt{v^4+1} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2} \\ -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, разложение вектора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ по локальному базису системы координат Ψ имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{T}}=\frac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u-\frac{v^4+1}{2v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v.$$

Проверка.

$$\overrightarrow{\mathbf{T}}=\rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho+\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+(-y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=(x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+(x+y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=$$

$$=\left(uv-\frac{u}{v}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}}+\left(uv+\frac{u}{v}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

С другой стороны

$$\frac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_u-\frac{v^4+1}{2v}\overrightarrow{\mathbf{r}}_v=\frac{u\left(2v^2+v^4-1\right)}{2v^2}\left(v\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\frac{1}{v}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)-\frac{v^4+1}{2v}\left(u\,\overrightarrow{\mathbf{i}}-\frac{u}{v^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)=$$

$$= \frac{2uv^2 - 2u}{2v}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2uv^2 + 2uv^4}{2v^3}\overrightarrow{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\mathbf{T}},$$

что подтверждает правильность результата.

Решение задачи 8.

Задача 8. Вычислите в цилиндрических координатах компоненты поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Задача 8. Вычислите в цилиндрических координатах компоненты поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Ответ. Естественно, применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Компоненты тензорного поля в цилиндрических координатах *Как запишем ответ?* Формулами. *Введем переменные.* Пусть (учитывая, что $\overrightarrow{\mathbf{r}}_z = \overrightarrow{\mathbf{k}}$)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \overrightarrow{\mathbf{u}} = U^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + U^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + U^3\overrightarrow{\mathbf{r}}_z \\ \overrightarrow{\mathbf{v}} = V^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + V^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi + V^3\overrightarrow{\mathbf{r}}_z \end{array}\right.$$

Составим уравнение. С одной стороны, значение поля мы обозначили через $\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$, с другой стороны, его можно вычислить с помощью координат:

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \sqrt{\rho^2 + z^2}\left(U^1V^1 + U^2V^2\rho^2 + U^3V^3\right).$$

Мы записали многочлен, соответствующий этой билинейной форме, но нас интересуют it компоненты соответствующего тензорного поля. В соответствии с **равенствами** имеем

$$F_{ij}(\rho, \varphi, z) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right) = \sqrt{\rho^2 + z^2}\left(U^1V^1 + U^2V^2\rho^2 + U^3V^3\right),$$

где, как обычно, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_z$, то есть для вычисления компоненты $F_{ij}(\rho, \varphi, z)$ надо положить $U_t = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t = i \\ 0 & \text{при} & t \neq i \end{array}\right.$, $V_t = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t = j \\ 0 & \text{при} & t \neq j \end{array}\right.$. Итак, билинейной форме соответствует дважды ковариантный тензор второго ранга, каждому базису (локальному базису этой системы координат) ставящий в соответствие матрицу этой билинейной формы в этом базисе. Локальному базису $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{z}\right\}$ соответствует матрица

$$(F_{ij}(\rho,\varphi,z)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2+z^2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При этом тензорное поле имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\rho,\varphi,z) = F_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j} = \sqrt{\rho^2+z^2}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + \rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \sqrt{\rho^2+z^2}\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^{z}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{z}.$$

Решение задачи 9.

Задача 9. Вычислите в сферических координатах компоненты поля линейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие функцию

$$\big(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\big)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}).$$

Задача 9. Вычислите в сферических координатах компоненты поля линейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие функцию

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}).$$

Ответ. Как следует из **примера**, функция, каждому базису (локальному базису криволинейной системы координат) $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \overrightarrow{\mathbf{r}}_2, \overrightarrow{\mathbf{r}}_3\right\}$ ставящая в соответствие столбец $(F_i(r,\varphi,\theta)) = \begin{pmatrix} \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_1\right) \\ \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_2\right) \\ \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_3\right) \end{pmatrix}$, является ковариантным тензором первого ранга. Как нетрудно вычислить с использованием **формул, связывающих сферическую и декартову системы координат**, для сферической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\overrightarrow{\mathbf{r}}_r$, поэтому, учитывая ортогональность сферической системы координат, получаем $(F_i(r,\varphi,\theta)) = \begin{pmatrix} r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тензорное поле имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(r,\varphi,\theta) = F_i(r,\varphi,\theta)\overrightarrow{\mathbf{r}}^i = r^2\overrightarrow{\mathbf{r}}^r.$$

Решение задачи 10.

Задача 10. Вычислите в полярных координатах компоненты тензорного поля, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}|\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\,.$$

Задача 10. Вычислите в полярных координатах компоненты тензорного поля, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}|\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\,.$$

Ответ. В силу **формул** матрица перехода A из базиса $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$ в локальный базис полярной системы координат $\Phi(\rho,\varphi)$ имеет вид $A = (a_{ij}(\rho,\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$. Нетрудно вычислить обратную матрицу, например, с помощью **формулы**:

$$B = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица координат поля в полярной системе координат равна

$$\begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Иными словами, $\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho - \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$.

Задача 10.

Проверка.

$$\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}-\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}=\rho\cos\varphi\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)-\sin\varphi\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)=$$

$$=\rho\,\overrightarrow{\mathbf{i}}=\overrightarrow{\mathbf{F}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right),$$

в полном соответствии с нашими ожиданиями.

Решение задачи 11.

Задача 11. Найдите координаты тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left(uv\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right) \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ в системе координат $\Psi(\alpha, \beta)$, если

$$\Phi(u, v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + uv\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \ln\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача 11. Найдите координаты тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left(uv\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_u - \overrightarrow{\mathbf{r}}_v\right) \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ в системе координат $\Psi(\alpha, \beta)$, если

$$\Phi(u, v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + uv\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \ln\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Ответ. В локальном базисе системы координат Φ тензорному полю $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ соответствует тензор-массив

$$\left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & uv \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу перехода. В соответствии с **формулой** необходимо сначала u, v выразить через α, β:

$$\begin{cases} u = \alpha \\ uv = \ln\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \alpha \\ v = \dfrac{\ln\beta}{\alpha} \end{cases}$$

Поэтому, согласно **формуле**

$$A = \left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\ln\beta}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Согласно **формуле** имеем

$$B = A^{-1} = \alpha\beta \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha\beta} & 0 \\ \dfrac{\ln\beta}{\alpha^2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

(переход к переменным u, v не требуется). Следовательно,

$$\left(\acute{T}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & uv \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} & \alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ln\beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ln\beta \\ 0 & \dfrac{\beta\ln^2\beta}{\alpha} - \alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta\ln\beta}{\alpha} \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta\ln\beta \\ 0 & \beta^2\left(\ln^2\beta - \alpha^2\right) \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 12.

