Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет-УПИ

Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников, Н. В. Мельникова

Элементы аналитической геометрии

Раздел электронного учебника для сопровождения лекции

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург

2009

I. Уравнения линии и поверхности

Линия и поверхность — это множества точек.

I. Уравнения линии и поверхности

Линия и поверхность — это множества точек. **Как мы знаем**, множество задается либо *списком элементов*, либо с помощью *характеристического свойства*. Линии и поверхности чаще всего задаются с помощью характеристического свойства, например, «прямая, проходящая через такие-то точки», «плоскость, содержащая такую-то точку и перпендикулярная такой-то прямой» и т.п. Координатные методы позволяют существенно увеличить возможности для «стандартного задания» линий и поверхностей, что, в конечном итоге, привело к обогащению «арсенала» вычислительного аппарата геометрии.

I. Уравнения линии и поверхности

Как можно задать линию на плоскости, используя систему координат? Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy и линия L. Нам надо понять, как можно задать линию L, используя эту систему координат.

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти?

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

В каком виде представим ответ?

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

В каком виде представим ответ? Линия L — это *множество точек*. Как мы отметили выше, надо научиться записывать характеристическое свойство точек линии L с помощью координат этих точек. Следовательно, ответ запишем, указывая какие-то «особенности» координат точек линии L.

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

В каком виде представим ответ? Ответ запишем, указывая какие-то «особенности» координат точек линии L.

Введем переменные.

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

В каком виде представим ответ? Ответ запишем, указывая какие-то «особенности» координат точек линии L.

Введем переменные. Обозначим координаты выбранной произвольной точки линии L буквами, например, $(x; y)$.

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

В каком виде представим ответ? Ответ запишем, указывая какие-то «особенности» координат точек линии L.

Введем переменные. Обозначим координаты выбранной произвольной точки линии L буквами, например, $(x; y)$.

Теперь надо характеристическое свойство точек линии L записать «математическим языком». **Основным языком современной математики** является язык равенств, неравенств и теоретико-множественных включений $\in, \subseteq$. Поэтому совершенно естественно, что обычно характеристическое свойство точек линии записывают в виде уравнений.

I. Уравнения линии и поверхности

Разумеется, воспользуемся **стратегией составления уравнений**.

Что надо найти? Способ задания линии L.

В каком виде представим ответ? Ответ запишем, указывая какие-то «особенности» координат точек линии L.

Введем переменные. Обозначим координаты выбранной произвольной точки линии L буквами, например, $(x; y)$.

Кстати, четвертым пунктом в **стратегии составления уравнений** является *нахождение системы уравнений*.

II. Определение уравнения линии

Определение 1. *Уравнение* $F(x, y) = 0$ *называется* **уравнением линии** L *на плоскости* xOy *тогда и только тогда, когда высказывания «точка* M *с координатами* (x, y) *принадлежит линии* L*» эквивалентно высказыванию «*$F(x, y) = 0$*».*

II. Определение уравнения линии

Определение 1. *Уравнение* $F(x, y) = 0$ *называется* **уравнением линии** L *на плоскости* xOy *тогда и только тогда, когда высказывания «точка* M *с координатами* (x, y) *принадлежит линии* L*» эквивалентно высказыванию «*$F(x, y) = 0$*».*

Иными словами, $\varphi(u, v) = 0$ является уравнением линии L тогда и только тогда, когда

во-первых, координаты (u, v) любой точки линии L удовлетворяют уравнению $\varphi(u, v) = 0$;

во-вторых, любая точка плоскости, координаты (u, v) которой удовлетворяют уравнению $\varphi(u, v) = 0$, принадлежит линии L.

II. Определение уравнения линии

Определение 1. *Уравнение* $F(x, y) = 0$ *называется* **уравнением линии** L *на плоскости* xOy *тогда и только тогда, когда высказывания «точка* M *с координатами* (x, y) *принадлежит линии* L*» эквивалентно высказыванию «*$F(x, y) = 0$*».*

Иными словами, $\varphi(u, v) = 0$ является уравнением линии L тогда и только тогда, когда

во-первых, координаты (u, v) любой точки линии L удовлетворяют уравнению $\varphi(u, v) = 0$;

во-вторых, любая точка плоскости, координаты (u, v) которой удовлетворяют уравнению $\varphi(u, v) = 0$, принадлежит линии L.

Аналогично определяется уравнение поверхности в пространстве. Линия в пространстве задается **системой уравнений**.

II. Определение уравнения линии

Определение 1. *Уравнение* $F(x, y) = 0$ *называется* **уравнением линии** L *на плоскости* xOy *тогда и только тогда, когда высказывания «точка* M *с координатами* (x, y) *принадлежит линии* L*» эквивалентно высказыванию «*$F(x, y) = 0$*».*

В соответствии со **стратегией составления уравнений** для того, чтобы составить уравнение линии L, надо,

во-первых, выбрать *произвольную точку* M этой линии и обозначить соответствующими символами ее координатами (обычно для декартовой системы координат это (x, y), для полярной системы координат — (ρ, φ));

во-вторых, найти уравнение, связывающее эти координаты точки M.

