Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Элементы теории графов

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Основные понятия

Теория графов широко применяется в самых различных областях математики и других науках. К сожалению, по-видимому, ее широкое применение предшествовало достаточно подробной «стандартизации» соответствующих понятий и обозначений, поэтому в разных учебниках даются существенно различные определения графов. Определения существенно различаются в том смысле, что не совпадают соответствующие понятия.

I. Основные понятия

Выбор результатов по теории графов, приведенных в данном конспекте лекций, обусловлен следующими соображениями:

I. Основные понятия

1) Мы хотим продемонстрировать некоторые собственно теоретико-графовые методы и результаты (критерий связности графа, теорема о связности дополнительного графа, теорема Кёнига и др.);

I. Основные понятия

1) Мы хотим продемонстрировать некоторые собственно теоретико-графовые методы и результаты (критерий связности графа, теорема о связности дополнительного графа, теорема Кёнига и др.);

2) мы пытались также продемонстрировать результаты, основанные на методах и понятиях, «заимствованных» из других областей математики (**теоремы о количестве маршрутов между вершинами**, о корнях полинома регулярного графа);

I. Основные понятия

1) Мы хотим продемонстрировать некоторые собственно теоретико-графовые методы и результаты (критерий связности графа, теорема о связности дополнительного графа, теорема Кёнига и др.);

2) мы пытались также продемонстрировать результаты, основанные на методах и понятиях, «заимствованных» из других областей математики (**теоремы о количестве маршрутов между вершинами**, о корнях полинома регулярного графа);

3) мы привели определения некоторых из важнейших понятий теории графов. Разумеется, список сформулированных нами определений ни в коей степени не претендует даже на относительную полноту, и большинство широко используемых понятий теории графов осталось за рамками данной работы.

I.1. Множество и набор элементов

Набором элементов множества M мы назовем неупорядоченную систему элементов некоторого множества M, в которой каждый элемент множества M может встречаться несколько раз. При этом для наборов операции объединения и пересечения определяются аналогично соответствующим операциям для множеств.

I.1. Множество и набор элементов

Набором элементов множества M мы назовем неупорядоченную систему элементов некоторого множества M, в которой каждый элемент множества M может встречаться несколько раз. При этом для наборов операции объединения и пересечения определяются аналогично соответствующим операциям для множеств.

Можно обойтись без неопределяемого понятия «система элементов», и ввести понятие набора, например, следующим образом. Рассмотрим множество всевозможных кортежей элементов из M, и определим отношение τ правилом: два кортежа находятся в отношении τ друг с другом тогда и только тогда, когда один из них получается из другого перестановкой элементов. Тогда можно отождествить набор элементов множества M с классами эквивалентных по τ элементов. Мы назовем это **теоретико-множественной интерпретацией** понятия «набор».

I.1. Множество и набор элементов

Можно применить еще один подход: вместо *множества* M и *набора* N рассматривать пару: $\langle N', \theta \rangle$, где N' некоторое множество, $\theta : N' \to M$ — функция. Понятие «цветного графа», по сути дела, восходит к этой интерпретации понятия *набор*.

I.2. Определение графа

Определение 1. Графом *называется пара* $G = \langle V, E^o \cup E^n \rangle$*, где* V *— некоторое множество,* E^o *— набор элементов из* $V \times V$ *и* E^n *— набор элементов из объединения множества всех двухэлементных подмножеств множества* V *с множеством* V*. Элементы множества* V *называют* **вершинами графа** G*, элементы набора* E^o *—* **дугами** *или* **ориентированными ребрами** *графа, а элементы набора* E^n *—* **неориентированными ребрами** *графа* G*. Элементы объединения* $E^o \cup E^n$ *называют* **ребрами** *графа* G*.*

I.2. Определение графа

Определение 1. Графом *называется пара* $G = \langle V, E^o \cup E^n \rangle$, *где* V *— некоторое множество,* E^o *— набор элементов из* $V \times V$ *и* E^n *— набор элементов из объединения множества всех двухэлементных подмножеств множества* V *с множеством* V. *Элементы множества* V *называют* **вершинами графа** G, *элементы набора* E^o *—* **дугами** *или* **ориентированными ребрами** *графа, а элементы набора* E^n *—* **неориентированными ребрами** *графа* G. *Элементы объединения* $E^o \cup E^n$ *называют* **ребрами** *графа* G.

Множество V вершин графа G обозначают, как $V(G)$, а наборы E^o и E^n — через $E^o(G)$ и $E^n(G)$ соответственно. Набор $E^o(G) \cup E^n(G)$ мы будем обозначать через $E(G)$.

I.2. Определение графа

Определение 1. Графом *называется пара* $G = \langle V, E^o \cup E^n \rangle$, *где* V *— некоторое множество,* E^o *— набор элементов из* $V \times V$ *и* E^n *— набор элементов из объединения множества всех двухэлементных подмножеств множества* V *с множеством* V. *Элементы множества* V *называют* **вершинами графа** G, *элементы набора* E^o *—* **дугами** *или* **ориентированными ребрами** *графа, а элементы набора* E^n *—* **неориентированными ребрами** *графа* G. *Элементы объединения* $E^o \cup E^n$ *называют* **ребрами** *графа* G.

Множество V вершин графа G обозначают, как $V(G)$, а наборы E^o и E^n — через $E^o(G)$ и $E^n(G)$ соответственно. Набор $E^o(G) \cup E^n(G)$ мы будем обозначать через $E(G)$.

Рассмотреть пример?

I.2. Определение графа

Определение 1. Графом *называется пара* $G = \langle V, E^o \cup E^n \rangle$, *где* V *— некоторое множество,* E^o *— набор элементов из* $V \times V$ *и* E^n *— набор элементов из объединения множества всех двухэлементных подмножеств множества* V *с множеством* V. *Элементы множества* V *называют* **вершинами графа** G, *элементы набора* E^o *—* **дугами** *или* **ориентированными ребрами** *графа, а элементы набора* E^n *—* **неориентированными ребрами** *графа* G. *Элементы объединения* $E^o \cup E^n$ *называют* **ребрами** *графа* G.

Множество V вершин графа G обозначают, как $V(G)$, а наборы E^o и E^n — через $E^o(G)$ и $E^n(G)$ соответственно. Набор $E^o(G) \cup E^n(G)$ мы будем обозначать через $E(G)$.