Задача 12. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле $\mathcal{F}$ билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}[f]\big((u(x), v(x)\big) = f(0)u(0)v(0) + f(1)u(1)v(1).$$

Задача 12. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле $\mathcal{F}$ билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}[f]\big((u(x), v(x)\big) = f(0)u(0)v(0) + f(1)u(1)v(1).$$

Ответ. **Билинейной форме** соответствует дважды ковариантный тензор, каждому базису (локальному базису криволинейной системы координат) ставящий в соответствие **матрицу этой билинейной формы**. Введем базис[2] $= \{e_1(x), e_2(x)\} = \{x^0, x\}$. Пусть $f(x) = \alpha + \beta x$, $u(x) = U^1 + U^2 x = U^i e_i(x)$, $v(x) = V^1 + V^2 x = V^i e_i(x)$. Тогда $F_{ij}(f) = f(0)e_i(0)e_j(0) + f(1)e_i(1)e_j(1)$. Например[3], $F_{11}(\alpha + \beta x) = (\alpha + \beta \cdot 0) \cdot 1 \cdot 1 + (\alpha + \beta \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 = 2\alpha + \beta$. Продолжая в том же духе, получаем

$$\text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x\} \quad \mathbf{F}[\alpha + \beta x]\,(\mathbf{Б}) = (F_{ij}(\alpha + \beta x)) = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

[2]Соответствующий, так сказать, «прямолинейной» системе координат.

[3]Напомним, что в теории многочленов полагают по определению $0^0 = 0$, хотя в математическом анализе значение 0^0 не определено.

Решение задачи 13.

Задача 13. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}_f\left((u(x), v(x)\right) = \int_{-1}^{1} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Задача 13. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не больше 1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Задайте тензор-массивом тензорное поле билинейных форм, заданных на линейном пространстве V, которое каждому многочлену f ставит в соответствие билинейную форму $\mathcal{F}_f$, заданную формулой

$$\mathcal{F}_f\left((u(x), v(x)\right) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Ответ.

$$\text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x\} \quad \mathbf{F}[\alpha + \beta x]\,(\mathbf{Б}) = (F_{ij}(\alpha + \beta x)) = \begin{pmatrix} 2\alpha & \dfrac{\beta}{3} \\ \dfrac{\beta}{3} & \dfrac{\alpha}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 14.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. **Линейному оператору** соответствует контра-ковариантный тензор второго ранга, каждому базису (локальному базису криволинейной системы координат) ставящий в соответствие матрицу оператора в этом базисе. Приведем два решения этой задачи.

Первое решение. Будем действовать по определению. Возьмем матрицу $Y = \Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Локальный базис в точке с этом «радиусом-вектором» имеет вид

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix}, \quad M_v = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix}, \quad M_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу **определения матрицы линейного оператора**,

$$\hat{P}[Y]\left(M_u\right) = M_u Y - Y M_u = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2u\left(1+v^2\right) & 2uv(vw+1) \\ 2uv(vw+1) & 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix} = p_{11}\begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + p_{21}\begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + p_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

Сравнивая коэффициенты матриц в левых и правых частях последнего равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} p_{11} = 2u\left(1+v^2\right) \\ v \cdot p_{11} + u \cdot p_{21} = 2uv(vw+1) \\ vw \cdot p_{11} + uw \cdot p_{21} + uv \cdot p_{31} = 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{cases},$$

которую можно представить в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\left(1+v^2\right) \\ 2uv(vw+1) \\ 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix}.$$

Равенства

$$\hat{P}[Y]\left(M_v\right) = M_vY - YM_v = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2u^2v & u^2(vw+1) \\ u^2(vw+1) & 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix} = p_{12} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + p_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

сводятся к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u^2v \\ u^2(vw+1) \\ 2uv^2\left(1+w^2\right) \end{pmatrix}.$$

$$\hat{P}[Y]\left(M_w\right) = M_wY - YM_w = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & u^2v^2 \\ u^2v^2 & 2u^2v^2w \end{pmatrix} = p_{13} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} + p_{23} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & uw \end{pmatrix} + p_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

что приводит к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2v^2 \\ 2u^2v^2w \end{pmatrix}.$$

Эти три матричных уравнения сводятся с помощью **«умножения на макроуровне»** к одному матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\left(1+v^2\right) & 2u^2v & 0 \\ 2uv(vw+1) & u^2(vw+1) & u^2v^2 \\ 2uv^2\left(1+w^2\right) & 2uv^2\left(1+w^2\right) & 2u^2v^2w \end{pmatrix}.$$

Решая это матричное уравнение методом Гаусса или с помощью обратной матрицы[4], получаем

$$\mathbf{P}_{\Phi}(Y) = \left(P^i_{\bullet j}(u,v,w)\right) = \begin{pmatrix} 2u\left(1+v^2\right) & 2u^2v & 0 \\ 2v^2(w-v) & u\left(2vw-2v^2+1\right) & v^2u \\ 2(w-v) & -\dfrac{u(w-2v)}{v} & uvw \end{pmatrix}.$$

