Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Отношения и предикаты

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Предикаты

Определение 1. Высказыванием *мы назовем любую фразу, относительно которой осмысленным (корректным) является вопрос «верна эта фраза или нет».*

I. Предикаты

Определение 1. Высказыванием *мы назовем любую фразу, относительно которой осмысленным (корректным) является вопрос «верна эта фраза или нет».*

Например, алгебраическое выражение $2x^2 - 1$ высказыванием не является, а $2x^2 - 1 > 0$ — это высказывание.

I. Предикаты

Определение 1. Высказыванием *мы назовем любую фразу, относительно которой осмысленным (корректным) является вопрос «верна эта фраза или нет».*

Например, алгебраическое выражение $2x^2 - 1$ высказыванием не является, а $2x^2 - 1 > 0$ — это высказывание.

Фразы типа «Закройте дверь!» или «Который час?» высказываниями в нашем понимании не являются.

I. Предикаты

Определение 1. Высказыванием *мы назовем любую фразу, относительно которой осмысленным (корректным) является вопрос «верна эта фраза или нет».*

Например, алгебраическое выражение $2x^2 - 1$ высказыванием не является, а $2x^2 - 1 > 0$ — это высказывание.

Фразы типа «Закройте дверь!» или «Который час?» высказываниями в нашем понимании не являются.

Рассмотрим пример?

I. Предикаты

Определение 1. Высказыванием *мы назовем любую фразу, относительно которой осмысленным (корректным) является вопрос «верна эта фраза или нет».*

Определение 2. n**-местным предикатом** *или* n**-местным предикатом-высказыванием** *на множестве* A *называется* ***высказывание****, истинность или ложность которого определяется значениями* n *переменных, причем* n*-ка, составленная из этих значений переменных, должна принадлежать* ***множеству*** $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$.

I. Предикаты

Определение 1. Высказыванием *мы назовем любую фразу, относительно которой осмысленным (корректным) является вопрос «верна эта фраза или нет».*

Определение 2. n-местным предикатом *или* **n-местным предикатом-высказыванием** *на множестве A называется* ***высказывание****, истинность или ложность которого определяется значениями n переменных, причем n-ка, составленная из этих значений переменных, должна принадлежать* ***множеству*** *$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$.*

Например, высказывание «действительное число x больше действительного числа y» является предикатом относительно переменных x, y, причем для любых значений x_0, y_0 переменных x, y пара $(x; y)$ должна принадлежать множеству $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

I. Предикаты

В логике нас интересует в первую очередь *значение истинности* высказывания (а не, например, его эмоциональная окраска или длина формулы, задающей это **высказывание** и т.п.). Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ определяет **функцию** истинности $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемую формулой

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) =$$

I. Предикаты

В логике нас интересует в первую очередь *значение истинности* высказывания (а не, например, его эмоциональная окраска или длина формулы, задающей это высказывание и т.п.). Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ определяет **функцию** истинности $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемую формулой

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n); \\ \end{cases}$$

I. Предикаты

В логике нас интересует в первую очередь *значение истинности* высказывания (а не, например, его эмоциональная окраска или длина формулы, задающей это высказывание и т.п.). Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ определяет **функцию** истинности $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемую формулой

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n); \\ 0, & \text{если} \quad \neg P(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

I. Предикаты

В логике нас интересует в первую очередь *значение истинности* высказывания (а не, например, его эмоциональная окраска или длина формулы, задающей это **высказывание** и т.п.). Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ определяет **функцию** истинности $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемую формулой

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n); \\ 0, & \text{если} \quad \neg P(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Напомним, что если P — **высказывание**, то высказывания

- P;
- «высказывание P истинно»;

логически эквивалентны.

I. Предикаты

В логике нас интересует в первую очередь *значение истинности* высказывания (а не, например, его эмоциональная окраска или длина формулы, задающей это **высказывание** и т.п.). Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ определяет **функцию** истинности $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемую формулой

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n); \\ 0, & \text{если} \quad \neg P(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Часто, говоря о предикате, имеют в виду соответствующую **функцию** истинности. Поэтому предикат в смысле данного выше определения мы будем называть еще **предикатом-высказыванием**, а кроме того, сейчас определим еще одно понимание термина «предикат», которое будем называть **предикатом-функцией**.

I. Предикаты

Определение 3. n**-местным предикатом-функцией** *на множестве* A *называется* ***функция*** $\rho : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ \text{раз}} \to D$, *где* D *— двухэлементное множество.*

I. Предикаты

Определение 3. n-местным предикатом-функцией *на множестве A называется* ***функция*** $\rho : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} \to D$, *где D — двухэлементное множество.*

Элементы множества D в разных работах обозначаются по-разному. Наиболее часто применяются обозначения $\{\text{истина}, \text{ложь}\}$, $\{\text{И}, \text{Л}\}$, $\{\text{true}, \text{false}\}$, $\{t, f\}$, $\{1, 0\}$. Мы будем считать, что $D = \{0, 1\}$.

I. Предикаты

Определение 3. n-местным предикатом-функцией *на множестве A называется* ***функция*** $\rho : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} \to D$, *где D — двухэлементное множество.*

Мы будем считать, что $D = \{0, 1\}$.

Мы будем писать просто «предикат» вместо «предикат-функция» или «предикат-высказывание» в ситуации, когда из контекста ясно, в каком смысле понимается термин «предикат».

II. Отношения и предикаты

Определение 3. **n-местным предикатом-функцией** *на множестве A называется* ***функция*** $\rho : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} \to D$, *где D — двухэлементное множество.*

Основной язык современной математики — это язык теории множеств.

