Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Изоморфизм линейных пространств, матрица перехода в другой базис

Раздел электронного учебника для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Изоморфизм

В предыдущих разделах мы изучали отдельно взятое **линейное пространство**. В соответствии с логикой развития научных теорий (см. введение), одно из естественных направлений дальнейших исследований состоит в переходе к изучению *системы* линейных пространств. Для этого нам следует определить на совокупности различные отношения (предикаты) и функции (в частности, алгебраические операции).

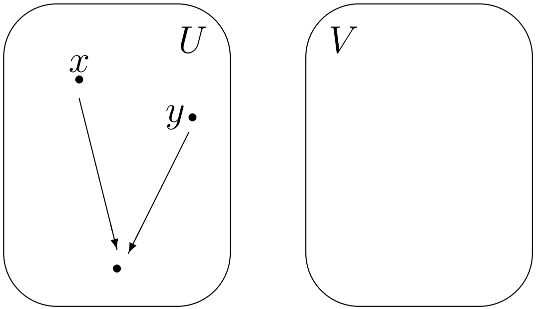
Мы начнем с отношения, играющего особую роль в теории линейных пространств — отношения изоморфности.

Рассмотрим пример?

I. Изоморфизм

В примере рассматриваемые **линейные пространства** с точки зрения теории линейных пространств являются «как бы одинаковыми», но отличаются только особенностями носителей. Иными словами, с точки зрения тех особенностей, которые являются значимыми для теории линейных пространств, эти два линейных пространства одинаковы, поскольку на особенности носителя рассматриваемая теория «внимания не обращает».

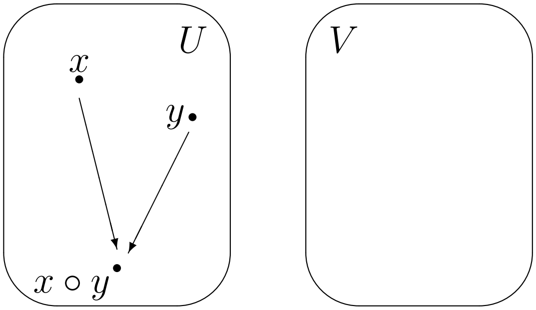
I.1. Линейная функция



Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент

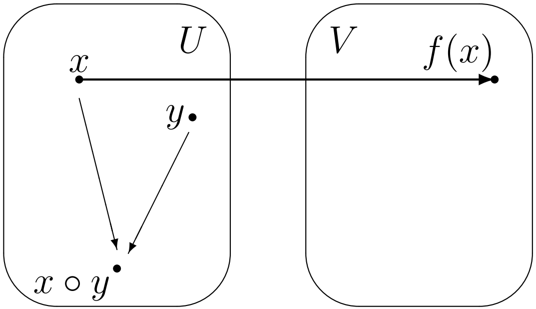
I.1. Линейная функция



Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

I.1. Линейная функция

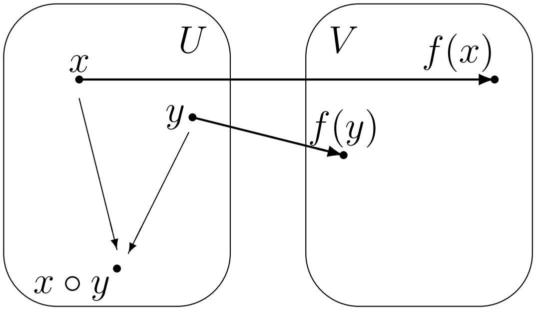


Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$

I.1. Линейная функция

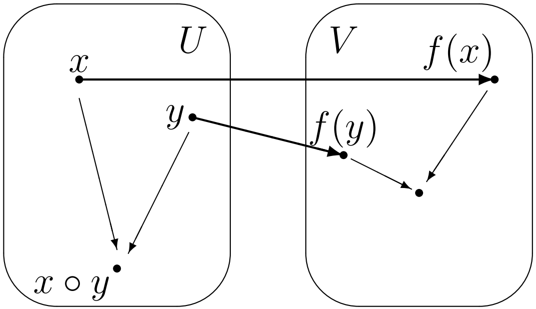


Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$

I.1. Линейная функция

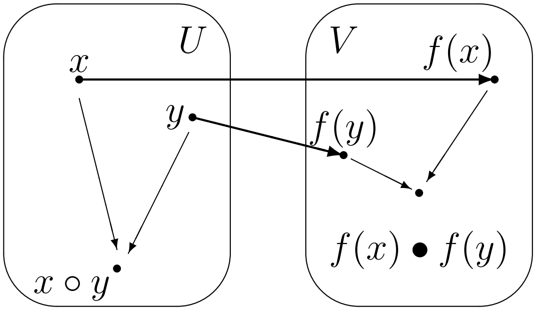


Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является

I.1. Линейная функция

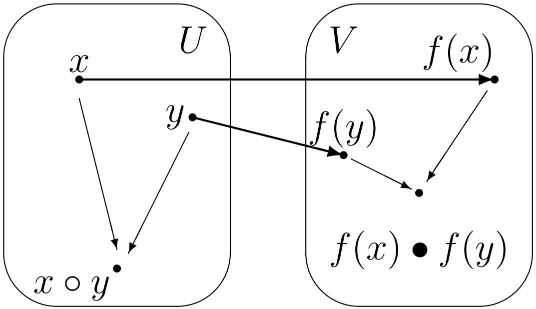


Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

I.1. Линейная функция



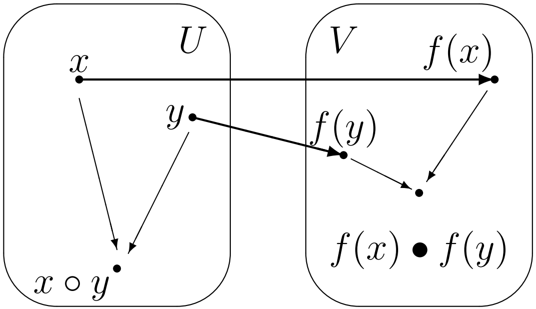
Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

