Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Тело кватернионов

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Определение кватерниона

Конструкцию тела кватернионов можно рассматривать как результат абстрагирования для векторной алгебры с операциями сложения и векторного произведения векторов в так называемом аффинном пространстве (в котором рассматриваются векторы и точки).

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j,$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (\mathbf{a_1 a_2} - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $\mathbf{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 \mathbf{- b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2}) +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + \mathbf{b_2} i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (\mathbf{a_1 b_2} + \qquad\qquad\qquad\qquad)\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a+bi+cj+dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=$$

$$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i+(c_1+c_2)\,j+(d_1+d_2)\,k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2=j^2=k^2=-1$, $i\cdot j=k=-j\cdot i,\quad j\cdot k=i=-k\cdot j,\quad k\cdot i=j=-i\cdot k$

$$(a_1+\mathbf{b_1}i+c_1j+d_1k)\,(\mathbf{a_2}+b_2i+c_2j+d_2k)=$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+(a_1b_2+\mathbf{a_2b_1}+\qquad\qquad\qquad)\,i+$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $\quad \mathbf{j \cdot k = i} = -k \cdot j$, $\quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + \mathbf{c_1} j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + \mathbf{d_2} k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mathbf{c_1 d_2} - \qquad)\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = \mathbf{i = -k \cdot j}, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + \mathbf{d_1} k)\,(a_2 + b_2 i + \mathbf{c_2} j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - \mathbf{c_2 d_1})\, i +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + \mathbf{c_2} j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (\mathbf{a_1 c_2} + \qquad\qquad\qquad\qquad)\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + \mathbf{c_1} j + d_1 k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + \mathbf{a_2 c_1} + \qquad\qquad\qquad)\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad \mathbf{k \cdot i = j} = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + \mathbf{d_1} k)\,(a_2 + \mathbf{b_2} i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + \mathbf{d_1 b_2} - \qquad)\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = \mathbf{j = -i \cdot k}$

$$(a_1 + \mathbf{b_1} i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + \mathbf{d_2} k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - \mathbf{b_1 d_2})\, j +$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(\mathbf{a_1} + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + \mathbf{d_2} k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (\mathbf{a_1 d_2} + \qquad\qquad\qquad)\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + \mathbf{d_1} k)\,(\mathbf{a_2} + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$
$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + \mathbf{a_2 d_1} + \qquad\qquad\qquad)\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + \mathbf{b_1} i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + \mathbf{c_2} j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + \mathbf{b_1 c_2} - \qquad)\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

а для произведения вводятся дополнительные соотношения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = \mathbf{k = -j \cdot i}$, $\quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$

$$(a_1 + b_1 i + \mathbf{c_1} j + d_1 k)\,(a_2 + \mathbf{b_2} i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - \mathbf{b_2 c_1})\, k.$$

Определение кватерниона

Кватернионом называется многочлен (выражение) $a + bi + cj + dk$ от переменных i, j, k, где a, b, c, d — действительные числа.

Сумма и **произведение кватернионов** определяются также как соответствующие операции для многочленов нескольких переменных:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k$$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)\, i +$$

$$+ (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\, j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)\, k.$$

Это умножение называют **умножением Грассмана**.

Рассмотрим пример?

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом****.*

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом****.*

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом****.*

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является* ***телом****.*

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь. А именно, применим **стратегию построения модели**.

II. Теорема о теле кватернионов

Теорема 1 (о теле кватернионов). *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь. А именно, применим **стратегию построения модели**.

Построим модель алгебры кватернионов средствами **матричной алгебры**.

III. Матричное представление алгебры кватернионов

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой[1]

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Здесь под p^{φ} понимается образ элемента p относительно действия функции φ.

III. Матричное представление алгебры кватернионов

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой[2]

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

[2]Здесь под p^{φ} понимается образ элемента p относительно действия функции φ.

III. Матричное представление алгебры кватернионов

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой[3]

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi}=\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

---

[3]Здесь под p^{φ} понимается образ элемента p относительно действия функции φ.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{gathered} ((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} ((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{gathered} ((a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k))^{\varphi} = \\ = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\varphi} + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\varphi} \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} ((a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k))^{\varphi} = \\ = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\varphi}\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\varphi}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ &= (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{gathered}((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,.\end{gathered} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L=R$ равносильными преобразованиями к тождеству (при оформлении доказательства полученную цепочку равенств следует выписать в обратном порядке: от тождества к доказываемому равенству $L=R$);

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{aligned} &((a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k))^{\varphi} = \\ &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\varphi} + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &((a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k))^{\varphi} = \\ &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\varphi}\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L = R$ равносильными преобразованиями к тождеству;

2) доказательство двух неравенств: $\quad L \le R \quad$ и $\quad L \ge R$;

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{gathered} ((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} ((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L = R$ равносильными преобразованиями к тождеству;

2) доказательство двух неравенств: $L \le R$ и $L \ge R$;

3) применение метода «от противного».

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Действительно, нам надо проверить **выполнение формул**:

$$\begin{gathered} ((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi} \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} ((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} = \\ = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}\,(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) **приведение равенства $L=R$ к тождеству**;

2) доказательство двух неравенств: $\quad L\le R \quad$ и $\quad L\ge R$;

3) применение метода «от противного».