II. Отношения и предикаты

Определение 3. n**-местным предикатом-функцией** *на множестве* A *называется* ***функция*** $\rho : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} \to D$, *где* D *— двухэлементное множество.*

Определение 4. n**-местным отношением** *(или, если значение* n *ясно из контекста, то* **отношением***) называется произвольное подмножество* $\mathbf{P}$ *множества* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

II. Отношения и предикаты

Определение 3. **n-местным предикатом-функцией** *на множестве A называется* ***функция*** $\rho : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} \to D$, *где D — двухэлементное множество.*

Определение 4. **n-местным отношением** *(или, если значение n ясно из контекста, то* **отношением***) называется произвольное подмножество* $\mathbf{P}$ *множества* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

В случае, когда $\mathbf{P} = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, отношение $\mathbf{P}$ называется **универсальным отношением**.

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Как обычно, в ситуации, когда для выражения одной и той же мысли можно воспользоваться различными языками, актуальной является задача адекватного перевода с одного языка на другой.

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию $P(x_1, \ldots, x_n)$ соответствует **функция**

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию $P(x_1, \ldots, x_n)$ соответствует **функция**

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) =$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию $P(x_1, \dots, x_n)$ соответствует **функция**

$$\varphi_P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \dots, x_n) \text{ истинно} \\ 0, & \text{если} \quad P(x_1, \dots, x_n) \text{ ложно} \end{cases}$$

Предикату-функции φ_P соответствует **высказывание**, логически эквивалентное, например, высказыванию

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию $P(x_1, \ldots, x_n)$ соответствует **функция**

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ истинно} \\ 0, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ ложно} \end{cases}$$

Предикату-функции φ_P соответствует **высказывание**, логически эквивалентное, например, высказыванию $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = 1$, т.е.

$$P(x_1, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию $P(x_1, \ldots, x_n)$ соответствует **функция**

$$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ истинно} \\ 0, & \text{если} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ ложно} \end{cases} \tag{1}$$

Предикату-функции φ_P соответствует **высказывание**, логически эквивалентное, например, высказыванию $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = 1$, т.е.

$$P(x_1, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_P(x_1, \ldots, x_n) = 1. \tag{2}$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P =$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\middle|\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right\}. \tag{3}$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big\}. \qquad (3)$$

В частности, если φ — **предикат-функция**, то согласно формулам (2) и (3), этому предикату-высказыванию соответствует отношение

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big\}. \tag{3}$$

В частности, если φ — **предикат-функция**, то согласно формулам (2) и (3), этому предикату-высказыванию соответствует отношение

$$\Phi_{(\varphi=1)} = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1\Big\}. \tag{4}$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big\}. \tag{3}$$

В частности, если φ — **предикат-функция**, то согласно формулам (2) и (3), этому предикату-высказыванию соответствует отношение

$$\Phi_{(\varphi=1)} = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1\Big\}. \tag{4}$$

Переход от отношения Φ **к предикату-высказыванию** P_Φ можно осуществить с помощью формулы:

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big\}. \tag{3}$$

В частности, если φ — **предикат-функция**, то согласно формулам (2) и (3), этому предикату-высказыванию соответствует отношение

$$\Phi_{(\varphi=1)} = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1\Big\}. \tag{4}$$

Переход от отношения Φ **к предикату-высказыванию** P_Φ можно осуществить с помощью формулы:

$$P_\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Предикату-высказыванию P на множестве A будем ставить в соответствие отношение $\Phi_P \subseteq A^n$, определенное формулой:

$$\Phi_P = \Big\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Big\}. \tag{3}$$

В частности, если φ — **предикат-функция**, то согласно формулам (2) и (3), этому предикату-высказыванию соответствует отношение

$$\Phi_{(\varphi=1)} = \Big\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\Big|\, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 \Big\}. \tag{4}$$

Переход от отношения Φ **к предикату-высказыванию** P_Φ можно осуществить с помощью формулы:

$$P_\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Phi. \tag{5}$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Переход от отношения Φ предикату-высказыванию P_Φ можно осуществить с помощью формулы:

$$P_\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Phi. \tag{5}$$

Переход от отношения Φ к предикату-функции φ_{P_Φ} можно осуществить с помощью формул (1) и (6)

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Переход от отношения Φ предикату-высказыванию P_Φ можно осуществить с помощью формулы:

$$P_\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Phi. \tag{5}$$

Переход от отношения Φ к предикату-функции φ_{P_Φ} можно осуществить с помощью формул (1) и (6)

$$\varphi_{P_\Phi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Переход от отношения Φ предикату-высказыванию P_Φ можно осуществить с помощью формулы:

$$P_\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Phi. \tag{5}$$

Переход от отношения Φ к предикату-функции φ_{P_Φ} можно осуществить с помощью формул (1) и (6)

$$\varphi_{P_\Phi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Phi; \\ 0, & \text{если } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin \Phi. \end{cases} \tag{6}$$

III. Перевод с языка предикатов на язык отношений и обратно

Таким образом, между n-местными предикатами на множестве A и отношениями из A^n существует тесная связь. Эта связь естественная, причем отображения множества отношений на множество предикатов-высказываний и предикатов-функций являются взаимно однозначными. Поэтому на практике соответствующие друг другу предикаты и отношения отождествляются и часто говорят: «отношение равенства», «отношение подобия», «отношение принадлежности» и даже «отношение $\leq$», хотя на самом деле в этих случаях имеются в виду предикаты[1].

[1]Причем не всегда предикаты-высказывания, как, например, в программировании, когда результатом проверки условия является значение истинности «TRUE, FALSE» или «0, 1».

IV. Бинарные отношения

Определение 5. *Двуместное отношение на множестве A называется* **бинарным отношением***.*

Если R — бинарное отношение, то часто вместо $(x, y) \in R$ пишут xRy. Это соглашение вызвано тем обстоятельством, что встречающиеся обычно в математике отношения имеют похожую запись: $x = y$, $x < y$, $x \subseteq y$, $x \in y$ и т.п. Здесь символ R нужно интерпретировать скорее не как множество, а как заменитель символов $=, <, \subseteq, \in$, и т.п.

