Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Элементы математической логики: исчисления

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Исчисления, языки, модели

Одной из основных целей введения **исчисления** в каждом разделе математики (разумеется, не только математики) является обеспечение «работы» с соответствующими объектами на грамматическом, формальном уровне, без привлечения семантики (то есть смыслового значения) соответствующих грамматических конструкций: слов, символов, обозначений, выражений, формул и т.п.

Рассмотрим иллюстративный пример?

I. Исчисления, языки, модели

Основными инструментальными понятиями исчислений являются понятия *формулы* и *выводимости формулы*. Под формулой понимается высказывание, записанное средствами соответствующего языка, а под выводом формулы — некая жестко формализованная процедура «доказательства истинности» этой формулы.

I. Исчисления, языки, модели

Основными инструментальными понятиями исчислений являются понятия *формулы* и *выводимости формулы*. Под формулой понимается высказывание, записанное средствами соответствующего языка, а под выводом формулы — некая жестко формализованная процедура «доказательства истинности» этой формулы.

Следует отметить, что выразительные возможности различных языков существенно различаются. «Платой» за повышение универсальности языка часто является, например, большая громоздкость формул, существенное «уменьшение» (в том или ином смысле) множества доказуемых формул и т.п.

I. Исчисления, языки, модели

Одна из задач математической логики — построение процедур, которые позволяли бы на синтаксическом уровне выяснять, истинны ли те или иные утверждения в любой модели при определенной интерпретации грамматических конструкций.

Таким образом, с помощью исчислений работа с объектами «по существу» заменяется на формальное преобразование некоторых «слов», цепочек символов.

I.1. Исчисления

Определение 1. *Говорят, что задано* **исчисление** I, *если заданы следующие четыре множества:*

- **алфавит** $A(I)$;
- *множество* $E(I)$ *слов алфавита* $A(I)$, *называемое* **множеством выражений** *исчисления* I;
- *множество* $Ax(I)$ *выражений исчисления* I, *называемое* **множеством аксиом** *исчисления* I;
- *множество* $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ *частичных операций на множестве* $E(I)$, *называемых* **правилами вывода** *исчисления* I.

I.1. Исчисления

Выражения **исчисления** I называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

I.1. Исчисления

Выражения **исчисления** I называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

При этом указывается область определения функции f, если она не совпадает с $(E(I))^n$. При этом $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ называются **посылками**, а $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — **заключением**.

I.1. Исчисления

Выражения **исчисления** I называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

При этом указывается область определения функции f, если она не совпадает с $(E(I))^n$. При этом $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ называются **посылками**, а $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — **заключением**.

Пара $\langle A(I), E(I) \rangle$ называется **языком** **исчисления** I и обозначим через $\mathcal{L}(I)$.

I.2. Теорема исчисления

Определение 2. *Пусть $T(I)$ — подмножество множества выражений $E(I)$, определяемое индуктивным правилом (то есть наименьшее множество, для которого выполняются следующие утверждения)*

- $Ax(I) \subseteq T(I)$;
- *если* $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subseteq T(I)$, *то для любого* n*-местного правила вывода* f ***исчисления*** I *имеем* $f(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in T(I)$.

Тогда множество $T(I)$ *называется* **множеством теорем** ***исчисления*** I *или* **множеством доказуемых выражений** ***исчисления*** I, *а его элементы —* **теоремами** ***исчисления*** I.

I.2. Теорема исчисления

Определение 2. *Пусть $T(I)$ — подмножество множества выражений $E(I)$, определяемое индуктивным правилом (то есть наименьшее множество, для которого выполняются следующие утверждения)*

- $Ax(I) \subseteq T(I)$;
- *если* $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subseteq T(I)$, *то для любого* n*-местного правила вывода* f ***исчисления*** I *имеем* $f(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in T(I)$.

Тогда множество $T(I)$ *называется* **множеством теорем** ***исчисления*** I *или* **множеством доказуемых выражений** ***исчисления*** I, *а его элементы —* **теоремами** ***исчисления*** I.

Теория языка $L(I)$ — произвольное множество теорем этого языка.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Под **высказыванием** понимается фраза, относительно которой является осмысленным вопрос «верна эта фраза или не верна». Например, фразы

- на Марсе есть жизнь;
- у всех кошек по 8 ног;
- $x + y < 6$;

являются высказываниями, а фразы типа «закройте, пожалуйста, дверь», или «который час?» высказываниями (в теоретико-логическом понимании) не являются.