Ребра вида (a, a) и $\{a\}$ называют **петлями**.

I.3. Кратность ребра

Определение 1. Графом *называется пара* $G = \langle V, E^o \cup E^n \rangle$, *где* V *— некоторое множество,* E^o *— набор элементов из* $V \times V$ *и* E^n *— набор элементов из объединения множества всех двухэлементных подмножеств множества* V *с множеством* V. *Элементы множества* V *называют* **вершинами графа** G, *элементы набора* E^o *—* **дугами** *или* **ориентированными ребрами** *графа, а элементы набора* E^n *—* **неориентированными ребрами** *графа* G. *Элементы объединения* $E^o \cup E^n$ *называют* **ребрами** *графа* G.

Для любого ребра x из набора E количество ребер из $E(G)$, равных x называется **кратностью ребра** (a, b). В приведенной выше теоретико-множественной интерпретации набора кратность ребра — это мощность класса эквивалентных по τ элементов (количество элементов в этом классе).

I.4. Некоторые типы графов

В некоторых приложениях теории графов и, соответственно, в некоторых монографиях, под графом понимается один из следующих частных случаев определенного выше понятия «граф»:

I.4. Некоторые типы графов

- Если все ребра в графе G имеют кратность 1, то такой граф называют **графом без кратных ребер**.

I.4. Некоторые типы графов

- Если все ребра в графе G имеют кратность 1, то такой граф называют **графом без кратных ребер**.
- Если набор $E^o(G)$ — пустой, то граф G называют **неориентированным графом**. При этом под словом **ребро** понимается неориентированное ребро.

I.4. Некоторые типы графов

- Если все ребра в графе G имеют кратность 1, то такой граф называют **графом без кратных ребер**.
- Если набор $E^o(G)$ — пустой, то граф G называют **неориентированным графом**. При этом под словом **ребро** понимается неориентированное ребро.
- Если набор $E^n(G)$ — пустой, то граф G называют **ориентированным графом** или **орграфом**. При этом вместо термина «ориентированное ребро» обычно используют термин «дуга».

I.4. Некоторые типы графов

- Если все ребра в графе G имеют кратность 1, то такой граф называют **графом без кратных ребер**.
- Если набор $E^o(G)$ — пустой, то граф G называют **неориентированным графом**. При этом под словом **ребро** понимается неориентированное ребро.
- Если набор $E^n(G)$ — пустой, то граф G называют **ориентированным графом** или **орграфом**. При этом вместо термина «ориентированное ребро» обычно используют термин «дуга».

Если G — ориентированный граф без кратных ребер, то набор $E(G) = E^o(G)$ можно считать множеством, и тогда граф G можно считать реляционной системой.

I.4. Некоторые типы графов

- Если все ребра в графе G имеют кратность 1, то такой граф называют **графом без кратных ребер**.
- Если набор $E^o(G)$ — пустой, то граф G называют **неориентированным графом**. При этом под словом **ребро** понимается неориентированное ребро.
- Если набор $E^n(G)$ — пустой, то граф G называют **ориентированным графом** или **орграфом**. При этом вместо термина «ориентированное ребро» обычно используют термин «дуга».

В некоторых случаях под графом понимается только граф без петель и кратных ребер, а граф без петель (в нашем определении) называется **мультиграфом**.

I.4. Некоторые типы графов

- Если все ребра в графе G имеют кратность 1, то такой граф называют **графом без кратных ребер**.

- Если набор $E^o(G)$ — пустой, то граф G называют **неориентированным графом**. При этом под словом **ребро** понимается неориентированное ребро.

- Если набор $E^n(G)$ — пустой, то граф G называют **ориентированным графом** или **орграфом**. При этом вместо термина «ориентированное ребро» обычно используют термин «дуга».

В некоторых случаях под графом понимается только граф без петель и кратных ребер, а граф без петель (в нашем определении) называется **мультиграфом**.

Граф с кратными ребрами и петлями в этой ситуации называют **псевдографом**.

I.5. Переход от ориентированного графа к неориентированному и обратно

Неориентированный граф можно отождествить с ориентированным графом следующим образом: каждому неориентированному ребру $\{a, b\}$ поставим в соответствие пару дуг: (a, b) и (b, a), а каждой петле $\{a\}$ — дугу (a, a).

Рассмотреть пример?

I.6. Инцидентность вершин и ребер

Говорят, что вершина x **инцидентна** ребру e, а ребро e **инцидентно** вершине x, если либо $e = \{x, y\}$, либо $e = \{x\}$, либо $e = (x, y)$, либо $e = (y, x)$ для некоторой вершины y графа G. В этих случаях вершину x называют или **началом** дуги (x, y), или **концом** ребра e во всех остальных случаях.

> В дальнейшем, если ребро является дугой, то говоря о **концах** ребра (во множественном числе!) мы будем понимать под этим *начало* и *конец* этой дуги

I.7. Валентность вершины. Изоморфизм графов

Определение 2. Степень *или* **валентность вершины** *x из $V(G)$ — это количество ребер, инцидентных вершине x.*

Вершина валентности 0 называется **изолированной***, вершина валентности 1 -* **концевой***, или* **висячей***.*

Ребро, инцидентное висячей вершине, называют **концевым***.*

I.7. Валентность вершины. Изоморфизм графов

Определение 2. **Степень** *или* **валентность вершины** x *из* $V(G)$ — *это количество ребер, инцидентных вершине* x.

Определение 3. *Граф* G **изоморфен** *графу* H, *если существуют такие взаимно однозначные функции* $p : V(G) \to V(H)$, $q : E(G) \to E(H)$, *что для любых вершин* $x, y \in V(G)$

- *неориентированное ребро* $\{x, y\}$ *содержится в* $E^n(G)$ *тогда и только тогда, когда* $\big\{p(x), p(y)\big\} = q\left(\{x, y\}\right)$, *причем кратность ребра* $\{x, y\}$ *в* G *равна кратности ребра* $q\left(\{x, y\}\right)$ *в* H;
- *дуга* (x, y) *содержится в* $E^o(G)$ *тогда и только тогда, когда* $\big(p(x), p(y)\big) = q\left((x, y)\right)$, *причем кратность дуги* (x, y) *в* G *равна кратности дуги* $q\left((x, y)\right)$ *в* H.