[4]которая, кстати, равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{v}{u} & \dfrac{1}{u} & 0 \\ 0 & -\dfrac{w}{uv} & \dfrac{1}{uv} \end{pmatrix}$.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u,v,w)$ задана формулой $\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v,w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X)=XY+YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$:

$$\hat{P}[Y]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u & uv \\ uv & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=2u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+uv\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u,v,w)$ задана формулой $\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} u & uv\\ uv & uvw\end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v,w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X)=XY+YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$:

$$\hat{P}[Y]\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2u\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+uv\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 2u\\ uv\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y]\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & v\\ v & vw\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v\\ v & vw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2uv & u(1+vw)\\ u(1+vw) & 2uv\end{pmatrix}=$$

$$=2uv\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+u(1+vw)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+2uv\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 2uv\\ u(1+vw)\\ 2uv\end{pmatrix}$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2uv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u(1 + vw) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2uv \\ u(1 + vw) \\ 2uv \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & vw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & uv \\ uv & 2uvw \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2uvw \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ uv \\ 2uvw \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u,v,w)$ задана формулой $\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v,w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X)=XY+YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$:

$$\hat{P}[Y]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+uv\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 2u \\ uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=2uv\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+u(1+vw)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+2uv\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 2uv \\ u(1+vw) \\ 2uv \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}[Y]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+uv\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+2uvw\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 0 \\ uv \\ 2uvw \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода из базиса $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u,M_v,M_w\}$ системы координат $\Phi(u,v,w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$.

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u, v, w)$ задана формулой $\Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v, w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Матрица перехода из базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u, M_v, M_w\}$ системы координат $\Phi(u, v, w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1 + vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$. Поэтому **искомая матрица оператора** в локальном базисе системы координат $\Phi(u, v, w)$, равна

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u,v,w)$ задана формулой $\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw \end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v,w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X) = XY + YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Матрица перехода из базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u, M_v, M_w\}$ системы координат $\Phi(u,v,w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix}$. Поэтому **искомая матрица оператора** в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v,w)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В пространстве симметрических матриц размерности 2×2 криволинейная система координат $\Phi(u,v,w)$ задана формулой $\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} u & uv \\ uv & uvw\end{pmatrix}$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v,w)$ поле линейных операторов, каждой матрице Y ставящее в соответствие линейный оператор вида $\hat{P}[Y](X)=XY+YX$.

Ответ. *Второе решение.* Найдем матрицу оператора $\hat{P}[Y]$ в базисе $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

Матрица перехода из базиса $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ в найденный выше локальный базис $\{M_u,M_v,M_w\}$ системы координат $\Phi(u,v,w)$ равна $\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw\end{pmatrix}$. Поэтому **искомая матрица оператора** в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v,w)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2u & 2uv & 0 \\ uv & u(1+vw) & uv \\ 0 & 2uv & 2uvw\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2u\left(1+v^2\right) & 2u^2v & 0 \\ 2v^2(w-v) & u\left(1+2vw-2v^2\right) & uv^2 \\ 2(v-w) & -\dfrac{u(w-2v)}{v} & uvw\end{pmatrix},$$

что совпадает с результатами расчетов, приведенных в первом решении.

Решение задачи 15.

Задача 15. В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени, не выше 1, криволинейная система координат $\Phi(u, v)$ задана формулой $(\Phi(u, v))\,(x) = uv + ux$. Задайте в системе координат $\Phi(u, v)$ тензорное поле линейных операторов, каждому многочлену $f(x)$ ставящее в соответствие линейный оператор $\widehat{\mathbf{P}(f)}$, задаваемый формулой $\left(\widehat{\mathbf{P}(f)}\right)(g) = \dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}$.

Задача 15. В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени, не выше 1, криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $(\Phi(u,v))(x) = uv + ux$. Задайте в системе координат $\Phi(u,v)$ тензорное поле линейных операторов, каждому многочлену $f(x)$ ставящее в соответствие линейный оператор $\widehat{\mathbf{P}(f)}$, задаваемый формулой $\left(\widehat{\mathbf{P}(f)}\right)(g) = \dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}$.

Ответ. $\left(P^i_{\bullet j}(u,v)\right) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$.

Решение задачи 16.

Задача 16. С помощью матрицы перехода найдите в системе координат $\Phi(u,v)$ первой координатной четверти координаты тензорного поля, заданного в полярной системе координат выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$, если координатные линии системы координат Φ имеют вид: $xy = u^2, \quad x = v^2 y$. Здесь $u, v, x, y > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Задача 16. С помощью матрицы перехода найдите в системе координат $\Phi(u,v)$ первой координатной четверти координаты тензорного поля, заданного в полярной системе координат выражением $\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$, если координатные линии системы координат Φ имеют вид: $xy = u^2$, $x = v^2 y$. Здесь $u, v, x, y > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ответ. Легко находится выражение x, y через u, v: $\begin{cases} x = uv \\ y = u/v \end{cases}$. Поэтому $\overrightarrow{\mathbf{r}} = uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{u}{v}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_u = v\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{v}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_v = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{u}{v^2}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \end{cases}$$

В процессе решения примера 3, стр.56, мы нашли локальный базис полярной системы координат:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Можно найти матрицу перехода из локального базиса полярной системы координат в локальный базис системы Φ с помощью этих разложений, но проще воспользоваться **формулой**. Выразим ρ, φ через u, v, учитывая $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \rho\cos\varphi = uv \\ \rho\sin\varphi = \frac{u}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{u}{v}\sqrt{v^4+1} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{v^2} \\ \cos\varphi = \frac{v^2}{\sqrt{v^4+1}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{v^4+1}} \end{cases}$$

Следовательно, матрица перехода равна $A = \left(a^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{v^4+1}}{v} & \dfrac{u\left(v^4-1\right)}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{2v}{\sqrt{v^4+1}} \end{pmatrix}$. Матрицу обратного перехода можно найти, например, с помощью формулы, получаем $B = \left(b^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \dfrac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}$. Тензор-вектор из условия задачи имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = \rho \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = T^1 \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} + T^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi},$$

поэтому массив его координат в локальном базисе системы координат $\Phi(u, v)$ равен

$$\left(\acute{T}^i\right) = \left(b^i_{\bullet j} T^j\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{v}{\sqrt{v^4+1}} & \dfrac{v^4-1}{2v^2} \\ 0 & -\dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u\left(2v^2+1-v^4\right)}{2v^2} \\ \dfrac{v^4+1}{2v} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 17.