II. Неформальное введение в теорию моделей

В математической логике рассматриваются фразы, запись которых формализована, то есть фразы, которые имеют, например, вид $\forall x\ \exists y\ x + y > 1$. При этом вся эта формула может быть заменена, например, каким-либо символом.

Простейшая логика — логика высказываний — получается, когда мы работаем только с фразами, представляющими некоторые «абсолютные» утверждения, то есть фразами, в которых нет «переменных». Например, фразу «на улице прекрасная погода» можно считать в этом смысле «абсолютной», в ней отсутствует явная ссылка на какую-либо «переменную», и ее истинность определяется только контекстом (когда она сказана, что понимается под «прекрасной погодой» и т.п.).

II. Неформальное введение в теорию моделей

Фраза «x окончил учебное заведение y» является «относительной», в ней явно указаны «переменные», от которых зависит истинность или ложность этого высказывания. Например, бланк анкеты обычно состоит из таких «относительных» высказываний, и предполагается, что человек заполняет ее так, чтобы в ней были только верные высказывания. Важный пример: $x + y = 2$ является «относительным» высказыванием, истинность которого зависит от значений явно указанных переменных x, y, а высказывание $\forall x\ \exists y\ x + y = 2$ или высказывание $\exists y\ \forall x\ x + y = 2$ являются «безусловными», «абсолютными». Конечно, здесь все зависит от того, как что понимаем под «явным указанием переменной» и вообще, что мы понимаем под «переменной» в конкретном случае.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Например, можно считать, что высказывание «на улице прекрасная погода» переменных не имеет, а можно считать, что здесь «прекрасная погода» — это переменная, ведь каждый в эти слова вкладывает свой смысл, в зависимости от склонностей и ситуации. Предполагается, что мы заранее договорились о том, есть ли в рассматриваемых высказываниях переменные, и каковы они.

II. Неформальное введение в теорию моделей

В **исчислении высказываний** рассматриваются только формулы, использующие, кроме переменных и вспомогательных символов: скобок, запятых и т.п., только символы логических связок, т.е. **логических функций**. При этом, на самом деле, семантика всех рассматриваемых символов, включая логические связки, не фиксируется, и, в принципе, может быть нетрадиционной.

Например, символ $\wedge$ может обозначать как булеву функцию «дизъюнкция», так и одноименную логическую функцию, то есть функцию, определенную на множестве высказываний, которая паре высказываний P, Q ставит в соответствие высказывание «P и Q».

II. Неформальное введение в теорию моделей

В **исчисленииi высказываний** рассматриваются только формулы, использующие, кроме переменных и вспомогательных символов: скобок, запятых и т.п., только символы логических связок, т.е. **логических функций**. При этом, на самом деле, семантика всех рассматриваемых символов, включая логические связки, не фиксируется, и, в принципе, может быть нетрадиционной.

Однако, в принципе, можно считать, что $\wedge$ — это обозначение операции пересечение множеств, или «вложить» в этот символ какой-либо «экзотический» смысл. Как обычно, требуется лишь, чтобы выполнялись соответствующие требования: аксиомы соответствующего **исчисления**, правила вывода, и чтобы при этом обеспечивалось соответствующее «согласование» модельного и теоретико-логического подхода, основанного на понятиях выводимости, доказуемости.

II. Неформальное введение в теорию моделей

В **исчислении предикатов** рассматриваются два типа переменных: предметные и пропозициональные (высказывательные). Обычная семантика: пропозициональная переменная обозначает некоторое высказывание, в частности, предикат (в смысле предикат-высказывание), а предметная переменная, вообще говоря, обозначает некоторый «объект», относительно которого «сформулировано» данное высказывание. Например, если p — пропозициональная переменная местности 3, то $p(x, y, z)$ может обозначать и высказывание $x + y < y + z$, и высказывание «если человек x является физиком, а y — художником, то человек z будет для них интересным собеседником». Здесь x, y, z — предметные переменные. В ассертоническом исчислении высказываний рассматривается два квантора: квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$. В модальной, темпоральной и других логиках вводятся дополнительные кванторы.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Одним из центральных моментов в рассматриваемой теории является понятие **модели**. Моделью теории T, то есть некоторого множества формул языка называется такая интерпретация (каждый раз необходимо четко определить, что это такое) формальных конструкций языка: слов, отдельных символов и т.п., при которой все формулы из T являются истинными высказываниями.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Одним из центральных моментов в рассматриваемой теории является понятие **модели**. Моделью теории T, то есть некоторого множества формул языка называется такая интерпретация (каждый раз необходимо четко определить, что это такое) формальных конструкций языка: слов, отдельных символов и т.п., при которой все формулы из T являются истинными высказываниями.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Одним из центральных моментов в рассматриваемой теории является понятие **модели**. Моделью теории T, то есть некоторого множества формул языка называется такая интерпретация (каждый раз необходимо четко определить, что это такое) формальных конструкций языка: слов, отдельных символов и т.п., при которой все формулы из T являются истинными высказываниями.