Применим **первый способ**.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^\varphi =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k))^{\varphi} =$$

$$= (a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k)^{\varphi} =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k)^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b_1+b_2)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + (c_1+c_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (d_1+d_2)\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для сложения имеем, вычисляя левую часть доказываемого **равенства (2)**

$$((a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k))^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k)^{\varphi} =$$

$$= (a_1+a_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b_1+b_2)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + (c_1+c_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (d_1+d_2)\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -\,(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2) & (c_1 + c_2) + i\,(d_1 + d_2) \\ -\,(c_1 + c_2) + i\,(d_1 + d_2) & (a_1 + a_2) - i\,(b_1 + b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2) & (c_1 + c_2) + i\,(d_1 + d_2) \\ -\,(c_1 + c_2) + i\,(d_1 + d_2) & (a_1 + a_2) - i\,(b_1 + b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\varphi} + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\varphi} =$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi}=\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L=\begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -\,(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}=$$

$$=\left(a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b_1\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+d_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)+$$

$$+\left(a_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right),$$

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразуем правую часть **равенства (2)**:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)^{\varphi}+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)^{\varphi}=$$
$$= \left(a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) +$$
$$+ \left(a_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right),$$

что приводится к полученному выше выражению для левой части L **равенства (2)**.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Таким образом, левая часть доказываемого **равенства (2)** приведена в виду

$$L = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2) & (c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) \\ -(c_1+c_2)+i\,(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-i\,(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, правая часть **равенства (2)** приведена к тому же виду, что и его левая часть. **Равенство (2)** доказано.

III.1. Доказательство представимости

Нетрудно проверить, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Для доказательства **равенства (3)** достаточно проверить соотношения $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k,$ что не вызывает проблем у человека, знакомого с операцией **произведения матриц**.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

Существование обратного элемента относительно умножения кватернионов следует из того, что **отображение (1)** является мономорфизмом, **критерия существования обратной матрицы** и невырожденности ненулевой матрицы

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix},$$

(т.е. если хотя бы один коэффициент не равен 0):

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix} =$$

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix} = (a + bi)(a - bi) - (c + di)(-c + di) =$$

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix} = (a + bi)(a - bi) - (c + di)(-c + di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi}=\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}=(a+bi)(a-bi)-(c+di)(-c+di)=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Значит, матрица $(a+bi+cj+dk)^{\varphi}=\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ обратима, если хотя бы один из коэффициентов не равен 0.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Из этого утверждения следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi)-(c+di)(-c+di) = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Значит, матрица $(a+bi+cj+dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ обратима, если хотя бы один из коэффициентов не равен 0.

Теорема 1 о теле кватернионов доказана.

III.2. Завершение доказательства теоремы 1

Таким образом, доказано, что отображение, заданное формулой

$$(a + bi + cj + dk)^{\varphi} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{1}$$

является мономорфизмом (т.е. однозначным **гомоморфизмом**) алгебры кватернионов в алгебру матриц.

Рассмотрим пример?

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**:

$$\overbrace{\mathrm{a}}^{\textbf{скалярная часть}} + \underbrace{bi + cj + dk}_{\textbf{векторная часть}}.$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

Векторной части $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ сопоставим вектор $b\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\overrightarrow{\mathbf{k}}$, т.е введем отображение ψ формулой

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a+bi+cj+dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi+cj+dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi+cj+dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2=j^2=k^2=-1$, $i\cdot j=k=-j\cdot i$, $j\cdot k=i=-k\cdot j$, $k\cdot i=j=-i\cdot k$,

$$(b_1i+c_1j+d_1k)\,(b_2i+c_2j+d_2k) =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \qquad (2)$$

Имеем, в силу $\mathbf{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 +$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - \qquad)\,i$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - \qquad)\,j +$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\,j +$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a+bi+cj+dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi+cj+dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi+cj+dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2=j^2=k^2=-1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}=-j\cdot i$, $j\cdot k=i=-k\cdot j$, $k\cdot i=j=-i\cdot k$,

$$(b_1 i+c_1 j+d_1 k)\,(b_2 i+c_2 j+d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\,j + (b_1 c_2 - \qquad)\,k =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = \mathbf{k = -j \cdot i}$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,i + (b_2 d_1 - b_1 d_2)\,j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\,k =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a+bi+cj+dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi+cj+dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi+cj+dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

Имеем, в силу $i^2=j^2=k^2=-1, \quad i\cdot j=k=-j\cdot i, \quad j\cdot k=i=-k\cdot j,$ $k\cdot i=j=-i\cdot k,$

$$\left(b_1 i + c_1 j + d_1 k\right)\left(b_2 i + c_2 j + d_2 k\right) =$$

$$= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + \left(c_1 d_2 - c_2 d_1\right) i + \left(b_2 d_1 - b_1 d_2\right) j + \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) k =$$

$$= -\left(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2\right) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \qquad (2)$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно формулам векторной алгебры,

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a+bi+cj+dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi+cj+dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi+cj+dk)^{\psi}=b\overrightarrow{\mathbf{i}}+c\overrightarrow{\mathbf{j}}+d\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1i+c_1j+d_1k)\,(b_2i+c_2j+d_2k)=-\,(b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2)+\begin{vmatrix} i & j & k\\ b_1 & c_1 & d_1\\ b_2 & c_2 & d_2\end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно формулам векторной алгебры,

$$(b_1i+c_1j+d_1k)\cdot\,(b_2i+c_2j+d_2k)=$$

$$=-\left(b_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+c_1\overrightarrow{\mathbf{j}}+d_1\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+c_2\overrightarrow{\mathbf{j}}+d_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)+\left[b_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+c_1\overrightarrow{\mathbf{j}}+d_1\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+c_2\overrightarrow{\mathbf{j}}+d_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]^{\psi^{-1}}=$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно формулам векторной алгебры,

