Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Линейные операторы

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Понятие линейного оператора

Мы изучили основы теории линейных пространств. Применяя стратегии перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов и стратегию построения модели мы выделили в линейном пространстве подпространства и построили новую алгебру — алгебру подпространств. Исследование, представленное в этом разделе, можно рассматривать как применение к изучению линейного пространства стратегии обогащения модели и стратегии смены ролей и приоритетов. А именно, мы введем в линейном пространстве еще одну характеристику — **линейный оператор** или (синоним) **линейное отображение**.

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V *—* ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V *—* ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. *Пусть* U *и* V *—* ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Линейным оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***линейная функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Слишком много слов естественного языка...

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V *—* ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V *—* ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть U и V — **линейные пространства** над **полем** K.* **Оператором** *линейного пространства U в линейное пространство V называется **функция** $\hat{A}: U \to V$.*

Определение 2. *U и V — **л.п.** над **полем** K, $\hat{A}: U \to V$ —* **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

Особый интерес представляет частный случай, когда $U = V$:

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V *— **линейные пространства** над **полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется **функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V *— **л.п.** над **полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ *—* **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

Определение 3. *Пусть* U *— **линейное пространство** над **полем*** K. **Линейным оператором** *линейного пространства* U *называется **линейная функция*** $\hat{A}: U \to U$.

Слишком много слов естественного языка...

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V — ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

Определение 3. U — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to U$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (2)

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V — ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}\,(x) + \mu \hat{A}\,(y)$. (1)

Определение 3. U — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to U$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}\,(x) + \mu \hat{A}\,(y)$. (2)

Таким образом, линейный оператор — это произвольная функция $\hat{A}: U \to V$ такая, что для любых векторов $x, y \in U$ и любых скаляров λ, μ имеет место тождество $\hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$.

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V — ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

Определение 3. U — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to U$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (2)

Как разобраться с тем, что такое линейный оператор?

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V — ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

Определение 3. U — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to U$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (2)

Как разобраться с тем, что такое линейный оператор?

Есть два способа:

— рассмотреть достаточное число разнообразных примеров;

I.1. Определение линейного оператора

Определение 1. *Пусть* U *и* V — ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K. **Оператором** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется* ***функция*** $\hat{A}: U \to V$.

Определение 2. U *и* V — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (1)

Определение 3. U — ***л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to U$ — **линейный оператор**, *если* $\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$. (2)

Как разобраться с тем, что такое линейный оператор?

Есть два способа:

— рассмотреть достаточное число разнообразных примеров;

— изучение определения, получение следствий.

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.
- Поворот плоскости на угол α вокруг начала координат. *При этом имеет место некая «симметрия»: во-первых, можно считать, что* ***базис*** *мы не меняли, а повернули все пространство, то есть изменили положение каждого вектора* x. *Во-вторых, можно, наоборот, считать, что все пространство неподвижно, и мы просто меняем* ***базис***. Во втором случае «поведение» **координат вектора** описывается матрицей перехода. Отсюда следует, что

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.
- Поворот плоскости на угол α вокруг начала координат. *При этом имеет место некая «симметрия»: во-первых, можно считать, что* ***базис*** *мы не меняли, а повернули все пространство, то есть изменили положение каждого вектора* x*. Во-вторых, можно, наоборот, считать, что все пространство неподвижно, и мы просто меняем* ***базис****.* Во втором случае «поведение» **координат вектора** описывается матрицей перехода. Отсюда следует, что «поведение» координат образа вектора x относительно действия линейного оператора $\hat{A}$ должно описываться формулой, похожей на формулу вычисления координат вектора в новом базисе.

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.
- Поворот плоскости на угол α вокруг начала координат.
- Проецирование на ось, проходящую через начало координат.

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.
- Поворот плоскости на угол α вокруг начала координат.
- Проецирование на ось, проходящую через начало координат.
- Дифференцирование в пространстве многочленов.

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.
- Поворот плоскости на угол α вокруг начала координат.
- Проецирование на ось, проходящую через начало координат.
- Дифференцирование в пространстве многочленов.
- $\hat{A}(X) = SXT$ для некоторых матриц S, T в пространстве $m \times n$-матриц.

I.2. Примеры линейных операторов

Сначала, естественно, применим первый способ: рассмотрим примеры линейных операторов.

- Изоморфизм одного линейного пространства в другое.
- Поворот плоскости на угол α вокруг начала координат.
- Проецирование на ось, проходящую через начало координат.
- Дифференцирование в пространстве многочленов.
- $\hat{A}(X) = SXT$ для некоторых матриц S, T в пространстве $m \times n$-матриц.
- $\hat{A}(X) = XTX$ — не линейный оператор!

I.2. Примеры линейных операторов

Под *проекцией вектора* здесь будем понимать **геометрическую проекцию**. В курсе векторной алгебры вы рассматривали алгебраическую проекцию вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ на $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, значение которой можно вычислить как $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}}\right)$. Строгую формулировку определений геометрической проекции вектора на ось параллельно плоскости и геометрической проекции вектора на плоскость вы можете получить самостоятельно, используя знание **структуры определения**, и соответствующие **«шаблоны»**, с использованием формул для операторов $\hat{P}_i$, полученных при **решении примеров**. Мы проиллюстрировали эти понятия рисунками **рис.1** и **рис.2**.

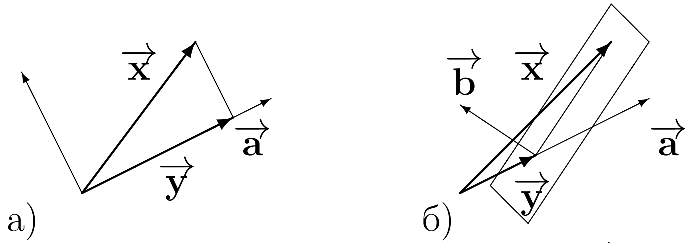

Рис. 1. а) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — ортогональная проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;
б) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно плоскости с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

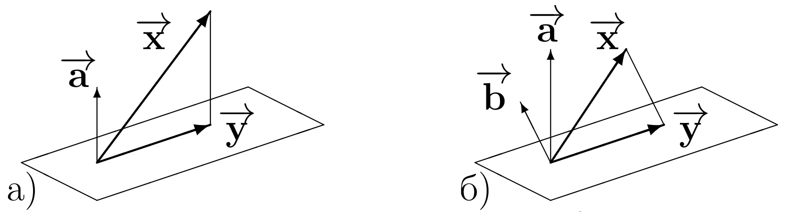

Рис. 2. а) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — ортогональная проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на плоскость с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;
б) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ на плоскость с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

II. Матрица линейного оператора

Полученные при решении примера на задание оператора, формулы обладают одним существенным недостатком: они недостаточно универсальны. Их нельзя использовать для произвольного линейного пространства, по крайней мере до тех пор, пока мы не введем какимлибо образом скалярное произведение. В соответствии с выдвинутой нами программой нам надо получить формулу, позволяющую задавать *любой* линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ («координатном пространстве»).

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\left\{ \begin{array}{l} \text{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \text{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{array} \right.$ — **базисы** линейных пространств U и, соответственно, V.

II.1. Определение матрицы линейного оператора

$$\text{Пусть} \begin{cases} \mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \\ \mathbf{Б}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}, \end{cases} \qquad [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\left\{ \begin{aligned} \text{Б} &= \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \text{Б}' &= \{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}, \end{aligned} \right. \quad [\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e_j' = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) =$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \mathbf{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{array}\right.$ $\quad [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) =$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\begin{cases} \text{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \text{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{cases}$ $\quad [\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

По определению координат вектора, матрицы линейного оператора и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) =$$

Отметим, что $\hat{A}(e_i)$ не зависит от x.

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\begin{cases} \mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \mathbf{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{cases}$ $\quad [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) =$$

Отметим, что $\hat{A}(e_i)$ не зависит от x. Разложим его по базису $\mathbf{Б}'$:

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\begin{cases} \mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \mathbf{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{cases}$ $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) =$$

Отметим, что $\hat{A}(e_i)$ не зависит от x. Разложим его по базису $\mathbf{Б}'$:

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j.$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\left\{\begin{array}{l} \text{Б} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \\ \text{Б}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}, \end{array}\right.$ $\quad [\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j =$$

Отметим, что $\hat{A}(e_i)$ не зависит от x. Разложим его по базису $\text{Б}'$:

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j.$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\begin{cases} \text{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \text{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{cases}$ $\quad [\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}\right) e'_j.$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть $\begin{cases} \text{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \\ \text{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, \end{cases}$ $[\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

По определению **координат вектора**, **матрицы линейного оператора** и в силу линейности оператора $\hat{A}$ получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}\right) e'_j.$$

В итоге получили выражение, зависящее только от координат λ_i вектора x и коэффициентов a_{ji}, где

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j.$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Определение 4. *Пусть* ***линейные пространства*** *над* ***полем*** K, $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ *—* ***базисы*** *линейных пространств* U *и, соответственно,* V, $\hat{A}$ *—* ***линейный оператор*** *линейного пространства* U *в линейное пространство* V. *Тогда* **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$ **в базисах** Б_U**-**Б_V *называется матрица* $\mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}$, *коэффициенты которой определяются равенствами*

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j. \tag{3}$$

Слишком много слов естественного языка...

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Определение 4. *Пусть* $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A} : U \to V$ — ***лин.оператор***. *Тогда* **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$ **в базисах** Б_U**-**Б_V *называется матрица* $\mathbf{A}_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} = (a_{ij})_{m \times n}$, *где* $\hat{A}(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$. (3)

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — ***лин.оператор***. *Тогда* **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$ **в базисах** $\mathbf{Б}_U$**-**$\mathbf{Б}_V$ *называется матрица* $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}$, *где* $\hat{A}(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j$. (3)

Итак, *i-тым столбцом матрицы оператора в базисах* $\mathbf{Б}_U$-$\mathbf{Б}_V$ *является столбец координат в базисе* $\mathbf{Б}_V$ **образа** *i-того базисного вектора базиса* $\mathbf{Б}_U$.