Задача 17. В линейном пространстве $\mathcal{P}_1(x)$ многочленов степени не выше 1 криволинейная система координат $\Phi(u, v)$ задана формулой $\big(\Phi(u, v)\big)(x) = uv + (u + v)x$. Найдите ковариантную производную оператора дифференцирования в локальном базисе системы координат $\Phi(u, v)$.

Задача 17. В линейном пространстве $\mathcal{P}_1(x)$ многочленов степени не выше 1 криволинейная система координат $\Phi(u,v)$ задана формулой $\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x$. Найдите ковариантную производную оператора дифференцирования в локальном базисе системы координат $\Phi(u,v)$.

Ответ. Эта задача аналогична рассмотренному выше примеру 8, стр.192. Найдем векторы локального базиса системы координат $\Phi(u,v)$:

$$\big(\Phi(u,v)\big)(x) = uv + (u+v)x, \quad \Phi_u(x) = \Phi_1(x) = v + x, \quad \Phi_v(x) = \Phi_2(x) = u + x.$$

Поэтому локальный базис имеет вид $\mathbf{Б} = \{v+x, u+x\}$. Найдем матрицу оператора дифференцирования в этом локальном базисе:

$$\begin{cases} \hat{D}\Phi_1(x) = \dfrac{d}{dx}\Phi_1(x) = 1 = d^1_{\bullet 1}\Phi_1(x) + d^2_{\bullet 1}\Phi_2(x) = (vd^1_{\bullet 1} + ud^2_{\bullet 1}) + (d^1_{\bullet 1} + d^2_{\bullet 1})\, x \\ \hat{D}\Phi_2(x) = \dfrac{d}{dx}\Phi_2(x) = 1 = d^1_{\bullet 2}\Phi_1(x) + d^2_{\bullet 2}\Phi_2(x) = (vd^1_{\bullet 2} + ud^2_{\bullet 2}) + (d^1_{\bullet 2} + d^2_{\bullet 2})\, x \end{cases}$$

откуда $\mathbf{D}(\mathbf{Б}) = \left(D^i_{\bullet j}\right) = \dfrac{1}{u-v}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Этому **массиву соответствует тензор-вектор**

$$\overrightarrow{\mathbf{D}} = -\frac{1}{u-v}\Phi_1 \otimes \Phi^1 - \frac{1}{u-v}\Phi_1 \otimes \Phi^2 + \frac{1}{u-v}\Phi_2 \otimes \Phi^1 + \frac{1}{u-v}\Phi_2 \otimes \Phi^2.$$

Найдем символы Кристоффеля системы координат $\Phi(u,v)$ с помощью **формулы**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\Phi_1 = 0 = \Gamma^1_{11}\Phi_1 + \Gamma^2_{11}\Phi_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\Phi_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}\Phi_2 = 1 = \Gamma^1_{12}\Phi_1 + \Gamma^2_{12}\Phi_2 = \Gamma^1_{21}\Phi_1 + \Gamma^2_{21}\Phi_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\Phi_2 = 0 = \Gamma^1_{22}\Phi_1 + \Gamma^2_{22}\Phi_2 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u-v} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix},$$

то есть $\left(\Gamma^i_{\bullet jk}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u-v} \\ -\dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{u-v} \\ \dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \right)$. Координаты ковариантной производной найдем по **формуле** (массив $\left(D^p_{\bullet q}\right)$ мы нашли выше):

$$\left(\nabla_i D^j_{\bullet k}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} D^j_{\bullet k}\right) + \left(\Gamma^j_{\bullet im} D^m_{\bullet k}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ik} D^j_m\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2} \\ -\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2} \\ \dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2} \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{u-v} \left(\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{u-v} \\ -\dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{u-v} \\ \dfrac{1}{u-v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) -$$

$$-\frac{1}{u-v}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{u-v}\\ -\dfrac{1}{u-v} & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{u-v}\\ \dfrac{1}{u-v} & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2}\\ -\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2}\\ \dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2}\\ \dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\dfrac{1}{(u-v)^2} & \dfrac{1}{(u-v)^2}\\ -\dfrac{1}{(u-v)^2} & -\dfrac{1}{(u-v)^2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Ответ: ковариантная производная этого тензорного поля нулевая.

Решение задачи 18.

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}} \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}} \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \end{cases}$$

и, согласно **свойству скалярного произведения**

$$\begin{cases} F_{11} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho} = 1 \\ F_{12} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho} = 0 \\ F_{21} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho} = 0 \\ F_{22} = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho} = 0 \end{cases}$$

Значит, $\mathbf{F}(\text{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}})=\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\end{array}\right.$$

и, согласно **свойству скалярного произведения**

$$\left\{\begin{array}{l}F_{11}=\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)=\dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho}=1\\ F_{12}=\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)=\dfrac{\rho}{\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho}=0\\ F_{21}=\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)=\dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{\rho}{\rho}=0\\ F_{22}=\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right)=\dfrac{0}{\rho\cdot\rho}\cdot\dfrac{0}{\rho\cdot\rho}=0\end{array}\right.$$

Значит, $\mathbf{F}(\text{Б})=(F_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем

$$\nabla_i F_{jk}=\frac{\partial}{\partial q^i}F_{jk}-\Gamma_{ij}^m F_{mk}-\Gamma_{ik}^m F_{jm}.$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \end{cases}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

Массив значений символов Кристоффеля для полярной системы координат нетрудно «извлечь» из **формулы**, но его следует преобразовать[5] для второго и, соответственно, третьего слагаемого последней формулы следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \qquad\qquad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) =$$

[5]То есть транспонировать массивы. Говорить о транспонировании *тензоров* в этом случае нельзя, во-первых, поскольку проводится перестановка разновысоких индексов и, самое главное, массив символов Кристоффеля тензором не является (поскольку этот массив характеризует «геометрию данной криволинейной системы координат», и при переходе к другой системе координат меняется почти непредсказуемо).