Рассмотреть пример?

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 4. *Говорят, что* H *—* **подграф** *графа* G, *если* $V(H) \subseteq V(G)$, *и* $E(H) \subseteq E(G)$. *Подграф* H *графа* G *называется* **остовным**, *если* $V(H) = V(G)$. *Говорят, что подграф* H *графа* G **порожден** *в* G *множеством вершин* $V(H)$, *если всякое ребро графа* G, *все концы которого содержатся в* $V(H)$, *содержится в* $E(H)$.

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. Маршрутом *в графе* G *называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i *— вершины графа,* a_i *— ребра, причем либо* $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$*, либо* $a_i = (x_i, x_{i+1})$*. При этом* x_1 *называют* **началом маршрута***, а вершина* x_{n+1} *—* **концом маршрута***. Такой маршрут называют* (x_1, x_{n+1})*-маршрутом.*

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. **Маршрутом** *в графе G называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i — вершины графа, a_i — ребра, причем либо $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$, либо $a_i = (x_i, x_{i+1})$. При этом x_1 называют **началом маршрута**, *а вершина x_{n+1} —* **концом маршрута**. *Такой маршрут называют (x_1, x_{n+1})-маршрутом.*

Определение 6. *Количество ребер в маршруте называется его* **длиной** *(длина маршрута на 1 меньше количества вершин в маршруте).*

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. Маршрутом *в графе G называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i — вершины графа, a_i — ребра, причем либо $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$, либо $a_i = (x_i, x_{i+1})$. При этом x_1 называют **началом маршрута**, *а вершина x_{n+1} —* **концом маршрута**. *Такой маршрут называют (x_1, x_{n+1})-маршрутом.*

Маршрут длины 0 состоит из одной вершины.

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. Маршрутом *в графе G называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i — вершины графа, a_i — ребра, причем либо $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$, либо $a_i = (x_i, x_{i+1})$. При этом x_1 называют **началом маршрута***, а вершина x_{n+1} —* **концом маршрута***. Такой маршрут называют (x_1, x_{n+1})-маршрутом.*

Если в маршруте все ребра различны, то он называется **цепью**.

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. Маршрутом *в графе G называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i — вершины графа, a_i — ребра, причем либо $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$, либо $a_i = (x_i, x_{i+1})$. При этом x_1 называют **началом маршрута***, а вершина x_{n+1} —* **концом маршрута***. Такой маршрут называют (x_1, x_{n+1})-маршрутом.*

Если в маршруте все ребра различны, то он называется **цепью**. Цепь, в которой все вершины разные, называется **простой цепью**.

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. **Маршрутом** *в графе G называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i — вершины графа, a_i — ребра, причем либо $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$, либо $a_i = (x_i, x_{i+1})$. При этом x_1 называют **началом маршрута**, *а вершина x_{n+1} —* **концом маршрута**. *Такой маршрут называют (x_1, x_{n+1})-маршрутом.*

Если в маршруте все ребра различны, то он называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины разные, называется **простой цепью**.

Цикл — маршрут, у которого начало совпадает с концом.

I.8. Подграфы, маршруты

Определение 5. **Маршрутом** *в графе* G *называется чередующаяся последовательность*

$$x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, , x_n, a_n, x_{n+1},$$

где x_i *— вершины графа,* a_i *— ребра, причем либо* $a_i = \{x_i, x_{i+1}\}$*, либо* $a_i = (x_i, x_{i+1})$*. При этом* x_1 *называют* **началом маршрута**, *а вершина* x_{n+1} *—* **концом маршрута**. *Такой маршрут называют* (x_1, x_{n+1})*-маршрутом.*

Если в маршруте все ребра различны, то он называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины разные, называется **простой цепью**.

Цикл — маршрут, у которого начало совпадает с концом.

Если цикл является простой цепью, то это **простой цикл**.

Рассмотреть пример?

I.9. Достижимость, связность

Определение 6. *Говорят, что вершина y из $V(G)$* **достижима** *в графе G из вершины x, если в G существует (x, y)-**маршрут**.*

I.9. Достижимость, связность

Определение 6. *Говорят, что вершина y из $V(G)$* **достижима** *в графе G из вершины x, если в G существует (x, y)-**маршрут**.*

Граф называется **связным**, если для любых двух его вершин x, y существует **маршрут**, началом которого является вершина x, а концом — вершина y.

I.9. Достижимость, связность

Говорят, что вершина y из $V(G)$ **достижима** в графе G из вершины x, если в G существует (x, y)-**маршрут**.

Граф называется **связным**, если для любых двух его вершин x, y существует **маршрут**, началом которого является вершина x, а концом — вершина y. Таким образом граф G связен тогда и только тогда, когда в нем каждая вершина достижима из любой другой.

I.9. Достижимость, связность

Говорят, что вершина y из $V(G)$ **достижима** в графе G из вершины x, если в G существует (x, y)-**маршрут**.

Граф называется **связным**, если для любых двух его вершин x, y существует **маршрут**, началом которого является вершина x, а концом — вершина y. Таким образом граф G связен тогда и только тогда, когда в нем каждая вершина достижима из любой другой.

Отношение достижимости в неориентированных графах, очевидно, является отношением эквивалентности, поэтому граф G разбивается этим отношением на непересекающиеся классы, называемые **связными компонентами**.

I.9. Достижимость, связность

Говорят, что вершина y из $V(G)$ **достижима** в графе G из вершины x, если в G существует (x, y)-**маршрут**.

Граф называется **связным**, если для любых двух его вершин x, y существует **маршрут**, началом которого является вершина x, а концом — вершина y. Таким образом граф G связен тогда и только тогда, когда в нем каждая вершина достижима из любой другой.

В связном графе G естественным образом вводится метрика: **расстоянием между вершинами** x, y назовем минимум длин (x, y)-**маршрутов**.

II. Неориентированные графы без петель и кратных ребер

Везде далее под *графом* понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер.

II. Неориентированные графы без петель и кратных ребер

Граф H называется **дополнительным** к графу G, если $V(H) = V(G)$, и для любых двух различных вершин x, y ребро $\{x, y\}$ содержится в $E(H)$ тогда и только тогда, когда $\{x, y\}$ не содержится в $E(G)$.