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Теория бинарных отношений представляет собой прекрасный пример использования математики, как языка. Дело в том что можно сформулировать ряд понятий, в некотором смысле эквивалентных бинарному отношению, но относящихся к разным разделам математики. Как говорят, это понятие можно сформулировать «на разных математических языках». Приведем ряд таких примеров

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Язык множеств. Бинарное отношение, как множество — это исходное определение бинарного отношения.

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Язык множеств.

Язык функций. Как мы отмечали выше, бинарному отношению R ставится в соответствие предикат $r(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in R \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin R \end{cases}.$

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Язык множеств.

Язык функций.

Язык высказываний. Бинарному отношению R соответствует **высказывание** $(x, y) \in R$. Заметим, что R состоит из всех тех пар (x, y), для которых это **высказывание** верно. Таким образом, этим высказыванием бинарное отношение R определяется полностью и однозначно.

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Язык множеств.

Язык функций.

Язык высказываний. Например, **высказывание** «натуральное число m делится на натуральное число n нацело» определяет отношение $R = \{(2;1),(3;1),(4;2),\ldots\}$. При этом это **высказывание логически эквивалентно** высказыванию $(m,n) \in R$, то есть *истинность первого высказывания влечет истинность второго высказывания, и наоборот, истинность второго высказывания влечет истинность первого высказывания* (это определение логической эквивалентности высказываний). Фактически объявленный ранее переход к обозначению xRy вместо $(x,y) \in R$ осуществляет «перевод» с языка множеств на язык высказываний.

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Язык множеств.

Язык функций.

Язык высказываний.

Язык ориентированных графов. Пусть бинарное отношение R определено на множестве A, состоящем из небольшого числа элементов. Каждому элементу a множества A взаимно однозначным образом поставим в соответствие точку плоскости $g(a)$, называемую **вершиной графа**, и из точки $g(a)$ в точку $g(b)$ будет идти стрелка (называемая **дугой графа**) тогда и только тогда, когда aRb. Если дуга идет из $g(a)$ в эту же точку, то есть aRa, то такая дуга называется **петлей**. Получающийся **граф** (точнее, его графическая модель) для отношения R мы будем обозначать $\Gamma(R)$.

IV.1. Языки теории бинарных отношений

Язык множеств.

Язык функций.

Язык высказываний.

Язык ориентированных графов. Язык теории ориентированных графов бывает очень нагляден для небольших множеств A, и поэтому часто применяется даже в быту: это и схема метро (там вместо взаимно обратных дуг рисуют просто отрезок), и схемы, поясняющие, как пройти к нужному месту (a и b находятся в соответствующем отношении, если есть прямой проход из места a к месту b), и схемы подчиненности в некоторых учреждениях и организациях, например, в армии, и т.п.

Рассмотреть пример?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

На языке предикатов-функций получаем, что

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

На языке предикатов-функций получаем, что *для любого* элемента a из A имеет место тождество $r(a,a) \equiv 1$. На языке предикатов-высказываний получаем, что для любого $a \in A$ справедливо $a\rho a$.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

На языке предикатов-функций получаем, что *для любого* элемента a из A имеет место тождество $r(a, a) \equiv 1$. На языке предикатов-высказываний получаем, что для любого $a \in A$ справедливо $a\rho a$.

На языке ориентированных графов — в графе $\Gamma(R)$

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

На языке предикатов-функций получаем, что *для любого* элемента a из A имеет место тождество $r(a, a) \equiv 1$. На языке предикатов-высказываний получаем, что для любого $a \in A$ справедливо $a\rho a$.

На языке ориентированных графов — в графе $\Gamma(R)$ каждая вершина «снабжена» петлей.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Подчеркнем, что **рефлексивность** — это свойство бинарного отношения *в целом*, а не отдельной вершины. *Нельзя*, например, сказать «отношение R рефлексивно в вершине a».

Является ли рефлексивным отношение делимости нацело на множестве неотрицательных целых чисел?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Подчеркнем, что **рефлексивность** — это свойство бинарного отношения *в целом*, а не отдельной вершины. *Нельзя*, например, сказать «отношение R рефлексивно в вершине a».

Является ли рефлексивным отношение делимости нацело на множестве неотрицательных целых чисел?

Нет, не является, поскольку 0 не делится нацело на 0.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Подчеркнем, что **рефлексивность** — это свойство бинарного отношения *в целом*, а не отдельной вершины. *Нельзя*, например, сказать «отношение R рефлексивно в вершине a».

Отношение $<$ не рефлексивно. Является ли рефлексивным отношение «человек x нравится человеку y»?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Подчеркнем, что **рефлексивность** — это свойство бинарного отношения *в целом*, а не отдельной вершины. *Нельзя*, например, сказать «отношение R рефлексивно в вершине a».

Отношение $<$ не рефлексивно. Является ли рефлексивным отношение «человек x нравится человеку y»?

Не рефлексивно, поскольку, увы, не все люди нравятся сами себе.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R$.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R$.

На языке предикатов-функций симметричность отношения R означает, что

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \Rightarrow (b;a) \in R$.

На языке предикатов-функций симметричность отношения R означает, что если $r(x,y) = 1$, то $r(y,x) = 1$.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R$.

На языке предикатов-функций симметричность отношения R означает, что если $r(x, y) = 1$, то $r(y, x) = 1$.

На языке предикатов-высказываний имеем

$$x\rho y \;\Rightarrow\; y\rho x.$$

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

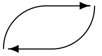
Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R.$

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R.$

На языке предикатов-функций **симметричность** отношения R означает, что если $r(x, y) = 1$, то $r(y, x) = 1$.

На языке предикатов-высказываний имеем

$$x\rho y \;\Rightarrow\; y\rho x.$$

На языке ориентированных графов **симметричность** означает, что всякая дуга имеет в графе $\Gamma(R)$ обратную: 

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \Rightarrow (b; a) \in R$.

