Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы матричной алгебры

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Определение матрицы, операции алгебры матриц

Научный аппарат перерабатывает только информацию, представленную в стандартном виде. Одним из требований к стандартному виду информации является его компактность. Как хорошо известно, при обработке информации бывает очень полезно «расчленить» ее на «блоки». Но для того, чтобы это привело к упрощению обработки, необходимо создать математический аппарат для «расчленения» на «блоки» и обработки этих «блоков».

В алгебре одним из наиболее популярных видов такого математического аппарата является теория матриц.

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

стоимость хранения (коп./сут.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	120	108	102
товар B	288	264	288
товар C	72	66	54
товар D	48	60	72

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

стоимость хранения (руб./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$0,05$	$0,045$	$0,0425$
товар B	$0,12$	$0,11$	$0,12$
товар C	$0,03$	$0,0275$	$0,0225$
товар D	$0,02$	$0,025$	$0,03$

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

стоимость хранения (руб./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$0,05$	$0,045$	$0,0425$
товар B	$0,12$	$0,11$	$0,12$
товар C	$0,03$	$0,0275$	$0,0225$
товар D	$0,02$	$0,025$	$0,03$

Что в этих таблицах можно представить как «математический объект»?

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

стоимость хранения (руб./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$0,05$	$0,045$	$0,0425$
товар B	$0,12$	$0,11$	$0,12$
товар C	$0,03$	$0,0275$	$0,0225$
товар D	$0,02$	$0,025$	$0,03$

Описание товара и склада явно к математике не относится.

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

стоимость хранения (руб./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$0,05$	$0,045$	$0,0425$
товар B	$0,12$	$0,11$	$0,12$
товар C	$0,03$	$0,0275$	$0,0225$
товар D	$0,02$	$0,025$	$0,03$

К математическим объектам можно отнести числа в таблице...

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	5	$4,5$	$4,25$
товар B	12	11	12
товар C	3	$2,75$	$2,25$
товар D	2	$2,5$	3

стоимость хранения (руб./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$0,05$	$0,045$	$0,0425$
товар B	$0,12$	$0,11$	$0,12$
товар C	$0,03$	$0,0275$	$0,0225$
товар D	$0,02$	$0,025$	$0,03$

К математическим объектам можно отнести числа в таблице...

Как-то неинтересно, неперспективно...

I.1. Определение матрицы

стоимость хранения (коп./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$\mathbf{5}$	$\mathbf{4,5}$	$\mathbf{4,25}$
товар B	$\mathbf{12}$	$\mathbf{11}$	$\mathbf{12}$
товар C	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2,75}$	$\mathbf{2,25}$
товар D	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2,5}$	$\mathbf{3}$

стоимость хранения (руб./час.)\склад	№ 1	№ 2	№ 3
товар A	$\mathbf{0,05}$	$\mathbf{0,045}$	$\mathbf{0,0425}$
товар B	$\mathbf{0,12}$	$\mathbf{0,11}$	$\mathbf{0,12}$
товар C	$\mathbf{0,03}$	$\mathbf{0,0275}$	$\mathbf{0,0225}$
товар D	$\mathbf{0,02}$	$\mathbf{0,025}$	$\mathbf{0,03}$

К математическим объектам можно отнести **таблицы**.

I.1. Определение матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 4,5 & 4,25 \\ 12 & 11 & 12 \\ 3 & 2,75 & 2,25 \\ 2 & 2,5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,045 & 0,0425 \\ 0,12 & 0,11 & 0,12 \\ 0,03 & 0,0275 & 0,0225 \\ 0,02 & 0,025 & 0,03 \end{pmatrix}$$

Обычно в математике такие таблицы заключают в круглые скобки или

I.1. Определение матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 4,5 & 4,25 \\ 12 & 11 & 12 \\ 3 & 2,75 & 2,25 \\ 2 & 2,5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & 4,5 & 4,25 \\ 12 & 11 & 12 \\ 3 & 2,75 & 2,25 \\ 2 & 2,5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,045 & 0,0425 \\ 0,12 & 0,11 & 0,12 \\ 0,03 & 0,0275 & 0,0225 \\ 0,02 & 0,025 & 0,03 \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0,05 & 0,045 & 0,0425 \\ 0,12 & 0,11 & 0,12 \\ 0,03 & 0,0275 & 0,0225 \\ 0,02 & 0,025 & 0,03 \end{bmatrix}$$

Обычно в математике такие таблицы заключают в круглые скобки или в квадратные скобки.