II.1. Критерий связности графа

Теорема 1 (**критерий связности графа**). *Граф G связен тогда и только тогда, когда существует такая вершина из $V(G)$, из которой достижима любая другая вершина.*

Доказательство.

II.1. Критерий связности графа

Теорема 1 (критерий связности графа). *Граф G связен тогда и только тогда, когда существует такая вершина из $V(G)$, из которой достижима любая другая вершина.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения связного графа.

II.1. Критерий связности графа

Теорема 1 (критерий связности графа). *Граф G связен тогда и только тогда, когда существует такая вершина из $V(G)$, из которой достижима любая другая вершина.*

Доказательство. Достаточность. Пусть всякая вершина графа G достижима из вершины x. Пусть y, z — произвольные вершины из $V(G)$. Надо доказать, что существует **маршрут** с началом y и с концом z. По условию существуют маршруты $x, a_1, y_1, a_2, y_2, \ldots, a_n, y$, и $x, b_1, z_1, \ldots, b_m, z$. Тогда **маршрут**

$$y, a_n, \ldots, y_1, a_1, x, b_1, z_1, \ldots, b_m, z$$

— искомый.

II.2. Теорема о связности дополнительного графа

Теорема 2 (**о связности дополнительного графа**). *Для любого графа G либо граф G, либо дополнительный к G граф H является связным.*

Доказательство.

II.2. Теорема о связности дополнительного графа

Теорема 2 (**о связности дополнительного графа**). *Для любого графа G либо граф G, либо дополнительный к G граф H является связным.*

Доказательство. Можно считать, что G — несвязный граф. Тогда он содержит, как минимум, две связных компоненты. Докажем, что дополнительный граф H связен.

II.2. Теорема о связности дополнительного графа

Теорема 2 (о связности дополнительного графа). *Для любого графа G либо граф G, либо дополнительный к G граф H является связным.*

Доказательство. Можно считать, что G — несвязный граф. Тогда он содержит, как минимум, две связных компоненты.

Возьмем две произвольные вершины $x, y \in V(G) = V(H)$. Если $\{x, y\}$ не принадлежит $E(G)$, то $\{x, y\}$ является ребром графа H, то есть y достижима из x. Если $\{x, y\}$ содержится в $E(G)$, то вершины x и y лежат в одной связной компоненте графа G. Возьмем вершину z из другой связной компоненты графа G. Тогда $x,\ \{x, z\},\ z,\ \{z, y\},\ y$ — искомый путь в графе H.

Теорема доказана.

II.3. Двудольный граф

Определение 7. *Граф G называется* **двудольным**, *если множество $V(G)$ его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества X и Y таким образом, что у всех ребер графа G один конец содержится в X, а другой — в Y. При этом графы, порожденные множествами X и Y, называют* **долями** *графа G.*

II.3. Двудольный граф

Определение 7. *Граф G называется* **двудольным**, *если множество $V(G)$ его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества X и Y таким образом, что у всех ребер графа G один конец содержится в X, а другой — в Y. При этом графы, порожденные множествами X и Y, называют* **долями** *графа G.*

Определение 8. *Граф G называется* **многодольным** *или* **n-дольным**, *если множество $V(G)$ его вершин можно разбить на n непересекающихся подмножеств X_i таким образом, что в графе G нет ни одного ребра, у которого оба конца лежали бы в одной доле. При этом графы, порожденные множествами X_i, называют* **долями** *графа G.*

Рассмотреть пример?

II.4. Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)

Теорема 3 (Кёнига, критерий двудольности графа). *Граф G с конечным числом вершин является* ***двудольным*** *тогда и только тогда, когда все циклы в графе G имеют четную длину.*

Доказательство.

II.4. Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)

Теорема 3 (Кёнига, критерий двудольности графа). *Граф G с конечным числом вершин является* ***двудольным*** *тогда и только тогда, когда все циклы в графе G имеют четную длину.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

II.4. Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)

Теорема 3 (Кёнига, критерий двудольности графа). *Граф G с конечным числом вершин является* ***двудольным*** *тогда и только тогда, когда все циклы в графе G имеют четную длину.*

Доказательство. Докажем теперь достаточность. Рассмотрим сначала случай, когда G — связный граф. Зафиксируем произвольным образом вершину x, и обозначим через X множество всех тех вершин графа G, расстояние от которых до x — нечетное число. Обозначим через Y множество всех тех вершин, расстояние от которых до x является четным числом. Проверим, что X и Y можно взять в качестве долей графа G.

II.4. Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)

Теорема 3 (Кёнига, критерий двудольности графа). *Граф G с конечным числом вершин является* ***двудольным*** *тогда и только тогда, когда все циклы в графе G имеют четную длину.*

Доказательство. Будем рассуждать «от противного». Пусть $\{y, z\}$ — ребро графа G, причем y и z содержатся в X (в Y). Выберем (x, y)-**маршрут** кратчайшей длины $x, a_1, \ldots, a_p, y$, и (x, z)-**маршрут** кратчайшей длины $x, b_1, \ldots, b_q, z$. Заметим, что $p + q$ является четным числом, поскольку это сумма или двух четных, или двух нечетных чисел. Поэтому цикл

$$x, a_1, \ldots, a_p, y, \{y, z\}, z, b_q, \ldots, x$$

имеет нечетную длину $p + q + 1$, противоречие.

II.4. Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)

Теорема 3 (Кёнига, критерий двудольности графа). *Граф G с конечным числом вершин является* ***двудольным*** *тогда и только тогда, когда все циклы в графе G имеют четную длину.*

Доказательство. Осталось рассмотреть случай, когда граф G не связен. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множество всех связных компонент графа G. Отметим, что всякий цикл является циклом какой-либо связной компоненты графа G. Поэтому, в силу доказанного выше утверждения, каждая связная компонента графа G является **двудольным** графом. Пусть для любого i графы X_i, Y_i - доли связной компоненты A_i. Очевидно, что в качестве долей графа G можно взять подграфы, порожденные $X_1 \cup X_2 \cup \ldots X_n$ и $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots Y_n$.

Рассмотреть пример?