Как и в случае с рефлексивностью, **симметричность** является свойством отношения *в целом*, *нельзя* сказать «отношение R для этих элементов симметрично, а для тех — нет».

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R$.

Как и в случае с рефлексивностью, **симметричность** является свойством отношения *в целом*, *нельзя* сказать «отношение R для этих элементов симметрично, а для тех — нет».

Являются ли симметричными отношения: отношение равенства и отношение родства между людьми?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R$.

Как и в случае с рефлексивностью, **симметричность** является свойством отношения *в целом*, *нельзя* сказать «отношение R для этих элементов симметрично, а для тех — нет».

Являются ли симметричными отношения: отношение равенства и отношение родства между людьми? Да.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \Rightarrow (b; a) \in R$.

Как и в случае с рефлексивностью, **симметричность** является свойством отношения *в целом*, *нельзя* сказать «отношение R для этих элементов симметрично, а для тех — нет».

Всегда актуальное, особенно для молодых людей, отношение «любит», к сожалению, не симметрично, не всегда любовь бывает взаимной. Можно ли сказать: «отношение «любит» не всегда симметрично»?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. Бинарное отношение R называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \Rightarrow (b; a) \in R$.

Как и в случае с рефлексивностью, **симметричность** является свойством отношения *в целом*, *нельзя* сказать «отношение R для этих элементов симметрично, а для тех — нет».

Всегда актуальное, особенно для молодых людей, отношение «любит», к сожалению, не симметрично, не всегда любовь бывает взаимной. Можно ли сказать: «отношение «любит» не всегда симметрично»?

Симметричность — свойство всего отношения, а не особенность отдельных вершин, даже весьма достойных уважения и любви!

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \Rightarrow (b; a) \in R$.

Антисимметричность. Бинарное отношение R называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; a) \in R \end{cases} \Rightarrow a = b$.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \ \Rightarrow \ (b;a) \in R.$

Антисимметричность. Бинарное отношение R называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \ \Rightarrow \ a = b.$

На языке подмножеств: в R не могут одновременно содержаться (a, b) и (b, a) для различных a, b.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R$.

Антисимметричность. Бинарное отношение R называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b$.

На языке подмножеств: в R не могут одновременно содержаться (a,b) и (b,a) для различных a, b.

На языке высказываний: для различных a, b из высказываний $a\rho b$ и $b\rho a$, как минимум, одно является неверным.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R$.

Антисимметричность. Бинарное отношение R называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b$.

На языке подмножеств: в R не могут одновременно содержаться (a, b) и (b, a) для различных a, b.

На языке высказываний: для различных a, b из высказываний $a\rho b$ и $b\rho a$, как минимум, одно является неверным.

На языке ориентированных графов: ни у одной дуги, кроме петли, нет обратной.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R.$

Антисимметричность. Бинарное отношение R называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b.$

Может ли отношение быть одновременно симметричным и анитисимметричным?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R$.

Антисимметричность. Бинарное отношение R называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b$.

Антисимметричным и симметричным является является подмножество отношения равенства.

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R$.

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R$.

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b$.

Транзитивность. **Транзитивным** называется такое отношение R,

$$\text{что} \quad \forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;c) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; (a;c) \in R.$$

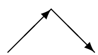
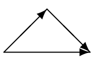
IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R.$

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b.$

Транзитивность. Транзитивным называется такое отношение R, что $\quad \forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;c) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; (a;c) \in R.$

Особенно наглядна транзитивность на языке ориентированных графов: для графа $G(R)$ транзитивного отношения R если есть «обходной маршрут» a, (a,b), b, (b,c), c, соединяющий вершины a и c, то обязательно есть и «короткий, прямой» путь a, (a,c), c. Иными словами, «уголки» вида  «замыкаются до треугольника»: 

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R.$

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b.$

Транзитивность. $\forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; c) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; (a; c) \in R.$

Является ли транзитивным отношение «женщина a является мамой женщины b»?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R.$

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b.$

Транзитивность. $\forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;c) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; (a;c) \in R.$

Является ли транзитивным отношение «женщина a является мамой женщины b»?

Нет, не является, так как мама мамы — это бабушка!

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \ \Rightarrow \ (b; a) \in R.$

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; a) \in R \end{cases} \ \Rightarrow \ a = b.$

Транзитивность. $\forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; c) \in R \end{cases} \ \Rightarrow \ (a; c) \in R.$

Из транзитивности отношения R **не** следует, например, что $(a; b) \in R$ и $(a; c) \in R$ влечет $(b; c) \in R$ или $(c; b) \in R$.

Например, если мы определим отношение «лучше» между автомобилями правилом «a лучше, чем b, если a быстроходнее и экономичнее b», то из того, что автомобиль a лучше, чем b и c, не следует, что b лучше c или наоборот: может оказаться, что b быстроходнее, чем c, но «прожорливей».

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a;a) \in R.$

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a;b) \in R \;\Rightarrow\; (b;a) \in R.$

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b.$

Транзитивность. $\forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a;b) \in R, \\ (b;c) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; (a;c) \in R.$

Является ли транзитивным отношение $P = \left\{(n, n+1) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ на множестве целых чисел?

IV.2. Некоторые типы бинарных отношений

Рефлексивность. $\forall a \in A \quad (a; a) \in R$.

Симметричность. $\forall a, b \in A \quad (a; b) \in R \;\Rightarrow\; (b; a) \in R$.

Антисимметричность. $\forall a, b \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; a) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; a = b$.

Транзитивность. $\forall a, b, c \in A \quad \begin{cases} (a; b) \in R, \\ (b; c) \in R \end{cases} \;\Rightarrow\; (a; c) \in R$.

Отношение $P = \Big\{(n, n+1) \,\Big|\, n \in \mathbb{Z}\Big\}$ на множестве целых чисел не является транзитивным, так как, например, $(1; 2) \in P$ и $(2; 3) \in P$, но неверно, что $(1; 3) \in P$.