I.1. Определение матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 4,5 & 4,25 \\ 12 & 11 & 12 \\ 3 & 2,75 & 2,25 \\ 2 & 2,5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,045 & 0,0425 \\ 0,12 & 0,11 & 0,12 \\ 0,03 & 0,0275 & 0,0225 \\ 0,02 & 0,025 & 0,03 \end{pmatrix}$$

Мы будем использовать только круглые скобки.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Прежде чем подвергнуть это определение сокрушительной критике, отметим два факта. Во-первых, с практической точки зрения это «определение» является вполне удовлетворительным, так как в прикладных областях уровень требований к строгости определений основных понятий обычно ниже, чем в «чистой» математике.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Прежде чем подвергнуть это определение сокрушительной критике, отметим два факта. Во-первых, с практической точки зрения это «определение» является вполне удовлетворительным, так как в прикладных областях уровень требований к строгости определений основных понятий обычно ниже, чем в «чистой» математике.

Во-вторых, это «определение», как правило, даже предпочтительнее приведенного ниже строгого определения, так как таблицы чисел, как *форма представления информации* довольно часто встречаются «в обычной жизни».

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Прежде чем подвергнуть это определение сокрушительной критике, отметим два факта. Во-первых, с практической точки зрения это «определение» является вполне удовлетворительным, так как в прикладных областях уровень требований к строгости определений основных понятий обычно ниже, чем в «чистой» математике.

Во-вторых, это «определение», как правило, даже предпочтительнее приведенного ниже строгого определения, так как таблицы чисел, как *форма представления информации* довольно часто встречаются «в обычной жизни». Например, это список товаров с указанием цены и количества этого товара на складе (имеется в виду та часть таблицы, которая заполнена числами, а не текстом).

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Прежде чем подвергнуть это определение сокрушительной критике, отметим два факта. Во-первых, с практической точки зрения это «определение» является вполне удовлетворительным, так как в прикладных областях уровень требований к строгости определений основных понятий обычно ниже, чем в «чистой» математике.

Во-вторых, это «определение», как правило, даже предпочтительнее приведенного ниже строгого определения, так как таблицы чисел, как *форма представления информации* довольно часто встречаются «в обычной жизни». Например, справка о доходах часто представляет собой, по сути, таблицу из двух строк: в первой строке — номер месяца, во второй строке — указание суммы (в России — обычно в рублях или у.е.).

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Прежде чем подвергнуть это определение сокрушительной критике, отметим два факта. Во-первых, с практической точки зрения это «определение» является вполне удовлетворительным, так как в прикладных областях уровень требований к строгости определений основных понятий обычно ниже, чем в «чистой» математике.

Во-вторых, это «определение», как правило, даже предпочтительнее приведенного ниже строгого определения, так как таблицы чисел, как *форма представления информации* довольно часто встречаются «в обычной жизни». Например, результаты спортивных матчей в чемпионатах и других соревнований также часто оформляют в виде таблицы.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Прежде чем подвергнуть это определение сокрушительной критике, отметим два факта. Во-первых, с практической точки зрения это «определение» является вполне удовлетворительным, так как в прикладных областях уровень требований к строгости определений основных понятий обычно ниже, чем в «чистой» математике.

Во-вторых, это «определение», как правило, даже предпочтительнее приведенного ниже строгого определения, так как таблицы чисел, как *форма представления информации* довольно часто встречаются «в обычной жизни».

Отметим, что в матрицах, рассматриваемых в математике, не может быть «прочерков» в «клетках» таблицы.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Сформулируем строгое *математическое* определение матрицы. Во-первых, вам следует освоить *стратегию формирования понятия*.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Сформулируем строгое *математическое* определение матрицы. Во-первых, вам следует освоить *стратегию формирования понятия*.

Во-вторых, во многих случаях необходимо знать строгое определение понятия.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Сформулируем строгое *математическое* определение матрицы. Во-первых, вам следует освоить *стратегию формирования понятия*.

Во-вторых, во многих случаях необходимо знать строгое определение понятия.

В-третьих, для формирования навыков работы с понятийным аппаратом науки будет, видимо, полезна очередная демонстрация процесса формирования математически строгого определения.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Получение строгой формулировки начнем с обсуждения приведенного выше «определения» матрицы. Как нетрудно понять, на самом деле это «определение» не выдерживает критики. Во-первых, оно «отсекается» бритвой Оккама, так как понятие «таблица» не входит в систему собственно математических понятий, а в этом «определении» оно фактически играет роль неопределяемого понятия.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Получение строгой формулировки начнем с обсуждения приведенного выше «определения» матрицы. Как нетрудно понять, на самом деле это «определение» не выдерживает критики. Во-первых, оно «отсекается» бритвой Оккама, так как понятие «таблица» не входит в систему собственно математических понятий, а в этом «определении» оно фактически играет роль неопределяемого понятия.

Во-вторых, на самом деле далеко не всегда элементы матрицы являются числами.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Теперь попробуем сформулировать строгое определение матрицы, но прежде оговоримся, что (это потребуется во многих приложениях, некоторые из которых приведены ниже) элементы матрицы мы будем считать элементами некоторого **кольца** K.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

С чего начнем?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

С чего начнем?