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$

$$= -\left(b_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left[b_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\ b_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]^{\psi^{-1}} =$$

$$= -\left((b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\psi},\ (b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\psi}\right) + \left[(b_1 i + c_1 j + d_1 k)^{\psi},\ (b_2 i + c_2 j + d_2 k)^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}.$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}},$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a+bi+cj+dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi+cj+dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi+cj+dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_2^{\psi},\ u_1^{\psi}\right) + \left[u_2^{\psi},\ u_1^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}.$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a+bi+cj+dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi+cj+dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi+cj+dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) - \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}. \tag{3}$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) - \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}. \tag{3}$$

Получаем формулы для скалярного и векторного произведения:

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,. \tag{2}$$

$$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -\,(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов $u_p = b_p i + c_p j + d_p k$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) - \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}. \tag{3}$$

Получаем формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\,(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1)\,, \quad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\,(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^{\psi} \tag{4}$$

Рассмотрим пример?

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \qquad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] +$$

$$+ \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right) u_3 - u_3 \left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right) +\right.$$

$$+ \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) u_1 - u_1 \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$\left.+ \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \qquad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi} \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right],\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left[u_2^{\psi},\ u_3^{\psi}\right],\ u_1^{\psi}\right] + \left[\left[u_3^{\psi},\ u_1^{\psi}\right],\ u_2^{\psi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi},\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^{\psi},\ u_1^{\psi}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right) + \right.$$

$$+ \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) u_1 - u_1\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$\left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^{\psi} =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) u_1 - u_1 \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$\left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right) +$$

$$\left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right) u_2 - u_2\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] +\right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1u_2u_3 - u_2u_1u_3 - u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 +\right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 - u_1u_2u_3 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)u_2 - u_2\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] +\right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 +\right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + u_2 u_1 u_3\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u_1 u_2 u_3} - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - \mathbf{u_1 u_2 u_3} + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + u_2 u_1 u_3\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-u_2u_1u_3 - u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. + u_3u_1u_2 - u_1u_3u_2 - u_2u_3u_1 + u_2u_1u_3\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\mathbf{u_2 u_1 u_3} - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + \mathbf{u_2 u_1 u_3}\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \qquad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-u_3u_1u_2 + u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. + u_3u_1u_2 - u_1u_3u_2 - u_2u_3u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\mathbf{u_3 u_1 u_2} + u_3 u_2 u_1 + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. + \mathbf{u_3 u_1 u_2} - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_3u_2u_1 + \right.$$

$$+ u_2u_3u_1 - u_3u_2u_1 + u_1u_3u_2 +$$

$$\left. - u_1u_3u_2 - u_2u_3u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u_3 u_2 u_1} + \right.$$

$$+ u_2 u_3 u_1 - \mathbf{u_3 u_2 u_1} + u_1 u_3 u_2 +$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_2 u_3 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right.$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u_2 u_3 u_1} + u_1 u_3 u_2 + \right.$$

$$\left. - u_1 u_3 u_2 - \mathbf{u_2 u_3 u_1}\right)^\psi =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi} \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right],\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left[u_2^{\psi},\ u_3^{\psi}\right],\ u_1^{\psi}\right] + \left[\left[u_3^{\psi},\ u_1^{\psi}\right],\ u_2^{\psi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi},\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^{\psi},\ u_1^{\psi}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1 u_3 u_2 - u_1 u_3 u_2\right)^{\psi} =$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi,\ u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1\cdot u_2 + u_2\cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1\cdot u_2 - u_2\cdot u_1\right)^\psi \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi,\ u_2^\psi\right],\ u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi,\ u_3^\psi\right],\ u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi,\ u_1^\psi\right],\ u_2^\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1\cdot u_2 - u_2\cdot u_1\right)^\psi,\ u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2\cdot u_3 - u_3\cdot u_2\right)^\psi,\ u_1^\psi\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(u_3\cdot u_1 - u_1\cdot u_3\right)^\psi,\ u_2^\psi\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_1u_3u_2 - u_1u_3u_2\right)^\psi = 0.$$

IV. Геометрическая интерпретация тела кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^{\psi} \tag{4}$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right],\ u_3^{\psi}\right] + \left[\left[u_2^{\psi},\ u_3^{\psi}\right],\ u_1^{\psi}\right] + \left[\left[u_3^{\psi},\ u_1^{\psi}\right],\ u_2^{\psi}\right] = 0. \tag{5}$$

IV. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

Векторной части $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ сопоставлен вектор $b\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\overrightarrow{\mathbf{k}}$, т.е введем отображение ψ формулой

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b\overrightarrow{\mathbf{i}} + c\overrightarrow{\mathbf{j}} + d\overrightarrow{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

Для кватернионов $a_p + \underbrace{b_p i + c_p j + d_p k}_{u_p}$, где $p \in \{1;\ 2\}$:

$$(a_1 + u_1) \cdot (a_2 + u_2) = \underbrace{a_1 a_2 - \left(u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right)}_{\text{скалярная часть}} + \underbrace{a_1 u_2 + a_2 u_1 + \left[u_1^{\psi},\ u_2^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}}_{\text{векторная часть}}. \tag{6}$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Вычисление элемента, обратного относительно произведения, можно с помощью представления (в данном случае — изоморфизма), заданного **формулой (1)** и **вычисления обратной матрицы**. Однако, хотелось бы иметь явную формулу для нахождения обратного элемента.

V. Деление в алгебре кватернионов

Вычисление элемента, обратного относительно произведения, можно с помощью представления (в данном случае — изоморфизма), заданного **формулой (1)** и **вычисления обратной матрицы**. Однако, хотелось бы иметь явную формулу для нахождения обратного элемента.