Тогда образ вектора $x \circ y$, т.е.

I.1. Линейная функция



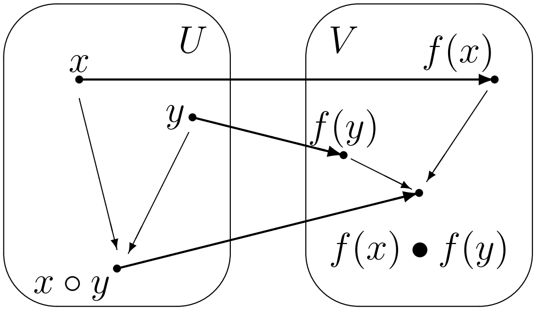
Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

Тогда образ вектора $x \circ y$, т.е. $f(x \circ y)$

I.1. Линейная функция



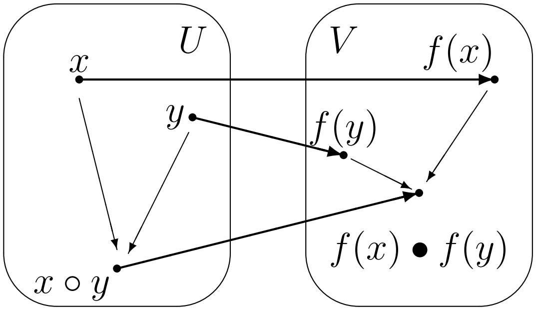
Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

Тогда образ вектора $x \circ y$, т.е. $f(x \circ y)$ должен совпасть с

I.1. Линейная функция



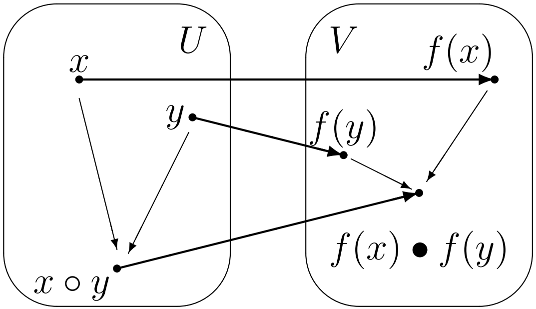
Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

Тогда образ вектора $x \circ y$, т.е. $f(x \circ y)$ должен совпасть с $f(x) \bullet f(y)$:

I.1. Линейная функция



Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

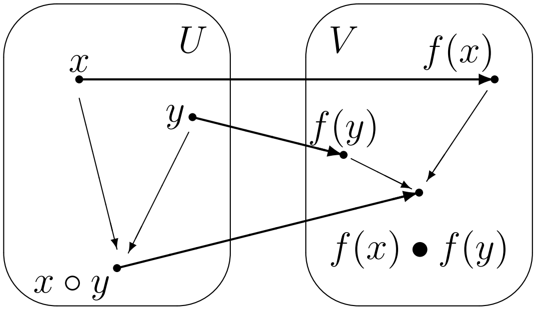
Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

Тогда образ вектора $x \circ y$, т.е. $f(x \circ y)$ должен совпасть с $f(x) \bullet f(y)$:

$$f(x \circ y) = f(x) \bullet f(y).$$

I.1. Линейная функция



Пусть операция «сложение» в U обозначается через $\circ$, а в V — через $\bullet$.

Суммой элементов x и y является элемент $x \circ y$.

Суммой элементов $f(x)$ и $f(y)$ является $f(x) \bullet f(y)$.

Тогда образ вектора $x \circ y$, т.е. $f(x \circ y)$ должен совпасть с $f(x) \bullet f(y)$:

$$f(x \circ y) = f(x) \bullet f(y).$$

В дальнейшем мы сумму векторов в пространствах U и V будем обозначать одним символом $+$, а не $\circ$ и $\bullet$, несмотря на то, что эти операции могут быть различными, как это было в **примере**.

I.1. Линейная функция

Определение 1. *Пусть U и V — линейные пространства над полем K и f — функция с $D(f) \subseteq U$, $E(f) \subseteq V$. Тогда f называется* **линейной функцией***, если для любой линейной комбинации $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m \in D(f)$ такой, что $u_i \in D(f)$, имеет место равенство*

$$f\left(\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m\right) = \lambda_1 \cdot f\left(u_1\right) + \ldots + \lambda_m \cdot f\left(u_m\right). \qquad (1)$$

Отметим, что, вообще говоря, операции $+$ и $\lambda_i \cdot$ могут быть различными в левой и правой частях последнего равенства. Например, в левой части этого равенства может стоять сложение матриц, а в правой — сложение, допустим, многочленов. Тем не менее, мы будем использовать для них одни и те же обозначения, поскольку из контекста ясно, какая именно операция имеется в данном случае в виду.