Отметим, что *смысл* высказываний, на самом деле для исчисления высказываний несущественен. Важно лишь, какие из пропозициональных переменных истинны, а какие — ложны. Поэтому естественно в качестве модели теории в исчислении высказываний рассматривать не сами *высказывания* (при этом необходимо учитывать ситуацию, к которой относятся эти высказывания), а *значения истинности* всех пропозициональных переменных.

II. Неформальное введение в теорию моделей

В случае исчисления предикатов такое упрощение неприемлемо. Интерпретация формулы теперь должна учитывать области изменения предметных переменных и «смысл» предикатов и термов, который определяется семантикой пропозициональных переменных и терминальных символов. Например, для интерпретации формулы $\forall x \, \exists y \; P(x) \to Q(x, f(y))$ необходимо указать, во-первых, множество всех возможных значений предметных переменных x, y, во-вторых, какие предикаты (одноместный и, соответственно, двуместный) взяты в качестве P и Q, и, в-третьих, какая одноместная операция обозначена символом f.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Естественно, что теория может не иметь моделей. Это оказывается либо «патологией» рассматриваемого **исчисления**, либо «дефектом» самой теории. Для «классических» исчислений: исчисления высказываний, предикатов; а также «конкретных» исчислений: интегрального, дифференциального, матричного и т.п., отсутствие моделей той или иной теории означает противоречивость теории.

II. Неформальное введение в теорию моделей

Зафиксируем некоторое **исчисление** I. Особую роль в исчислении I играют формулы, которые оказываются верными в любой модели теории T. Естественно такие формулы считать *следствиями* теории T. Особенно важную роль играют формулы, которые верны в любой модели *любой* теории T рассматриваемого **исчисления** I. Например, такими формулами являются всевозможные тождества типа $(AB)C = A(BC)$ в матричном исчислении. Такие формулы называются **истинными в исчислении** I. Чисто семантическая проверка того, что данная формула является следствием теории T (а тем более, что она истинна в исчислении I) оказывается возможной только в таких «бедных» (в смысле количества моделей) исчислениях, как **исчисление** высказываний. Для, например, узкого исчисления предикатов пришлось бы рассматривать бесконечно много моделей теории (разумеется, если эта теория не противоречива).

II. Неформальное введение в теорию моделей

Поэтому для проверки истинности формулы обычно используют «чисто синтаксическую» процедуру — процедуру формального доказательства. Аксиомы и правила вывода соответствующего **исчисления** стараются вводить таким образом, чтобы обеспечить выполнение в исчислении I теоремы: формула Φ из $E(I)$ **исчисления** I является истинной тогда и только тогда, когда она доказуема (теорема о полноте).

III. Доказательство

Определение 3. Линейным доказательством *в исчислении высказываний называется такая последовательность* $S_0, S_1, \ldots, S_n$ *секвенций ИВ, что каждая секвенция* S_i *этой последовательности является либо аксиомой ИВ, либо получается из предыдущих секвенций* S_j *с помощью правил вывода 1-12. При этом секвенция* S_n *называется* **доказуемой в исчислении высказываний***. Формула* Φ *называется* **доказуемой в исчислении высказываний** *тогда и только тогда, когда в ИВ доказуема секвенция* $\vdash \Phi$*.*

Можно предложить форму записи линейного доказательства в виде **дерева**.

IV. Исчисление высказываний

Мы рассмотрим два варианта исчисления высказываний.

IV.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Словосочетание «**исчисление** высказываний» сокращенно будем записывать, как ИВ.

Предполагается, что в алфавите $\mathcal{A}$ нет знака $=$.