Применим **стратегию поиска аналогии**. Алгебра кватернионов является развитием алгебры комплексных чисел, поэтому можно попробовать ввести **аналогичные конструкции**.

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**:

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} =$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) =$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

Из **курса векторной алгебры** известно, что векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор (так как длина векторного произведения коллинеарных векторов равна 0).

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

Из **курса векторной алгебры** известно, что векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор (так как длина векторного произведения коллинеарных векторов равна 0).

Следовательно, по формуле для вычисления **скалярного произведения векторов с помощью их координат**

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^{\psi},u^{\psi}\right)+\left[u^{\psi},u^{\psi}\right]^{\psi^{-1}}\right) = a^2+\left(u^{\psi},u^{\psi}\right) =$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a - (bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Очевидно, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Можно вычислить это произведение «по честному», но проще воспользоваться геометрической интерпретацией кватерниона, точнее, **формулами (3)**: если u — векторная часть кватерниона, то

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = ((a+u)\,(a-u)) = a^2 - (u\cdot u) = a^2 - \left(-\left(u^\psi, u^\psi\right) + \left[u^\psi, u^\psi\right]^{\psi^{-1}}\right).$$

Из **курса векторной алгебры** известно, что векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор (так как длина векторного произведения коллинеарных векторов равна 0).

Следовательно, по формуле для вычисления **скалярного произведения векторов с помощью их координат**

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = a^2-(u\cdot u) = a^2-\left(-\left(u^\psi, u^\psi\right) + \left[u^\psi, u^\psi\right]^{\psi^{-1}}\right) = a^2+\left(u^\psi, u^\psi\right) = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Мы доказали, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Следовательно,

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a + bi + cj + dk} = a - (bi + cj + dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a + bi + cj + dk$.

Мы доказали, что для любого кватерниона α

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bi + cj + dk)\,(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \overline{\alpha}}\overline{\alpha}\right) = 1.$$

V. Деление в алгебре кватернионов

Кватернион $\overline{a+bi+cj+dk} = a-(bi+cj+dk)$ называется **сопряженным** ко кватерниону $a+bi+cj+dk$.

Мы доказали, что для любого кватерниона α

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a+bi+cj+dk)\,(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\alpha\cdot\left(\frac{1}{\alpha\cdot\overline{\alpha}}\overline{\alpha}\right) = 1.$$

Поэтому

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha\cdot\overline{\alpha}}\cdot\overline{\alpha}, \qquad \beta\cdot\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}\cdot\left(\beta\cdot\overline{\alpha}\right), \qquad \alpha^{-1}\cdot\beta = \frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}\cdot\left(\overline{\alpha}\cdot\beta\right). \tag{8}$$

Рассмотрим пример?

VI. Теорема Фробениуса

Теорема 2. *Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x * y = y * x, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \exists i_1, i_2, \ldots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n. \end{gathered} \tag{10}$$

*Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.*

Доказательство.

VI. Теорема Фробениуса

Теорема 2. *Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x * y = y * x, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \exists i_1, i_2, \ldots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n. \end{gathered} \tag{10}$$

*Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.*

Доказательство разобъем на несколько лемм.

VI. Теорема Фробениуса

Теорема 2. *Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x * y = y * x, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \exists i_1, i_2, \ldots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n. \end{gathered} \tag{10}$$

*Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.*

Доказательство разобъем на несколько лемм.

Положим

$$I = \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} x \in F, \\ x^2 \in \mathbb{R}, \\ x^2 \leq 0. \end{cases} \right\} \tag{11}$$

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство.

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I & \Rightarrow \\ x \in \mathbb{R} & \Rightarrow \end{cases}$$

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I & \Rightarrow \;\; x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} & \Rightarrow \end{cases}$$

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I \ \Rightarrow \ x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = 0 \;\Rightarrow$$

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{lcl} x \in I & \Rightarrow & x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} & \Rightarrow & x^2 \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

VI.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

Лемма 1. $\mathbf{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{lll} x \in I & \Rightarrow & x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} & \Rightarrow & x^2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad x^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0.$$

Лемма доказана.

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство.

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow\ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow\ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ \alpha z \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \qquad (\alpha z)^2 \overset{?}{\leq} 0 \qquad \Rightarrow \ \alpha z \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \qquad (\alpha z)^2 = \alpha^2 z^2 \overset{?}{\leq} 0 \qquad \Rightarrow \ \alpha z \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \ \Rightarrow \ \alpha z \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \ \Rightarrow \ \alpha z \in I.$$

Первое утверждение доказано.

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(z^{-1}\right)^2 < 0 \ \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \qquad 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \qquad\qquad\qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(z^{-1}\right)^2 < 0 \ \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ 0 < 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \qquad\qquad\qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(z^{-1}\right)^2 < 0 \ \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow\ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow\ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow\ 0 < 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \underbrace{z^2} * \underbrace{\left(z^{-1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(z^{-1}\right)^2 < 0\ \Rightarrow\ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow 0 < 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{<0} * \underbrace{\left(z^{-1}\right)^2}_{?} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(z^{-1}\right)^2 < 0 \Rightarrow z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I$*,*

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I$*.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \mathbf{0} < 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{<\mathbf{0}} * \underbrace{\left(z^{-1}\right)^2}_{?} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(z^{-1}\right)^2 < 0 \ \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \mathbf{0} < 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{<\mathbf{0}} * \underbrace{\left(z^{-1}\right)^2}_{<\mathbf{0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(\mathbf{z}^{-1}\right)^{\mathbf{2}} < \mathbf{0} \ \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

VI.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

Лемма 2. *Во-первых,* $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ \alpha z \in I,$

во-вторых $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} z \neq 0, \\ z \in I \end{cases} \Rightarrow \ 0 < 1^2 = (z * z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{<0} * \underbrace{\left(z^{-1}\right)^2}_{<0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(z^{-1}\right)^2 < 0 \ \Rightarrow \ z^{-1} \in I.$$

Лемма доказана.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются **однозначно**.*

Доказательство.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Система векторов $\left\{a^0;\ a;\ a^2;\ \ldots;\ a^{n+1}\right\}$ содержит $n+2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n+1$ (см. **формулу (10)**).