I.2. Изоморфизм. Изоморфные пространства

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* линейное ***взаимно однозначное отображение*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \xrightarrow[\sim]{f} V$.

I.2. Изоморфизм. Изоморфные пространства

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* линейное ***взаимно однозначное отображение*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\simeq\!\!\!\rightarrow} V$.

Определение 3. *Линейные пространства U и V называются* **изоморфными** *тогда и только тогда, когда существует изоморфизм f линейного пространства U на линейное пространство V, то есть у всякого вектора $y \in V$ есть прообраз в U, то есть такой вектор x в U, что $f(x) = y$. Изоморфность пространств U и V обозначается как $U \simeq V$.*

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* линейное ***взаимно однозначное отображение*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\rightleftharpoons} V$.

Лемма 1. *Если f — изоморфизм линейного пространства U в линейное пространство V, то $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.*

Много нематематических символов...

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* <u>*линейное*</u> ***<u>взаимно однозначное отображение</u>*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\rightsquigarrow} V$.

Лемма 1. $U \overset{f}{\rightsquigarrow} V \;\Rightarrow\; f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Вот теперь хорошо...

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* <u>линейное</u> ***<u>взаимно однозначное отображение</u>*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} V$.

Лемма 1. $U \overset{f}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} V \;\Rightarrow\; f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Доказательство. Воспользуемся критерием нулевого вектора.

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** U *в линейное пространство* V *называется* *линейное* ***взаимно однозначное отображение*** *пространства* U *в* V.

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V$.

Лемма 1. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \;\Rightarrow\; f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Доказательство. Воспользуемся критерием нулевого вектора. Надо доказать, что для некоторого вектора $y \in V$ имеет место равенство $y + f(\mathbf{0}_U) = y$.

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* <u>линейное</u> ***<u>взаимно однозначное отображение</u>*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\rightsquigarrow} V$.

Лемма 1. $U \overset{f}{\rightsquigarrow} V \Rightarrow f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Доказательство. Воспользуемся критерием нулевого вектора. Надо доказать, что для некоторого вектора $y \in V$ имеет место равенство $y + f(\mathbf{0}_U) = y$.

Возьмем произвольный вектор $x \in U$ (можно, например, взять $x = \mathbf{0}_U$).

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* *линейное* ***взаимно однозначное отображение*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\simeq} V$.

Лемма 1. $U \overset{f}{\simeq} V \Rightarrow f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Доказательство. Воспользуемся критерием нулевого вектора. Надо доказать, что для некоторого вектора $y \in V$ имеет место равенство $y + f(\mathbf{0}_U) = y$.

Возьмем произвольный вектор $x \in U$ (можно, например, взять $x = \mathbf{0}_U$). В силу линейности отображения f

$$= f(x + \mathbf{0}_U) =$$

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* *линейное* ***взаимно однозначное отображение*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \overset{f}{\simeq} V$.

Лемма 1. $U \overset{f}{\simeq} V \;\Rightarrow\; f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Доказательство. Воспользуемся критерием нулевого вектора. Надо доказать, что для некоторого вектора $y \in V$ имеет место равенство $y + f(\mathbf{0}_U) = y$.

Возьмем произвольный вектор $x \in U$ (можно, например, взять $x = \mathbf{0}_U$). В силу линейности отображения f

$$= f(x + \mathbf{0}_U) = f(x) + f(\mathbf{0}_U).$$

I.3. Лемма об образе нулевого вектора

Определение 2. **Изоморфизмом** ***линейного пространства*** *U в линейное пространство V называется* *линейное* ***взаимно однозначное отображение*** *пространства U в V.*

Кратко это запишем в виде $U \xrightarrow[\sim]{f} V$.

Лемма 1. $U \xrightarrow[\sim]{f} V \;\Rightarrow\; f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Доказательство. Воспользуемся критерием нулевого вектора. Надо доказать, что для некоторого вектора $y \in V$ имеет место равенство $y + f(\mathbf{0}_U) = y$.

Возьмем произвольный вектор $x \in U$ (можно, например, взять $x = \mathbf{0}_U$). По аксиоме 3 линейного пространства

$$f(x) = f(x + \mathbf{0}_U) = f(x) + f(\mathbf{0}_U).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. *Если **изоморфизм** линейного пространства U в линейное пространство V, и g — **изоморфизм** линейного пространства V в линейное пространство W, то **суперпозиция (композиция)** $f \circ g$ функций f и g является изоморфизмом линейного пространства U в линейное пространство W.*

Много нематематических символов...

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq} V, \\ V \overset{g}{\simeq} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\simeq} W.$

Вот теперь хорошо...

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V, \\ V \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\xrightarrow{\sim}} W.$

Доказательство. Линейность и взаимная однозначность проверяются «без проблем», прямо по определению.