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. Сначала, учитывая **полученные ранее результаты**, найдем массив координатных функций тензорного поля в локальном базисе полярной системы координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\qquad \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\end{array}\right.$$

$\mathbf{F}(\text{Б}) = (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно **формуле** имеем $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i}F_{jk} - \Gamma^m_{ij}F_{mk} - \Gamma^m_{ik}F_{jm}$.

Массив значений символов Кристоффеля для полярной системы координат нетрудно «извлечь» из **формулы**, но его следует преобразовать для второго и, соответственно, третьего слагаемого последней формулы следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\qquad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}} \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}} \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) =$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma_{ij}^m F_{mk} - \Gamma_{ik}^m F_{jm}$.

$$\left(\Gamma_{ij}^{\bullet\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma_{i\bullet j}^{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(\nabla_i F_{jk}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma_{ij}^{\bullet\bullet m} F_{mk}\right) - \left(\Gamma_{i\bullet k}^{\bullet m} F_{jm}\right) =$$

$$= - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} F_{jk} - \Gamma^m_{ij} F_{mk} - \Gamma^m_{ik} F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k} F_{jm}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно формуле, получаем

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i}F_{jk} - \Gamma^m_{ij}F_{mk} - \Gamma^m_{ik}F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(\nabla_i F_{jk}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i}F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij}F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k}F_{jm}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно формуле, получаем

$$\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_i T_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =$$

Задача 18. Найдите в полярной системе координат ковариантную производную тензорного поля, каждому радиус-вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ плоскости ставящего в соответствие билинейную форму $f\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right](\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}) = \left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{r}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$.

Ответ. $\nabla_i F_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial q^i}F_{jk} - \Gamma^m_{ij}F_{mk} - \Gamma^m_{ik}F_{jm}$.

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(\nabla_i F_{jk}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i}F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet\bullet m}_{ij}F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{\bullet m}_{i\bullet k}F_{jm}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно формуле, получаем

$$\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \nabla_i T_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k = \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

Решение задачи 19.

Задача 19. Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\big(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\big)\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right| \cdot \big(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\big)\,.$$

Задача 19. Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Ответ. Согласно формуле,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^{m}_{\bullet ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^{m}_{\bullet ik} F_{jm}\right). \tag{6}$$

Массив символов Кристоффеля цилиндрической системы координат мы вычислили выше, но его удобнее «реорганизовать» для второго и, соответственно, третьего слагаемых формулы (7) следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \qquad\qquad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) =$$

Задача 19. Вычислите в цилиндрических координатах ковариантную производную поля билинейных форм, ставящего каждой точке с радиус-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в соответствие билинейную форму

$$\left(F(\overrightarrow{\mathbf{r}})\right)(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right).$$

Ответ. Согласно формуле,

$$(\nabla_i F_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} F_{jk}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ij} F_{mk}\right) - \left(\Gamma^m_{\bullet ik} F_{jm}\right). \tag{7}$$

Массив символов Кристоффеля цилиндрической системы координат мы вычислили выше, но его удобнее «реорганизовать» для второго и, соответственно, третьего слагаемых формулы (7) следующим образом:

$$\left(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right), \quad \left(\Gamma^{\bullet k}_{i\bullet j}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Массив координат данного векторного поля **уже получен**. Поэтому, считая $q^1=\rho,\quad q^2=\varphi,$ $q^3=z$, получаем

$$(\nabla_i F_{jk})=\left(\frac{\partial}{\partial q^i}F_{jk}\right)-\left(\Gamma_{ij}^{\bullet\bullet m}F_{mk}\right)-\left(\Gamma_{i\bullet k}^{\bullet m}F_{jm}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\rho\left(3\rho^2+2z^2\right)}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{z\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right)-$$

$$-\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{\rho}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\rho^2+z^2}&0&0\\0&\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}&0\\0&0&\sqrt{\rho^2+z^2}\end{pmatrix}\\ \\ \begin{pmatrix}0&\frac{1}{\rho}&0\\-\rho&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\rho^2+z^2}&0&0\\0&\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}&0\\0&0&\sqrt{\rho^2+z^2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\rho^2+z^2}&0&0\\0&\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}&0\\0&0&\sqrt{\rho^2+z^2}\end{pmatrix}\end{array}\right)-$$

$$-\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\sqrt{\rho^2+z^2}&0&0\\0&\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}&0\\0&0&\sqrt{\rho^2+z^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{\rho}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \\ \begin{pmatrix}\sqrt{\rho^2+z^2}&0&0\\0&\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}&0\\0&0&\sqrt{\rho^2+z^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\rho&0\\\frac{1}{\rho}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\sqrt{\rho^2+z^2}&0&0\\0&\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}&0\\0&0&\sqrt{\rho^2+z^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right)=$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho\left(2\rho^2+z^2\right)}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & -\rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ \rho\sqrt{\rho^2+z^2} & \frac{z\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 \\ \rho\sqrt{\rho^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
$$

Следовательно, согласно формуле, ковариантная производная равна

$$
\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{F}} = \nabla_i F_{jk} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^k =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \left(\rho \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + \rho^3 \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \rho \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z + \right.
$$

$$
\left. + z \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + z\rho^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + z \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^z \right).
$$

Решение задачи 20.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Для того, чтобы было проще задать координатные функции этого поля, воспользуемся полярной системой координат плоскости Π, связанную с прямоугольной декартовой системой координат.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}=\dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}=\dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right)=\left(\qquad\qquad\right)$.