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Система векторов $\left\{a^0;\ a;\ a^2;\ \ldots;\ a^{n+1}\right\}$ содержит $n+2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n+1$ (см. **формулу (10)**). Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Система векторов $\{a^0;\ a;\ a^2;\ \ldots;\ a^{n+1}\}$ содержит $n+2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n+1$ (см. **формулу (10)**). Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**. Значит, найдутся такие вещественные коэффициенты $\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_{n+1}$, не все равные 0, что

$$\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0.$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Система векторов $\left\{a^0;\ a;\ a^2;\ \ldots;\ a^{n+1}\right\}$ содержит $n+2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n+1$ (см. **формулу (10)**). Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**. Значит, найдутся такие вещественные коэффициенты $\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_{n+1}$, не все равные 0, что

$$\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0.$$

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Система векторов $\{a^0;\ a;\ a^2;\ \ldots;\ a^{n+1}\}$ содержит $n+2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n+1$ (см. **формулу (10)**). Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**. Значит, найдутся такие вещественные коэффициенты $\alpha_0; \alpha_1; \ldots; \alpha_{n+1}$, не все равные 0, что

$$\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0.$$

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in I}$.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in I}$.

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то

$$2a = \underbrace{-\gamma}_{\in \mathbb{R}} \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}_{\in I} \Rightarrow a = \frac{-\gamma}{2} \pm i\frac{\sqrt{4\delta - \gamma^2}}{2}$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow\ c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \ \Rightarrow$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются **однозначно**.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow \ c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

В первом случае

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются **однозначно**.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0$.

В первом случае

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases}$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

В первом случае

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases}$$

т.е. разложение однозначно.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow\ c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

Во втором случае

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow\ c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

Во втором случае

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

Во втором случае

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases}$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0$.

Во втором случае

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_2 = b_1, \end{cases}$$

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются **однозначно**.*

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow\ c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0 \quad$ или $\quad c_2 = 0.$

Во втором случае

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_2 = b_1, \end{cases}$$

т.е. разложение однозначно.

VI.3. Лемма о разложении элементов из F в сумму

Лемма 3. $a \in F \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c,$ *причем элементы b и c определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Осталось проверить **однозначность** разложения.

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \ \Rightarrow\ c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{c_1^2}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)c_2}_{\in I}.$$

Значит, $(b_2 - b_1) = 0$ или $c_2 = 0$.

Во втором случае

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_2 = b_1, \end{cases}$$

т.е. разложение однозначно. Лемма доказана.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in$ **I** *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем

$$\gamma a + \delta b + \varepsilon * 1 = 0 \ \Rightarrow$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем

$$\gamma a + \delta b + \varepsilon * 1 = 0 \ \Rightarrow \ \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем

$$\gamma a + \delta b + \varepsilon * 1 = 0 \ \Rightarrow \ \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}.$$

По **лемме о разложении элементов из F в сумму** получаем, что $\varepsilon = 0$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем

$$\gamma a + \delta b + \varepsilon * 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}.$$

По **лемме о разложении элементов из F в сумму** получаем, что $\varepsilon = 0$.

Следовательно, $\gamma a = -\delta b$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Но хотя бы один из коэффициентов γ, δ отличен от 0.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \Rightarrow a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \;\Rightarrow\; a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Отсюда

$$a * b + b * a =$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow\ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Отсюда

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2\right) =$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in$ **I** *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow \ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Отсюда

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2\right) = -2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{R}} \in$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow \ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Отсюда

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2\right) = -2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \underbrace{b^2}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

Значит, **формула (12)** верна.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow \ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Далее,

$$\alpha a + \beta b =$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow\ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Далее,

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b =$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow\ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Далее,

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta\right) \underbrace{b}_{\in I} \in$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow\ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Далее,

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta\right) \underbrace{b}_{\in I} \in I.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть система $\{a;\ b;\ 1\}$ является **линейно зависимой**.

Мы показали, что $\gamma a = -\delta b$.

Поэтому можно считать, что, например, $\gamma \neq 0 \ \Rightarrow \ a = -\dfrac{\delta}{\gamma} b$.

Далее,

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta \right) \underbrace{b}_{\in I} \in I.$$

Значит, **формула (13)** верна.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in$ **I** *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Остается рассмотреть случай, когда система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима**.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Остается рассмотреть случай, когда система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима**.

Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то утверждение леммы очевидно.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in$ **I** *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Остается рассмотреть случай, когда система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима**.

Значит, можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in$ **I** *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{13}$$

Доказательство. Остается рассмотреть случай, когда система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

По **лемме о разложении элементов из F в сумму**

$$c = a * b + b * a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

Возведем обе части **равенства (15)** в квадрат:

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

Возведем обе части **равенства (15)** в квадрат:

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(a * b + b * a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

Возведем обе части **равенства (15)** в квадрат:

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(a * b + b * a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

Используем **формулу (14)**:

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

Возведем обе части **равенства (15)** в квадрат:

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(a * b + b * a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

Возведем обе части **равенства (15)** в квадрат:

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(a * b + b * a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

Возведем обе части **равенства (15)** в квадрат:

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(a * b + b * a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\,(\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$.