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A} : U \to V$ — ***лин.оператор***. *Тогда* **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$ **в базисах** $\mathbf{Б}_U$**-**$\mathbf{Б}_V$ *называется матрица* $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m \times n}$, *где* $\hat{A}(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$. (3)

В случае, когда $U = V$, то есть когда $\hat{A}$ является линейным оператором линейного пространства U «по умолчанию» полагают $\mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V$. При этом говорят о *матрице оператора в базисе* $\mathbf{Б}_U$, и эта матрица определяется равенством

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Определение 4. *Пусть* $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ *—* ***базисы л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A} : U \to V$ *—* ***лин.оператор****. Тогда* **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$ **в базисах** Б_U**-**Б_V *называется матрица* $\mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}$, *где* $\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j$. (3)

В случае, когда $U = V$, то есть когда $\hat{A}$ является линейным оператором линейного пространства U «по умолчанию» полагают $\text{Б}_U = \text{Б}_V$. При этом говорят о *матрице оператора в базисе* Б_U, и эта матрица определяется равенством

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j. \tag{4}$$

II.1. Определение матрицы линейного оператора

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** *над* ***полем*** K, $\hat{A}: U \to V$ — ***лин.оператор***. *Тогда* **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$ **в базисах** $\mathbf{Б}_U$**-**$\mathbf{Б}_V$ *называется матрица* $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}$, *где* $\hat{A}(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j$. (3)

Таким образом, для линейного оператора линейного пространства U, т.е когда $\mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V$ и $\hat{A}(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$, *$i$-тым столбцом матрицы оператора в базисе* $\mathbf{Б}$ *является столбец координат в базисе* $\mathbf{Б}$ *образа i-того базисного вектора базиса* $\mathbf{Б}$.

Рассмотрим пример?

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть U и V — **линейные пространства** над **полем** K, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — **базисы** этих пространств, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в этих **базисах** линейного пространства U. Тогда для любого $x \in U$*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Слишком много слов естественного языка в формулировке...

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» доказательство.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ *— **базисы л.п.*** U *и* V *над **полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ *— **матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» доказательство. Прямое следствие из определений.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ *—* ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ *—* ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$= \hat{A}(x) =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ *— **базисы** **л.п.** U и V над **полем** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}\right) e'_j.$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}\right) e'_j.$$

Дальнейшие рассуждения стандартны, см. д-во **теоремы о координатах вектора в разных базисах**.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}\right) e'_j.$$

в силу теоремы о единственности разложения по базису получаем равенства $\mu_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}$.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

«Стандартное» д-во. Пусть $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \hat{A}(x) =$$

$$= \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji}\right) e'_j.$$

В матричной записи эта система равенств имеет вид **формулы (5)**. «Стандартное» доказательство закончено.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

Доказательство с помощью **умножения матриц «на макро-уровне».**

Тот факт, что $[x]_{\mathbf{Б}_U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, означает по определению, что $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Поэтому в силу линейности оператора $\hat{A}$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

Доказательство с помощью умножения матриц «на макро-уровне».

$$\hat{A}(x) = \hat{A}\left(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\right) =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Доказательство с помощью умножения матриц «на макро-уровне».

$$\hat{A}(x) = \hat{A}\left(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\right) = \lambda_1 \hat{A}\left(e_1\right) + \ldots + \lambda_n \hat{A}\left(e_n\right).$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\text{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\text{Б}_U, \text{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} = \mathbf{A}_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} \cdot [x]_{\text{Б}_U}. \tag{5}$$

Доказательство с помощью умножения матриц «на макро-уровне». $\hat{A}(x) = \lambda_1 \hat{A}\left(e_1\right) + \ldots + \lambda_n \hat{A}\left(e_n\right)$.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Доказательство с помощью **умножения матриц «на макро-уровне».** $\hat{A}(x) = \lambda_1 \hat{A}\left(e_1\right) + \ldots + \lambda_n \hat{A}\left(e_n\right).$

Перейдем в этом равенстве к образам векторов при стандартном изоморфизме, порожденном базисом $\mathbf{Б}_V$:

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Доказательство с помощью умножения матриц «на макроуровне». $\hat{A}(x) = \lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)$.

$$\left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}_V} = \left[\lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** *U и V над* ***полем*** *K,* $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** *$\hat{A}$ в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

Доказательство с помощью **умножения матриц «на макро-уровне».** $\hat{A}(x) = \lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)$.

$$\left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}_V} = \left[\lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

$$= \lambda_1 \left[\hat{A}(e_1)\right]_{\mathbf{Б}_V} + \ldots + \lambda_n \left[\hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

Формула (5) следует из умножения матриц на «макроуровне»:

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Доказательство с помощью умножения матриц «на макро-уровне». $\hat{A}(x) = \lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)$.

$$\left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}_V} = \left[\lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

$$= \lambda_1 \left[\hat{A}(e_1)\right]_{\mathbf{Б}_V} + \ldots + \lambda_n \left[\hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

$$= \left(\left[\hat{A}(e_1)\right]_{\mathbf{Б}_V} \ \ldots \ \left[\hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \qquad (5)$$

Доказательство с помощью умножения матриц «на макро-уровне». $\hat{A}(x) = \lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)$.

$$\left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}_V} = \left[\lambda_1 \hat{A}(e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

$$= \lambda_1 \left[\hat{A}(e_1)\right]_{\mathbf{Б}_V} + \ldots + \lambda_n \left[\hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} =$$

$$= \left(\left[\hat{A}(e_1)\right]_{\mathbf{Б}_V} \;\ldots\; \left[\hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}_V} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} [x]_{\mathbf{Б}_U}.$$

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — ***базисы л.п.*** U *и* V *над* ***полем*** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Теорема доказана.

II.2. Теорема о координатах образа вектора

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ *— **базисы л.п.** U и V над **полем** K, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в этих базисах. Тогда*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5}$$

Теорема доказана.

Если $U = V$, то (5) преобразуется к виду

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{5'}$$

Рассмотрим пример?

III. Алгебра линейных операторов

Применим стратегию перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов. На множестве всех линейных операторов пространства U в пространство V мы введем ряд естественных («само собой разумеющихся») операций.

III.1. Сумма линейных операторов

Определение 5. Суммой операторов $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A}+\hat{B}$, *определенный формулой:*

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)(x) = \hat{A}(x) + \hat{B}(x). \tag{6}$$

III.2. Произведение оператора на скаляр

Определение 5. Суммой операторов $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A}+\hat{B}$, *определенный формулой:*

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)(x)=\hat{A}(x)+\hat{B}(x). \tag{6}$$

Определение 6. Произведением оператора $\hat{A}$ **на скаляр** λ *называется оператор* $\lambda\hat{A}$, *определенный формулой:*

$$\left(\lambda\hat{A}\right)(x)=\lambda\left(\hat{A}(x)\right). \tag{7}$$

III.3. Произведение операторов

Определение 5. Суммой операторов $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A} + \hat{B}$, *определенный формулой:*

$$\left(\hat{A} + \hat{B}\right)(x) = \hat{A}(x) + \hat{B}(x). \tag{6}$$

Определение 6. Произведением оператора $\hat{A}$ **на скаляр** λ *называется оператор* $\lambda\hat{A}$, *определенный формулой:*

$$\left(\lambda\hat{A}\right)(x) = \lambda\left(\hat{A}(x)\right). \tag{7}$$

В случае $U = V$ можно ввести еще одну чрезвычайно полезную операцию.

Определение 7. *Если* $U = V$, *то* **произведением операторов** $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A} \cdot \hat{B}$, *определенный формулой:*

$$\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)(x) = \hat{A}\left(\hat{B}(x)\right). \tag{8}$$

III.4. Теорема об алгебре линейных операторов

Теорема 2. *Пусть* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *— линейные операторы линейного пространства* U *в линейное пространство* V. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Сумма* $\hat{A}+\hat{B}$ *линейных операторов* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *является линейным оператором.*

2. *Произведение* $\lambda\hat{A}$ *линейного оператора на скаляр является линейным оператором.*

3. *Если* $U = V$, *то произведение* $\hat{A}\cdot\hat{B}$ *линейных операторов является линейным оператором.*

Доказательство.

III.4. Теорема об алгебре линейных операторов

Теорема 2. *Пусть* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *— линейные операторы линейного пространства* U *в линейное пространство* V. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Сумма* $\hat{A} + \hat{B}$ *линейных операторов* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *является линейным оператором.*
2. *Произведение* $\lambda\hat{A}$ *линейного оператора на скаляр является линейным оператором.*
3. *Если* $U = V$, *то произведение* $\hat{A} \cdot \hat{B}$ *линейных операторов является линейным оператором.*

Доказательство. Очевидное следствие из определения операций.

III.5. Теорема о линейном пространстве линейных операторов

Теорема 3 (о линейном пространстве линейных операторов). *Множество всех линейных операторов пространства U в линейное пространство V является линейным пространством относительно операций сложения операторов и умножения оператора на скаляр.*

Доказательство

III.5. Теорема о линейном пространстве линейных операторов

Теорема 3 (**о линейном пространстве линейных операторов**). *Множество всех линейных операторов пространства U в линейное пространство V является линейным пространством относительно операций сложения операторов и умножения оператора на скаляр.*

Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства, проделайте это самостоятельно.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Теорема 4 (**об изоморфности лин.пр-ва операторов и лин.пр-ва матриц**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U$, $\mathbf{Б}_V$ *—* ***базисы*** *этих пространств,* W *— линейное пространство линейных операторов пространства* U *в пространство* V. *Тогда отображение* f, *определенное формулой* $f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$, *является изоморфизмом линейного пространства* W *на линейное пространство всех матриц размерности* $m \times n$ *с коэффициентами из поля* $\mathbf{K}$. *Более того, если* $U = V$, *то* $f\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right) \cdot f\left(\hat{B}\right)$.

Доказательство.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Утверждение этой теоремы, как и предыдущих, является следствием определений. Действительно, пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Проверим, что f — изоморфизм.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Утверждение этой теоремы, как и предыдущих, является следствием определений. Действительно, пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Проверим, что f — изоморфизм.