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V, \\ V \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\xrightarrow{\sim}} W.$

Доказательство. Например, проверим **линейность**:

$f \circ g(\lambda x + \mu y) =$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!>} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!>} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\simeq\!\!\!>} W.$

Доказательство. Например, проверим **линейность**:

$$f \circ g(\lambda x + \mu y) =$$

$$= \lambda f \circ g(x) + \mu f \circ g(y).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!>} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!>} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\simeq\!\!\!>} W.$

Доказательство. Например, проверим **линейность**:

$$f \circ g(\lambda x + \mu y) = g\Big(f(\lambda x + \mu y)\Big) =$$
$$= \lambda f \circ g(x) + \mu f \circ g(y).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq} V, \\ V \overset{g}{\simeq} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\simeq} W.$

Доказательство. Например, проверим **линейность**:

$$f \circ g(\lambda x + \mu y) = g\Big(f(\lambda x + \mu y)\Big) = g\Big(\lambda f(x) + \mu f(y)\Big) =$$
$$= \lambda f \circ g(x) + \mu f \circ g(y).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V, \\ V \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\xrightarrow{\sim}} W.$

Доказательство. Например, проверим **линейность**:

$$f \circ g(\lambda x + \mu y) = g\left(f(\lambda x + \mu y)\right) = g\left(\lambda f(x) + \mu f(y)\right) =$$

$$= \lambda g\left(f(x)\right) + \mu g\left(f(y)\right) = \lambda f \circ g(x) + \mu f \circ g(y).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\underset{\sim}{\Rightarrow}} V, \\ V \overset{g}{\underset{\sim}{\Rightarrow}} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\underset{\sim}{\Rightarrow}} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ \end{cases}$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\cong\!\!>} V, \\ V \overset{g}{\cong\!\!>} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\cong\!\!>} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \Leftrightarrow s = t \end{cases}$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\left\{\begin{array}{l} U \overset{f}{\simeq} V, \\ V \overset{g}{\simeq} W \end{array}\right. \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\simeq} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \Leftrightarrow s = t \end{array}\right. \Rightarrow \Big(f \circ g(x) = f \circ g(y) \Leftrightarrow x = y\Big).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} W \end{cases} \Rightarrow \; U \overset{f\circ g}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \;\Leftrightarrow\; s = t \end{cases} \Rightarrow \; \Big(g(f(x)) = g(f(y)) \;\Leftrightarrow\; x = y\Big)\,.$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V, \\ V \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\xrightarrow{\sim}} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «языке равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \Leftrightarrow s = t \end{cases} \Rightarrow \bigl(g(f(x)) = g(f(y)) \Leftrightarrow x = y\bigr).$$

Доказательство однозначности:

$$x = y \Rightarrow$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V, \\ V \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} W \end{cases} \Rightarrow \ U \overset{f\circ g}{\xrightarrow{\sim}} W.$

Доказательство **взаимной однозначности**.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \ \Leftrightarrow \ \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \ \Leftrightarrow \ s = t \end{cases} \Rightarrow \ \big(g(f(x)) = g(f(y)) \ \Leftrightarrow \ x = y\big)\,.$$

Доказательство однозначности:

$$x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \Leftrightarrow s = t \end{cases} \Rightarrow \big(g(f(x)) = g(f(y)) \Leftrightarrow x = y\big).$$

Доказательство однозначности:

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)).$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq} V, \\ V \overset{g}{\simeq} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\simeq} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \Leftrightarrow s = t \end{cases} \Rightarrow \big(g(f(x)) = g(f(y)) \Leftrightarrow x = y\big).$$

Доказательство **взаимной однозначности**:

$$g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V, \\ V \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\xrightarrow{\sim}} W.$

Доказательство **взаимной однозначности**.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \;\Leftrightarrow\; s = t \end{cases} \Rightarrow \;\big(g(f(x)) = g(f(y)) \;\Leftrightarrow\; x = y\big)\,.$$

Доказательство **взаимной однозначности**:

$$g(f(x)) = g(f(y)) \;\Rightarrow\; f(x) = f(y) \;\Rightarrow$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} V, \\ V \overset{g}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f\circ g}{\simeq\!\!\!\!\Rightarrow} W.$

Доказательство взаимной однозначности.

Сформулируем теорему на «**языке равенств и неравенств**»:

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta, \\ g(s) = g(t) \;\Leftrightarrow\; s = t \end{cases} \Rightarrow \; \big(g(f(x)) = g(f(y)) \;\Leftrightarrow\; x = y\big)\,.$$

Доказательство **взаимной однозначности**:

$$g(f(x)) = g(f(y)) \;\Rightarrow\; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

I.4. Лемма о транзитивности отношения изоморфности

Лемма 2. $\begin{cases} U \overset{f}{\simeq} V, \\ V \overset{g}{\simeq} W \end{cases} \Rightarrow U \overset{f \circ g}{\simeq} W.$

Лемма доказана.

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. *Если f — **изоморфизм** линейного пространства U **на** линейное пространство V, то **обратная функция** f^{-1} является **изоморфизмом**.*

Много нематематических символов...

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U.$

Вот теперь хорошо...

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U$.

Доказательство. Функция f является **взаимно однозначной**, поэтому

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\simeq} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\simeq} U$.

Доказательство. Функция f является **взаимно однозначной**, поэтому

$$x = y \Leftrightarrow f(x) = f(x).$$

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} V \ \Rightarrow \ V \overset{f^{-1}}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} U.$

Доказательство. Функция f является **взаимно однозначной**, поэтому

$$x = y \ \Leftrightarrow \ f(x) = f(x).$$

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \ \Leftrightarrow \ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x)).$$

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\simeq\!\!\!\Rightarrow} U.$

Доказательство. Функция f является **взаимно однозначной**, поэтому

$$x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(x).$$

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x)).$$

По определению **обратной функции**

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} U$.