Алфавит исчисления высказываний состоит из трех групп символов:

Пропозициональные переменные: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, где n - натуральное число.

Логические символы или связки: импликация $\rightarrow$, конъюнкция & или $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\neg$ или $\overline{}$, символ следования $\vdash$.

Вспомогательные символы: левая круглая скобка, правая круглая скобка, запятая.

IV.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \to$

Определение 4. Формулой исчисления высказываний *назовем слова алфавита исчисления высказываний, удовлетворяющие следующему индуктивному определению:*

База: *Пропозициональная переменная является формулой (будем называть ее* **атомарной***).*

Индуктивный шаг: *Если* Φ *и* Ψ *— формулы, то* $(\Phi \to \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\neg\Phi)$ *— формулы.*

В целях сокращения записи внешние скобки будем опускать.

IV.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Определение 5. Секвенциями *исчисления высказываний называются последовательности следующих видов:*

- $\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_n \vdash \Psi$;
- $\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_n \vdash$;
- $\vdash \Psi$;
- $\vdash$.

Множество допустимых выражений в исчислении высказываний состоит из формул и секвенций исчисления высказываний.

IV.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Обозначим через $\mathcal{B}$ алфавит, содержащий кроме алфавита исчисления высказываний также переменные для формул и последовательностей формул. Обычно переменные для формул мы будем обозначать через Φ, Ψ, Ω, а переменные для последовательностей формул через Γ, Δ, Θ (возможно, с индексами).

Определение 6. Схемой секвенций *(схемой формул) исчисления высказываний будем называть такое слово в алфавите* $\mathcal{B}$*, что при любых подстановках в это слово вместо переменных для формул и вместо переменных для последовательностей формул конкретных формул и, соответственно, последовательностей формул, получаются секвенции (формулы) исчисления высказываний.*

IV.1.1. Система аксиом исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)

Система аксиом исчисления высказываний образуется единственной схемой секвенций: $\Phi \vdash \Phi$.

Запись типа $\Gamma \vdash$ обычно интепретируется, как утверждение о противоречивости набора формул Γ.

IV.1.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)

1. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$$

2. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$$

3. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$$

4. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$$

5. $$\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$$

6. $$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$$

7. $$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}$$

8. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$$

9. $$\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$$

10. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$$

11. $$\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$$

12. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$$

IV.1.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)

Правила 1-3 фактически разъясняют смысл конъюнкции, а правила 4-5 — дизъюнкции. Правило 6 позволяет проводить доказательство с помощью разбора двух возможных случаев. Правило 7 позволяет проводить эквивалентную переформулировку теоремы. Правило 8 — это так называемое правило **modus ponens** или «правило отделения», позволяющее сводить доказательство теоремы к уже доказанному утверждению. Правило 9, как нетрудно заметить, — это «доказательство от противного». Правило 10 позволяет доказывать противоречивость системы формул Г. Правило 11 говорит о том, что порядок посылок на самом деле не существенен. Правило 12, называется иногда «утончением» или «правилом лишней посылки».

Правила 1-10 называются **основными**, а правила 11-12 — **структурными**.

Пример 1. *Обозначим через A_1 первую аксиому теории групп:*

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\quad x\in G\,\&\,y\in G\,\&\,z\in G\;\Rightarrow(x*y)*z=x*(y*z),$$

через A_2 — вторую аксиому теории групп:

$$\exists e\; e\in G\&\forall x\quad x\in G\Rightarrow(x*e=x\,\&\,e*x=x),$$

через A_3 — третью аксиому теории групп:

$$\forall x\quad x\in G\;\Rightarrow\exists x'\;x'\in G\,\&\,x*x'=e\,\&\,x'*x=e.$$

Выразимы ли в логике высказываний следующие утверждения (некоторые из элементарных теорем теории групп): $\forall x\,\forall y\; x*y=x\Leftrightarrow y=e$ (критерий единичного элемента), $\forall x\,\forall y\; x*y=e\Leftrightarrow y=x'$ (критерий обратного элемента)?

Интуитивно очевидно, что эти теоремы не выразимы в логике высказываний. Таким образом, в логике высказываний выразимы, в основном только суждения типа $x\vee\neg x$. Строгое доказательство мы приводить не будем.