Если $f = 0$, то **равенство (12)** следует из **(14)** и $\mu = 0$ или $g = 0$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$.

Если $f = 0$, то **равенство (12)** следует из **(14)** и $\mu = 0$ или $g = 0$.

В случае $\mu = 0$ **равенство (13)** следует из **равенства (15)**, т.е. **формулы** (12) и (13) выполняются.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$.

Если $f = 0$, то **равенство (12)** следует из **(14)** и $\mu = 0$ или $g = 0$.

В случае $g = 0$ получаем противоречие с линейной независимостью векторов $a, b, 1$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**,

$\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**,

$\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0 \Rightarrow$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \ \Rightarrow\ \mu \neq 0 \ \Rightarrow\ g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**,

$\alpha\beta f = 2\mu g.$ Остается случай $f \neq 0 \ \Rightarrow\ \mu \neq 0 \ \Rightarrow\ g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \ \Rightarrow$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**,

$\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \;\Rightarrow\; \mu \neq 0 \;\Rightarrow\; g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} a + 4\mu b = \mu + \dfrac{1 \cdot 4\mu}{2\mu} f, \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**,

$\alpha\beta f = 2\mu g.$ Остается случай $f \neq 0 \ \Rightarrow\ \mu \neq 0 \ \Rightarrow\ g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \ \Rightarrow \ \begin{cases} a + 4\mu b = \mu + \dfrac{1 \cdot 4\mu}{2\mu} f, \\ 2\mu a + b = \mu + \dfrac{2\mu \cdot 1}{2\mu} f, \end{cases}$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0 \Rightarrow g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \ \Rightarrow \begin{cases} a + 4\mu b = \mu + 2f, \\ 2\mu a + b = \mu + f, \end{cases}$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \ \Rightarrow\ \mu \neq 0 \ \Rightarrow\ g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \ \Rightarrow \ \begin{cases} a + 4\mu b = \mu + 2f, \\ 2\mu a + b = \mu + f, \end{cases} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu \ \Rightarrow$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \ \Rightarrow\ \mu \neq 0 \ \Rightarrow\ g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \ \Rightarrow \ \begin{cases} a + 4\mu b = \mu + 2f, \\ 2\mu a + b = \mu + f, \end{cases} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu \ \Rightarrow \ (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b + \mu = 0.$$

VI.4. Лемма о подпространстве I

Система $\{a;\ b;\ 1\}$ **линейно независима** и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a * b + b * a = \lambda + f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in I), \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b = \mu + g \quad (\mu \in \mathbb{R}, \quad g \in I). \tag{15}$$

$$\underbrace{\alpha^2 * a^2 + \beta^2 * b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

Значит, по **лемме о разложении элементов из F в сумму**, $\alpha\beta f = 2\mu g$. Остается случай $f \neq 0 \ \Rightarrow\ \mu \neq 0 \ \Rightarrow\ g = \dfrac{\alpha\beta}{2\mu} f$. Из (15)

$$\alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \ \Rightarrow\ \begin{cases} a + 4\mu b = \mu + 2f, \\ 2\mu a + b = \mu + f, \end{cases} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu \ \Rightarrow\ (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b + \mu = 0.$$

Это противоречит линейной независимости системы векторов $\{a;\ b;\ 1\}$.

VI.4. Лемма о подпространстве I

Лемма 4. *Если* $a, b \in \mathbf{I}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$c = a * b + b * a \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \tag{15}$$

Лемма доказана.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

Лемма 5. *Если в* **I** *имеются такие элементы* i, j, *что* $i^2 = j^2 = -1$ *и* $i * j \in I$, *то* $\left\{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i * j\right\}$ — *тело* ***кватернионов****.*

Доказательство.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

Лемма 5. *Если в* **I** *имеются такие элементы* i, j, *что* $i^2 = j^2 = -1$ *и* $i * j \in I$, *то*
$\left\{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i * j\right\}$ — *тело* ***кватернионов***.

Доказательство. Нам достаточно доказать формулу:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$.

В самом деле,

$$j * i * i * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$.

В самом деле,

$$j * i * i * j = j * (-1) * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$.

В самом деле,

$$j * i * i * j = j * (-1) * j = -j^2 =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$.

В самом деле,

$$j * i * i * j = j * (-1) * j = -j^2 = -(-1) =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$.

В самом деле,

$$j * i * i * j = j * (-1) * j = -j^2 = -(-1) = 1.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$i * j + j * i$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$= i * j + j * i \in \mathbb{R}$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$i * j + (i * j)^{-1} = i * j + j * i \in \mathbb{R}$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$\underbrace{i * j}_{\in I} + \underbrace{(i * j)^{-1}}_{\in I} = i * j + j * i \in \mathbb{R}$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$\underbrace{i * j}_{\in I} + \underbrace{(i * j)^{-1}}_{\in I} = i * j + j * i \in \mathbb{R}$$

По **лемме о подпространстве** I

$$\begin{cases} i * j \in I, \\ (i * j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow \; i * j + (i * j)^{-1} \in I.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$\underbrace{i * j + (i * j)^{-1}}_{\in I} = i * j + j * i \in \mathbb{R}$$

По **леммe о подпространстве** I

$$\begin{cases} i * j \in I, \\ (i * j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i * j + (i * j)^{-1} \in I.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$\underbrace{i * j + (i * j)^{-1}}_{\in I} = i * j + j * i \in \mathbb{R} \cap I =$$