Доказательство. Функция f является **взаимно однозначной**, поэтому

$$x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(x).$$

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x)).$$

По определению **обратной функции**

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\rightsquigarrow} V \ \Rightarrow\ V \overset{f^{-1}}{\rightsquigarrow} U.$

Доказательство. Функция f является **взаимно однозначной**, поэтому

$$x = y \ \Leftrightarrow\ f(x) = f(x).$$

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x)).$$

По определению **обратной функции**

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \ \Leftrightarrow\ x = y.$$

Следовательно, функция f^{-1} является **взаимно однозначной**.

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U.$

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U.$

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) =$$

Функция f отображает U **на** V**.**

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}\left(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k\right) =$$

Функция f отображает U **на** V**.**

Поэтому у каждого элемента из V есть **прообраз** в U.

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\rightleftarrows} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\rightleftarrows} U.$

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) =$$

Функция f отображает U **на** V.

Поэтому у каждого элемента из V есть **прообраз** в U.

Следовательно, найдутся такие векторы $u_i \in U$, что

$$v_1 = f(u_1),\ \ldots;\ v_k = f(u_k).$$

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\rightsquigarrow} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\rightsquigarrow} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}\left(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k\right) = f^{-1}\Big(\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k)\Big) =$$

Функция f отображает U **на** V**.**

Поэтому у каждого элемента из V есть **прообраз** в U.

Следовательно, найдутся такие векторы $u_i \in U$, что

$$v_1 = f(u_1),\ \ldots;\ v_k = f(u_k).$$

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\rightarrowtail\!\!\!\!\sim} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\sim} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = f^{-1}\Big(\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k)\Big) =$$

В силу **линейности** функции f имеем...

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = f^{-1}\Big(\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k)\Big) =$$

$$= f^{-1}\Big(f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k)\Big) =$$

В силу **линейности** функции f имеем...

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = f^{-1}\Big(\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k)\Big) =$$

$$= f^{-1}\Big(f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k)\Big) =$$

По определению **обратной функции**...

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\xrightarrow{\sim}} V \;\Rightarrow\; V \overset{f^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = f^{-1}\Big(\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k)\Big) =$$

$$= f^{-1}\Big(f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k)\Big) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k =$$

По определению **обратной функции**...

I.5. Лемма об обратном изоморфизме

Лемма 3. $U \overset{f}{\simeq\!\!\!>} V \Rightarrow V \overset{f^{-1}}{\simeq\!\!\!>} U$.

Доказательство. Осталось проверить **линейность** функции f^{-1}:

$$f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = f^{-1}\Big(\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k)\Big) =$$

$$= f^{-1}\Big(f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k)\Big) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k =$$

$$= \alpha_1 f^{-1}(v_1) + \ldots + \alpha_k f^{-1}(v_k).$$

Лемма доказана.

I.6. Основной вопрос аппарата линейной алгебры

Так как «правду» мы всегда будем «искать» в пространстве $\mathbb{R}^n$, то отныне главной нашей задачей при изучении этой теории является ответ на вопрос:

Как та или иная конструкция «выражается» в «стандартном» пространстве матриц-столбцов (пространстве координат)?

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм** **линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Можно переформулировать теорему образно: *свойство быть линейно независимой системой наследуется при переходе к изоморфному образу.*

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. Надо доказать, что

тогда и только тогда, когда

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм** **линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

тогда и только тогда, когда

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм** **линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = \mathbf{0}_V \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = \mathbf{0}_V \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм** **линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ в силу **взаимной однозначности** f и **леммы об образе нулевого вектора** равносильно

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = \mathbf{0}_V \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ в силу **взаимной однозначности** f и **леммы об образе нулевого вектора** равносильно

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k) = f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм** **линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ в силу **взаимной однозначности** f и **леммы об образе нулевого вектора** равносильно

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k) = f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

что, благодаря **линейности** f, эквивалентно формуле

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

I.7. Теорема об образе системы векторов при изоморфизме

Теорема 1. *Пусть f — **изоморфизм линейного пространства** U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U **линейно независима** если и только если **линейно независима** система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Доказательство. $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_U \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ в силу **взаимной однозначности** f и **леммы об образе нулевого вектора** равносильно

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k) = f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

что, благодаря **линейности** f, эквивалентно формуле

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0. \quad \text{Ура!}$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2. *Если U и V — конечномерные линейные пространства над полем* $\mathbf{K}$, *то U и V* ***изоморфны*** *тогда и только тогда, когда у них одинаковая размерность.*

Слишком много слов естественного языка...