Взаимная однозначность f следует из определения матрицы оператора (равенство (3)) и теоремы о единственности разложения по базису.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Утверждение этой теоремы, как и предыдущих, является следствием определений. Действительно, пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Проверим, что f — изоморфизм.

Тот факт, что для каждой матрицы найдется прообраз, очевиден: пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ — произвольная матрица. Тогда отображение $\hat{A}$, определенное формулой

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j,$$

является, очевидно, линейным оператором линейного пространства U в линейное пространство V, причем $f(\hat{A}) = \mathbf{A}$.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Утверждение этой теоремы, как и предыдущих, является следствием определений. Действительно, пусть $\textbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\textbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Проверим, что f — изоморфизм.

Значит, осталось проверить линейность функции f. Надо проверить *равенство*

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Утверждение этой теоремы, как и предыдущих, является следствием определений. Действительно, пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \dots, e'_m\}$. Проверим, что f — изоморфизм.

Значит, осталось проверить линейность функции f. Надо проверить *равенство*

$$f(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}) = \lambda f(\hat{A}) + \mu f(\hat{B}). \tag{9}$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Утверждение этой теоремы, как и предыдущих, является следствием определений. Действительно, пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Проверим, что f — изоморфизм.

Значит, осталось проверить линейность функции f. Надо проверить *равенство*

$$f(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}) = \lambda f(\hat{A}) + \mu f(\hat{B}). \tag{9}$$

Вычислим левую и правую часть этого равенства и приведем их тождественными алгебраическими преобразованиями к одному и тому же виду.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$ имеем

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji} e'_j =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji} e'_j = \left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right)(e_i) =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji} e'_j = \left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right)(e_i) = \lambda\hat{A}(e_i) + \mu\hat{B}(e_i) =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda,\mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}e'_j = \left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right)(e_i) = \lambda\hat{A}(e_i) + \mu\hat{B}(e_i) =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j + \mu\sum_{j=1}^{m} b_{ji}e'_j =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda,\mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}e'_j = \left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right)(e_i) = \lambda\hat{A}(e_i) + \mu\hat{B}(e_i) =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j + \mu\sum_{j=1}^{m} b_{ji}e'_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\lambda a_{ji} + \mu b_{ji}\right)e'_j.$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}e'_j = \left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right)(e_i) = \lambda\hat{A}(e_i) + \mu\hat{B}(e_i) =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j + \mu\sum_{j=1}^{m} b_{ji}e'_j = \sum_{j=1}^{m}(\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})\, e'_j.$$

Значит, в силу теоремы о единственности разложения по базису, $c_{ji} = \lambda a_{ji} + \mu b_{ji}$.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Пусть

$$f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad f(\hat{B}) = \mathbf{B}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = (b_{ij})_{m\times n}, \quad \lambda,\mu \in K.$$

Обозначим левую часть доказываемого равенства (9) через $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$. Тогда для коэффициентов c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ji}e'_j = \left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right)(e_i) = \lambda\hat{A}(e_i) + \mu\hat{B}(e_i) =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{m} a_{ji}e'_j + \mu\sum_{j=1}^{m} b_{ji}e'_j = \sum_{j=1}^{m}(\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})\,e'_j.$$

Таким образом, $f(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}) = \mathbf{C}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} = \lambda f(\hat{A}) + \mu f(\hat{B})$, то есть f — линейная функция. Значит, f — изоморфизм.

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)=f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U=V$, $\mathbf{Б}=\mathbf{Б}_U=\mathbf{Б}_V=\{e_1,\ldots,e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)=\mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)=f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U=V$, $\mathbf{Б}=\mathbf{Б}_U=\mathbf{Б}_V=\{e_1,\ldots,e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)=\mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i)=$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)=f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U=V$, $\mathbf{Б}=\mathbf{Б}_U=\mathbf{Б}_V=\{e_1,\ldots,e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)=\mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i)=\hat{A}\left(\hat{B}(e_i)\right)=$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U = V$, $\mathbf{Б} = \mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = \mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i) = \hat{A}\left(\hat{B}(e_i)\right) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j\right) =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U = V$, $\mathbf{Б} = \mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = \mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i) = \hat{A}\left(\hat{B}(e_i)\right) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\hat{A}\left(e_j\right) =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U = V$, $\mathbf{Б} = \mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = \mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i) = \hat{A}\left(\hat{B}(e_i)\right) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\hat{A}\left(e_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k =$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U = V$, $\mathbf{Б} = \mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = \mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i) = \hat{A}\left(\hat{B}(e_i)\right) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\hat{A}\left(e_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}\right)e_k.$$

III.6. Теорема об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц

Доказательство. Осталось проверить равенство $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right)\cdot f\left(\hat{B}\right)$. Пусть $U = V$, $\mathbf{Б} = \mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Введем следующее обозначение: $f\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right) = \mathbf{C}_{\mathbf{Б}}$. Тогда, по определению произведения операторов (равенство (8)), получаем

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(e_i) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}\right)e_k.$$

Следовательно, по **теореме о единственности разложения по базису**, $c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}$, то есть $\mathbf{C}_{\mathbf{Б}} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\mathbf{B}_{\mathbf{Б}}$, что и требовалось доказать.

III.7. Следствие о размерности линейного пространства линейных операторов

Следствие 1 (**о размерности лин.пр-ва линейных операторов**). *Размерность линейного пространства всех линейных операторов линейного пространства* U *в линейное пространство* V *равна* $m \cdot n$, *где* $n = \dim U$, $m = \dim V$.

Доказательство.

III.7. Следствие о размерности линейного пространства линейных операторов

Следствие 1 (о размерности лин.пр-ва линейных операторов). *Размерность линейного пространства всех линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство V равна $m \cdot n$, где $n = \dim U$, $m = \dim V$.*

Доказательство. Так как линейное пространство W всех линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство V изоморфно линейному пространству $M_{m\times n}(K)$ всех $m \times n$-матриц с коэффициентами из K, то, по критерию изоморфности линейных пространств, имеем $\dim W = \dim M_{m\times n}(K)$.

III.7. Следствие о размерности линейного пространства линейных операторов

Следствие 1 (о размерности лин.пр-ва линейных операторов). *Размерность линейного пространства всех линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство V равна $m \cdot n$, где $n = \dim U$, $m = \dim V$.*

Доказательство. $\dim W = \dim M_{m\times n}(K)$.

Для любых i, j с условиями $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, обозначим через E_{ij} матрицу, у которой все элементы нулевые, кроме элемента e_{ij}, который равен 1. Таким образом, $e_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq i \text{ или } q \neq j \\ 1, & \text{если } p = i \text{ и } q = j \end{cases}$.

III.7. Следствие о размерности линейного пространства линейных операторов

Следствие 1 (**о размерности лин.пр-ва линейных операторов**). *Размерность линейного пространства всех линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство V равна $m \cdot n$, где $n = \dim U$, $m = \dim V$.*

Доказательство. $\dim W = \dim M_{m\times n}(K)$.

Для любых i, j с условиями $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, обозначим через E_{ij} матрицу, у которой все элементы нулевые, кроме элемента e_{ij}, который равен 1. Таким образом, $e_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \ne i \text{ или } q \ne j \\ 1, & \text{если } p = i \text{ и } q = j \end{cases}$.

Тогда система матриц E_{ij}, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, очевидно, является базисом линейного пространства $M_{m\times n}(K)$.

III.7. Следствие о размерности линейного пространства линейных операторов

Следствие 1 (**о размерности лин.пр-ва линейных операторов**). *Размерность линейного пространства всех линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство V равна $m \cdot n$, где $n = \dim U$, $m = \dim V$.*

Доказательство. $\dim W = \dim M_{m\times n}(K)$.

Для любых i, j с условиями $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, обозначим через E_{ij} матрицу, у которой все элементы нулевые, кроме элемента e_{ij}, который равен 1. Таким образом, $e_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq i \text{ или } q \neq j \\ 1, & \text{если } p = i \text{ и } q = j \end{cases}$.

Тогда система матриц E_{ij}, где $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, очевидно, является базисом линейного пространства $M_{m\times n}(K)$. Таким образом, $\dim W = \dim M_{m\times n}(K) = m \times n$. Следствие доказано.

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Как мы уже отмечали, одним из «стандартных вопросов» в рассматриваемой теории является вопрос об изменении исследуемого объекта (в данном случае, матрицы оператора) при переходе в другой **базис**.

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\text{Б}_U, \text{Б}'_U$ *— **базисы** линейного пространства* U, $\text{Б}_V, \text{Б}'_V$ *— **базисы** линейного пространства* V, $T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}$ *— **матрица перехода** из базиса* Б_U *в **базис*** Б'_U, $T_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V}$ *— матрица перехода из базиса* Б_V *в **базис*** Б'_V, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\text{Б'}_U,\text{Б'}_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V} \cdot \mathbf{A}_{\text{Б}_U,\text{Б}_V} \cdot T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}. \tag{10}$$

Доказательство.