Применим прием конкретизации.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Это некоторый «набор» чисел.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Это некоторый «набор» чисел.

К сожалению, слово «набор» ничуть не лучше (а даже хуже), чем термин «таблица».

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Давайте поставим вопрос так: зачем выписывать эти числа в таблицу, чем это удобнее других способов?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Давайте поставим вопрос так: зачем выписывать эти числа в таблицу, чем это удобнее других способов?

Для ответа на этот вопрос следует понять

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Давайте поставим вопрос так: зачем выписывать эти числа в таблицу, чем это удобнее других способов?

Для ответа на этот вопрос следует понять как используется такая запись.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Чему равен элемент в первой строке

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Чему равен элемент в первой строке

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Чему равен элемент в первой строке и втором столбце?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Чему равен элемент в первой строке и втором столбце?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{-1}} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Чему равен элемент в первой строке и втором столбце? Он равен (-1).

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{-1}} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Элемент в первой строке и втором столбце равен (-1).

Суть процесса заключалась в том, что мы задавали пару чисел — номер строки и номер столбца, и получали в ответ число.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{-1}} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Элемент в первой строке и втором столбце равен (-1).

Суть процесса заключалась в том, что мы задавали пару чисел — номер строки и номер столбца, и получали в ответ число. Как такая ситуация моделируется в математических терминах?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{-1}} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Элемент в первой строке и втором столбце равен (-1).

Суть процесса заключалась в том, что мы задавали пару чисел — номер строки и номер столбца, и получали в ответ число. Как такая ситуация моделируется в математических терминах?

В математике этой ситуации соответствует понятие **функция**.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Итак, что представляет собой, с точки зрения математики, таблица, допустим $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$?

Таким образом, эта таблица определяет *однозначное отображение*, то есть *функцию*. Понятие «**функция**» является стандартным понятием современной математики, поэтому естественным представляется свести понятие «матрица» к понятию «**функция**».

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Сформулируем определение.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется...*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется...*

Родовое понятие?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****,...*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция***,

Характеристические свойства?

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна...*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*,...*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция***, *область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, *область значений...*

Коэффициентами матрицы являются элементы **кольца**.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

Коэффициентами матрицы являются элементы **кольца**. Но в определении матрицы пока нет ни слова о **кольце**.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

Коэффициентами матрицы являются элементы **кольца**. Но в определении матрицы пока нет ни слова о **кольце**. Значит, надо определять не матрицу, а матрицу над кольцом.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

Коэффициентами матрицы являются элементы **кольца**. Но в определении матрицы пока нет ни слова о **кольце**. Значит, надо определять не матрицу, а матрицу над кольцом. Нам придется в определении на него ссылаться.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

Коэффициентами матрицы являются элементы **кольца**. Но в определении матрицы пока нет ни слова о **кольце**. Значит, надо определять не матрицу, а матрицу над кольцом. Нам придется в определении на него ссылаться.

Поэтому обозначим кольцо буквой,

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

Коэффициентами матрицы являются элементы **кольца**. Но в определении матрицы пока нет ни слова о **кольце**. Значит, надо определять не матрицу, а матрицу над кольцом. Нам придется в определении на него ссылаться.

Поэтому обозначим кольцо буквой, например, K.

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей над кольцом K *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений...*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Матрицей над кольцом K *называется* ***функция****, область определения которой равна* $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$*, область значений включается в* K*.*

I.1. Определение матрицы

Что такое матрица? Можно предложить следующий вариант определения: **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Цель 1. *Формализовать понятие «матрица» с помощью стандартных математических понятий.*

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Какова связь этой функции с таблицей?

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K, *то есть* $E(F) \subseteq K$. *При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы**, *а число* j *—* **номером столбца матрицы**. *При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами**.

Какова связь этой функции с таблицей?

Стандартные способы задания функции:

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K, *то есть* $E(F) \subseteq K$. *При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы**, *а число* j *—* **номером столбца матрицы**. *При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами**.

Какова связь этой функции с таблицей?

Стандартные способы задания функции:

формула,

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Какова связь этой функции с таблицей?

Стандартные способы задания функции:

формула,   график,

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K, *то есть* $E(F) \subseteq K$. *При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы**, *а число* j — **номером столбца матрицы**. *При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами**.

Какова связь этой функции с таблицей?

Стандартные способы задания функции:

формула, график, **таблица**.

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Например,

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	2	−1	2	0
2	1	3	0	5
3	2	1	1	10

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Например, $\begin{array}{c|cccc} i\backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 10 \end{array}$

У всех таких функций «нулевой» столбец и «нулевая» строки одинаковы.

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Например,

$i\backslash j$	1	2	3	4
1	2	-1	2	0
2	1	3	0	5
3	2	1	1	10

У всех таких функций «нулевой» столбец и «нулевая» строки одинаковы. Поэтому можно их не писать.