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \iff \dim U = \dim V\right). \tag{1}$$

Доказательство.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\left\{\begin{array}{l}\dim U < \infty,\\ \dim V < \infty\end{array}\right. \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\left\{\begin{array}{l}\dim U < \infty, \\ \dim V < \infty\end{array}\right. \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f : U \to V$ — изоморфизм линейного пространства U на линейное пространство V. Возьмем произвольный базис линейного пространства U: $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \Leftrightarrow \dim U = \dim V \right). \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f : U \to V$ — изоморфизм линейного пространства U на линейное пространство V. Возьмем произвольный базис линейного пространства U: $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Проверим, что $\mathbf{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f : U \to V$ — изоморфизм линейного пространства U на линейное пространство V. Возьмем произвольный базис линейного пространства U: $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Проверим, что $\mathbf{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V. Для этого, по **критерию базиса**, надо проверить, что $\mathbf{Б}_V$, во-первых, линейно независимая система, и, во-вторых, что каждый вектор из V является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_V$.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V\right). \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f: U \to V$ — изоморфизм линейного пространства U на линейное пространство V. Возьмем произвольный базис линейного пространства U: $\text{Б}_U = \{e_1, \dots, e_n\}$. Проверим, что $\text{Б}_V = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V. Для этого, по **критерию базиса**, надо проверить, что Б_V, во-первых, линейно независимая система, и, во-вторых, что каждый вектор из V является линейной комбинацией векторов из Б_V. Линейная независимость системы Б_V следует из **теоремы об образе системы векторов при изоморфизме**.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \ \Leftrightarrow\ \dim U = \dim V\right). \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f : U \to V$ — изоморфизм, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Проверим, что $\mathbf{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

Осталось проверить, полноту системы $\mathbf{Б}_V$,
то есть тот факт, что любой вектор y из V можно представить в виде $y = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V\right). \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f: U \to V$ — изоморфизм, $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Проверим, что $\text{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

Осталось проверить, полноту системы Б_V.

Возьмем произвольный вектор $y \in V$.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f: U \to V$ — изоморфизм, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Проверим, что $\mathbf{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

Осталось проверить, полноту системы $\mathbf{Б}_V$.

Возьмем произвольный вектор $y \in V$. Так как f — отображение пространства U **на** V, то у вектора y есть прообраз $x \in U$: $\quad y = f(x)$.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f: \ U \to V$ — изоморфизм, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Проверим, что $\mathbf{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

Осталось проверить, полноту системы $\mathbf{Б}_V$.

Возьмем произвольный вектор $y \in V$. Так как f — отображение пространства U **на** V, то у вектора y есть прообраз $x \in U$: $\quad y = f(x)$. $\mathbf{Б}_U$ — базис, поэтому, по **критерию базиса**

$$= f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) =$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V). \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f : U \to V$ — изоморфизм, $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Проверим, что $\text{Б}_V = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

Осталось проверить, полноту системы Б_V.

Возьмем произвольный вектор $y \in V$. Так как f — отображение пространства U **на** V, то у вектора y есть прообраз $x \in U$: $\quad y = f(x)$. Б_U — базис, поэтому, по **критерию базиса**

$$y = f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) =$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f:\ U \to V$ — изоморфизм, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Проверим, что $\mathbf{Б}_V = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ — базис линейного пространства V.

Осталось проверить, полноту системы $\mathbf{Б}_V$.

Возьмем произвольный вектор $y \in V$. Так как f — отображение пространства U **на** V, то у вектора y есть прообраз $x \in U$: $\quad y = f(x)$. $\mathbf{Б}_U$ — базис, поэтому, по **критерию базиса**

$$y = f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n).$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \;\Leftrightarrow\; \dim U = \dim V\right). \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\left\{\begin{array}{l} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{array}\right. \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть размерность пространств U и V равна n.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть размерность пространств U и V равна n. Пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, $\mathbf{Б}_V = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис линейного пространства V.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть размерность пространств U и V равна n. Пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, $\mathbf{Б}_V = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис линейного пространства V. Надо доказать, что существует изоморфизм $U \mapsto V$, то есть линейное **взаимно однозначное отображение** $f : U \mapsto V$.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\left\{\begin{array}{l}\dim U < \infty, \\ \dim V < \infty\end{array}\right. \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть размерность пространств U и V равна n. Пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, $\mathbf{Б}_V = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис линейного пространства V. Надо доказать, что существует изоморфизм $U \mapsto V$, то есть линейное **взаимно однозначное отображение** $f : U \mapsto V$.

Мы зададим f явной формулой. Идея построения изоморфизма f очень проста: в разложении $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ мы произведем «подмену»: заменим векторы e_i на f_i.

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность.

$$\lambda_1 e_1 \ + \ \lambda_2 e_2 \ + \ \lambda_3 e_3 \ + \ \ldots \ + \ \lambda_n e_n$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность.

$$\begin{array}{l} \lambda_1 e_1 \ + \ \lambda_2 e_2 \ + \ \lambda_3 e_3 \ + \ \ldots \ + \ \lambda_n e_n \\ \ \ \downarrow \\ \lambda_1 f_1 \ + \end{array}$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \;\Leftrightarrow\; \dim U = \dim V \right). \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность.

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 e_1 & + & \lambda_2 e_2 & + & \lambda_3 e_3 & + & \ldots & + & \lambda_n e_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ \lambda_1 f_1 & + & \lambda_2 f_2 & + & & & & & \end{array}$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \left(U \simeq V \Leftrightarrow \dim U = \dim V\right). \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность.

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 e_1 & + & \lambda_2 e_2 & + & \lambda_3 e_3 & + & \ldots & + & \lambda_n e_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \lambda_1 f_1 & + & \lambda_2 f_2 & + & \lambda_3 f_3 & + & & & \end{array}$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность.