IV.1.3. Истинность и выводимость формулы исчисления высказываний

Смысловое значение формулы исчисления высказываний состоит в том, что ее можно рассматривать как функцию, описывающую зависимость значения истинности некоторого «составного» высказывания через значения истинности составляющих это «сложное» высказывание «простых» высказываний. Поэтому в исчислении высказываний интерпретация формулы сводится к присвоению всем переменным каких-либо значений. Формула называется **истинной** тогда и только тогда, когда она истинна в любой модели, при любой интерпретации этой формулы.

Рассмотрим пример?

IV.2. Система связок $\neg, \to$

Здесь используется так называемое **исчисление гильбертовского типа**. О гильбертовой аксиоматизации с использованием связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ см. [?][стр.52].

Отличие: обедняем систему связок — нет $\vee, \wedge$, меньше аксиом и правил вывода. Исключить эти связки можно, так как система связок $\neg, \to$ полна: $x \wedge y = \neg(x \to \neg y)$, $x \vee y = (\neg x) \to y$.

IV.2.1. Система аксиом исчисления высказываний (для $\neg, \rightarrow$)

Система аксиом исчисления высказываний «порождается» в этом случае следующими тремя схемами секвенций (в отличие от единственной секвенции):

1. $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$;
2. $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$;
3. $\Big((\neg\Psi \longrightarrow \neg\Phi) \longrightarrow \big((\neg\Psi \longrightarrow \Phi) \longrightarrow \Psi\big)\Big)$.

Мендельсон записывает аксиомы в виде Φ вместо $\vdash \Phi$.

IV.2.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \to$)

В данном случае можно ограничиться единственным правилом вывода: правилом **modus ponens** или **правилом отделения**: $\dfrac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$ (это «смесь» обозначений Мендельсона и Ершова, Мендельсон «дроби» не использует, применяя вместо этого чисто словесные формулировки, и вместо $\vdash \Phi$ пишет Φ).

Определение 7. *Формулы* Φ *и* Ψ *называются* **эквивалентными** *тогда и только тогда, когда доказуемы секвенции* $\Phi \vdash \Psi$ *и* $\Psi \vdash \Phi$.

Тот факт, что формулы Φ и Ψ эквивалентны записывается так: $\Phi \equiv \Psi$.

Рассмотреть пример?

V. Исчисления предикатов

Пропозициональная переменная — это переменная, значениями которой могут быть только предикаты.

V. Исчисления предикатов

Пропозициональная переменная — это переменная, значениями которой могут быть только предикаты.

Предметная переменная пробегает элементы некоторого множества **носителя модели**.

V. Исчисления предикатов

Пропозициональная переменная — это переменная, значениями которой могут быть только предикаты.

Предметная переменная пробегает элементы некоторого множества **носителя модели**.

Интерпретация формулы: имеется множество D, называемое **областью интерпретации** и интерпретирующая функция, каждому функциональному символу f_j^n ставящая в соответствие n-местную операцию на множестве D, каждому предикатному символу p_j^n — n-местный предикат на множестве D. Интерпретация кванторов — естественная.

V. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

V. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

V. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x,y) \to p\left(f_1^2(x,z), f_2^2(y,z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

Тогда исходная формула верна на последовательности $1, 2, 3$, так как исходная формула «превращается» в высказывание

V. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

Тогда исходная формула верна на последовательности $1, 2, 3$, так как исходная формула «превращается» в высказывание

$$1 \leq 2 \to 1 + 3 \leq 2 \cdot 3.$$

V. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x,y) \to p\left(f_1^2(x,z), f_2^2(y,z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

Тогда исходная формула верна на последовательности $1, 2, 3$, так как исходная формула «превращается» в высказывание

$$1 \leq 2 \to 1 + 3 \leq 2 \cdot 3.$$

На последовательности $4, 4, 1$ эта формула неверна: $4 \leq 4 \to 4 + 1 \leq 4 \cdot 1$ — неверно, так как посылка импликации верна, а заключение — ложно.

V. Исчисления предикатов

Если формула верна на любой последовательности, то она называется **истинной** (в данной интерпретации).

V. Исчисления предикатов

Если формула верна на любой последовательности, то она называется **истинной** (в данной интерпретации).

Например, если в вышеприведенном примере несколько изменить интерпретацию, положив терм $s(f_2^2)$ равным сумме, формула $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$ будет истинной, так как в данной интерпретации на любой последовательности x, y, z из $D = \mathbb{Z}$ получаем верное утверждение $(x \leq y) \ \to \ (x + z \leq y + z)$.