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_V$, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \tag{10}$$

Доказательство. По **теореме о координатах вектора в разных базисах** и **теореме о координатах образа вектора** для любого вектора $x \in U$ имеем, с одной стороны,

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б'}_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б'}_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б'}_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б'}_V$, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б'}_U, \mathbf{Б'}_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б'}_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б'}_U}. \tag{10}$$

Доказательство. $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'_V} =$

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\text{Б}_U, \text{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\text{Б}_V, \text{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* Б_U *в* ***базис*** Б'_U, $T_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V}$ *— матрица перехода из базиса* Б_V *в* ***базис*** Б'_V, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V*. Тогда*

$$\mathbf{A}_{\text{Б'}_U, \text{Б'}_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V} \cdot \mathbf{A}_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} \cdot T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}. \tag{10}$$

Доказательство. $[\hat{A}(x)]_{\text{Б}'_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б}'_V} \cdot [\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} =$

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\text{Б}_U, \text{Б}'_U$ *— **базисы** линейного пространства* U, $\text{Б}_V, \text{Б}'_V$ *— **базисы** линейного пространства* V, $T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}$ *— **матрица перехода** из базиса* Б_U *в **базис*** Б'_U, $T_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V}$ *— матрица перехода из базиса* Б_V *в **базис*** Б'_V, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\text{Б'}_U, \text{Б'}_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V} \cdot \mathbf{A}_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} \cdot T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}. \tag{10}$$

Доказательство. $[\hat{A}(x)]_{\text{Б}'_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б}'_V} \cdot [\hat{A}(x)]_{\text{Б}_V} =$

$$= T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б}'_V} \cdot A_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} \cdot [x]_{\text{Б}_U} =$$

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K*,* $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *— **базисы** линейного пространства* U*,* $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *— **базисы** линейного пространства* V*,* $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ *— **матрица перехода** из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в **базис*** $\mathbf{Б}'_U$*,* $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в **базис*** $\mathbf{Б}'_V$*,* $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V*. Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \tag{10}$$

Доказательство. $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} =$

$$= T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U}.$$

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть U, V — линейные пространства над полем K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ — **базисы** линейного пространства U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ — **базисы** линейного пространства V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ — **матрица перехода** из базиса $\mathbf{Б}_U$ в **базис** $\mathbf{Б}'_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ — матрица перехода из базиса $\mathbf{Б}_V$ в **базис** $\mathbf{Б}'_V$, $\hat{A}$ — линейный оператор, отображающий линейное пространство U в линейное пространство V. Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \tag{10}$$

Доказательство. Итак,

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U}.$$

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б'}_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б'}_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б'}_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б'}_V$, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б'}_U, \mathbf{Б'}_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б'}_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б'}_U}. \tag{10}$$

Доказательство. Итак,

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U}.$$

С другой стороны,

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\text{Б}_U, \text{Б}'_U$ *— **базисы** линейного пространства* U, $\text{Б}_V, \text{Б}'_V$ *— **базисы** линейного пространства* V, $T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}$ *— **матрица перехода** из базиса* Б_U *в **базис*** Б'_U, $T_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V}$ *— матрица перехода из базиса* Б_V *в **базис*** Б'_V, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\text{Б'}_U, \text{Б'}_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б'}_V} \cdot \mathbf{A}_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} \cdot T_{\text{Б}_U \to \text{Б'}_U}. \tag{10}$$

Доказательство. Итак,

$$[\hat{A}(x)]_{\text{Б}'_V} = T^{-1}_{\text{Б}_V \to \text{Б}'_V} \cdot A_{\text{Б}_U, \text{Б}_V} \cdot T_{\text{Б}_U \to \text{Б}'_U} \cdot [x]_{\text{Б}'_U}.$$

С другой стороны, $[\hat{A}(x)]_{\text{Б}'_V} = A_{\text{Б}'_U, \text{Б}'_V} \cdot [x]_{\text{Б}'_U}$.

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_V$, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \tag{10}$$

Доказательство. Следовательно, получили равенство

$$T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U} = A_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U}. \tag{11}$$

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (**о матрице оператора в другом базисе**). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_V$, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \tag{10}$$

Доказательство. Следовательно, получили равенство

$$T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U} = A_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U}. \tag{11}$$

К сожалению, «сокращать» на x в этом равенстве, вообще говоря, нельзя. **Терзают сомнения?**

III.8. Теорема о матрице оператора в другом базисе

Теорема 5 (о матрице оператора в другом базисе). *Пусть* U, V *— линейные пространства над полем* K, $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* U, $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ *—* ***базисы*** *линейного пространства* V, $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}_U$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_U$, $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}_V$ *в* ***базис*** $\mathbf{Б}'_V$, $\hat{A}$ *— линейный оператор, отображающий линейное пространство* U *в линейное пространство* V. *Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \qquad (10)$$

Доказательство. Следовательно, получили равенство

$$T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot A_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U} = A_{\mathbf{Б}'_U, \mathbf{Б}'_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'_U}. \qquad (11)$$

Положение спасает **лемма о сокращении на произвольную матрицу**, из которой следует доказываемое равенство (10).

IV. Ядро линейного оператора

Сочетание **стратегии обогащения модели** и **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций** приводит к важному понятию линейной алгебры — понятию *ядра линейного оператора*.

IV.1. Определение ядра линейного оператора

Определение 8. Ядром *линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется множество всех таких векторов* x *из* U*, образ которых под действием оператора* $\hat{A}$ *— нулевой вектор линейного пространства* V*.*

IV.1. Определение ядра линейного оператора

Определение 8. Ядром *линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *называется множество всех таких векторов* x *из* U, *образ которых под действием оператора* $\hat{A}$ — *нулевой вектор линейного пространства* V.

Ядро оператора мы будем обозначать через $\operatorname{Ker}\hat{A}$. Можно записать определение ядра с помощью равенства:

$$\operatorname{Ker}\hat{A} = \left\{ x \;\middle|\; \hat{A}(x) = \mathbf{0}_V \right\}. \tag{12}$$

Рассмотрим пример?

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A} : U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство.

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. По **критерию подпространства** достаточно проверить, что для любых двух векторов $x, y \in \operatorname{Ker} \hat{A}$ и любых двух скаляров $\lambda, \mu \in K$ имеет место включение $\lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}$.

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A} : U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. По **критерию подпространства** достаточно проверить, что

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \overset{???}{\Rightarrow} \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}.$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. По **критерию подпространства** достаточно проверить, что

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \overset{???}{\Rightarrow} \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}.$$

$$\begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \overset{???}{\Rightarrow} \hat{A}\left(\lambda x + \mu y\right) = \mathbf{0}.$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. По **критерию подпространства** достаточно проверить, что

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \overset{???}{\Rightarrow} \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}.$$

$$\begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}\left(\lambda x + \mu y\right) = \lambda \hat{A}\left(x\right) + \mu \hat{A}\left(y\right) =$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. По **критерию подпространства** достаточно проверить, что

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \overset{???}{\Rightarrow} \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}.$$

$$\begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}\left(\lambda x + \mu y\right) = \lambda \underbrace{\hat{A}\left(x\right)}_{\mathbf{0}} + \mu \underbrace{\hat{A}\left(y\right)}_{\mathbf{0}} =$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. По **критерию подпространства** достаточно проверить, что

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \overset{???}{\Rightarrow} \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}.$$

$$\begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{\hat{A}\,(x)}_{\mathbf{0}} + \mu \underbrace{\hat{A}\,(y)}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: \ U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker}\hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker}\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}\left(\lambda x + \mu y\right) =$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A} : U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}\left(\lambda x + \mu y\right) = \lambda \hat{A}\left(x\right) + \mu \hat{A}\left(y\right) =$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{\hat{A}\,(x)}_{\mathbf{0}} + \mu \underbrace{\hat{A}\,(y)}_{\mathbf{0}} =$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***под-пространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{\hat{A}(x)}_{\mathbf{0}} + \mu \underbrace{\hat{A}(y)}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

IV.2. Теорема о ядре линейного оператора

Теорема 6. ***Ядро*** *линейного оператора* $\hat{A}: U \mapsto V$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Доказательство. Итак, оформим доказательство:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} \hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker} \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \mathbf{0}, \\ \hat{A}(y) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{\hat{A}\,(x)}_{\mathbf{0}} + \mu \underbrace{\hat{A}\,(y)}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} \hat{A}.$$

Теорема доказана.

IV.3. Ранг и дефект линейного оператора

Определение 9. *Размерность ядра оператора* $\hat{A}$ *называется* **дефектом** *линейного оператора. Размерность подпространства* $\hat{A}(U) = \left\{ \hat{A}(x) \,\middle|\, x \in U \right\}$, *т.е. образа пространства* U *относительно действия* $\hat{A}$, *называется* **рангом** *линейного оператора* $\hat{A}$.

IV.3. Ранг и дефект линейного оператора

Определение 9. *Размерность ядра оператора $\hat{A}$ называется* **дефектом** *линейного оператора. Размерность подпространства $\hat{A}(U) = \left\{ \hat{A}(x) \,\middle|\, x \in U \right\}$, т.е. образа пространства U относительно действия $\hat{A}$, называется* **рангом** *линейного оператора $\hat{A}$.*

Ранг линейного оператора $\hat{A}$ мы будем обозначать через $\operatorname{Rg} \hat{A}$, а дефект — через $\mathrm{d}(\hat{A})$.

IV.4. Теорема о ранге линейного оператора

Теорема 7. *Если* $A_{\mathbf{Б}}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в базисе* **Б** *линейного пространства* U, *то* $\operatorname{Rg} A_{\mathbf{Б}} = \operatorname{Rg} \hat{A}$.

Доказательство.

IV.4. Теорема о ранге линейного оператора

Теорема 7. *Если* $A_{\text{Б}}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в базисе* **Б** *линейного пространства* U, *то* $\operatorname{Rg} A_{\text{Б}} = \operatorname{Rg} \hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Если $\text{Б}_0 = \left\{\hat{A}\left(e_{i_1}\right), \ldots, \hat{A}\left(e_{i_r}\right)\right\}$ — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\text{Б} = \left\{\hat{A}\left(e_1\right), \ldots, \hat{A}\left(e_n\right)\right\}$, то, очевидно, Б_0 является базисом линейного пространства $\hat{A}(U)$ (легко следует из **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов**).

IV.4. Теорема о ранге линейного оператора

Теорема 7. *Если* $A_{\text{Б}}$ — ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в базисе* **Б** *линейного пространства* U, *то* $\operatorname{Rg} A_{\text{Б}} = \operatorname{Rg} \hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Если $\mathbf{Б}_0 = \left\{\hat{A}\left(e_{i_1}\right), \ldots, \hat{A}\left(e_{i_r}\right)\right\}$ — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\mathbf{Б} = \left\{\hat{A}\left(e_1\right), \ldots, \hat{A}\left(e_n\right)\right\}$, то, очевидно, $\mathbf{Б}_0$ является базисом линейного пространства $\hat{A}(U)$ (легко следует из **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов**). Поэтому $r = \operatorname{Rg} \hat{A}$.