По **лемме о подпространстве I**

$$\begin{cases} i * j \in I, \\ (i * j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i * j + (i * j)^{-1} \in I.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$\underbrace{i * j + (i * j)^{-1}}_{\in I} = i * j + j * i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}.$$

По **лемме о подпространстве** I

$$\begin{cases} i * j \in I, \\ (i * j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i * j + (i * j)^{-1} \in I.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \qquad (16)$$

Заметим, что $j * i = (i * j)^{-1}$. Из **формулы (12)** следует, что

$$\underbrace{i * j + (i * j)^{-1}}_{\in I} = i * j + j * i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}.$$

Итак, $i * j = -(i * j)^{-1}$.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$
\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}
$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$k^2 =$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$k^2 = (i * j) * (i * j) =$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$
\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}
$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$
k^2 = (i * j) * (i * j) = (i * j) * \left(-(i * j)^{-1}\right) =
$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\left\{\begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array}\right. \overset{?}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array}\right. \qquad (16)$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k^2 = (i * j) * (i * j) = (i * j) * \left(-(i * j)^{-1}\right) = -(i * j) * (i * j)^{-1} =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k^2 = (i * j) * (i * j) = (i * j) * \left(-(i * j)^{-1}\right) = -(i * j) * (i * j)^{-1} = -1.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} \mathbf{k^2 = -1}, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k^2 = (i * j) * (i * j) = (i * j) * \left(-(i * j)^{-1}\right) = -(i * j) * (i * j)^{-1} = -1.$$

Первое равенство в заключении **формулы (16)** доказано.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} {\color{magenta} k^2 = -1}, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k = i * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k = i * j = -(i * j)^{-1} =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k = i * j = -(i * j)^{-1} = -j * i.$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ \mathbf{i} * \mathbf{j} = -\mathbf{j} * \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k = i * j = -(i * j)^{-1} = -j * i.$$

Мы доказали второе равенство в заключении **формулы (16)**.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\left\{\begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array}\right. \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array}\right. \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1} \quad$ и $\quad i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j = -i * (-1) =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j = -i * (-1) = i,$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j = -i * (-1) = i,$$

$$k * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j = -i * (-1) = i,$$

$$k * j = i * j * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j = -i * (-1) = i,$$

$$k * j = i * j * j = -i,$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ \mathbf{j} * \mathbf{k} = -\mathbf{k} * \mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$j * k = j * i * j = (i * j)^{-1} * j = -i * j * j = -i * (-1) = i,$$

$$k * j = i * j * j = -i,$$

третье равенство в заключении **формулы (16)** доказано.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$
\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}
$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$
\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}
$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$
k * i = i * j * i =
$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \qquad (16)$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i = -j * (-1) =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i = -j * (-1) = j,$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i = -j * (-1) = j,$$

$$i * k =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i = -j * (-1) = j,$$

$$i * k = i * i * j =$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i = -j * (-1) = j,$$

$$i * k = i * i * j = -j,$$

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ \mathbf{k} * \mathbf{i} = -\mathbf{i} * \mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{cases} \tag{16}$$

Доказано, что $j * i = (i * j)^{-1}$ и $i * j = -(i * j)^{-1}$. Поэтому

$$k * i = i * j * i = -(i * j)^{-1} * i = -j * i * i = -j * (-1) = j,$$

$$i * k = i * i * j = -j,$$

доказано четвертое равенство в заключении **формулы (16)**.

VI.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

Лемма 5. *Если в* **I** *имеются такие элементы* i, j, *что* $i^2 = j^2 = -1$ *и* $i * j \in I$, *то* $\left\{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i * j\right\}$ — *тело* ***кватернионов***.

Лемма доказана.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F = \mathbb{R}$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F = \mathbb{R}$.

Если размерность **подпространства** I равна 1, то $F = \mathbb{C}$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F = \mathbb{R}$.

Если размерность **подпространства** I равна 1, то $F = \mathbb{C}$.

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда

$$i^2 =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u\right) * \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u\right) =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u\right) * \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u\right) = \frac{1}{-u^2}(u^2) =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}} u$. Тогда

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}} u \right) * \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}} u \right) = \frac{1}{-u^2} (u^2) = -1.$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x, \quad$ где $\alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in$ **I**.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Согласно **формуле (13)** $(\alpha i + v) \in$ **I**, в частности, $(\alpha i + v)^2 < 0$. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства $\mathbf{I}$. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{I}$. Согласно **формуле (13)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, в частности, $(\alpha i + v)^2 < 0$. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$.

$$j^2 =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Согласно **формуле (13)** $(\alpha i + v) \in$ **I**, в частности, $(\alpha i + v)^2 < 0$. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)\right)^2 =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}} u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Согласно **формуле (13)** $(\alpha i + v) \in$ **I**, в частности, $(\alpha i + v)^2 < 0$. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i + v)$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i + v) \right)^2 = -1.$$

VI.6. Доказательство **теоремы Фробениуса**

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$,

$$i * j =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}} u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$,

$$i * j = i * \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i + v) =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$,

$$i * j = i * \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}\left(\alpha i^2 + i * v\right) =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$,

$$i * j = i * \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}\left(\alpha i^2 + i * v\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}\left(-\alpha + \alpha + x\right) =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}} u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Положим $j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$,

$$i * j = i * \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} \left(\alpha i^2 + i * v\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} x \in \mathbf{I}.$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in$ **I**. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$, $i * j \in$ **I**.

Значит, по **лемме о вложении тела кватернионов в** F,

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}}u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{I}$. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$, $i * j \in \mathbf{I}$.