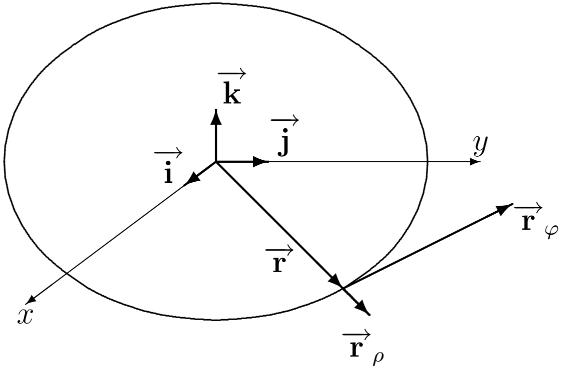
$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho};\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]=$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем матрицу оператора $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$

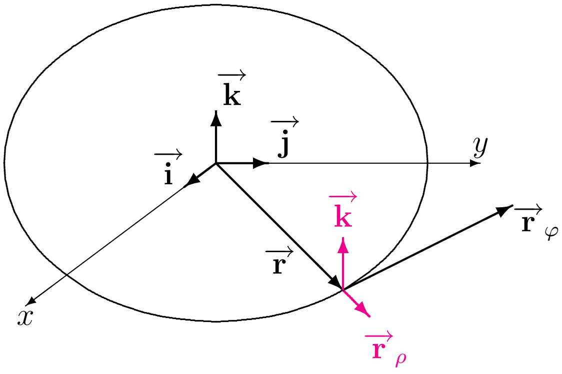


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$

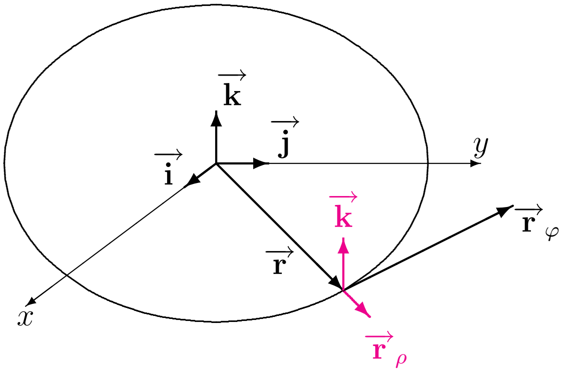


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем матрицу оператора $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$



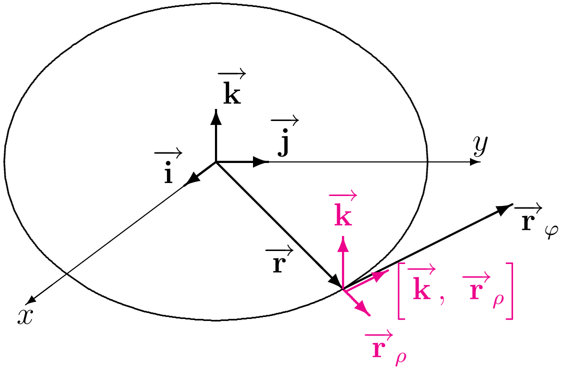
Используем геометрические особенности векторного произведения.
$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\;\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,
с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\;\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \left(\quad\right)$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,

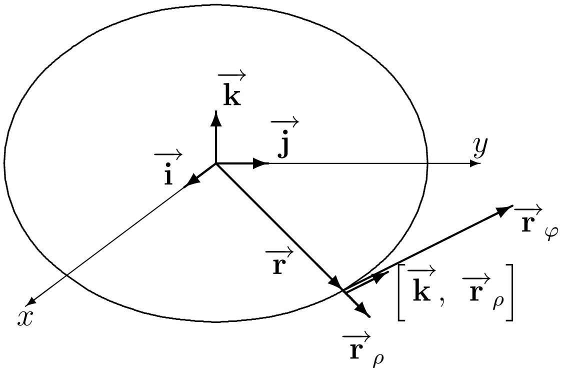
с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

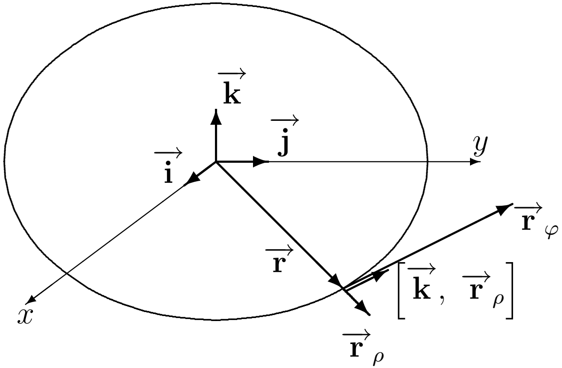
$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,

с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right)=\left(\quad\quad\right)$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)=\frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)=$$

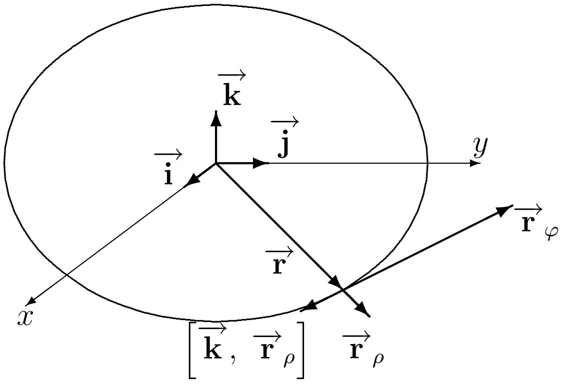


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|=1\ \Rightarrow\ \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]\right|=\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2}=1$,
с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi.$$

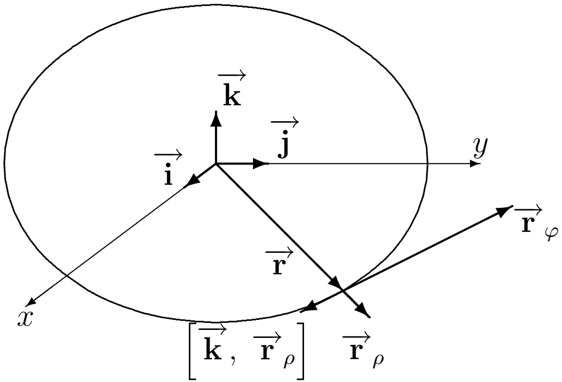


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = 1,$
с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=\dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right)=\begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right)=\frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right)=0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho+\frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi.$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**
$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|=1\ \Rightarrow\ \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]\right|=\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right|\sin\dfrac{\pi}{2}=1$,
с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