IV.4. Теорема о ранге линейного оператора

Теорема 7. *Если* $A_{\mathbf{Б}}$ *—* ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в базисе* $\mathbf{Б}$ *линейного пространства* U*, то* $\operatorname{Rg} A_{\mathbf{Б}} = \operatorname{Rg} \hat{A}$*.*

Доказательство. $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_0 = \left\{\hat{A}\left(e_{i_1}\right), \ldots, \hat{A}\left(e_{i_r}\right)\right\}$ — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\mathbf{Б} = \left\{\hat{A}\left(e_1\right), \ldots, \hat{A}\left(e_n\right)\right\}$, $\mathbf{Б}_0$ — базис линейного пространства $\hat{A}(U)$, $r = \operatorname{Rg} \hat{A}$. С помощью **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов** легко получить, что система столбцов координат векторов из $\mathbf{Б}_0$ является базисом линейной оболочки системы столбцов матрицы $A_{\mathbf{Б}}$.

IV.4. Теорема о ранге линейного оператора

Теорема 7. *Если* $A_{\text{Б}}$ *—* ***матрица оператора*** $\hat{A}$ *в базисе* **Б** *линейного пространства* U*, то* $\operatorname{Rg} A_{\text{Б}} = \operatorname{Rg} \hat{A}$.

Доказательство. $\text{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\quad \text{Б}_0 = \left\{\hat{A}(e_{i_1}), \ldots, \hat{A}(e_{i_r})\right\}$ — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\text{Б} = \left\{\hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$, $\quad \text{Б}_0$ — базис линейного пространства $\hat{A}(U)$, $\quad r = \operatorname{Rg} \hat{A}$. С помощью **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов** легко получить, что система столбцов координат векторов из Б_0 является базисом линейной оболочки системы столбцов матрицы $A_{\text{Б}}$.

Следовательно, r равно столбцовому рангу матрицы $A_{\text{Б}}$. По **теореме о совпадении трех рангов** столбцовый ранг матрицы $A_{\text{Б}}$ равен ее рангу. Поэтому $\operatorname{Rg} A_{\text{Б}} = r = \operatorname{Rg} \hat{A}$, что и требовалось доказать.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \operatorname{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_0 = \{e_1, \ldots, e_d\}$ — базис ядра оператора $\hat{A}$. Дополним его до базиса всего пространства U: $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$. Нетрудно доказать, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является базисом пространства $\hat{A}(U)$.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_0 = \{e_1, \ldots, e_d\}$ — базис ядра оператора $\hat{A}$. Дополним его до базиса всего пространства U: $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$. Нетрудно доказать, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является базисом пространства $\hat{A}(U)$. В самом деле, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, для этого достаточно доказать линейную независимость этой системы векторов и ее полноту.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. **Б** $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем линейную независимость. Пусть

$$\lambda_{d+1}\hat{A}(e_{d+1}) + \lambda_{d+2}\hat{A}(e_{d+2}) + \ldots + \lambda_n\hat{A}(e_n) = \mathbf{0}_V. \tag{13}$$

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем линейную независимость. Пусть

$$\lambda_{d+1}\hat{A}(e_{d+1}) + \lambda_{d+2}\hat{A}(e_{d+2}) + \ldots + \lambda_n\hat{A}(e_n) = \mathbf{0}_V. \tag{13}$$

Тогда

$$\hat{A}\left(\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n\right) = \mathbf{0}_V,$$

то есть $\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker}(\hat{A})$.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем линейную независимость. Пусть

$$\lambda_{d+1}\hat{A}(e_{d+1}) + \lambda_{d+2}\hat{A}(e_{d+2}) + \ldots + \lambda_n\hat{A}(e_n) = \mathbf{0}_V. \tag{13}$$

Тогда $\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker}(\hat{A})$.

Так как $\mathbf{Б}_0$ — **базис** ядра, то найдутся такие коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, что $\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_d e_d$.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Б $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем линейную независимость. Пусть

$$\lambda_{d+1}\hat{A}(e_{d+1}) + \lambda_{d+2}\hat{A}(e_{d+2}) + \ldots + \lambda_n\hat{A}(e_n) = \mathbf{0}_V. \tag{13}$$

Тогда $\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_d e_d$.

Таким образом, получили

$$-\lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_d e_d + \lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}_U.$$

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. **Б** $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Таким образом, получили

$$-\lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_d e_d + \lambda_{d+1} e_{d+1} + \lambda_{d+2} e_{d+2} + \ldots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}_U.$$

Но **Б** — **базис**, поэтому все коэффициенты λ_i — нулевые. Это означает, что равенство (13) выполняется только при нулевых коэффициентах λ_i, то есть $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является линейно независимой системой.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg} \hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Б $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы, то есть докажем, что всякий вектор из $\hat{A}(U)$ является линейной комбинацией векторов этой системы.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Б $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы, то есть докажем, что всякий вектор из $\hat{A}(U)$ является линейной комбинацией векторов этой системы. Возьмем произвольный вектор x из $\hat{A}(U)$. Тогда, по определению множества $\hat{A}(U)$, найдется такой вектор $y \in U$, что

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Б $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы, то есть докажем, что всякий вектор из $\hat{A}(U)$ является линейной комбинацией векторов этой системы. Возьмем произвольный вектор x из $\hat{A}(U)$. Тогда, по определению множества $\hat{A}(U)$, найдется такой вектор $y \in U$, что $x = \hat{A}(y)$.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы. $x \in \hat{A}(U), \quad x = \hat{A}(y)$.

Так как **Б** — **базис**, то по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** найдутся такие коэффициенты $\mu_1, \ldots, \mu_n$, что

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n$$

(координаты вектора y в базисе **Б**).

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы. $x \in \hat{A}(U), \quad x = \hat{A}(y),$

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n \qquad .$$

Но $\{e_1, \ldots, e_d\}$ — векторы из ядра оператора $\hat{A}$, поэтому

$$x = \hat{A}(y) =$$

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \operatorname{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Б $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы. $x \in \hat{A}(U), \quad x = \hat{A}(y)$,

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n \qquad .$$

Но $\{e_1, \ldots, e_d\}$ — векторы из ядра оператора $\hat{A}$, поэтому

$$x = \hat{A}(y) = \hat{A}\left(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n\right) =$$

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора* $\hat{A}$ *линейного пространства* U *в линейное пространство* V *имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. $Б = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы. $x \in \hat{A}(U), \quad x = \hat{A}(y)$,

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n \qquad .$$

Но $\{e_1, \ldots, e_d\}$ — векторы из ядра оператора $\hat{A}$, поэтому

$$x = \hat{A}(y) = \hat{A}\left(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n\right) =$$

$$= \mu_1 \mathbf{0}_V + \ldots + \mu_d \mathbf{0}_V + \mu_{d+1}\hat{A}(e_{d+1}) + \ldots + \mu_n \hat{A}(e_n),$$

то есть

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U. Докажем, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — базисом пространства $\hat{A}(U)$.

Докажем полноту этой системы. $x \in \hat{A}(U), \quad x = \hat{A}(y)$,

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n .$$

Но $\{e_1, \ldots, e_d\}$ — векторы из ядра оператора $\hat{A}$, то есть

$$x = \mu_{d+1}\hat{A}(e_{d+1}) + \ldots + \mu_n \hat{A}(e_n).$$

Таким образом, $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ действительно является базисом пространства $\hat{A}(U)$.

IV.5. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Теорема 8 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство* $\operatorname{Rg}\hat{A} + \operatorname{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Доказательство. Б $= \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ — **базис** всего пространства U.

Доказали, что $\left\{\hat{A}(e_{d+1}), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ — **базис** пространства $\hat{A}(U)$.

Следовательно, по определению ранга оператора $\operatorname{Rg}\hat{A} = n - d$, что и требовалось доказать.

IV.6. Замечание к теореме о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Замечание 1 (к теореме о сумме ранга и дефекта линейн. оператора). *Даже при* $U = V$ *из этой теоремы* **не следует**, *что* U *является суммой подпространств* $\operatorname{Ker}\hat{A}$ *и* $\hat{A}(U)$.

IV.6. Замечание к теореме о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Замечание 1 (**к теореме о сумме ранга и дефекта линейн. оператора**). *Даже при $U = V$ из этой теоремы* **не следует**, *что U является суммой подпространств $\operatorname{Ker} \hat{A}$ и $\hat{A}(U)$.*

В самом деле, рассмотрим в качестве $\hat{A}$ произведение оператора $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки на оператор $\hat{Q}$ проецирования плоскости на ось Ox. **Ядро** оператора $\hat{A}$ совпадает с осью Oy (то есть состоит из всех векторов с началом в точке O и концом на оси Oy). Образ пространства, то есть $\hat{A}(U) = \hat{P}\left(\hat{Q}(U)\right)$ тоже совпадает с осью Oy, то есть с $\operatorname{Ker} \hat{A}$.

V. Вырожденные и обратимые операторы

Определение 10. *Линейный оператор* $\hat{A}$ *называется* **вырожденным** *тогда и только тогда, когда его* ***ядро*** *— ненулевое, то есть отлично от* $\{\mathbf{0}\}$. *В противном случае, то есть при* $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\mathbf{0}\}$, *линейный оператор* $\hat{A}$ *называется* **невырожденным**.

V. Вырожденные и обратимые операторы

Определение 10. *Линейный оператор* $\hat{A}$ *называется* **вырожденным** *тогда и только тогда, когда его* ***ядро*** *— ненулевое, то есть отлично от* $\{\mathbf{0}\}$. *В противном случае, то есть при* $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\mathbf{0}\}$, *линейный оператор* $\hat{A}$ *называется* **невырожденным**.

Определение 11. *Линейный оператор* $\hat{A}^{-1}$ *называется* **обратным** *к оператору* $\hat{A}$ *тогда и только тогда, когда имеют место равенства* $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$ *и* $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}$.

Следует отметить, что термин «обратный» обусловлен тем, что обратный линейный оператор $\hat{A}^{-1}$ является обратной к $\hat{A}$ функцией.