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 e_1 & + & \lambda_2 e_2 & + & \lambda_3 e_3 & + & \ldots & + & \lambda_n e_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \lambda_1 f_1 & + & \lambda_2 f_2 & + & \lambda_3 f_3 & + & \ldots & + & \end{array}$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Достаточность.

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 e_1 & + & \lambda_2 e_2 & + & \lambda_3 e_3 & + & \ldots & + & \lambda_n e_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \lambda_1 f_1 & + & \lambda_2 f_2 & + & \lambda_3 f_3 & + & \ldots & + & \lambda_n f_n \end{array}$$

I.8. Критерий изоморфности линейных пространств

Теорема 2.

$$\begin{cases} \dim U < \infty, \\ \dim V < \infty \end{cases} \Rightarrow \ (U \simeq V \ \Leftrightarrow \ \dim U = \dim V)\,. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Нетрудно показать, что отображение f, всякому вектору $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in U$ ставящее в соответствие вектор

$$f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n, \tag{2}$$

является **изоморфизмом**.

Взаимная однозначность следует из **теоремы о единственности разложения по базису**, а линейность очевидна.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

$+$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейность отображения f очевидна. Надо доказать, что $f\left(\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) =$

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейность отображения f очевидна. Надо доказать, что $f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору **Л.П.** U ставящая в соответствие столбец его **координат** в **базисе Б**:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейность отображения f очевидна. Надо доказать, что $f\left(\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$.

Левая часть: $f\left(\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i)\, e_i\right) =$

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейность отображения f очевидна. Надо доказать, что $f\left(\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \alpha f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$.

Левая часть: $f\left(\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i)\, e_i\right) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \ldots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix}$.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \qquad (3)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейность отображения f очевидна. Надо доказать, что $f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$.

Правая часть: $\alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \qquad (3)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейность отображения f очевидна. Надо доказать, что $f\left(\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \alpha f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$.

Правая часть: $\alpha f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \ldots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix}$.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Таким образом, линейность отображения f доказана:

$$f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \dots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right).$$

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору **Л.П.** U ставящая в соответствие столбец его **координат** в **базисе Б**:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\mathbf{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Таким образом, линейность отображения f доказана:

$$f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \dots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right).$$

Взаимная однозначность следует из **теоремы о единственности разложения по базису**. Теорема доказана.

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

При этом изоморфизме согласно **формуле, определяющей столбец координат вектора**, имеем

$$f(e_1) = f(1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \ldots) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору* ***Л.П.*** *U ставящая в соответствие столбец его* ***координат*** *в* ***базисе Б****:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \qquad (3)$$

является изоморфизмом.

При этом изоморфизме согласно **формуле, определяющей столбец координат вектора**, имеем

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(e_2) = f(0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \ldots) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

I.9. Теорема о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. *Функция f, каждому вектору **Л.П.** U ставящая в соответствие столбец его **координат** в **базисе Б**:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\text{Б}}, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

При этом изоморфизме согласно **формуле, определяющей столбец координат вектора**, имеем

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \; f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \; f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots$$

Рассмотрим пример?

II. Матрица перехода в другой базис

Как согласовывать результаты, полученные в разных базисах? Например, как средствами матричной алгебры найти координаты вектора в другом базисе?

II. Матрица перехода в другой базис

Как согласовывать результаты, полученные в разных базисах? Например, как средствами матричной алгебры найти координаты вектора в другом базисе?

Ясно, что надо знать связь между базисами **Б** и **Б'**. Надо эту связь задать стандартным образом. Что взять в качестве стандарта?

II. Матрица перехода в другой базис

Как согласовывать результаты, полученные в разных базисах? Например, как средствами матричной алгебры найти координаты вектора в другом базисе?

Ясно, что надо знать связь между базисами **Б** и **Б'**. Надо эту связь задать стандартным образом. Что взять в качестве стандарта?

Мы договорились все проблемы решать в $\mathbb{R}^n$. Поэтому естественно зафиксировать

II. Матрица перехода в другой базис

Как согласовывать результаты, полученные в разных базисах? Например, как средствами матричной алгебры найти координаты вектора в другом базисе?

Ясно, что надо знать связь между базисами **Б** и **Б'**. Надо эту связь задать стандартным образом. Что взять в качестве стандарта?

Мы договорились все проблемы решать в $\mathbb{R}^n$. Поэтому естественно зафиксировать *разложение векторов одного базиса в другом базисе.*

II.1. Определение матрицы перехода в другой базис

Определение 3. *Пусть* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — *два базиса линейного пространства* U. **Матрицей перехода** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'** *называется матрица* $T = T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б'}} = (t_{ji})_{n \times n}$, *коэффициенты которой определяются равенствами:*

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j. \qquad (4)$$

II.1. Определение матрицы перехода в другой базис

Определение 3. *Пусть* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$, **Б'** $= \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — *два базиса линейного пространства* U. **Матрицей перехода** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'** *называется матрица* $T = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ji})_{n\times n}$, *коэффициенты которой определяются равенствами:*

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j. \tag{4}$$

Таким образом, *i-й столбец матрицы перехода из* **Б** *в базис* **Б'** *представляет собой столбец координат вектора* e'_i *в базисе* **Б**.

Рассмотрим пример?