V. Исчисления предикатов

В этом разделе речь идет о так называемом «узком исчислении предикатов» (УИП), в котором применение кванторов допускается только к предметным переменным, и не допускается их применение к пропозициональным переменным.

V. Исчисления предикатов

В этом разделе речь идет о так называемом «узком исчислении предикатов» (УИП), в котором применение кванторов допускается только к предметным переменным, и не допускается их применение к пропозициональным переменным.

Модель теории T — такая интерпретация, в которой любая формула из T истинна. Теория называется **противоречивой** тогда и только тогда, когда она не имеет моделей. В противном случае она называется **непротиворечивой** теорией.

V. Исчисления предикатов

В этом разделе речь идет о так называемом «узком исчислении предикатов» (УИП), в котором применение кванторов допускается только к предметным переменным, и не допускается их применение к пропозициональным переменным.

Модель теории T — такая интерпретация, в которой любая формула из T истинна. Теория называется **противоречивой** тогда и только тогда, когда она не имеет моделей. В противном случае она называется **непротиворечивой** теорией.

Система аксиом и правил вывода строится таким образом, чтобы теория T была противоречивой тогда и только тогда, когда $T \vdash \Phi$ и $T \vdash \neg\Phi$ для *некоторой* формулы Φ. При этом оказывается, что теория T противоречива тогда и только тогда, когда $T \vdash \Phi$ и $T \vdash \neg\Phi$ для *любой* формулы Φ.

V.1. Исчисление предикатов в ассертоническом пропозициональном исчислении

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Зафиксируем некоторую сигнатуру Σ. Определим ***исчисление высказываний сигнатуры*** Σ, сокращенно ИП$^{\Sigma}$.

Алфавит равен

$$V \cup F \cup R \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \approx\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{(,)\} \cup \{, \}.$$

Семантика: $\approx$ обычно означает «тождественно равно», V — множество предметных переменных, F — множество (основных) операций, R — множество (основных) предикатов.

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Семантика: термы являются обозначениями операций, получающихся из основных операций с помощью суперпозиции операций. Можно на терм смотреть, и как на значение операции на элементах, обозначенных соответствующими переменными.

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Например, пусть $f, g \in F$, где «местность» этих операций «указана» в сигнатуре Σ, например, они двуместные.

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Терм $f(x, g(x, y))$ определяет новую (двуместную) операцию, причем определяется эта операция тем, что указывается *значение* этой операции на элементах x, y.

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Терм $f(x, g(x, y))$ определяет новую (двуместную) операцию, причем определяется эта операция тем, что указывается *значение* этой операции на элементах x, y. Если фиксировать интерпретацию этих переменных, получим элемент из носителя.

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Если в выражении $f(x, g(x, y))$ значения переменных x, y произвольны, например, в формулах типа $\forall x \forall y\, f(x, g(x, y)) < A$, то $f(x, g(x, y))$ задает операцию.

V.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

В формулах типа $\exists z\; f(A, g(A, B)) < z$, где A, B — некоторые константы (то есть нульместные операции), терм $f(A, g(A, B))$ определяет некоторый элемент носителя соответствующей алгебраической системы.

V.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Сейчас мы определим понятие **формулы** в УИП — узком исчислении предикатов. Как обычно, формула обозначает некоторое *высказывание* о термах и предикатах алгебраической системы сигнатуры Σ. Здесь приходится учитывать одно обстоятельство, приводящее к разделению теорий, сформулированных в терминах исчисления предикатов, на теории первого и второго порядка.

V.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

В случае теорий первого порядка (узкое **исчисление** предикатов) формула фактически представляет собой высказывание о термах этой алгебраической системы *в терминах* основных предикатов этой системы. Например, если отношение $<$ входит в множество основных предикатов алгебраической системы сигнатуры Σ, то $x < y$ является высказыванием о термах $x, y \in V$. Если же $<$ не входит множество основных предикатов, то такое высказывание в рамках соответствующей теории невозможно. Например, отношение «меньше» определено для действительных чисел, но не определено для комплексных чисел, поэтому утверждение $x < y$ для комплексных значений переменных x, y является бессмысленным, то есть в соответствующей теории слово $x < y$ не является формулой.