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. ***Рефлексивное***, ***симметричное*** *и* ***транзитивное*** *отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Как понять, что такое отношение эквивалентности?

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. ***Рефлексивное***, ***симметричное*** *и* ***транзитивное*** *отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Как понять, что такое отношение эквивалентности?

Есть два варианта:

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. *Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Как понять, что такое отношение эквивалентности?

Есть два варианта:

анализ определения и

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. ***Рефлексивное***, ***симметричное*** *и* ***транзитивное*** *отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Как понять, что такое отношение эквивалентности?

Есть два варианта:

анализ определения и

построение достаточно большого числа примеров.

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. ***Рефлексивное***, ***симметричное*** *и* ***транзитивное*** *отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Есть два варианта:
анализ определения и
построение достаточно большого числа примеров.

Отношения эквивалентности встречаются очень часто: это и отношение равенства для чисел,

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. *Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Есть два варианта:
анализ определения и
построение достаточно большого числа примеров.

Отношения эквивалентности встречаются очень часто: это и отношение равенства для чисел, множеств,

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. ***Рефлексивное***, ***симметричное*** *и* ***транзитивное*** *отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Есть два варианта:
анализ определения и
построение достаточно большого числа примеров.

Отношения эквивалентности встречаются очень часто: это и отношение равенства для чисел, множеств, геометрических фигур,

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. *Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Есть два варианта:
анализ определения и
построение достаточно большого числа примеров.

Отношения эквивалентности встречаются очень часто: это и отношение равенства для чисел, множеств, геометрических фигур, отношение подобия для геометрических фигур и т.п.

IV.3. Отношение эквивалентности

Определение 6. *Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется* **отношением эквивалентности**.

Есть два варианта:
анализ определения и
построение достаточно большого числа примеров.

Рассмотрим пример?

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*

во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

(ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО А РАСПАДАЕТСЯ В ОБЪЕДИНЕНИЕ КЛАССОВ A_α)

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*
во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$;
во-вторых, *для $\alpha \neq \beta$ имеем $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;*
(ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО A РАСПАДАЕТСЯ В ОБЪЕДИНЕНИЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КЛАССОВ)

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*

во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$;

во-вторых, $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;

в-третьих, *для любых $x, y \in A_\alpha$ имеет место $(x; y) \in R$*

(ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ ИЗ ОДНОГО КЛАССА НАХОДЯТСЯ В ОТНОШЕНИИ R ДРУГ С ДРУГОМ)

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*

во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$;

во-вторых, $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;

в-третьих, $\forall x, y \in A_\alpha \quad (x; y) \in R$;

в-четвёртых, *для любых $\alpha \neq \beta$ и любых $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ имеем $(x, y) \notin R$*

(ЭЛЕМЕНТЫ ИЗ РАЗНЫХ КЛАССОВ НЕ НАХОДЯТСЯ В ОТНОШЕНИИ R)

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*

во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$;

во-вторых, $\alpha \neq \beta \ \Rightarrow \ A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;

в-третьих, $\forall x, y \in A_\alpha \quad (x; y) \in R$;

в-четвёртых, $\alpha \neq \beta \ \Rightarrow \ \left(\begin{cases} x \in A_\alpha, \\ y \in A_\beta \end{cases} \Rightarrow \ (x, y) \notin R \right)$.

Вот это стоит законспектировать...

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является **отношением эквивалентности** на множестве A тогда и только тогда, когда*
во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$;
во-вторых, $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;
в-третьих, $\forall x, y \in A_\alpha \quad (x; y) \in R$;
в-четвёртых, $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; \left(\begin{cases} x \in A_\alpha, \\ y \in A_\beta \end{cases} \Rightarrow\; (x, y) \notin R \right)$.

Иными словами, R — это отношение эквивалентности, если и только если A распадается в объединение непересекающихся классов попарно эквивалентных по R элементов.

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Теорема 1. *Отношение R является* ***отношением эквивалентности*** *на множестве A тогда и только тогда, когда*
во-первых, $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$;
во-вторых, $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;
в-третьих, $\forall x, y \in A_\alpha \quad (x; y) \in R$;
в-четвёртых, $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; \left(\begin{cases} x \in A_\alpha, \\ y \in A_\beta \end{cases} \Rightarrow\; (x, y) \notin R \right)$.

Доказательство критерия отношения эквивалентности. Сначала анализируем логическую структуру этой теоремы: это теорема-эквиваленция. Значит, доказательство разбивается на два этапа: во-первых, надо доказать, что всякое **отношение эквивалентности** обладает описанным в теореме свойствами, и, во-вторых, что всякое отношение с такими свойствами является **отношением эквивалентности**.

IV.3.1. Критерий отношения эквивалентности

Доказательство критерия отношения эквивалентности. Пусть R — **отношение эквивалентности**. Для каждого элемента x из A через $C(x)$ обозначим множество элементов y, находящихся в отношении R с элементом x, то есть

$$C(x) = \left\{ y \,\middle|\, (y; x) \in R \right\}. \tag{7}$$

Возникли вопросы?

Дальнейшее доказательство разобъем на ряд лемм: лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$, лемма о порождении $C(x)$, лемма об изолированности $C(x)$.

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если R — **отношение эквивалентности**, то все элементы из $C(x)$ находятся в отношении R друг с другом.*

Много слов...

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \in C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (x; y) \in R.$$

Вот теперь можно конспектировать!

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \in C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in R.$$

Доказательство.

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*
$$\begin{cases} y \in C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (x; y) \in R.$$

x

y z

Доказательство. Пусть $y, z \in C(x)$.