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Например,

$$\begin{array}{c|cccc} i\backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 10 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

У всех таких функций «нулевой» столбец и «нулевая» строки одинаковы. Поэтому можно их не писать.

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K, *то есть* $E(F) \subseteq K$. *При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы**, *а число* j — **номером столбца матрицы**. *При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами**.

Например,

$i\backslash j$	1	2	3	4
1	2	−1	2	0
2	1	3	0	5
3	2	1	1	10

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица как таблица — это «очищенная от лишнего» таблица значений функции.

I.1. Определение матрицы

Определение 1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из* ***кольца*** K **размерности** $m \times n$ *называется* ***функция*** F *с* ***областью определения*** $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *и областью значений, включающейся в* K*, то есть* $E(F) \subseteq K$*. При этом для любого элемента* $(i, j) \in D(F)$ *число* i *называется* **номером строки матрицы***, а число* j *—* **номером столбца матрицы***. При этом элементы основного* ***кольца*** K *часто называют* **скалярами***.*

Оговорим некоторые соглашения, применяемые нами в этой главе «по умолчанию».

I.1. Определение матрицы

- У нас матрица обозначается заглавной латинской буквой, причем часто напечатанной «жирным» шрифтом;

I.1. Определение матрицы

- У нас матрица обозначается заглавной латинской буквой, причем часто напечатанной «жирным» шрифтом;

- элементы матрицы $\mathbf{M}$ обозначаются той же буквой, что и вся матрица, но, во-первых, строчной, а не заглавной, и, во-вторых, снабженной индексами. Таким образом элемент матрицы $\mathbf{M}$, как правило, обозначается через m_{ij}, где первый индекс (в данном случае, это i) обозначает *номер строки*, а второй — *номер столбца*. При необходимости индексы будем разделять запятыми;

I.1. Определение матрицы

- У нас матрица обозначается заглавной латинской буквой, причем часто напечатанной «жирным» шрифтом;
- элементы матрицы $\mathbf{M}$ одноименной строчной буквой, снабженной индексами;
- для сокращения записи тот факт, что $\mathbf{M}$ — матрица размерности $m \times n$ при необходимости будем записывать прямо в идентификаторе этой матрицы: $\mathbf{M}_{m\times n}$;

I.1. Определение матрицы

Например,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times 2} = (a_{ij})_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ \sqrt{5} & 0.2 \\ 2 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

В частности, $a_{21} = \sqrt{5}$, $a_{12} = -1$, $a_{32} = \frac{3}{7}$.

I.1. Определение матрицы

Как разобраться, что такое матрица?

I.1. Определение матрицы

Как разобраться, что такое матрица?

Есть два основных варианта:

— применение приема *конкретизации*;

I.1. Определение матрицы

Как разобраться, что такое матрица?

Есть два основных варианта:

— применение приема *конкретизации*;

— изучение *определения*, получение следствий.

I.2. Виды матриц

1. Матрица размерности $1 \times n$ называется **матрицей-строкой** или просто **строкой**. Матрица размерности $m \times 1$ называется **матрицей-столбцом** или просто **столбцом**. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица-строка и } \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец.}$$

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка $\mathbf{A}_{1\times n}$, матрица-столбец $\mathbf{A}_{n\times 1}$.**

2. Матрица размерности $n \times n$ называется **квадратной матрицей**. Таким образом, матрица является квадратной тогда и только тогда, когда число ее строк равно числу столбцов. Например, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка $\mathbf{A}_{1\times n}$, матрица-столбец $\mathbf{A}_{n\times 1}$.**

2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.

3. Квадратная матрица $\mathbf{T}_{n\times n}$ с компонентами из поля K называется **верхней треугольной** тогда и только тогда, когда для любых номеров i, j таких, что $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < i \end{cases}$, имеем $t_{ij} = 0$. Квадратная матрица $\mathbf{T}'_{n\times n}$ с компонентами из поля K называется **нижней треугольной** тогда и только тогда, когда для любых номеров i, j таких, что $\begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i < j \end{cases}$, имеем $t_{ij} = 0$. Например, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ — верхняя треугольная матрица.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка $\mathbf{A}_{1\times n}$, матрица-столбец $\mathbf{A}_{n\times 1}$.**
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. Квадратная матрица $\mathbf{T}_{n\times n}$ с компонентами из поля K называется **верхней треугольной** тогда и только тогда, когда для любых номеров i, j таких, что $\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j < i \end{cases}$, имеем $t_{ij} = 0$. Квадратная матрица $\mathbf{T}'_{n\times n}$ с компонентами из поля K называется **нижней треугольной** тогда и только тогда, когда для любых номеров i, j таких, что $\begin{cases} 1 \le j \le n \\ 1 \le i < j \end{cases}$, имеем $t_{ij} = 0$. Например, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ — нижняя треугольная матрица.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка $\mathbf{A}_{1\times n}$, матрица-столбец $\mathbf{A}_{n\times 1}$.**
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная** матрицы. Верхняя или нижняя треугольная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$ такая, что $1 = a_{11} = \ldots = a_{nn}$ называется **верхней унитреугольной** или, соответственно, **нижней унитреугольной**.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка** $\mathbf{A}_{1\times n}$, **матрица-столбец** $\mathbf{A}_{n\times 1}$.
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная**, **верхняя унитреугольная**, **нижняя унитреугольная** матрицы.
4. Квадратная матрица $\mathbf{D}_{n\times n}$ называется **диагональной** тогда и только тогда, для любых номеров i, j таких, что $\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ i \ne j \end{cases}$, имеем $d_{ij} = 0$. Например, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — диагональная матрица.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка $\mathbf{A}_{1\times n}$, матрица-столбец $\mathbf{A}_{n\times 1}$.**
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная**, **верхняя унитреугольная**, **нижняя унитреугольная** матрицы.
4. **Диагональная** матрица.