III. Матрицы, ассоциированные с неориентированным графом

Пусть G — **помеченный граф**, то есть неориентированный граф, имеющий конечное число вершин, все его вершины перенумерованы, и каждой вершине поставлен в соответствие ее номер. Вместо «вершина с номером i» мы будем говорить «вершина i».

III.1. Матрица смежности

Пусть G — **помеченный граф**, то есть неориентированный граф, имеющий конечное число вершин, все его вершины перенумерованы, и каждой вершине поставлен в соответствие ее номер. Вместо «вершина с номером i» мы будем говорить «вершина i».

Определение 9. Матрицей смежности *графа G с n вершинами называется матрица размерности $n \times n$ с элементами A_{ij}, где $A_{ij} = k$, если $\{i, j\}$ — ребро кратности k графа G, и $A_{ij} = 0$, если вершины i и j не смежны.*

Рассмотреть пример?

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k.*

Доказательство.

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k.*

Доказательство. Индукция по k.

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k.*

Доказательство. Индукция по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно.

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k.*

Доказательство. Индукция по k. Пусть оно верно для любых натуральных чисел, меньших k, в частности, для $k - 1$. Положим $C = A^{k-1}$. Тогда

$$B_{ij} = \sum_{s=1}^{n} C_{is} \cdot A_{sj}.$$

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k.*

Доказательство. $B_{ij} = \sum_{s=1}^{n} C_{is} \cdot A_{sj}$.

Рассмотрим произвольное ненулевое слагаемое $C_{is} \cdot A_{sj}$. По предположению индукции C_{is} равно количеству (i, s)-**маршрутов** длины $n - 1$. Поскольку число $C_{is} \cdot A_{sj}$ отлично от 0, то вершина s соединена A_{sj} ребрами с вершиной j. Значит, $C_{is} \cdot A_{sj}$ равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k с окончанием вида s, $\{s, j\}$, j.

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i,j)-**маршрутов** длины k.*

Доказательство. $B_{ij} = \sum_{s=1}^{n} C_{is} \cdot A_{sj}$.

$C_{is} \cdot A_{sj}$ равно количеству (i,j)-**маршрутов** длины k с окончанием вида $s,\ \{s,j\},\ j$.

Но всякий **маршрут**, оканчивающийся в j, в качестве предпоследней вершины имеет вершину s, соединенную ребром с j, а вершина s соединена ребром с вершиной j тогда и только тогда, когда $A[s,j] > 0$.

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть* A *—* ***матрица смежности*** *графа* G *с* n *вершинами, и* $B = A^k$*. Тогда* b_{ij} *равно количеству* (i, j)*-****маршрутов*** *длины* k*.*

Доказательство. $B_{ij} = \sum_{s=1}^{n} C_{is} \cdot A_{sj}$.

$C_{is} \cdot A_{sj}$ равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k с окончанием вида s, $\{s, j\}$, j.

Но всякий **маршрут**, оканчивающийся в j, в качестве предпоследней вершины имеет вершину s, соединенную ребром с j, а вершина s соединена ребром с вершиной j тогда и только тогда, когда $A[s, j] > 0$.

Следовательно, b_{ij} равно количеству всех (i, j)-**маршрутов** длины k. Теорема доказана.

III.2. Теорема о количестве маршрутов между вершинами

Теорема 4. *Пусть A — **матрица смежности** графа G с n вершинами, и $B = A^k$. Тогда b_{ij} равно количеству (i, j)-**маршрутов** длины k.*

Эта теорема дает способ нахождения (i, j)-маршрута (если такой **маршрут** есть) по **матрице смежности**. Он сводится к тому, что матрица A возводится в степень до тех пор, пока элемент в i-той строке и j-том столбце не станет ненулевым. Пусть эта степень равна k. В i-той строке матрицы A^{k-1} находим такой ненулевой элемент X_{is}, что $X_{is} \cdot A_{sj}$ отлично от нуля. Тогда s — предпоследняя вершина искомого маршрута. Повторением этого процесса (с учетом того, что матрицы A^m уже найдены) получаем весь **маршрут**.

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. *Неориентированные графы G и H с конечным числом вершин изоморфны тогда и только тогда, когда* ***матрицы смежности*** *$A(G)$ и $A(H)$ этих графов связаны соотношением $A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, где T — подстановочная матрица, то есть матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой имеется ровно один ненулевой элемент, равный 1.*

Фу-у, как «много букав»...

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. *$G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, где T — подстановочная матрица.*

Другое дело!

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. *$G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, где T — подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть графы G и H изоморфны, φ — изоморфизм графа G на граф H, в частности $\{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H)$.

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. $G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, *где* T *— подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H, \quad \varphi : G \mapsto H,$

$$\{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H).$$

Матрицу T определим формулой для её коэффициентов:
$$t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. $G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, *где* T *— подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H$, $\quad \varphi : G \mapsto H$,

$$\{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H), \quad t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$$

$$a_{ij}^G = 1 \iff$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. $G \simeq H \;\Leftrightarrow\; A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, *где* T *— подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H$, $\quad \varphi : G \mapsto H$,

$\{i, j\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H), \quad t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$

$$a_{ij}^G = 1 \;\Leftrightarrow\; \{i, j\} \in E(G) \;\Leftrightarrow$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. *$G \simeq H \ \Leftrightarrow \ A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, где T — подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H$, $\quad \varphi : G \mapsto H$,

$$\{i, j\} \in E(G) \ \Leftrightarrow \ \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H), \quad t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$$

$$a_{ij}^G = 1 \ \Leftrightarrow \ \{i, j\} \in E(G) \ \Leftrightarrow \ \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H) \ \Leftrightarrow$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. $G \simeq H \;\Leftrightarrow\; A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, *где* T *— подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H, \quad \varphi : G \mapsto H,$

$\{i, j\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H), \quad t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$

$$a_{ij}^G = 1 \;\Leftrightarrow\; \{i, j\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H) \;\Leftrightarrow\; a_{i^\varphi, j^\varphi}^H = 1.$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. $G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, *где* T *— подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H$, $\varphi : G \mapsto H$,

$\{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H)$, $t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$

$$a_{ij}^G = 1 \iff \{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H) \iff a_{i^\varphi, j^\varphi}^H = 1.$$

Значит,

$$a_{ij}^G = a_{i^\varphi, j^\varphi}^H =$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. $G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, *где* T *— подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H, \quad \varphi : G \mapsto H$,