II.1. Определение матрицы перехода в другой базис

Определение 3. *Пусть* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$, **Б'** $= \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* U. **Матрицей перехода** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'** *называется матрица* $T = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} = (t_{ji})_{n\times n}$, *коэффициенты которой определяются равенствами:*

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j. \tag{4}$$

Первая задача, в которой мы применим матрицу перехода и равенство (4), будет задача о координатах вектора.

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — **матрица перехода** из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора x справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \qquad (5)$$

Доказательство.

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. Воспроизводится из определений.

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'**, *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\mathbf{Б'}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. Нам надо найти связь между координатами вектора x в базисах $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\mathbf{Б'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. По определению координат, имеем

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'**, *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. По определению координат, имеем

$$= x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. По определению координат, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Используя определение **матрицы перехода**, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i =$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Используя определение **матрицы перехода**, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j =$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Используя определение **матрицы перехода**, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i t_{ji} \right) e_j.$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Используя определение **матрицы перехода**, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i t_{ji} \right) e_j.$$

Хотелось бы отсюда получить равенство $\lambda_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i t_{ji}$. Однако...

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Хотелось бы отсюда получить равенство $\lambda_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i t_{ji}$. Однако, вообще говоря, из того, что равны суммы, не следует, что равны слагаемые. Например, $3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 2 \cdot 4 + 7 \cdot 2$, но $3 \neq 2$ и $5 \neq 7$.

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Но в равенстве $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i t_{ji} \right) e_j$ мы имеем два разложения вектора x по одному и тому же *базису*. Поэтому равенство $\lambda_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i t_{ji}$ следует из **теоремы о единственности разложения по базису**. *Это рассуждение является стандартным при доказательстве теорем теории линейных пространств.*

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i = x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$

Доказанное равенство $\lambda_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_{ji}\lambda'_i$ в матричном виде запишется, как $[x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}[x]_{\text{Б'}}$. Из этого равенства получаем доказываемую формулу (5).

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'**, *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. С помощью умножения матриц «на макроуровне» Это доказательство основано на теореме о стандартном изоморфизме в $\mathbb{R}^n$ и **формуле из определения изоморфизма в** $\mathbb{R}^n$, а также умножении матриц «на макроуровне».

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'**, *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. С помощью умножения матриц «на макроуровне» Это доказательство основано на теореме о стандарном изомофизме в $\mathbb{R}^n$ и **формуле из определения изоморфизма в** $\mathbb{R}^n$, а также умножении матриц «на макроуровне».

В самом деле, тот факт, что $[x]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$, означает, согласно **формуле из определения столбца координат**, что

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. С помощью умножения матриц «на макроуровне» Это доказательство основано на теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$ и **формуле из определения изоморфизма в $\mathbb{R}^n$**, а также умножении матриц «на макроуровне». В самом деле, тот факт, что $[x]_{\text{Б'}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$, означает, согласно **формуле из определения столбца координат**, что

$$x = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n.$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. Перейдем в равенстве $x = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$ к образам векторов при стандартном изоморфизме, порожденном базисом Б, по **формуле из определения изоморфизма в $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**:

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'**, *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. Перейдем в равенстве $x = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$ к образам векторов при стандартном изоморфизме, порожденном базисом **Б**, по **формуле из определения изоморфизма в** $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$:

$$[x]_{\text{Б}} = [x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n]_{\text{Б}} =$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б'***, для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство. Перейдем в равенстве $x = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$ к образам векторов при стандартном изоморфизме, порожденном базисом **Б**, по **формуле из определения изоморфизма в $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**:

$$[x]_{\mathbf{Б}} = [x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n]_{\mathbf{Б}} = x'_1\,[e'_1]_{\mathbf{Б}} + \ldots + x'_n\,[e'_n]_{\mathbf{Б}}\,.$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство.

$$[x]_{\text{Б}} = [x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n]_{\text{Б}} = x'_1\,[e'_1]_{\text{Б}} + \ldots + x'_n\,[e'_n]_{\text{Б}} =$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство.

$$[x]_{\text{Б}} = [x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n]_{\text{Б}} = x'_1 \, [e'_1]_{\text{Б}} + \ldots + x'_n \, [e'_n]_{\text{Б}} =$$

$$= \left(\, [e'_1]_{\text{Б}} \;\; \ldots \;\; [e'_n]_{\text{Б}} \, \right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство.

$$[x]_{\text{Б}} = [x_1' e_1' + \ldots + x_n' e_n']_{\text{Б}} = x_1' \, [e_1']_{\text{Б}} + \ldots + x_n' \, [e_n']_{\text{Б}} =$$

$$= \left(\, [e_1']_{\text{Б}} \; \ldots \; [e_n']_{\text{Б}} \, \right) \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б'}},$$

II.2. Теорема о координатах вектора в разных базисах

Теорема 4. *Если* $T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б', *для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\text{Б'}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б}} = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} \cdot [x]_{\text{Б}}. \tag{5}$$

Доказательство.

$$[x]_{\text{Б}} = [x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n]_{\text{Б}} = x'_1 [e'_1]_{\text{Б}} + \ldots + x'_n [e'_n]_{\text{Б}} =$$

$$= \begin{pmatrix} [e'_1]_{\text{Б}} & \ldots & [e'_n]_{\text{Б}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = T_{\text{Б}\to\text{Б'}} \cdot [x]_{\text{Б'}},$$

откуда следует формула (5). Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?

Вернуться к оглавлению раздела «Линейные пространства»?