Значит, по **лемме о вложении тела кватернионов в** F,

$$\left\{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta i * j \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}$$

— тело кватернионов.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Пусть размерность **подпространства** I больше 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства $\mathbf{I}$. Положим $i = \dfrac{1}{\sqrt{-u^2}} u$. Тогда $i^2 = -1$.

По **лемме о разложении элементов из** F **в сумму** $i * v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{I}$. Положим $j = \dfrac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$. Имеем $j^2 = -1$, $i * j \in \mathbf{I}$.

Значит, по **лемме о вложении тела кватернионов в** F,

$$\left\{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta i * j \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}$$

— тело кватернионов.

Таким образом, если **линейное пространство** I имеет размерность 3, то F — это тело кватернионов.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

VI.6. Доказательство **теоремы Фробениуса**

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

В силу **леммы о подпространстве I** $\quad t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

В силу **леммы о подпространстве I** $\quad t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$.

Из **линейной независимости** системы векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$ следует, что $t \neq 0$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Доказано, что $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. По **лемме о подпространстве** I

$$i * t =$$

VI.6. Доказательство **теоремы Фробениуса**

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Доказано, что $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. По **лемме о подпространстве** I

$$i * t = i * m - \alpha + \beta k - \gamma j =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\quad i * j = -j * i = k,\quad j * k = -k * j = i,$ $k * i = -i * k = j.$

В силу **леммы о разложении элементов из** F **в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Доказано, что $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. По **лемме о подпространстве** I

$$i * t = i * m - \alpha + \beta k - \gamma j = x + \beta k - \gamma j$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Доказано, что $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. По **лемме о подпространстве** I

$$i * t = i * m - \alpha + \beta k - \gamma j = x + \beta k - \gamma j \in I.$$

VI.6. Доказательство **теоремы Фробениуса**

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Доказано, что $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. По **лемме о подпространстве** I $\quad i * t \in I$.

Аналогично можно доказать, что $j * t \in I, \quad k * t \in I$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму**

$$i * m = \alpha + x, \quad j * m = \beta + y, \quad k * m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Доказано, что $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. По **лемме о подпространстве** I $\quad i * t \in I, \quad j * t \in I, \quad k * t \in I.$

Положим $n = \dfrac{1}{\sqrt{-t^2}} t.$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i * j = -j * i = k, \quad j * k = -k * j = i,$ $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1, \quad 0 \neq i * n \in I, \quad 0 \neq j * n \in I,$ $0 \neq k * n \in I$.

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\quad i * j = -j * i = k,\quad j * k = -k * j = i,$ $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1,\quad 0 \neq i * n \in I,\quad 0 \neq j * n \in I,$ $0 \neq k * n \in I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в** F

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1$, $0 \neq i * n \in I$, $0 \neq j * n \in I$, $0 \neq k * n \in I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в F**

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

$$= i * n * j =$$

VI.6. Доказательство **теоремы Фробениуса**

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\quad i * j = -j * i = k$, $\quad j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1$, $\quad 0 \neq i * n \in I$, $\quad 0 \neq j * n \in I$, $0 \neq k * n \in I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в F**

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

$$= -n * i * j = i * n * j =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства I** больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $\quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i * j = -j * i = k, \quad j * k = -k * j = i,$ $k * i = -i * k = j.$

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1, \quad 0 \neq i * n \in I, \quad 0 \neq j * n \in I,$ $0 \neq k * n \in I.$

По **лемме о вложении тела кватернионов в F**

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

$$= -n * k = -n * i * j = i * n * j =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i * j = -j * i = k, \quad j * k = -k * j = i,$ $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1, \quad 0 \neq i * n \in I, \quad 0 \neq j * n \in I,$ $0 \neq k * n \in I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в F**

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

$$k * n = -n * k = -n * i * j = i * n * j =$$

VI.6. Доказательство **теоремы Фробениуса**

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i * j = -j * i = k, \quad j * k = -k * j = i,$ $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1, \quad 0 \neq i * n \in I, \quad 0 \neq j * n \in I,$ $0 \neq k * n \in I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в F**

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

$$k * n = -n * k = -n * i * j = i * n * j = i * (-j * n) =$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\quad i*j = -j*i = k,\quad j*k = -k*j = i,$ $k*i = -i*k = j.$

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1,\quad 0 \neq i*n \in I,\quad 0 \neq j*n \in I,$ $0 \neq k*n \in I.$

По **лемме о вложении тела кватернионов в F**

$$i*n = -n*i,\quad j*n = -n*j,\quad k*n = -n*k.$$

$$k*n = -n*k = -n*i*j = i*n*j = i*(-j*n) = -k*n.$$

VI.6. Доказательство теоремы Фробениуса

Осталось рассмотреть случай, когда размерность **подпространства** I больше 3. Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i;\ j;\ k;\ m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i * j = -j * i = k$, $j * k = -k * j = i$, $k * i = -i * k = j$.

Мы нашли такой $n \in I$, что $n^2 = -1$, $0 \neq i * n \in I$, $0 \neq j * n \in I$, $0 \neq k * n \in I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в** F

$$i * n = -n * i, \quad j * n = -n * j, \quad k * n = -n * k.$$

$$k * n = -n * k = -n * i * j = i * n * j = i * (-j * n) = -k * n.$$

Следовательно, $2k * n = 0$, противоречие.

VI. Теорема Фробениуса

Теорема 2. *Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x * y = y * x, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \exists i_1, i_2, \ldots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n. \end{gathered} \tag{16}$$

*Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.*

Теорема доказана.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?