$\{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H), \quad t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$

$$a_{ij}^G = 1 \iff \{i, j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H) \iff a_{i^\varphi, j^\varphi}^H = 1.$$

Значит,

$$a_{ij}^G = a_{i^\varphi, j^\varphi}^H = t_{i^\varphi, i} a_{i^\varphi, j^\varphi}^H t_{j^\varphi, j} =$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. *$G \simeq H \;\Leftrightarrow\; A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, где T — подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H$, $\quad \varphi : G \mapsto H$,

$\{i, j\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H)$, $\quad t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$

$$a^G_{ij} = 1 \;\Leftrightarrow\; \{i, j\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H) \;\Leftrightarrow\; a^H_{i^\varphi, j^\varphi} = 1.$$

Значит,

$$a^G_{ij} = a^H_{i^\varphi, j^\varphi} = t_{i^\varphi, i} a^H_{i^\varphi, j^\varphi} t_{j^\varphi, j} = \sum_p \sum_q t_{pi} a^H_{pq} t_{qj}.$$

III.3. Критерий изоморфности неориентированных графов

Теорема 5. *$G \simeq H \iff A(G) = T^t \cdot A(H) \cdot T$, где T — подстановочная матрица.*

Доказательство. Пусть $G \simeq H$, $\varphi : G \mapsto H$,
$\{i,j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H)$, $t_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta^\varphi = \alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta^\varphi \neq \alpha. \end{cases}$

$$a_{ij}^G = 1 \iff \{i,j\} \in E(G) \iff \{i^\varphi, j^\varphi\} \in E(H) \iff a_{i^\varphi, j^\varphi}^H = 1.$$

Значит,

$$a_{ij}^G = a_{i^\varphi, j^\varphi}^H = t_{i^\varphi, i} a_{i^\varphi, j^\varphi}^H t_{j^\varphi, j} = \sum_p \sum_q t_{pi} a_{pq}^H t_{qj}.$$

Теорема доказана.

III.4. Применение теоремы об изоморфности алгебры матриц и алгебры линейных операторов

Для квадратных матриц имеется достаточно развитая теория. Она тесно связана с теорией **линейных операторов** с помощью, в частности, **теоремы об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц**.

III.4. Применение теоремы об изоморфности алгебры матриц и алгебры линейных операторов

Для квадратных матриц имеется достаточно развитая теория. Она тесно связана с теорией **линейных операторов** с помощью, в частности, **теоремы об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц**.

Например, понятие собственного значения линейного оператора оказывается полезным и для графов. **Характеристическим полиномом** неориентированного графа G с конечным числом вершин называется **характеристический полином** **матрицы смежности** графа G.

III.5. Определение регулярного графа

Определение 10. *Неориентированный граф без петель и кратных ребер, имеющий конечное количество вершин, называется* **регулярным** *или* **однородным***, если* ***валентности*** *всех его вершин равны.* ***Валентность*** *вершин регулярного графа называется* **валентностью регулярного графа***.*

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *Пусть G — **регулярный** граф **валентности** d. Тогда справедливы следующие утверждения:*
*1) Столбец, все коэффициенты которого равны 1, является **собственным вектором матрицы смежности** графа G. В частности, число d является корнем **характеристического полинома** графа G.*
*2) Модуль любого корня **характеристического многочлена** графа G не превосходит d.*

Доказательство.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *1) Столбец, все коэффициенты которого равны 1, является* ***собственным вектором матрицы смежности*** *графа G. В частности, число d является корнем* ***характеристического полинома*** *графа G.*

Доказательство. Пусть u — столбец, все коэффициенты которого равны 1, A — матрица смежности графа G. Поскольку в каждой строке матрицы A ровно d единиц, то $A \cdot u = d \cdot u$. Пункт 1 доказан.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ, и j — такой номер, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеем $|x_j| \geq |x_i|$, то есть x_j — максимальный по модулю элемент столбца $\mathbf{x}$.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i = \lambda x_j$.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ji}x_i = \lambda x_j$.

С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ji}x_i = \sum\limits_{A_{js_t}=1} x_{s_t}$ — сумма всех тех координат x_s столбца x по всем таким s, для которых $A_{js} = 1$.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ji}x_i = \lambda x_j$.

С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ji}x_i = \sum\limits_{A_{js_t}=1} x_{s_t}$ — сумма всех тех координат x_s столбца x по всем таким s, для которых $A_{js} = 1$.

Таких номеров s ровно d штук: $\sum\limits_{A_{js_t}=1} x_{s_t} = \sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t}$.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| =$$

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda x_j| =$$

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda x_j| = \left| \sum_{t=1}^{d} x_{s_t} \right| \leq$$

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda x_j| = \left|\sum_{t=1}^{d} x_{s_t}\right| \leq \sum_{t=1}^{d} |x_{s_t}| \leq$$

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda x_j| = \left|\sum_{t=1}^{d} x_{s_t}\right| \leq \sum_{t=1}^{d} |x_{s_t}| \leq d \cdot |x_j|.$$

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda x_j| = \left| \sum_{t=1}^{d} x_{s_t} \right| \leq \sum_{t=1}^{d} |x_{s_t}| \leq d \cdot |x_j| \, .$$

В силу максимальности $|x_j|$ и того факта, что собственный вектор, по определению, не нулевой, имеем $|x_j| \neq 0$.

III.6. Теорема о корнях полинома регулярного графа

Теорема 6. *2) Модуль любого корня* ***характеристического многочлена*** *графа G не превосходит d.*

Доказательство. Тогда, сравнивая j-ый элемент столбцов в левой и правой части равенства $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, получаем $\sum\limits_{t=1}^{d} x_{s_t} = \lambda x_j$.

Значит, в силу максимальности $|x_j|$, получаем

$$|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda x_j| = \left| \sum_{t=1}^{d} x_{s_t} \right| \leq \sum_{t=1}^{d} |x_{s_t}| \leq d \cdot |x_j|.$$

В силу максимальности $|x_j|$ и того факта, что собственный вектор, по определению, не нулевой, имеем $|x_j| \neq 0$.

Поэтому из полученного неравенства $|\lambda| \cdot |x_j| \leq d \cdot |x_j|$ вытекает требуемое неравенство $|\lambda| \leq d$. Теорема доказана.