   Ясно, что диагональная матрица является и верхней треугольной, и нижней треугольной матрицей. Иногда пишут $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ вместо $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка** $\mathbf{A}_{1\times n}$, **матрица-столбец** $\mathbf{A}_{n\times 1}$.
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная**, **верхняя унитреугольная**, **нижняя унитреугольная** матрицы.
4. **Диагональная** матрица, $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
5. **Единичной** матрицей размерности $n \times n$ называется квадратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, имеющая n строк и n столбцов.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка** $\mathbf{A}_{1\times n}$, **матрица-столбец** $\mathbf{A}_{n\times 1}$.
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная**, **верхняя унитреугольная**, **нижняя унитреугольная** матрицы.
4. **Диагональная** матрица, $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
5. **Единичная** матрица $\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.
6. **Нулевой** матрицей размерности $m \times n$ называется матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, имеющая m строк и n столбцов.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка $\mathbf{A}_{1\times n}$**, **матрица-столбец $\mathbf{A}_{n\times 1}$**.
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная**, **верхняя унитреугольная**, **нижняя унитреугольная** матрицы.
4. **Диагональная** матрица, $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
5. **Единичная** матрица.
6. **Нулевая** матрица.
7. **Полураспавшимися** называются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m\times m} & \mathbf{O}_{m\times n} \\ \mathbf{B}_{n\times m} & \mathbf{C}_{n\times n} \end{pmatrix},$$

   где $\mathbf{O}_{p\times q}$ — нулевая матрица размерности $p\times q$ и $\mathbf{A}_{m\times m}$, $\mathbf{B}_{m\times n}$, $\mathbf{C}_{n\times n}$ — произвольные матрицы соответствующих размерностей.

I.2. Виды матриц

1. **Матрица-строка** $\mathbf{A}_{1\times n}$, **матрица-столбец** $\mathbf{A}_{n\times 1}$.
2. Квадратная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$.
3. **Верхняя треугольная** и **нижняя треугольная**, **верхняя унитреугольная**, **нижняя унитреугольная** матрицы.
4. **Диагональная**, 5. **Единичная**, 6. **Нулевая**.
7. **Полураспавшиеся** матрицы.
8. **Клеточно-диагональной** называется матрица, представимая в виде $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{p\times p} & \mathbf{0}_{p\times q} & \ldots & \mathbf{0}_{p\times r} \\ \mathbf{0}_{q\times p} & \mathbf{B}_{q\times q} & \ldots & \mathbf{0}_{q\times r} \\ & \ldots & & \\ \mathbf{0}_{r\times p} & \mathbf{0}_{r\times q} & \ldots & \mathbf{C}_{r\times r} \end{pmatrix}$, где $\{\mathbf{A}_{p\times p}, \mathbf{B}_{q\times q}, \ldots, \mathbf{C}_{r\times r}\}$ — множество квадратных матриц. Матрицы $\mathbf{A}_{p\times p}, \mathbf{B}_{q\times q}, \mathbf{C}_{r\times r}$ называются **диагональными клетками**.

I.2. Виды матриц

В частности, диагональная матрица, имеющая не менее двух строк, является клеточно-диагональной. Диагональные клетки можно выделять неоднозначно, например матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ можно разбить на клетки каждым из таких способов:

I.2. Виды матриц

В частности, диагональная матрица, имеющая не менее двух строк, является клеточно-диагональной. Диагональные клетки можно выделять неоднозначно, например матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ можно разбить на клетки каждым из таких способов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

I.2. Виды матриц

В частности, диагональная матрица, имеющая не менее двух строк, является клеточно-диагональной. Диагональные клетки можно выделять неоднозначно, например матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ можно разбить на клетки каждым из таких способов:

$$\left(\begin{array}{cccc} \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-3} 0 & \multicolumn{1}{|c}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} & 0 \\ 0 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & 0 \\ \cline{2-4} 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{4-4} \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cccc} \cline{1-3} \multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & 0 \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & 0 \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 0 \\ \cline{1-4} 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{4-4} \end{array}\right),$$

I.2. Виды матриц

В частности, диагональная матрица, имеющая не менее двух строк, является клеточно-диагональной. Диагональные клетки можно выделять неоднозначно, например матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ можно разбить на клетки каждым из таких способов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

I.2. Виды матриц

Совпадает ли однокомпонентная матрица (a_{11}) со единственной своей компонентой a_{11}?