II. Определение уравнения линии

Определение 1. *Уравнение* $F(x,y)=0$ *называется* **уравнением линии** L *на плоскости* xOy *тогда и только тогда, когда высказывания «точка* M *с координатами* (x,y) *принадлежит линии* L*» эквивалентно высказыванию «*$F(x,y)=0$*».*

Напомним, что есть единственный способ получения уравнения:

для получения уравнения необходимо некоторую величину вычислить различными способами.

III. Уравнения прямых и плоскостей

Стандартный вид уравнений и систем уравнений для прямых на плоскости xOy и в пространстве и плоскостей в пространстве приведен в **таблице 1**, **таблице 3**, **таблице 2**.

Вывод соответствующих уравнений можно без труда провести с помощью **стратегии составления уравнений**. Поэтому вывод некоторых из формул **таблицы 1** мы приведем в виде решения примеров.

Рассмотреть примеры вывода формул?

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости			
Плоскость в пространстве			****
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

<table>
<tr><td></td><td>Общие уравнения</td><td>Параметрические уравнения</td><td>Канонические уравнения</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Прямая в плоскости</td><td>$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Плоскость в пространстве</td><td></td><td></td><td rowspan="2">****</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Прямая в пространстве</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$		
	$Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$		
Плоскость в пространстве			****
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$	
	$Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$		
Плоскость в пространстве			****
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$	
	$Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	
Плоскость в пространстве			****
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
	$Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	
Плоскость в пространстве			****
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

<table>
<tr><th></th><th>Общие уравнения</th><th>Параметрические уравнения</th><th>Канонические уравнения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Прямая в плоскости</td><td>$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td>$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$</td><td rowspan="2">$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}$</td></tr>
<tr><td>$Ax + By + C = 0$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
$C = -Ax_0 - By_0$</td><td>$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Плоскость в пространстве</td><td>$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td></td><td rowspan="2">****</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Прямая в пространстве</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$		****
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

<table>
<tr><td></td><td>Общие уравнения</td><td>Параметрические уравнения</td><td>Канонические уравнения</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Прямая в плоскости</td><td>$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td>$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$</td><td rowspan="2">$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$</td></tr>
<tr><td>$Ax + By + C = 0$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
$C = -Ax_0 - By_0$</td><td>$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Плоскость в пространстве</td><td>$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td>$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\vec{\mathbf{l}}_1 + t_2\vec{\mathbf{l}}_2$</td><td rowspan="2">****</td></tr>
<tr><td>$Ax + By + Cz + D = 0$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) +$
$+ C(z - z_0) = 0$
$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Прямая в пространстве</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
	$Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	
Плоскость в пространстве	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\vec{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\vec{\mathbf{l}}_2$	****
	$Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	
Прямая в пространстве			

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\vec{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\vec{\mathbf{l}}_2$ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	****
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую		

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1 \vec{\mathbf{l}}_1 + t_2 \vec{\mathbf{l}}_2$ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	****
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$	

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\vec{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\vec{\mathbf{l}}_2$ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	****
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} = \dfrac{z - z_0}{w}$

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\overrightarrow{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\overrightarrow{\mathbf{l}}_2$ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	****
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} =$ $= \dfrac{z - z_0}{w}$
$\overrightarrow{OM_0} = x_0\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_0\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ или $\overrightarrow{OM_0} = x_0\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_0\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_0\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — радиус-вектор фиксированной точки прямой или плоскости.			

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$	$\dfrac{x-x_0}{u} = \dfrac{y-y_0}{v}$
	$Ax + By + C = 0$ $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	
Плоскость в пространстве	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\overrightarrow{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\overrightarrow{\mathbf{l}}_2$	****
	$Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x-x_0) + B(y-y_0) +$ $+ C(z-z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$	$\dfrac{x-x_0}{u} = \dfrac{y-y_0}{v} =$ $= \dfrac{z-z_0}{w}$
$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ или $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой или плоскости,			

Таблица 1

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0)+$ $+C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\overrightarrow{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\overrightarrow{\mathbf{l}}_2$ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	****
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} =$ $= \dfrac{z - z_0}{w}$
$\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ или $\overrightarrow{\mathbf{l}} = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + w\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ — направляющий вектор прямой.			

Таблица 1

Плоскость и прямая

<table>
<tr><th></th><th>Общие уравнения</th><th>Параметрические уравнения</th><th>Канонические уравнения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Прямая в плоскости</td><td>$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td>$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$</td><td rowspan="2">$\dfrac{x-x_0}{u} = \dfrac{y-y_0}{v}$</td></tr>
<tr><td>$Ax + By + C = 0$
$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$
$C = -Ax_0 - By_0$</td><td>$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Плоскость в пространстве</td><td>$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$</td><td>$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\vec{\mathbf{l}}_1 + t_2\vec{\mathbf{l}}_2$</td><td rowspan="2">****</td></tr>
<tr><td>$Ax + By + Cz + D = 0$
$A(x-x_0) + B(y-y_0)+$
$+C(z-z_0) = 0$
$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$</td><td>$\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Прямая в пространстве</td><td>$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
— пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую</td><td>$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$
$\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$</td><td>$\dfrac{x-x_0}{u} = \dfrac{y-y_0}{v} =$
$= \dfrac{z-z_0}{w}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\vec{\mathbf{l}}_i = u_i\vec{\mathbf{i}} + v_i\vec{\mathbf{j}} + w_i\vec{\mathbf{k}}$ — два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, $i \in \{1, 2\}$.</td></tr>
</table>