III.7. Приведенная матрица смежности

Пусть G — двудольный граф с долями X,Y. Пометим вершины доли X цифрами $1, 2, \ldots, k$ а вершины доли Y — символами $y_1, y_2, \ldots, y_s$. **Приведенной матрицей смежности** называется матрица с элементами M_{ij}, где $M_{ij} = 1$, если вершины i и y_j смежны, и $M_{ij} = 0$ в противном случае.

III.7. Приведенная матрица смежности

Пусть G — двудольный граф с долями X,Y. Пометим вершины доли X цифрами $1, 2, \ldots, k$ а вершины доли Y — символами $y_1, y_2, \ldots, y_s$. **Приведенной матрицей смежности** называется матрица с элементами M_{ij}, где $M_{ij} = 1$, если вершины i и y_j смежны, и $M_{ij} = 0$ в противном случае.

III.7. Приведенная матрица смежности

Пусть G — двудольный граф с долями X,Y. Пометим вершины доли X цифрами $1, 2, \ldots, k$ а вершины доли Y — символами $y_1, y_2, \ldots, y_s$. **Приведенной матрицей смежности** называется матрица с элементами M_{ij}, где $M_{ij} = 1$, если вершины i и y_j смежны, и $M_{ij} = 0$ в противном случае.

Вершины такого графа G занумеруем следующим образом: у вершин из X сохраним их прежний номер, а вершине y_j из Y припишем номер $k + j$. Нетрудно увидеть, что приведенная матрица смежности является фрагментом матрицы смежности графа G, это подматрица, построенная на строках $1, 2, \ldots, k$, и столбцах $k + 1, \ldots, k + s$, при этом все остальные элементы матрицы смежности — нулевые.

III.8. Матрица инцидентности

Определение 11. *Пусть G — помеченный граф с n вершинами и k ребрами $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$.* **Матрицей инцидентности** *графа G называется матрица I размерности $n \times k$, коэффициенты которой определяются правилом: $I_{ij} = 1$ если вершина i является концом ребра e_j, в остальных случаях $I_{ij} = 0$.*

Рассмотреть пример?

III.9. Матрица Кирхгофа

Пусть G — произвольный граф. **Матрицей Кирхгофа** графа G называется матрица B_{ij} размерности $n \times n$, где

$$B_{ij} = \begin{cases} -A_{ij} & \text{при } i \neq j, \\ \text{валентность вершины } i & \text{при } i = j. \end{cases}$$

III.9. Матрица Кирхгофа

Пусть G — произвольный граф. **Матрицей Кирхгофа** графа G называется матрица B_{ij} размерности $n \times n$, где

$$B_{ij} = \begin{cases} -A_{ij} & \text{при } i \neq j, \\ \text{валентность вершины } i & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Рассмотреть пример?

III.9. Матрица Кирхгофа

Пусть G — произвольный граф. **Матрицей Кирхгофа** графа G называется матрица B_{ij} размерности $n \times n$, где

$$B_{ij} = \begin{cases} -A_{ij} & \text{при } i \neq j, \\ \text{валентность вершины } i & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Теорема 7 (о сумме элементов строки матрицы Кирхгофа). *Сумма элементов любой строки матрицы Кирхгофа равна сумме элементов любого столбца этой матрицы и равна 0.*

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (**об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа**). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство.

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство. Пусть матрица X имеет n строк и столбцов. Сумма всех строк матрицы X является нулевой строкой, поэтому матрица X — вырожденная. Значит, ее ранг не больше $n-1$. Если он меньше $n-1$, то алгебраическое дополнение к любому элементу матрицы X равно 0, и заключение теоремы выполнено.

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство. Осталось рассмотреть случай, когда ранг матрицы X равен $n-1$. Очевидно, достаточно доказать, что все алгебраические дополнения к элементам одной строки равны друг другу.

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (**об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа**). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство. Итак, пусть Y_{ij} — алгебраические дополнения к элементам X_{ij}. Тогда

$$0 = \det(X) =$$

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство. Итак, пусть Y_{ij} — алгебраические дополнения к элементам X_{ij}. Тогда

$$0 = \det(X) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot Y_{ij}.$$

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство. Итак, пусть Y_{ij} — алгебраические дополнения к элементам X_{ij}. Тогда

$$0 = \det(X) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot Y_{ij}.$$

Рассмотрим систему уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot y_j = 0.$

III.10. Теорема об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа

Теорема 8 (об алгебраических дополнениях к матрице Кирхгофа). *Если сумма элементов как любой строки, так и любого столбца квадратной матрицы X — нулевые, то алгебраические дополнения к любым двум элементам матрицы X равны между собой.*

Доказательство.

$$0 = \det(X) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot Y_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot y_j = 0.$$

Ранг матрицы коэффициентов этой системы равен $n-1$, значит пространство ее решений — одномерное. Очевидно, что базисом этого пространства является решение $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (1, 1, \ldots, 1)$ (см. свойство матрицы X в условии теоремы). Значит, $Y_{i1} = \ldots = Y_{in}$. Теорема доказана.

IV. Ориентированные графы без кратных дуг

В этом разделе под ориентированным графом понимается ориентированный граф без кратных дуг.

IV. Ориентированные графы без кратных дуг

Определение матрицы смежности для ориентированного графа изменяется естественным образом: $A_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда (i, j) является дугой графа G, и $A_{ij} = 0$ в противном случае. **Теорема о количестве маршрутов** и **критерий изоморфности графов** переносится на ориентированные графы без изменений. Определение матрицы **инцидентности графа** G с $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ меняется следующим образом:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ является началом дуги } e_j \\ -1, & \text{если } i \text{ является концом дуги } e_j \\ 0, & \text{если } i \text{ не инцидентна дуге } e_j \end{cases}$$

IV. Ориентированные графы без кратных дуг

Определение матрицы смежности для ориентированного графа изменяется естественным образом: $A_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда (i, j) является дугой графа G, и $A_{ij} = 0$ в противном случае. **Теорема о количестве маршрутов** и **критерий изоморфности графов** переносится на ориентированные графы без изменений. Определение **матрицы инцидентности** графа G с $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ меняется следующим образом:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ является началом дуги } e_j \\ -1, & \text{если } i \text{ является концом дуги } e_j \\ 0, & \text{если } i \text{ не инцидентна дуге } e_j \end{cases}$$

Ориентированный граф G^o, полученный из графа G приданием ребрам некоторой (произвольно выбранной) ориентации, называется **ориентацией** графа G.