V.1. Критерий невырожденности оператора

Теорема 9 (**критерий невырожденности оператора**). *Линейный оператор $\hat{A}$ невырожденный тогда и только тогда, когда он обратим.*

Это следствие из теоремы об **изоморфности пространства матриц и пространства линейных операторов**, и **критерия обратимости матрицы**.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Теорема 10 (критерии вырожденности оператора). *Пусть* $\hat{L}$ *— линейный оператор линейного пространства* U, $\mathbf{Б}$ *—* ***базис*** *линейного пространства* U. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\hat{L}$ *— вырожденный оператор;*

2) $\operatorname{Ker}\hat{L} \neq \{\mathbf{0}\}$;

3) $\mathrm{d}(\hat{L}) \neq 0$;

4) $\operatorname{Rg}\hat{L} < \dim U$;

5) $\operatorname{Rg}\left(\mathbf{L}_{\mathbf{Б}}\right) < \dim U$;

6) $\det\left(\mathbf{L}_{\mathbf{Б}}\right) = 0$;

7) существует линейно независимая система векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *такая, что система векторов* $\left\{\hat{L}(u_1), \hat{L}(u_2), \ldots, \hat{L}(u_k)\right\}$ *линейно зависима.*

8) $\hat{L}(U) < U$, *то есть* $\hat{L}(U) \neq U$.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Очевидно, что 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3). Эквивалентность 3) $\Leftrightarrow$ 4) следует из теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора. Докажем 4) $\Leftrightarrow$ 5).

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Докажем 4) $\Leftrightarrow$ 5). Столбцами матрицы $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ являются столбцы координат векторов $\hat{L}(e_k)$ в базисе **Б**. По **теореме о стандартном изомофизме в** $\mathbb{R}^n$ отображение $f(x) = [x]_{\text{Б}}$ является изоморфизмом линейного пространства U в $\mathbb{R}^n$.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Докажем 4) $\Leftrightarrow$ 5). Столбцами матрицы $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ являются столбцы координат векторов $\hat{L}(e_k)$ в базисе **Б**. По **теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$** отображение $f(x) = [x]_{\text{Б}}$ является изоморфизмом линейного пространства U в $\mathbb{R}^n$.

Согласно **теореме об образе системы векторов при изоморфизме** система векторов $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}\}$ является *максимальной линейно независимой системой* векторов линейного пространства $\hat{L}(U)$ тогда и только тогда, когда система столбцов $\{[e_{k_1}]_{\text{Б}}, [e_{k_2}]_{\text{Б}}, \ldots, [e_{k_m}]_{\text{Б}}\}$ является максимальной линейно независимой системой столбцов матрицы $\mathbf{L}_{\text{Б}}$.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Докажем 4) $\Leftrightarrow$ 5).

Согласно **теореме об образе системы векторов при изоморфизме** система векторов $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}\}$ является *максимальной линейно независимой системой* векторов линейного пространства $\hat{L}(U)$ тогда и только тогда, когда система столбцов $\left\{[e_{k_1}]_{\text{Б}}, [e_{k_2}]_{\text{Б}}, \ldots, [e_{k_m}]_{\text{Б}}\right\}$ является максимальной линейно независимой системой столбцов матрицы $\mathbf{L}_{\text{Б}}$.

Тот факт, что система векторов $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}\}$ является максимальной линейно независимой системой векторов линейного пространства $\hat{L}(U)$ означает, что $\operatorname{Rg} L = m$, а тот факт, что $\left\{[e_{k_1}]_{\text{Б}}, [e_{k_2}]_{\text{Б}}, \ldots, [e_{k_m}]_{\text{Б}}\right\}$ является максимальной линейно независимой системой столбцов матрицы $\mathbf{L}_{\text{Б}}$, означает, в силу теоремы о совпадении трех рангов, что $\operatorname{Rg}(\mathbf{L}_{\text{Б}}) = m$. Эквивалентность 4) $\Leftrightarrow$ 5) доказана.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Тот факт, что 5) $\Leftrightarrow$ 6) следует из определения ранга оператора.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Тот факт, что 5) $\Leftrightarrow$ 6) следует из определения ранга оператора.

Утверждение 4) $\Leftrightarrow$ 7) следует из определения ранга оператора, в качестве системы векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ можно взять базу линейного пространства U.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Тот факт, что 5) $\Leftrightarrow$ 6) следует из определения ранга оператора.

Утверждение 4) $\Leftrightarrow$ 7) следует из определения ранга оператора, в качестве системы векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ можно взять базу линейного пространства U.

Наконец, 5) $\Leftrightarrow$ 8) следует из теоремы о размерности подпространства.

V.2. Критерий вырожденности оператора

Доказательство. Тот факт, что 5) $\Leftrightarrow$ 6) следует из определения ранга оператора.

Утверждение 4) $\Leftrightarrow$ 7) следует из определения ранга оператора, в качестве системы векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ можно взять базу линейного пространства U.

Наконец, 5) $\Leftrightarrow$ 8) следует из теоремы о размерности подпространства.

Теорема доказана.

VI. Инвариантные подпространства

Определение 12. *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U*. Подпространство* V *линейного пространства* U *называется* $\hat{A}$**-инвариантным подпространством** *тогда и только тогда, когда для любого вектора* $x \in V$ *имеет место включение* $\hat{A}(x) \in V$*.*

Иными словами, оператор $\hat{A}$ ни один из векторов подпространства V не «выбрасывает наружу», «за пределы» подпространства V.

VI.1. Теорема об алгебре инвариантных подпространств

Теорема 11 (об алгебре инвариантных подпространств). *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *сумма* $\hat{A}$*-инвариантных подпространств является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством;*
2. *пересечение* $\hat{A}$*-инвариантных подпространств является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством.*

Доказательство. Очевидно.

VI.2. Критерий полураспавшейся матрицы оператора

Теорема 12 (критерий полураспавшейся матрицы оператора). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U с базисом $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда справедливы следующие утверждения (здесь $\mathbf{0}_{p\times q}$ — нулевая матрица размерности $p \times q$):*

1. $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k\times k} & \mathbf{Q}_{k\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{k\times(n-k)} & \mathbf{R}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle$ *является $\hat{A}$-инвариантным подпространством;*
2. $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k\times k} & \mathbf{0}_{(k\times(n-k)} \\ \mathbf{Q}_{k\times(n-k)} & \mathbf{R}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \ldots, e_n\rangle$ *является $\hat{A}$-инвариантным подпространством.*

VI.2. Критерий полураспавшейся матрицы оператора

Доказательство. Докажем только первое утверждение, поскольку рассуждения во втором случае аналогичны. Если **матрица оператора** имеет указанный в первом пункте вид, то для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, по определению матрицы оператора[1] имеем

$$\hat{A}\,(e_i) = p_{1i}e_1 + \ldots + p_{ki}e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \ldots + 0 \cdot e_n \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle\,.$$

Значит, последнее подпространство является $\hat{A}$-инвариантным. Докажем достаточность. Если подпространство $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ является $\hat{A}$-инвариантным, то

$$\hat{A}\,(e_i) = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{ki}e_k = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{ki}e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \ldots + 0 \cdot e_n,$$

то есть **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет указанный вид.

[1] См. равенство (4), стр.41.

VII. Собственные векторы

При изучении инвариантных подпространств, как обычно, особый интерес представляют «крайние», «экстремальные», в некотором смысле, ситуации.

VII. Собственные векторы

При изучении инвариантных подпространств, как обычно, особый интерес представляют «крайние», «экстремальные», в некотором смысле, ситуации. В данном случае, когда речь идет о подпространстве, под «экстремальностью» можно понимать, например, «предельно возможные» значения *размерности* подпространства. Случаи, когда размерность $\hat{A}$-инвариантного подпространства равна 0 или $\dim U$, неинтересны. Поэтому рассмотрим одномерные $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Что интересного можно сказать в этой ситуации?

VII.1. Определение собственного вектора

Итак, пусть $V = \langle x \rangle$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Тогда, по определению $\hat{A}$-инвариантного подпространства, имеет место включение $\hat{A}(x) \in V = \langle x \rangle$,

VII.1. Определение собственного вектора

Итак, пусть $V = \langle x \rangle$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Тогда, по определению $\hat{A}$-инвариантного подпространства, имеет место включение $\hat{A}(x) \in V = \langle x \rangle$, то есть

$$\hat{A}(x) = \lambda x \tag{14}$$

для некоторого $\lambda \in K$.

VII.1. Определение собственного вектора

Итак, пусть $V = \langle x \rangle$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Тогда, по определению $\hat{A}$-инвариантного подпространства, имеет место включение $\hat{A}(x) \in V = \langle x \rangle$, то есть

$$\hat{A}(x) = \lambda x \tag{14}$$

для некоторого $\lambda \in K$.

Определение 13. *Вектор $x \in U$ называется* **собственным вектором** *линейного оператора $\hat{A}$, отвечающим* **собственному значению** λ *тогда и только тогда, когда, во-первых, x — ненулевой вектор, и, во-вторых, имеет место равенство $\hat{A}(x) = \lambda x$.*

VII.1. Определение собственного вектора

Итак, пусть $V = \langle x \rangle$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Тогда, по определению $\hat{A}$-инвариантного подпространства, имеет место включение $\hat{A}(x) \in V = \langle x \rangle$, то есть

$$\hat{A}(x) = \lambda x \tag{14}$$

для некоторого $\lambda \in K$.

Определение 13. *Вектор $x \in U$ называется* **собственным вектором** *линейного оператора $\hat{A}$, отвечающим* **собственному значению** λ *тогда и только тогда, когда, во-первых, x — ненулевой вектор, и, во-вторых, имеет место равенство $\hat{A}(x) = \lambda x$.*

Определение 14. *Множество всех собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ называется его* **спектром***.*

Спектр линейного оператора $\hat{A}$ мы будем обозначать, как $\operatorname{spec} \hat{A}$.

VII.1. Определение собственного вектора

Итак, пусть $V = \langle x \rangle$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Тогда, по определению $\hat{A}$-инвариантного подпространства, имеет место включение $\hat{A}(x) \in V = \langle x \rangle$, то есть

$$\hat{A}(x) = \lambda x \tag{14}$$

для некоторого $\lambda \in K$.