V.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Отметим, что $p(x, y)$ естественно считать формулой, так как вопрос «верно ли, что $p(x, y)$» является осмысленным. В случае теорий второго порядка формула может являться высказыванием о предикатах алгебраической системы, то есть *о других формулах*. Например, «формула» $\exists p\, \forall x\, \forall y\, \forall z\; p(x, y) \wedge p(y, z) \to p(x, z)$ является утверждением о том, что в алгебраической системе имеется транзитивное отношение. В принципе, такие формулы могут обозначать высказывание об этой же формуле, то есть получим «высказывание формулы о самой себе» — ситуация, как хорошо известно, чреватая парадоксами и другими «неприятностями».

V.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Для того, чтобы исключить указанные трудности, возникающие в теориях второго порядка, оказывается, достаточно потребовать, чтобы в формулах нельзя было бы навешивать кванторы на предикатные символы. Это обстоятельство приводит к следующему понятию **формулы узкого исчисления предикатов** или, сокращенно, **формулы УИП**.

V.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Определение 8. *Множество* **формул** ИП^Σ *или* **формул сигнатуры** Σ *определяется следующим индуктивным правилом:*

База: *1. если* $r \in R$, $\mu(r) = n$ *и* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *— термы, то слово* $r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *является формулой* ИП^Σ;

2. если t_1, t_2 *— термы, то слово* $t_1 \approx t_2$ *является формулой* ИП^Σ;

Шаг: *1. если* Φ, Ψ *— формулы* ИП^Σ, *то* $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$ *и* $\neg\Phi$ *— формулы* ИП^Σ;

2. если Φ *— формула* ИП^Σ, $x \in V$, *то* $\forall x\, \Phi$ *и* $\exists x\, \Phi$ *— формулы* ИП^Σ.

V.1.3. Аксиомы и правила вывода ассертонического исчисления предикатов

Свободное вхождение переменной. Множество свободных переменных формулы Φ обозначим через $\mathrm{FV}(\Phi)$

Если Φ — формула ИП$^\Sigma$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные из V, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, то запись $(\Phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ обозначает результат подстановки термов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в формулу Φ, причем предполагается, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ ни одно свободное вхождение в Φ переменной x_i не входит в подформулу формулы Φ вида $\forall y \Phi_1$ или $\exists y \Phi_1$ для $y \in \mathrm{FV}(t_i)$.

V.1.4. Аксиомы исчисления предикатов

Аксиомы ИП$^\Sigma$ имеют вид:

1. $\Phi \vdash \Phi$, где Φ — формула ИП$^\Sigma$;
2. $\vdash x \approx x$, где x — переменная;
3. $x \approx y, (\Phi)^z_x \vdash (\Phi)^z_y$, где x, y, z — переменные, Φ — формула ИП$^\Sigma$, удовлетворяющая условию на записи $(\Phi)^z_x$ и $(\Phi)^z_y$.

V.1.5. Правила вывода в ИП$^{\Sigma}$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Omega, \quad \Gamma, \Psi \vdash \Omega, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash \Omega}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$;

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$;

11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$; 13. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \forall x \Phi}$, где x не входит в члены Γ свободно;

14. $\dfrac{\Gamma, (\Phi)_t^x \vdash \Psi}{\Gamma, \forall x \Phi \vdash \Psi}$; 15. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \Phi}$; 16. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \exists x \Phi \vdash \Psi}$, где x не входит в Ψ и члены Γ свободно.

V.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

V.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

Теорема 1 (о доказуемости тавтологии). *Любая тавтология* Ψ *сигнатуры* Σ *доказуема в ИП*$^{\Sigma}$.

Доказательство.

V.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$*. Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ*.*

Теорема 1 (о доказуемости тавтологии). *Любая тавтология* Ψ *сигнатуры* Σ *доказуема в ИП*$^{\Sigma}$*.*

Доказательство. Пусть Ψ получена из основы Φ заменой пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на формулы $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ ИП$^{\Sigma}$ соответственно.

V.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^Σ *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^\Sigma$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

Теорема 1 (о доказуемости тавтологии). *Любая тавтология* Ψ *сигнатуры* Σ *доказуема в ИП*$^\Sigma$.

Доказательство. Пусть Ψ получена из основы Φ заменой пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на формулы $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ ИП$^\Sigma$ соответственно.

В дереве доказательства формулы Φ заменим все P_i на Ψ_i, а все остальные переменные — на произвольную формулу Ψ_{n+1} сигнатуры Σ. Очевидно, что получим требуемое доказательство.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?