IV.1. Теорема о связи матрицы Кирхгофа с матрицей инцидентности

Теорема 9. *Пусть B — **матрица Кирхгофа** графа G, I — **матрица инцидентности** его ориентации G^o. Тогда $B = I \cdot I^t$, где I^t — матрица, транспонированная к матрице I.*

Доказательство.

IV.1. Теорема о связи матрицы Кирхгофа с матрицей инцидентности

Теорема 9. *Пусть B — **матрица Кирхгофа** графа G, I — **матрица инцидентности** его ориентации G^o. Тогда $B = I \cdot I^t$, где I^t — матрица, транспонированная к матрице I.*

Доказательство. Обозначим $I \cdot I^t$ через X. Пусть $i \neq j$. Тогда в выражении

$$X_{ij} = \sum_{s=1}^{k} I_{is} \cdot I_{js}$$

только одно слагаемое может быть отлично от нуля — слагаемое, соответствующее дуге (i, j) или (j, i). При этом это слагаемое равно -1, следовательно $X_{ij} = -1$. Если же ни (i, j), ни (j, i) не является дугой графа G^o, то все слагаемые нулевые, поэтому $X_{ij} = 0$.

IV.1. Теорема о связи матрицы Кирхгофа с матрицей инцидентности

Теорема 9. *Пусть* B — ***матрица Кирхгофа*** *графа* G, I — ***матрица инцидентности*** *его ориентации* G^o. *Тогда* $B = I \cdot I^t$, *где* I^t — *матрица, транспонированная к матрице* I.

Доказательство. Остается заметить, что $I_{is} \cdot I_{is} = 1$ тогда и только тогда, когда либо (i, s), либо (s, i) является дугой орграфа G^o, то есть $\{i, s\}$ является ребром графа G. Значит, X_{ii} равно количеству ребер графа G с концом i, то есть X_{ii} — валентность вершины i.

Таким образом, по **определению матрицы Кирхгофа**, $B = X$, что и требовалось доказать.

V. Планарные графы

Будем рассматривать только неориентированные графы без петель и кратных ребер.

V. Планарные графы

Будем рассматривать только неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Плоской укладкой графа Γ называется такое его изображение на плоскости, в котором линии, изображающие ребра графа, не пересекаются друг с другом (предполагается, что изображение вершины не принадлежит линии, изображающей ребро).

V. Планарные графы

Будем рассматривать только неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Плоской укладкой графа Γ называется такое его изображение на плоскости, в котором линии, изображающие ребра графа, не пересекаются друг с другом (предполагается, что изображение вершины не принадлежит линии, изображающей ребро).

Граф, допускающий плоскую укладку, называется **планарным**.

Рассмотреть пример?

V. Планарные графы

Определение 12. *Говорят, что неориентированный граф* Γ' *получен из графа* Γ **подразбиением** *ребра* $\{a, b\} \in E(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда* $V(\Gamma') = V(\Gamma) \cup \{c\}$, *где* $c \notin V(\Gamma)$, *и* $E(\Gamma') = \Big(E(\Gamma) \cup \big\{\{a, c\}, \{c, b\}\big\}\Big) - \{\{a, b\}\}$.

V. Планарные графы

Определение 12. *Говорят, что неориентированный граф* Γ' *получен из графа* Γ **подразбиением** *ребра* $\{a,b\} \in E(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда* $V(\Gamma') = V(\Gamma) \cup \{c\}$, *где* $c \notin V(\Gamma)$, *и* $E(\Gamma') = \Big(E(\Gamma) \cup \big\{\{a,c\},\{c,b\}\big\}\Big) - \{\{a,b\}\}$.

Иными словами, подразбиение ребра заключается в том, что ребро $\{a,b\}$ графа Γ «разбивается» точкой c на два ребра $\{a,c\}$ и $\{c,b\}$.

V. Планарные графы

Определение 12. *Говорят, что неориентированный граф* Γ' *получен из графа* Γ **подразбиением** *ребра* $\{a, b\} \in E(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда* $V(\Gamma') = V(\Gamma) \cup \{c\}$, *где* $c \notin V(\Gamma)$, *и* $E(\Gamma') = \big(E(\Gamma) \cup \big\{\{a, c\}, \{c, b\}\big\}\big) - \{\{a, b\}\}$.

Определение 13. *Графы* G *и* H *называются* **гомеоморфными** *тогда и только тогда, когда они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.*

V. Планарные графы

Через K_n будем обозначать произвольный **полный граф** на n вершинах, то есть граф Γ с $|V(\Gamma)| = n$ и

$$E(\Gamma) = \big(V(\Gamma) \times V(\Gamma)\big) - \Big\{(v, v) \,\Big|\, v \in V(\Gamma)\Big\}.$$

Через $K_{n,m}$ будем обозначать **полный двудольный граф**, то есть граф с $V(\Gamma) = A \cup B$, где $\begin{cases} A \cap B = \emptyset, \\ |A| = n, \\ |B| = m \end{cases}$ и

$$E(\Gamma) = \big((A \times B) \cup (B \times A)\big) - \Big\{(v, v) \,\Big|\, v \in V(\Gamma)\Big\}.$$

V.1. Критерий Понтрягина-Куратовского

Теорема 10 (критерий Понтрягина-Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных*[1] K_5 *и* $K_{3,3}$.

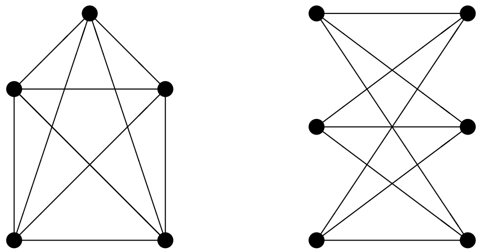

Рис. 1. Графы K_5 и $K_{3,3}$.

[1] См.стр.121.

V.2. Формула Эйлера

Теорема 11 (Формула Эйлера, 1758). *Если n — число вершин, m — число ребер, f — число граней плоского графа, то $n - m + f = 2$.*

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?