Определение 13. *Вектор $x \in U$ называется* **собственным вектором** *линейного оператора $\hat{A}$, отвечающим* **собственному значению** λ *тогда и только тогда, когда, во-первых, x — ненулевой вектор, и, во-вторых, имеет место равенство $\hat{A}(x) = \lambda x$.*

Определение 14. *Множество всех собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ называется его* **спектром**.

Рассмотрим пример?

VII.2. Критерий собственного вектора

Теорема 13. *Ненулевой вектор* $x \in U$ *является* ***собственным вектором*** *линейного оператора* $\hat{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle x \rangle$ *— это* $\hat{A}$*-инвариантное подпространство.*

Доказательство.

VII.2. Критерий собственного вектора

Теорема 13. *Ненулевой вектор $x \in U$ является* ***собственным вектором*** *линейного оператора $\hat{A}$ тогда и только тогда, когда $\langle x \rangle$ — это $\hat{A}$-инвариантное подпространство.*

Доказательство. Это очевидное следствие из определений.

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

$$\hat{L}\left(\alpha x+\beta y\right)=$$

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

$$\hat{L}\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha\hat{L}\left(x\right)+\beta\hat{L}\left(y\right)=$$

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

$$\hat{L}\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha \hat{L}\left(x\right) + \beta \hat{L}\left(y\right) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y =$$

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

$$\hat{L}\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha \hat{L}\left(x\right) + \beta \hat{L}\left(y\right) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda \left(\alpha x + \beta y\right).$$

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

$$\hat{L}\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha \hat{L}\left(x\right)+\beta \hat{L}\left(y\right)=\alpha \lambda x+\beta \lambda y=\lambda\left(\alpha x+\beta y\right).$$

Следует ли отсюда, что, согласно **критерию подпространства** множество **собственных векторов**, отвечающих **собственному значению** λ является **подпространством** линейного пространства U?

VII.3. Собственное подпространство

Применим **стратегию перехода от изучения отдельного элемента к исследованию системы объектов.**

Пусть α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, и x, y — **собственные векторы линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающие собственному значению λ.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in K$

$$\hat{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \hat{L}(x) + \beta \hat{L}(y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda (\alpha x + \beta y)\,.$$

Следует ли отсюда, что, согласно **критерию подпространства** множество **собственных векторов**, отвечающих **собственному значению** λ является **подпространством** линейного пространства U?

Собственный вектор является **ненулевым**!

VII.3. Собственное подпространство

Теорема 14. *Пусть α — собственное значение* ***линейного оператора*** $\hat{L}$ *линейного пространства* U, *и* V *— множество всех* ***собственных векторов линейного оператора*** $\hat{L}$, *отвечающих собственному значению* λ. *Тогда* $V \cup \{\mathbf{0}\}$ *является* ***подпространством*** *линейного пространства* U.

Слишком много слов....

VII.3. Собственное подпространство

Теорема 14. *Если* $\hat{L}$ — ***линейный оператор линейного пространства*** U *над полем* K, *то для любого* $\lambda \in K$ *имеем*

$$\left\{ x \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \hat{L}(x) = \lambda x, \\ x \neq \mathbf{0} \end{array} \right. \right\} \cup \{\mathbf{0}\} < U.$$

Вот теперь хорошо!

VII.3. Собственное подпространство

Теорема 14. *Если $\hat{L}$ — **линейный оператор линейного пространства** U над полем K, то для любого $\lambda \in K$ имеем*

$$\left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} \hat{L}(x) = \lambda x, \\ x \neq \mathbf{0} \end{cases} \right\} \cup \{\mathbf{0}\} < U.$$

Доказательство. Это очевидное следствие из

VII.3. Собственное подпространство

Теорема 14. *Если $\hat{L}$ — **линейный оператор** **линейного пространства** U над полем K, то для любого $\lambda \in K$ имеем*

$$\left\{ x \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \hat{L}(x) = \lambda x, \\ x \neq \mathbf{0} \end{array} \right. \right\} \cup \{\mathbf{0}\} < U.$$

Доказательство. Это очевидное следствие из **критерия подпространства.**

VII.3. Собственное подпространство

Теорема 14. *Если* $\hat{L}$ *— **линейный оператор линейного пространства** U над полем K, то для любого $\lambda \in K$ имеем*

$$\left\{ x \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \hat{L}(x) = \lambda x, \\ x \neq \mathbf{0} \end{array} \right. \right\} \cup \{\mathbf{0}\} < U.$$

Определение 15. *Если α — собственное значение **линейного оператора** $\hat{L}$ линейного пространства U, то объединение множества всех **собственных векторов линейного оператора** $\hat{L}$, отвечающих собственному значению λ, и множества $\{\mathbf{0}\}$ называется* **собственным подпространством** *линейного оператора $\hat{L}$, отвечающим собственному значению λ.*

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

В соответствии со сформулированным нами правилом *развивать технику вычислений для задач о линейном пространстве только на языке пространства* $\mathbb{R}^n$ мы должны научиться находить *координаты* **собственного вектора** и собственные значения с помощью «объекта», соответствующего линейному оператору в $\mathbb{R}^n$. Таким «объектом» является **матрица оператора**.

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе **Б**. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе **Б**. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow$$

Перейдём к равенству для столбцов координат...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

Перейдём к равенству для столбцов координат...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе **Б**. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

По **формуле для координат образа вектора**...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\quad \hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \ \Rightarrow \ \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \ \Rightarrow \ \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \ \Rightarrow$$

По **формуле для координат образа вектора**...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda[x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

Осторожненько вынесем $[x]_{\mathbf{Б}}$ за скобку...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

Осторожненько вынесем $[x]_{\mathbf{Б}}$ за скобку...

Не забудьте о некоммутативности умножения матриц...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\qquad\qquad\qquad \right) [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

Осторожненько вынесем $[x]_{\mathbf{Б}}$ за скобку...

Не забудьте о некоммутативности умножения матриц...

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\qquad\qquad\qquad \right) [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

Осторожненько вынесем $[x]_{\mathbf{Б}}$ за скобку...

Не забудьте о некоммутативности умножения матриц и о необходимости представить $\lambda[x]_{\mathbf{Б}}$ в виде произведения квадратной матрицы на $[x]_{\mathbf{Б}}$.

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

Осторожненько вынесем $[x]_{\mathbf{Б}}$ за скобку...

Не забудьте о некоммутативности умножения матриц
и о необходимости представить $\lambda[x]_{\mathbf{Б}}$ в виде произведения квадратной матрицы на $[x]_{\mathbf{Б}}$.

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

Последняя **ОСЛУ** имеет ненулевое решение $[x]_{\mathbf{Б}}$, поэтому по **теореме Крамера** или по **теореме о размерности пространства решений...**

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \det\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right) = 0.$$

Последняя **ОСЛУ** имеет ненулевое решение $[x]_{\mathbf{Б}}$, поэтому по **теореме Крамера** или по **теореме о размерности пространства решений...**

VII.4. Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Итак, пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить **уравнение (14)**: $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U.

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \det\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right) = 0.$$

Определение 16. *Выражение* $\det\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)$ *называется* **характеристическим полиномом** *или* **характеристическим многочленом** *оператора* $\hat{A}$ *в базисе* $\mathbf{Б}$.

VII.5. План вычисления собственного вектора с помощью матрицы оператора

$$\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\text{Б}} = [\mathbf{0}]_{\text{Б}}. \tag{15}$$

$$\det\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda E\right) = 0. \tag{16}$$

Итак, для нахождения **собственных векторов** и собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ необходимо:

во-первых, из уравнения (16) найти все собственные значения оператора $\hat{A}$, то есть найти спектр линейного оператора $\hat{A}$;

во-вторых, для каждого из найденных собственных значений λ найти собственные векторы, как ФСР ОСЛУ (15).

в-третьих, найти векторы, интерпретируя найденные фундаментальные решения как столбцы их координат.

Рассмотрим пример?

VIII. Диагонализация матрицы оператора

Под *диагонализацией* матрицы оператора понимается поиск базиса, в котором **матрица оператора** диагональна. Такой **базис** существует не всегда.

VIII.1. Оператор простой структуры

Определение 17. *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U называется* **оператором простой структуры** *тогда и только тогда, когда U имеет* ***базис****, состоящий из* ***собственных векторов*** *оператора $\hat{A}$.*

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Определение 17. *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U называется* **оператором простой структуры** *тогда и только тогда, когда U имеет* ***базис****, состоящий из* ***собственных векторов*** *оператора $\hat{A}$.*

Теорема 15 (**критерий оператора простой структуры**). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство.

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{A}$ является оператором **простой структуры**. Тогда

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{A}$ является оператором **простой структуры**. Тогда существует **базис** $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, состоящий из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$. Обозначим для любого i через λ_i — собственное значение вектора $\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$.

Тогда

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (**критерий оператора простой структуры**). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{A}$ является оператором **простой структуры**. Тогда существует **базис** $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, состоящий из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$. Обозначим для любого i через λ_i — собственное значение вектора $\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$.

Тогда, по определению **матрицы линейного оператора**, с одной стороны, $\hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$, с другой стороны,

$$= \hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) =$$

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором **простой структуры** тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{A}$ является оператором **простой структуры**. Тогда существует **базис**
$\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, состоящий из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$. Обозначим для любого i через λ_i — собственное значение вектора $\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$.

Тогда, по определению **матрицы линейного оператора**, с одной стороны, $\hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$, с другой стороны,

$$= \hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = a_{1i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + a_{ni}\overrightarrow{\mathbf{e}}_n.$$

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{A}$ является оператором **простой структуры**. Тогда существует **базис**
$\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, состоящий из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$. Обозначим для любого i через λ_i — собственное значение вектора $\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$.