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \in C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (x;y) \in R.$$

$$\begin{tikzcd} & x & \\ y \arrow[ur] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $y, z \in C(x)$. Тогда

$$\begin{cases} (y;x) \in R, \\ (z;x) \in R \end{cases} \Rightarrow$$

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \in C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow\ (x;y) \in R.$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, shift left] & \\ y \arrow[ur] & & z \arrow[ul, shift left] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $y, z \in C(x)$. Тогда

$$\begin{cases} (y;x) \in R, \\ (z;x) \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y;x) \in R, \\ (x;z) \in R \end{cases} \Rightarrow$$

По условию отношение R симметричное, значит,
$(z;x) \in R\ \Rightarrow\ (x;z) \in R.$

IV.3.2. Лемма о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$

Лемма 1. *Если* R — ***отношение эквивалентности***, *то*

$$\begin{cases} y \in C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (x; y) \in R.$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, shift left] & \\ y \arrow[ur] \arrow[rr] & & z \arrow[ul, shift left] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $y, z \in C(x)$. Тогда

$$\begin{cases} (y; x) \in R, \\ (z; x) \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y; x) \in R, \\ (x; z) \in R \end{cases} \Rightarrow \ (y; z) \in R.$$

Из транзитивности R следует, что $(y; z) \in R$, что и требовалось доказать.

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то для любого y из $C(x)$ имеем $C(x) = C(y)$.*

Много слов...

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*
$\forall y \quad y \in C(x) \;\Rightarrow\; C(x) = C(y).$

Доказательство. Пусть

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если* R — ***отношение эквивалентности***, *то* $\forall y \quad y \in C(x) \;\Rightarrow\; C(x) = C(y)$.

Доказательство. Пусть y содержится в $C(x)$. Нам надо доказать

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*
$\forall y \quad y \in C(x) \Rightarrow C(x) = C(y)$.

Доказательство. Пусть y содержится в $C(x)$. Нам надо доказать *равенство множеств.*

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*
$\forall y \quad y \in C(x) \ \Rightarrow \ C(x) = C(y)$.

Доказательство. Пусть y содержится в $C(x)$. Нам надо доказать *равенство множеств.*

Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*
$\forall y \quad y \in C(x) \ \Rightarrow \ C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то* $\forall y \quad y \in C(x) \Rightarrow C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

$$\begin{cases} z \in C(x), \\ y \in C(x) \end{cases} \Rightarrow$$

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если* R — ***отношение эквивалентности***, *то* $\forall y \quad y \in C(x) \;\Rightarrow\; C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

$$\begin{cases} z \in C(x), \\ y \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow$$

В силу симметричности R **высказывание** $(y; x) \in R$ влечет $(x; y) \in R$.

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если* R — ***отношение эквивалентности***, *то* $\forall y \quad y \in C(x) \ \Rightarrow \ C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

$$\begin{cases} z \in C(x), \\ y \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (x, y) \in R \end{cases} \Rightarrow$$

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то* $\forall y \quad y \in C(x) \;\Rightarrow\; C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

$$\begin{cases} z \in C(x), \\ y \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (x, y) \in R \end{cases} \Rightarrow \; (z, y) \in R.$$

Из транзитивности отношения R следует, что $(z; x) \in R$ и $(x; y) \in R$ влечет $(z; y) \in R$.

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то* $\forall y \quad y \in C(x) \;\Rightarrow\; C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

$$\begin{cases} z \in C(x), \\ y \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z, x) \in R, \\ (x, y) \in R \end{cases} \Rightarrow \; (z, y) \in R.$$

Значит, по **определению** $C(x)$, z содержится в $C(y)$.

IV.3.3. Лемма о порождении $C(x)$

Лемма 2. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*
$\forall y \quad y \in C(x) \;\Rightarrow\; C(x) = C(y)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что, из соображений симметрии, достаточно доказать включение $C(x) \subseteq C(y)$.

Возьмем $z \in C(x)$.

$$\begin{cases} z \in C(x), \\ y \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z,x) \in R, \\ (y,x) \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z,x) \in R, \\ (x,y) \in R \end{cases} \Rightarrow \; (z,y) \in R.$$

Значит, по **определению** $C(x)$, z содержится в $C(y)$.

Итак, $z \in C(x) \;\Rightarrow\; z \in C(y)$, т.е. $C(x) \subseteq C(y)$.

Лемма доказана.

IV.3.4. Лемма об изолированности $C(x)$

Лемма 3. *Если R — **отношение эквивалентности**, то ни один элемент из A, не входящий в $C(x)$, не находится в отношении R ни с одним элементом из $C(x)$.*

Много слов...

IV.3.4. Лемма об изолированности $C(x)$

Лемма 3. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \notin C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \; (y, z) \notin R.$$

Доказательство можно провести «от противного». Итак, пусть

IV.3.4. Лемма об изолированности $C(x)$

Лемма 3. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \notin C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (y, z) \notin R.$$

Доказательство можно провести «от противного».

Итак, пусть y не содержится в $C(x)$, и для некоторого z из $C(x)$ справедливо $(y; z) \in R$. Тогда, согласно лемме о порождении $C(x)$,

$$C(x) = C(z) =$$

IV.3.4. Лемма об изолированности $C(x)$

Лемма 3. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \notin C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (y, z) \notin R.$$

Доказательство можно провести «от противного».

Итак, пусть y не содержится в $C(x)$, и для некоторого z из $C(x)$ справедливо $(y; z) \in R$. Тогда, согласно лемме о порождении $C(x)$,

$$C(x) = C(z) =$$

Но $z \in C(y) \ \Rightarrow \ C(y) = C(z)$.

IV.3.4. Лемма об изолированности $C(x)$

Лемма 3. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \notin C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (y, z) \notin R.$$

Доказательство можно провести «от противного».

Итак, пусть y не содержится в $C(x)$, и для некоторого z из $C(x)$ справедливо $(y; z) \in R$. Тогда, согласно лемме о порождении $C(x)$,

$$C(x) = C(z) = C(y).$$

Но $z \in C(y) \ \Rightarrow \ C(y) = C(z)$.