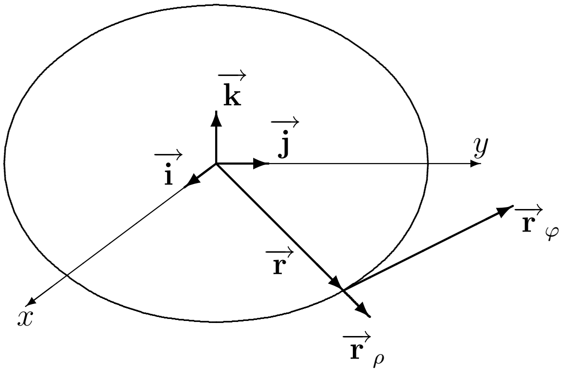
Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$



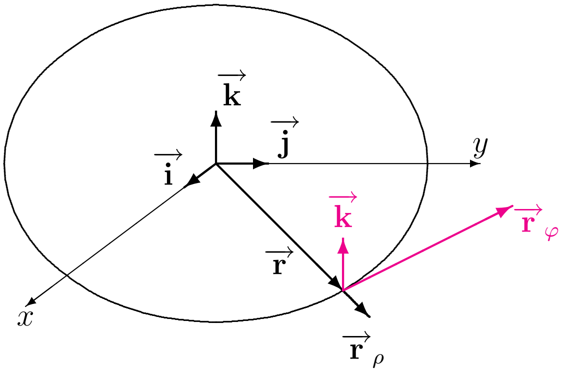
Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi};\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$

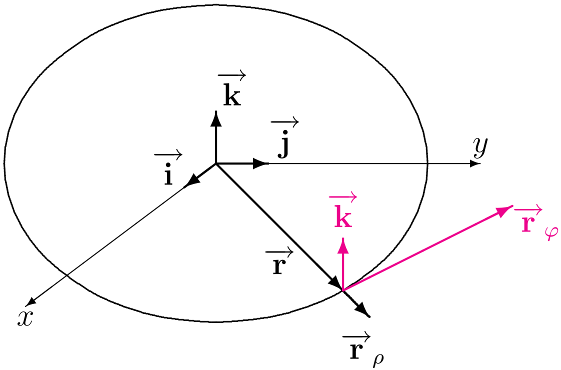


Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi};\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

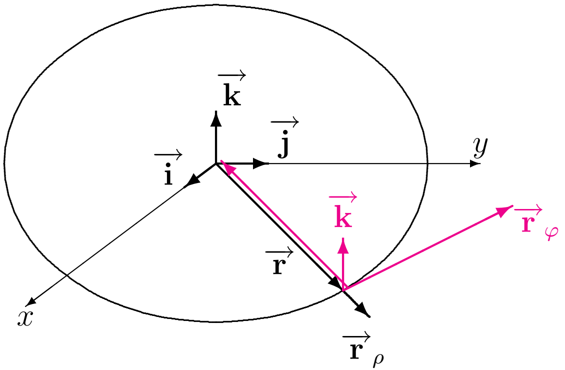
с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi};\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] =$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

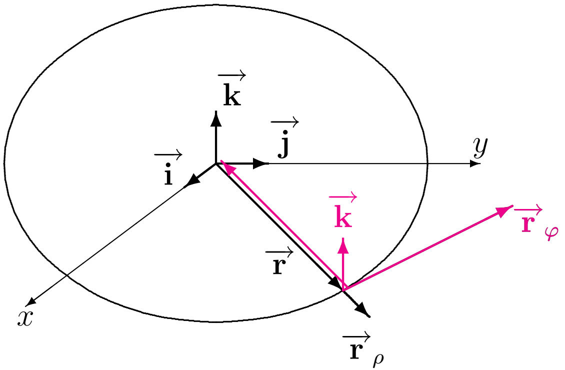
$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = \rho,$

с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi};\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \dfrac{1}{\rho}\left(-\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\right) =$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

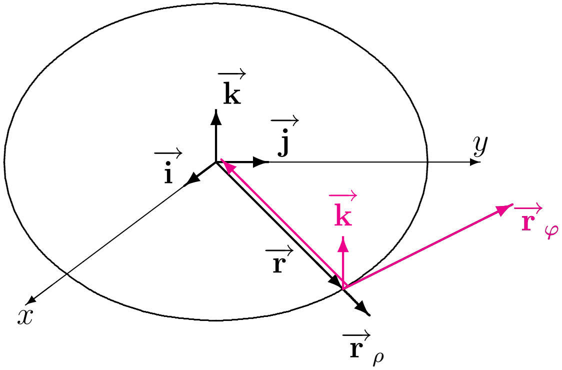
$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right|\sin\dfrac{\pi}{2} = \rho,$

с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем матрицу оператора $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\rho^2} & \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi;\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(-\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi.$$



Используем геометрические особенности векторного произведения.

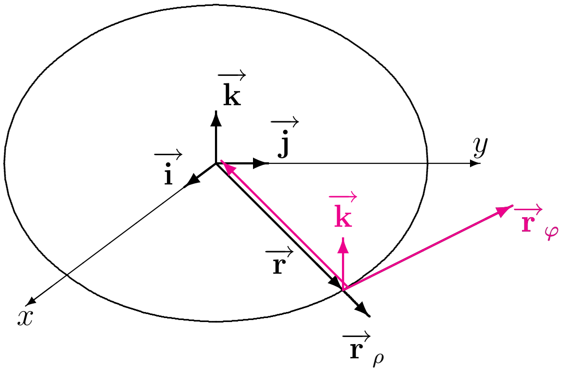
$$\left\{\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right| = \rho \end{array}\right. \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

$$\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right) = \frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi;\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right] = \frac{1}{\rho}\left(-\rho\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\right) = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi.$$



Используем **геометрические особенности векторного произведения.**

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right| = \rho \end{cases} \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right]\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right|\sin\frac{\pi}{2} = \rho,$$

с конца вектора $\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\right]$ вращение от $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ к $\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi$ по кратчайшей дуге должно наблюдаться, как вращение против часовой стрелки.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=\dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0\end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}}=0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho-\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi+\dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho+0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi=$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем матрицу оператора $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя связь между тензор-массивом и тензор-вектором, получаем

$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho$.