I.2. Виды матриц

Во-первых, это «объекты» разной «природы»: a_{11} — это число, а (a_{11}) — матрица (иногда компонентами (элементами) матрицы могут быть другие «объекты», даже — в тензорном исчислении — другие матрицы).

I.2. Виды матриц

Во-первых, это «объекты» разной «природы»: a_{11} — это число, а (a_{11}) — матрица (иногда компонентами (элементами) матрицы могут быть другие «объекты», даже — в тензорном исчислении — другие матрицы).

Во-вторых, набор «характеристик», связанный с a_{11} и с (a_{11}), может быть существенно различным. Например,

I.2. Виды матриц

Во-первых, это «объекты» разной «природы»: a_{11} — это число, а (a_{11}) — матрица (иногда компонентами (элементами) матрицы могут быть другие «объекты», даже — в тензорном исчислении — другие матрицы).

Во-вторых, набор «характеристик», связанный с a_{11} и с (a_{11}), может быть существенно различным. Например, число можно сложить с другим числом (операция сложения матрицы с числом обычно не определяется), для чисел определены отношения $<, >$ и т.п., не определенные для матриц и т.п.

I.2. Виды матриц

Во-первых, это «объекты» разной «природы»: a_{11} — это число, а (a_{11}) — матрица (иногда компонентами (элементами) матрицы могут быть другие «объекты», даже — в тензорном исчислении — другие матрицы).

Во-вторых, набор «характеристик», связанный с a_{11} и с (a_{11}), может быть существенно различным. Например, число можно сложить с другим числом (операция сложения матрицы с числом обычно не определяется), для чисел определены отношения $<, >$ и т.п., не определенные для матриц и т.п. С другой стороны, для числа не определены такие характеристики как количество строк или число столбцов.

II. В каких направлениях развивать исследования?

Перейти к списку базовых исследовательских стратегий?

II. В каких направлениях развивать исследования?

Перейти к списку базовых исследовательских стратегий?

Для представления свойств необходим развитый понятийный аппарат. Создание понятийного аппарата можно рассматривать как применение стратегии построения модели и стратегии обогащения модели.

II. В каких направлениях развивать исследования?

Перейти к списку базовых исследовательских стратегий?

Для представления свойств необходим развитый понятийный аппарат. Создание понятийного аппарата можно рассматривать как применение стратегии построения модели и стратегии обогащения модели.

При формировании понятийного аппарата ведущей является стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций. Она применена при выделении описанных выше видов матриц.

II. В каких направлениях развивать исследования?

Перейти к списку базовых исследовательских стратегий?

Для представления свойств необходим развитый понятийный аппарат. Создание понятийного аппарата можно рассматривать как применение стратегии построения модели и стратегии обогащения модели.

При формировании понятийного аппарата ведущей является стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций. Она применена при выделении описанных выше видов матриц.

Можно изучать свойства матриц, вводить новые характеристики и отношения, используя различные исследовательские стратегии.

II. В каких направлениях развивать исследования?

Перейти к списку базовых исследовательских стратегий?

Для представления свойств необходим развитый понятийный аппарат. Создание понятийного аппарата можно рассматривать как применение стратегии построения модели и стратегии обогащения модели.

При формировании понятийного аппарата ведущей является стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций. Она применена при выделении описанных выше видов матриц.

Можно, используя стратегию поиска аналогии и стратегию построения модели, сопоставить матрице различные математические объекты («модели матриц») и изучать особенности матриц в сочетании с их моделями (матрица перехода, матрица Грама, матрица билинейной формы и др.).

II. В каких направлениях развивать исследования?

Перейти к списку базовых исследовательских стратегий?

Для представления свойств необходим развитый понятийный аппарат. Создание понятийного аппарата можно рассматривать как применение стратегии построения модели и стратегии обогащения модели.

При формировании понятийного аппарата ведущей является стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций. Она применена при выделении описанных выше видов матриц.

Можно, используя стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов, определить операции и отношения на множестве матриц.