IV.3.4. Лемма об изолированности $C(x)$

Лемма 3. *Если R — **отношение эквивалентности**, то*

$$\begin{cases} y \notin C(x), \\ z \in C(x) \end{cases} \Rightarrow \ (y, z) \notin R.$$

Доказательство можно провести «от противного».

Итак, пусть y не содержится в $C(x)$, и для некоторого z из $C(x)$ справедливо $(y; z) \in R$. Тогда, согласно лемме о порождении $C(x)$,

$$C(x) = C(z) = C(y).$$

Следовательно, $C(x) = C(y)$, противоречие.

Лемма доказана.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

Закончим доказательство теоремы о разбиении на классы эквивалентных элементов.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

В силу рефлексивности R всякий элемент $a \in A$ содержится в $C(a)$. Значит, A является объединением множеств $C(a), C(b), \ldots, C(c)$.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

В силу рефлексивности R $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Далее, согласно определению $C(x)$, и лемме об изолированности $C(x)$, разные множества $C(x)$ и $C(y)$ не пересекаются, точнее, пересекаются по пустому множеству.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

В силу рефлексивности R $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

По определению $C(x)$ и лемме об изолированности $C(x)$ имеем $\alpha \neq \beta \implies A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

В силу рефлексивности R $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

По определению $C(x)$ и лемме об изолированности $C(x)$ имеем $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;

Согласно лемме о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$ всякая пара элементов из $C(x)$ находится в отношении R друг с другом.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

В силу рефлексивности R $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

По определению $C(x)$ и лемме об изолированности $C(x)$ имеем $\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$;

Согласно лемме о попарной эквивалентности элементов из $C(x)$ получаем $\begin{cases} x \in A_\alpha, \\ y \in A_\beta \end{cases} \Rightarrow\; (x; y) \in A$.

Наконец, по лемме об изолированности $C(x)$, никакие два элемента из разных множеств $C(x)$, $C(y)$ не находятся в отношении R друг с другом.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

Итак, доказано, что **отношение эквивалентности** обладает требуемыми свойствами.

Утверждение, о том, что отношение R, разбивающее A на классы $A_\alpha, A_\beta, \ldots$ эквивалентных по R элементов, является **отношением эквивалентности**, очевидно.

IV.3.5. Завершение доказательства критерия отношения эквивалентности

Итак, доказано, что **отношение эквивалентности** обладает требуемыми свойствами.

Утверждение, о том, что отношение R, разбивающее A на классы $A_\alpha, A_\beta, \ldots$ эквивалентных по R элементов, является **отношением эквивалентности**, очевидно.

Действительно, **рефлексивность**, **симметричность** и **транзитивность** такого отношения проверяются без труда.

Теорема доказана.

IV.3.6. Фактор-множество

Замечание 1. *Критерий отношения эквивалентности позволяет ввести еще один стандартный способ для задания отношения эквивалентности: задание указанием* ***классов эквивалентных элементов****.*

IV.3.6. Фактор-множество

Замечание 1. *Критерий отношения эквивалентности позволяет ввести еще один стандартный способ для задания отношения эквивалентности: задание указанием* ***классов эквивалентных элементов****.*

Отношение эквивалентности $T = \{(1;1);\ (1;3);\ (2;2);\ (3;1);\ (3;3)\}$ (**рефлексивность**, **симметричность** и **транзитивность** этого отношения проверьте самостоятельно, в данном случае это можно сделать перебором всех вариантов) можно задать, указав список эквивалентных элементов:

IV.3.6. Фактор-множество

Замечание 1. *Критерий отношения эквивалентности позволяет ввести еще один стандартный способ для задания отношения эквивалентности: задание указанием* ***классов эквивалентных элементов****.*

Отношение эквивалентности $T = \{(1;1);\ (1;3);\ (2;2);\ (3;1);\ (3;3)\}$ (**рефлексивность**, **симметричность** и **транзитивность** этого отношения проверьте самостоятельно, в данном случае это можно сделать перебором всех вариантов) можно задать, указав список эквивалентных элементов:

$$\{1;3\} = C(1) = C(3), \quad \{2\} = C(2).$$

IV.3.6. Фактор-множество

Замечание 1. *Критерий отношения эквивалентности позволяет ввести еще один стандартный способ для задания отношения эквивалентности: задание указанием* ***классов эквивалентных элементов****.*

Определение 7. *Если R — **отношение эквивалентности** на множестве M, то множество классов эквивалентных по R элементов называется* **фактор-множеством** *M/R множества M по отношению R.*

IV.3.6. Фактор-множество

Замечание 1. *Критерий отношения эквивалентности позволяет ввести еще один стандартный способ для задания отношения эквивалентности: задание указанием* ***классов эквивалентных элементов****.*

Обратите внимание на стандартные формы перехода от одной формы представления отношения эквивалентности к другой! Определение класса эквивалентных элементов представлено формулой (7).

IV.3.6. Фактор-множество

Замечание 1. *Критерий отношения эквивалентности позволяет ввести еще один стандартный способ для задания отношения эквивалентности: задание указанием* ***классов эквивалентных элементов****.*

Обратите внимание на стандартные формы перехода от одной формы представления отношения эквивалентности к другой! Восстановление исходного отношения по фактор-множеству можно осуществить с помощью формул

$$(x;y) \in R \;\Leftrightarrow\; \exists C(z) \begin{cases} x \in C(z); \\ y \in C(z), \end{cases} \tag{8}$$

$$(x;y) \in R \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in C(y); \\ y \in C(x). \end{array} \right. \tag{9}$$

Рассмотрим пример?

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Как разобраться с тем, что такое отношение частичного порядка?

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное*, *антисимметричное* *и* *транзитивное* *отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Как разобраться с тем, что такое отношение частичного порядка? Есть два варианта:

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Как разобраться с тем, что такое отношение частичного порядка?

Есть два варианта:

анализ определения (получение следствий) или

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Как разобраться с тем, что такое отношение частичного порядка?

Есть два варианта:

анализ определения (получение следствий) или

рассмотрение достаточно большого числа примеров.