Плоскость и прямая

	Общие уравнения	Параметрические уравнения	Канонические уравнения
Прямая в плоскости	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + C = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $C = -Ax_0 - By_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v}$
Плоскость в пространстве	$(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1\,\vec{\mathbf{l}}_1 + t_2\,\vec{\mathbf{l}}_2$ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t_1 + u_2t_2, \\ y = y_0 + v_1t_1 + v_2t_2, \\ z = z_0 + w_1t_1 + w_2t_2 \end{cases}$	****
Прямая в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ — пересечение двух плоскостей, содержащих эту прямую	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{\mathbf{l}}$ $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = z_0 + wt \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} =$ $= \dfrac{z - z_0}{w}$

$\vec{\mathbf{n}} = A\,\vec{\mathbf{i}} + B\,\vec{\mathbf{j}}$ или $\vec{\mathbf{n}} = A\,\vec{\mathbf{i}} + B\,\vec{\mathbf{j}} + C\,\vec{\mathbf{k}}$ — нормальный вектор к *прямой в плоскости* или к *плоскости — в пространстве.*

Чтобы написать уравнения, необходимо найти

Таблица 2

Для прямой на плоскости	Для прямой в пространстве	Для плоскости в пространстве
координаты *точки на прямой* и координаты *нормального вектора* прямой (общее уравнение прямой на плоскости)	две различные плоскости, содержащие эту прямую (общие уравнения прямой в пространстве)	координаты *точки на плоскости* и координаты *нормального вектора* плоскости (общее уравнение плоскости)
координаты *точки на прямой* и координаты *ее направляющего вектора* (параметрические или канонические уравнения)	или координаты *точки на прямой* и координаты *ее направляющего вектора* (параметрические или канонические уравнения)	координаты *точки на плоскости* и *двух неколлинеарных векторов* $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$, параллельных плоскости (параметрические или канонические). $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \left[\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$

Рассмотреть примеры получения уравнений?

Рассмотреть примеры преобразования уравнений?

Расстояние от точки до прямой и плоскости

	Прямая на плоскости	Плоскость в пространстве	Прямая в пространстве
Уравнение	$Ax + By + C = 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{l}}$
Расстояние от точки M_1 с координатами (x_1, y_1) или (x_1, y_1, z_1)	$\dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$\dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$\dfrac{\left\lvert\left[\overrightarrow{\mathbf{l}}, \overrightarrow{M_0M_1}\right]\right\rvert}{\left\lvert\overrightarrow{\mathbf{l}}\right\rvert}$

Рассмотреть примеры нахождения угла?

Достаточно часто используются следующие типы уравнений:

Прямая на плоскости. (см.рис.1) 1) *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:* $y = kx + b$. Здесь $k = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Его можно применять только в случае, если прямая не параллельна оси Oy.

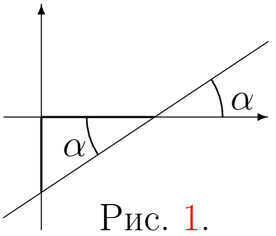

Рис. 1.

Достаточно часто используются следующие типы уравнений:

Прямая на плоскости. (см.рис.1) 1) *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:* $y = kx + b$. Здесь $k = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Его можно применять только в случае, если прямая не параллельна оси Oy.

2) *Уравнение прямой «отрезках»:* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Коэффициент k называется **угловым коэффициентом прямой**, $(a; 0)$ и $(0; b)$ — координаты точек пересечения прямой с осями координат.

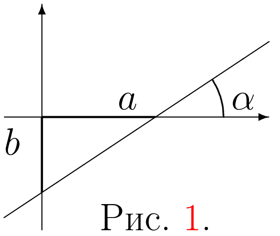

Рис. 1.

Достаточно часто используются следующие типы уравнений:

Прямая на плоскости. (см.рис.1) 1) *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:* $y = kx + b$. Здесь $k = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Его можно применять только в случае, если прямая не параллельна оси Oy.

2) *Уравнение прямой «отрезках»:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Коэффициент k называется **угловым коэффициентом прямой**, $(a; 0)$ и $(0; b)$ — координаты точек пересечения прямой с осями координат.

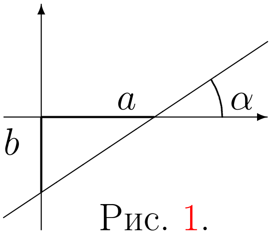

Рис. 1.

Плоскость. *Уравнение плоскости «отрезках»:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Здесь $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ — координаты точек пересечения плоскости с осями координат.

Спасибо

за


внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?