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$. *Тот факт, что матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *равны обозначается, естественно, как* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$. *Тот факт, что матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *равны обозначается, естественно, как* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq$$

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* **A** *и* **B** *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m — *число строк матрицы* **A** *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n — *число столбцов матрицы* **A**, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$. *Тот факт, что матрицы* **A** *и* **B** *равны обозначается, естественно, как* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$. *Тот факт, что матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *равны обозначается, естественно, как* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 2 \end{pmatrix}$$

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$*, где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$*, имеем* $a_{ij} = b_{ij}$*. Тот факт, что матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *равны обозначается, естественно, как* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$*.*

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. Главной диагональю *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *называется упорядоченная* n*-ка (кортеж из* n *элементов)* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. **Главной диагональю** *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *называется упорядоченная* n*-ка (кортеж из* n *элементов)* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Определение 4. **Следом** *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$, *обозначаемым* $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, *называется сумма элементов ее главной диагонали.*

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. Главной диагональю *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *называется упорядоченная* n*-ка (кортеж из* n *элементов)* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Определение 4. Следом *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$, *обозначаемым* $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, *называется сумма элементов ее главной диагонали.*

Например, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. Главной диагональю *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *называется упорядоченная* n*-ка (кортеж из* n *элементов)* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Определение 4. Следом *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$, *обозначаемым* $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, *называется сумма элементов ее главной диагонали.*

Например, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$,

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *где* m — *число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n — *число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем* $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. Главной диагональю *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *называется упорядоченная* n*-ка (кортеж из* n *элементов)* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Определение 4. Следом *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$, *обозначаемым* $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, *называется сумма элементов ее главной диагонали.*

Например, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d, \quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =$

II.1. Некоторые понятия теории матриц

Определение 2. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность, и, во-вторых, для любого номера* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$*, где* m *— число строк матрицы* $\mathbf{A}$ *и любого номера* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, где* n *— число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$*, имеем* $a_{ij} = b_{ij}$*.*

Определение 3. Главной диагональю *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *называется упорядоченная* n*-ка (кортеж из* n *элементов)* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$*.*

Определение 4. Следом *квадратной матрицы* $\mathbf{A}$*, обозначаемым* $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$*, называется сумма элементов ее главной диагонали.*

$$\text{Например, } \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d, \quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 + b_2 + c_3.$$

II.2. Матричные операции

Мы разобрались с определением матрицы, рассмотрели некоторые примеры матриц (пока вам может быть не совсем понятно, почему именно эти типы матриц получили специальные названия). Для того, что формулировать какие-либо свойства матриц, у нас недостаточно базовых понятий. В данном случае для выхода из положения воспользуемся можно стратегией перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов. Нам следует определить операции и отношения на множестве матриц.

II.2. Матричные операции

Какие именно операции следует нам ввести в первую очередь? За ответом на этот опрос естественно обратиться к стратегии поиска аналогии в рассмотренных ранее алгебрах. В первую очередь напрашивается обратить внимание на векторную алгебру. Как известно из курса математики средней школы, большую роль в применении векторной алгебры играет понятие строки координат вектора. Строку координат вектора естественно рассматривать как матрицу-строку или матрицу-столбец.

II.2. Матричные операции

Воспользуемся найденной нами аналогией. Основными операциями векторной алгебры являются сложение векторов и умножение вектора на число. Отметим, что скалярное произведение векторов операцией не является (значением этой функции является не вектор, а число), а векторное произведение является слишком специфической операцией, использующей такие величины как длина вектора и угол между векторами, характерные только для геометрии и векторной алгебры. Поэтому в первую очередь мы определим операции сложения матриц и умножения матрицы на число, опираясь на аналогию с определением соответствующих операций в векторной алгебре.

II.2. Матричные операции

Воспользуемся найденной нами аналогией. Основными операциями векторной алгебры являются сложение векторов и умножение вектора на число. Отметим, что скалярное произведение векторов операцией не является (значением этой функции является не вектор, а число), а векторное произведение является слишком специфической операцией, использующей такие величины как длина вектора и угол между векторами, характерные только для геометрии и векторной алгебры. Поэтому в первую очередь мы определим операции сложения матриц и умножения матрицы на число, опираясь на аналогию с определением соответствующих операций в векторной алгебре.

Как задать операции?

II.2. Матричные операции

Воспользуемся найденной нами аналогией. Основными операциями векторной алгебры являются сложение векторов и умножение вектора на число. Отметим, что скалярное произведение векторов операцией не является (значением этой функции является не вектор, а число), а векторное произведение является слишком специфической операцией, использующей такие величины как длина вектора и угол между векторами, характерные только для геометрии и векторной алгебры. Поэтому в первую очередь мы определим операции сложения матриц и умножения матрицы на число, опираясь на аналогию с определением соответствующих операций в векторной алгебре.