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Отношениями частичного порядка являются, например,

— отношение $\leq$ на множестве целых чисел;

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Отношениями частичного порядка являются, например,

— отношение $\leq$ на множестве целых чисел;

— отношения $\supseteq$ и

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное*, *антисимметричное* *и* *транзитивное* *отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Отношениями частичного порядка являются, например,

— отношение $\leq$ на множестве целых чисел;

— отношения $\supseteq$ и $\subseteq$ на множестве всех подмножеств множества X.

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Если R — отношение частичного порядка на множестве A, то говорят, что элементы $x, y \in A$ **несравнимы** по отношению R, если $(x, y) \notin R$ и $(y, x) \notin R$. Если из контекста ясно, о каком отношении R идет речь, то говорят, что x, y *несравнимы* вместо x, y *несравнимы по отношению* R.

В данном разделе мы ограничимся формулированием определений основных типов отношений частичного порядка, применяющихся в математике.

IV.4. Отношение частичного порядка

Определение 8. *Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Определение 9. *Отношение R частичного порядка на множестве A называется* **отношением линейного порядка**, *если для любых элементов $x, y \in A$ верно хотя бы одно из утверждений: $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$.*

Иными словами, отношение частичного порядка является отношением линейного порядка тогда и только тогда, когда в A нет несравнимых элементов.

IV.5. Отношение полного порядка

Определение 8. ***Рефлексивное***, ***антисимметричное*** *и* ***транзитивное*** *отношение называется* **отношением частичного порядка**.

Определение 9. *Отношение R частичного порядка на множестве A называется* **отношением линейного порядка**, *если для любых элементов $x, y \in A$ верно хотя бы одно из утверждений: $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$.*

Определение 10. *Отношение R частичного порядка на множестве A называется* **отношением полного порядка**, *если в любом подмножестве $B \subseteq A$ найдется наименьший элемент, то есть такой элемент $m \in B$, что для любого $x \in B$ имеет место включение $(m, x) \in R$.*

IV.5. Отношение полного порядка

Иными словами, бинарное отношение ρ на множестве A является **отношением полного порядка** тогда и только тогда, когда

во-первых, ρ — отношение частичного порядка;

во-вторых, все элементы из A сравнимы относительно ρ, то есть

$$\forall x\,\forall y\ \ (x \in A \wedge y \in A) \to x\rho y \vee y\rho x;$$

в-третьих, в любом подмножестве $B \subseteq A$ найдется минимальный элемент, то есть

$$\exists x\ x \in B \wedge \forall y\ \ \big(y \in B \to x\rho y\big)\,.$$

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*
1) r является ***отношением линейного порядка****;*
2) Если элемент x из M не является «наибольшим» в M, то среди элементов множества M, «больших» чем x, существует «наименьший» элемент.

Много слов...

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

1) r является ***отношением линейного порядка****;*

2) $\exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz)\,. \end{cases}$

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

1) r является ***отношением линейного порядка****;*

2) $$\exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz)\,. \end{cases}$$

Доказательство. 1). Если $x, y \in M$, то, по определению полного порядка, во множестве $\{x, y\}$ имеется наименьший элемент. Это либо x, тогда xry, либо y, тогда yrx.

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

*1) r является **отношением линейного порядка**;*

2) $\exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz)\,. \end{cases}$

2) Пусть $x \in M$. Рассмотрим $B = \left\{ z \,\middle|\, z \in M \;\&\; z \neq x \;\&\; xrz \right\}$.
По **определению отношения полного порядка** в B найдется наименьший элемент y.

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

1) r является ***отношением линейного порядка****;*

2) $\exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz). \end{cases}$

2) Пусть $x \in M$. Рассмотрим $B = \left\{ z \,\middle|\, z \in M \,\&\, z \neq x \,\&\, xrz \right\}$.

По **определению отношения полного порядка**

$\exists y \in B \quad \forall z \in B \quad y\rho z.$

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

1) r является ***отношением линейного порядка****;*

2) $\exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz). \end{cases}$

2) Пусть $x \in M$. Рассмотрим $B = \left\{ z \,\middle|\, z \in M \;\&\; z \neq x \;\&\; xrz \right\}$.

По **определению отношения полного порядка**

$\exists y \in B \quad \forall z \in B \quad y\rho z.$

Тогда, во-первых, $x \neq y$,

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

1) r является ***отношением линейного порядка****;*

$$2)\ \exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz). \end{cases}$$

2) Пусть $x \in M$. Рассмотрим $B = \left\{ z \,\middle|\, z \in M \,\&\, z \neq x \,\&\, xrz \right\}$.

По **определению отношения полного порядка**

$\exists y \in B \quad \forall z \in B \quad y\rho z.$

Тогда, во-первых, $x \neq y$, во-вторых, xry,

IV.6. Теорема об отношении полного порядка

Теорема 2. *Если r — отношение полного порядка на множестве M, то справедливы следующие утверждения:*

1) r является ***отношением линейного порядка****;*

2) $\exists t \begin{cases} t \in M, \\ xrt \end{cases} \Rightarrow \exists y \in M \begin{cases} x \neq y, \\ xry, \\ \forall z \in M \quad xrz \Rightarrow (x \neq z \Rightarrow yrz). \end{cases}$

2) Пусть $x \in M$. Рассмотрим $B = \left\{ z \,\middle|\, z \in M \;\&\; z \neq x \;\&\; xrz \right\}$.

По **определению отношения полного порядка**

$\exists y \in B \quad \forall z \in B \quad y\rho z.$

Тогда, во-первых, $x \neq y$, во-вторых, xry, и, в-третьих,

$\forall z \in M \quad \underbrace{xrz \;\Rightarrow\; (x \neq z}_{z \in B} \Rightarrow\; yrz)$, что и требовалось доказать.

$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ равносильно $(\alpha \& \beta) \Rightarrow \gamma$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?