Тогда, по определению **матрицы линейного оператора**, с одной стороны, $\hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$, с другой стороны,

$$\ldots + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_{i-1} + \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_{i+1} + \ldots = \hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = a_{1i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + a_{ni}\overrightarrow{\mathbf{e}}_n.$$

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Следовательно, i-тый столбец матрицы оператора $\hat{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, где λ_i стоит в i-той строке. Поэтому **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе **Б** диагональна: $a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases}$, то есть

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (**критерий оператора простой структуры**). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Следовательно, i-тый столбец матрицы оператора $\hat{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, где λ_i стоит в i-той строке. Поэтому **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$ диагональна: $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = $

$a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases}$, то есть

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (**критерий оператора простой структуры**). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Следовательно, i-тый столбец матрицы оператора $\hat{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, где λ_i стоит в i-той строке. Поэтому **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе **Б** диагональна: $a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases}$, то есть

$$\mathbf{A}_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Достаточность.* Проводим эти же рассуждения «в обратном порядке». Пусть **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, диагональна: $a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases}$. Тогда, по определению матрицы оператора,

$$\hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = a_{1i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + a_{2i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + a_{ni}\overrightarrow{\mathbf{e}}_n = 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \lambda_i\overrightarrow{\mathbf{e}}_i + \ldots + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_n = \lambda_i\overrightarrow{\mathbf{e}}_i.$$

VIII.2. Критерий оператора простой структуры

Теорема 15 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором* ***простой структуры*** *тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

Доказательство. *Достаточность.* Проводим эти же рассуждения «в обратном порядке». Пусть **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, диагональна: $a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases}$. Тогда, по определению матрицы оператора,

$$\hat{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_i) = a_{1i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + a_{2i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + a_{ni}\overrightarrow{\mathbf{e}}_n = 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \lambda_i\overrightarrow{\mathbf{e}}_i + \ldots + 0\overrightarrow{\mathbf{e}}_n = \lambda_i\overrightarrow{\mathbf{e}}_i.$$

Таким образом, базисный вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ является собственным, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

IX. Инварианты линейного оператора

Во многих разделах математики особую роль играют функции, область допустимых значений которых содержится во множестве действительных или комплексных чисел. Существует даже специальное название для таких функций, они называются **функционалами**. В этом разделе мы рассмотрим близкий к функционалам класс функций, отображающих линейное пространство U над полем $\mathbf{K}$ в поле $\mathbf{K}$.

IX. Инварианты линейного оператора

Рассмотрим несколько примеров таких функций, но сначала обсудим, какого типа примеры нам нужны. Можно, конечно, брать конкретные линейные пространства (пространство матриц, пространство каких-либо многочленов, геометрических векторов и т.п.) и рассматривать конкретные функции, допустим, функционал $\mathcal{F}(f(x)) = f(1)$ для линейного пространства многочленов степени не выше 3, и т.п.

IX. Инварианты линейного оператора

Курс линейной алгебры основан на идее переноса «конструкций», возникающих в конкретных линейных пространствах размерности n, на «стандартные конструкции» линейного пространства $\mathbb{R}^n$. Для векторов это осуществлялось с помощью изоморфизма, для линейных операторов — с помощью изоморфизма в алгебру матриц, каждому линейному оператору ставящего в соответствие матрицу этого оператора в базисе **Б**, где коэффициенты матрицы определяются равенствами (3). Поэтому будет совершенно естественно, если мы, рассматривая примеры функций, отображающих линейное пространство U над полем $\mathbf{K}$ в поле $\mathbf{K}$, будем задавать их с помощью *матрицы оператора* в некотором базисе.

IX. Инварианты линейного оператора

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U, $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U,

$$\mathbf{A_Б} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе **Б**.

1. $f_1\left(\hat{A}\right) = a_{11}$;

2. $f_2\left(\hat{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$;

3. $f_3\left(\hat{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$;

4. $f_4\left(\hat{A}\right) = \det\left(\mathbf{A_Б}\right)$;

5. $f_5\left(\hat{A}\right) = \mathrm{Rg}\left(\mathbf{A_Б}\right)$.

IX. Инварианты линейного оператора

Пусть $\textbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — **базис** линейного пространства U, $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U, $\mathbf{A}_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — **матрица оператора** $\hat{A}$ в базисе $\textbf{Б}$.

1. $f_1\left(\hat{A}\right) = a_{11}$;
2. $f_2\left(\hat{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$;
3. $f_3\left(\hat{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$;
4. $f_4\left(\hat{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}_{\textbf{Б}}\right)$;
5. $f_5\left(\hat{A}\right) = \operatorname{Rg}\left(\mathbf{A}_{\textbf{Б}}\right)$.

IX. Инварианты линейного оператора

Отметим, что эти функции можно разбить на два класса: функции, значение которых *зависит* от выбора базиса **Б**, и функции, значение которых от выбора базиса **Б** *не зависит*. Среди рассмотренных примеров к первому классу относятся функции f_1 и f_3, а ко второму, как мы увидим ниже, — функции $f_2, f_4. f_5$.

IX.1. Определение инварианта оператора

Определение 18. *Функция f от коэффициентов* ***матрицы оператора*** *в базисе* Б *называется* **инвариантом** ***линейного оператора***, *если значения этой функции не зависят от выбора базиса* Б.

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Определение 18. *Функция f от коэффициентов* ***матрицы оператора*** *в базисе* Б *называется* **инвариантом** ***линейного оператора****, если значения этой функции не зависят от выбора базиса* Б.

Теорема 16. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k* ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda \mathbf{E}\right|$*, является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

Доказательство.

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k* ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{T}$ — матрица перехода из базиса $\mathbf{Б}$ в какой-либо **базис** $\mathbf{Б}'$ линейного пространства U. Тогда, согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе**, то есть формуле (10), имеем

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть* $\hat{A}$ — *линейный оператор линейного пространства* U. *Функция* p_k, *ставящая матрице* $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ *в соответствие коэффициент при* λ^k ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора* $\hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{T}$ — матрица перехода из базиса **Б** в какой-либо **базис** **Б**$'$ линейного пространства U. Тогда, согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе**, то есть формуле (10), имеем

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k* ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{T}$ — матрица перехода из базиса Б в какой-либо **базис** $\text{Б}'$ линейного пространства U. Тогда, согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе**, то есть формуле (10), имеем

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U. *Функция* p_k, *ставящая матрице* $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ *в соответствие коэффициент при* λ^k ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора* $\hat{A}$.

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U. *Функция* p_k, *ставящая матрице* $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ *в соответствие коэффициент при* λ^k ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора* $\hat{A}$.

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k* ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'} - \lambda \mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_{\mathbf{Б}} \mathbf{T} - \lambda \mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_{\mathbf{Б}} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} (\lambda \mathbf{E})\, \mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1} (\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E})\, \mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\right| \cdot \left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{T}^{-1}\right| \cdot \left|\mathbf{T}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть* $\hat{A}$ — *линейный оператор линейного пространства* U*. Функция* p_k*, ставящая матрице* $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ *в соответствие коэффициент при* λ^k ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$*, является инвариантом линейного оператора* $\hat{A}$*.*

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U. *Функция* p_k, *ставящая матрице* $\mathbf{A}_\text{Б}$ *в соответствие коэффициент при* λ^k ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_\text{Б} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора* $\hat{A}$.

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_\text{Б}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_\text{Б}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}_\text{Б} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\right| \cdot \left|\mathbf{A}_\text{Б} - \lambda\mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_\text{Б} - \lambda\mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{T}^{-1}\right| \cdot \left|\mathbf{T}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{A}_\text{Б} - \lambda\mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_\text{Б} - \lambda\mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{E}\right| =$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k* ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{Б}}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right| \cdot \left|\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|.$$

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

Теорема 16. *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k* ***характеристического многочлена*** $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, *является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

Доказательство.

$$\left|\mathbf{A}_{\text{Б}'} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{Б}}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|.$$

Детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, поэтому

$$\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right| = \left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|.$$

Значит, при переходе в другой **базис характеристический полином** не изменяется. Теорема доказана.

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

В частности, **рассмотренные выше функции** f_2, f_4 ставят матрице оператора в соответствие следующие коэффициенты характеристического многочлена:

- функция f_2 — умноженный на $(-1)^{n-1}$ коэффициент при λ^{n-1};
- функция f_4 — коэффициент при λ^0.

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

В частности, **рассмотренные выше функции** f_2, f_4 ставят матрице оператора в соответствие следующие коэффициенты характеристического многочлена:

- функция f_2 — умноженный на $(-1)^{n-1}$ коэффициент при λ^{n-1};
- функция f_4 — коэффициент при λ^0.

Функция f_5 является инвариантом, поскольку ранг матрицы оператора равен размерности пространства $\hat{A}(U)$, то есть от выбора базиса не зависит.

IX.2. Теорема об инвариантности коэффициентов характеристического полинома

В частности, **рассмотренные выше функции** f_2, f_4 ставят матрице оператора в соответствие следующие коэффициенты характеристического многочлена:

- функция f_2 — умноженный на $(-1)^{n-1}$ коэффициент при λ^{n-1};
- функция f_4 — коэффициент при λ^0.

Функция f_5 является инвариантом, поскольку ранг матрицы оператора равен размерности пространства $\hat{A}(U)$, то есть от выбора базиса не зависит.

Соглашение 1. *В силу теоремы 16 говорят «характеристический полином линейного оператора» вместо «**характеристический полином** матрицы линейного оператора в таком-то базисе», так как этот полином не зависит от базиса.*

X. Теорема Гамильтона-Кэли

Итак, в **теореме об инвариантности коэффициентов характеристического полинома**, мы выяснили, что коэффициенты **характеристического многочлена** матрицы линейного оператора являются инвариантами. Но, оказывается, справедлива удивительная теорема Гамильтона-Кэли, которую мы приведем без доказательства.

X. Теорема Гамильтона-Кэли

Теорема 17. *Если* $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ *— характеристический многочлен матрицы* A*, то* $f(A)$ *— нулевая матрица.*

X. Теорема Гамильтона-Кэли

Теорема 17. *Если* $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ *— характеристический многочлен матрицы* A, *то* $f(A)$ *— нулевая матрица.*

В частности, матрица A— квадратная, поэтому можно вычислить $A^2, A^3, \ldots$.

Рассмотрим пример применения линейной алгебры?

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?