Согласно теореме о ковариантной производной

$\nabla_s L^i_j = \dfrac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^?_{??}L^?_j - \Gamma^?_{??}L^i_?$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho - \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho$.
Согласно **теореме о ковариантной производной**
$\nabla_s L^i_j = \dfrac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{s?}L^?_j - \Gamma^?_{js}L^i_?$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ в локальном базисе: $\quad \left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Используя **связь между тензор-массивом и тензор-вектором**, получаем
$\overrightarrow{\mathbf{L}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} - \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} + 0\,\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} + \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}$.
Согласно **теореме о ковариантной производной**
$\nabla_s L^i_j = \dfrac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - \Gamma^p_{js}L^i_p$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=\frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathbf{L}}=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi-\frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

$$\nabla_s L^i_j=\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s}+\Gamma^i_{sp}L^p_j-\Gamma^p_{js}L^i_p,\quad \frac{\partial^2\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^u\partial q^v}=\Gamma^w_{uv}\overrightarrow{\mathbf{r}}_w.$$

$$\left(\Gamma^{\bullet w}_{u\bullet v}\right)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\rho}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & -\rho\\ \dfrac{1}{\rho} & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \dfrac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}$. $\quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\dfrac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho. \quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{r}}|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}. \quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\rho} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho. \quad \left(\nabla_s L^i_j\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_p\Gamma^p_{js}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\rho} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}=\frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}=\frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathbf{L}}=\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi}-\frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right)=\left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s}+\Gamma^i_{sp}L^p_j-L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\rho}\\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^{s}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}=$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \frac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^{s}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} -$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho}.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j\,\overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} -$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(L^i_j(\rho,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi - \frac{1}{\rho^2}\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

$$\left(\nabla_s L^i_{\bullet j}\right) = \left(\frac{\partial L^i_j}{\partial q^s} + \Gamma^i_{sp}L^p_j - L^i_{\bullet p}\Gamma^p_{js}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_s L^i_j \overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi - \frac{1}{\rho^3}\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}};\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}}=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho}=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi=-\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\nabla_s L^i_j\overrightarrow{\mathbf{r}}^s\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_i\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^j=\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi-\frac{1}{\rho^3}\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho.$$

$$\left(b^i_{\bullet j}\right)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix},\qquad\left(a^i_{\bullet j}\right)=\left(b^i_{\bullet j}\right)^{-1}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

$$\left(a^u_{\bullet s}b^i_{\bullet v}a^w_{\bullet j}\nabla_u L^v_{\bullet w}\right)=\left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w}a^w_{\bullet j}\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^t\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\rho}\\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0\end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\end{array}\right)=$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \dfrac{d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho^2} \\ -\dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v} \nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ -\dfrac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho^2} \\ -\dfrac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{r}}^\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^\varphi = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

$$\left(a^u_{\bullet s} b^i_{\bullet v} a^w_{\bullet j} \nabla_u L^v_{\bullet w}\right) = \left(a^u_{\bullet s}\left[b^i_{\bullet v}\nabla_u L^v_{\bullet w} a^w_{\bullet j}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ -\frac{1}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ -\frac{\cos\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin\varphi}{\rho^2} \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho^2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{\rho^3} \\ -\frac{x}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{\rho^3} \\ -\frac{y}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$
$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{d\rho} = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$
$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}^{\varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$

$$\left(a^{u}_{\bullet s} b^{i}_{\bullet v} a^{w}_{\bullet j} \nabla_{u} L^{v}_{\bullet w}\right) = \left(a^{u}_{\bullet s}\left[b^{i}_{\bullet v}\nabla_{u} L^{v}_{\bullet w} a^{w}_{\bullet j}\right]\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{\rho^3} \\ -\dfrac{x}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{\rho^3} \\ -\dfrac{y}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.
Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,,$$ имеет вид

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.
Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \text{ имеет вид } \quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\begin{matrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{matrix}\right),$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\text{, имеет вид}\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\qquad\qquad\right),$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\text{, имеет вид}\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\qquad\qquad\qquad\right),$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\right] =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\;\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\text{, имеет вид}\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\qquad\qquad\qquad\right),$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. Поэтому матрица оператора $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\ \text{имеет вид}\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \text{ имеет вид } \quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{array}\right),$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\,\overrightarrow{\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.
Локальный базис этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.
Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\ \text{имеет вид}\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,, \text{ имеет вид } \quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \text{ имеет вид } \quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^i_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \text{ имеет вид } \quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Проведем вычисления в декартовой системе координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. **Локальный базис** этой системы в точке с координатами $(x;y)$ равен $\mathbf{Б}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$.

Поэтому **матрица оператора** $\hat{L}$ в локальном базисе, соответствующем точке с радиус-вектором

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\text{, имеет вид}\quad L_{\mathbf{Б}'} = \left(L'^{i}_{j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left[x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x; y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L'^i_j\right) =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L'^i_j\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости П, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости П.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L'^i_j\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,; \overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ. Итак, тензорное поле имеет вид: $L\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля системы координат $\Phi'(x;y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ — нулевые. Поэтому

$$\left(\nabla_s L'^i_j\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Это совпадает с полученным ранее результатом, представленным **формулой (8)**.

Задача 20. Найдите ковариантную производную поля линейных операторов, каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ сопоставляющий линейный оператор $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ плоскости Π, заданный формулой $\hat{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}\right|}\left[\overrightarrow{\mathbf{k}}\,;\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]$, где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости Π.

Ответ.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?