«Слишком простой идеей» является тот факт, что для задания результата операции нам следует

II.2. Матричные операции

Воспользуемся найденной нами аналогией. Основными операциями векторной алгебры являются сложение векторов и умножение вектора на число. Отметим, что скалярное произведение векторов операцией не является (значением этой функции является не вектор, а число), а векторное произведение является слишком специфической операцией, использующей такие величины как длина вектора и угол между векторами, характерные только для геометрии и векторной алгебры. Поэтому в первую очередь мы определим операции сложения матриц и умножения матрицы на число, опираясь на аналогию с определением соответствующих операций в векторной алгебре.

«Слишком простой идеей» является тот факт, что для задания результата операции нам следует определить формулу для вычисления

II.2. Матричные операции

Воспользуемся найденной нами аналогией. Основными операциями векторной алгебры являются сложение векторов и умножение вектора на число. Отметим, что скалярное произведение векторов операцией не является (значением этой функции является не вектор, а число), а векторное произведение является слишком специфической операцией, использующей такие величины как длина вектора и угол между векторами, характерные только для геометрии и векторной алгебры. Поэтому в первую очередь мы определим операции сложения матриц и умножения матрицы на число, опираясь на аналогию с определением соответствующих операций в векторной алгебре.

«Слишком простой идеей» является тот факт, что для задания результата операции нам следует определить формулу для вычисления *коэффициентов матрицы*,

II.2. Матричные операции

Воспользуемся найденной нами аналогией. Основными операциями векторной алгебры являются сложение векторов и умножение вектора на число. Отметим, что скалярное произведение векторов операцией не является (значением этой функции является не вектор, а число), а векторное произведение является слишком специфической операцией, использующей такие величины как длина вектора и угол между векторами, характерные только для геометрии и векторной алгебры. Поэтому в первую очередь мы определим операции сложения матриц и умножения матрицы на число, опираясь на аналогию с определением соответствующих операций в векторной алгебре.

«Слишком простой идеей» является тот факт, что для задания результата операции нам следует определить формулу для вычисления *коэффициентов матрицы*, являющейся результатом операции.

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Определение 5. Суммой матриц $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *размерности* $m \times n$ *называется матрица* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *той же размерности, компоненты которой определяются равенствами*

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Определение 5. Суммой матриц $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *размерности* $m \times n$ *называется матрица* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *той же размерности, компоненты которой определяются равенствами* $c_{ij} =$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Определение 5. Суммой матриц A *и* **B** *размерности* $m \times n$ *называется матрица* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *той же размерности, компоненты которой определяются равенствами* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,
где $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, $\quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Слишком много слов для конспектирования...

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Определение 5. $\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$

Это уже целесообразно записать.

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

В этих таблицах представлено наличие товара на двух складах некоторой фирмы.

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Поставим этим таблицам в соответствие матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & & \\ & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & {\color{magenta}2} & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & {\color{magenta}3} & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & & \\ & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & \\ & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & \\ & & \end{pmatrix} =$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ 10+3 & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ 10+3 & & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ 10+3 & 5+5 & \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ 10+3 & 5+5 & \end{pmatrix} =$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ 10+3 & 5+5 & 2+5 \end{pmatrix}=$$

II.3. Матричные операции: сумма матриц

Склад A	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	5	2	4
Суммарная стоимость	10	5	2

Склад B	Товар α	Товар β	Товар γ
Количество штук	2	3	6
Суммарная стоимость	3	5	5

Тогда суммарное наличие товаров и суммарная стоимость этих товаров, находящихся в данный момент на этих складах определяется, очевидно, матрицей

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+2 & 2+3 & 4+6 \\ 10+3 & 5+5 & 2+5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 13 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

II.4. Матричные операции: умножение матрицы на число

Определение 6. **Произведением** *матрицы* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется матрица* $\mathbf{B}_{m\times n} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times n}$, *элементы которой имеют вид*

II.4. Матричные операции: умножение матрицы на число

Определение 6. **Произведением** *матрицы* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется матрица* $\mathbf{B}_{m\times n} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times n}$, *элементы которой имеют вид* $b_{ij} =$

II.4. Матричные операции: умножение матрицы на число

Определение 6. **Произведением** *матрицы* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется матрица* $\mathbf{B}_{m\times n} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times n}$*, элементы которой имеют вид* $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Слишком много слов. Неудобно конспектировать.

II.4. Матричные операции: умножение матрицы на число

Определение 6. $\mathbf{B}_{m\times n} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times n} \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}.$

II.4. Матричные операции: умножение матрицы на число

Определение 6. $\mathbf{B}_{m\times n} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times n} \;\Leftrightarrow\; b_{ij} = \lambda a_{ij}.$

Например, если все элементы таблицы представляют собой значения некоторой величины, указанные, предположим, в метрах, то для того, чтобы получить таблицу, в которой все эти значения будут указаны в сантиметрах, надо исходную матрицу умножить на число (то есть скаляр) 100.

Рассмотреть пример?

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

Перечислим и докажем основные свойства операций «суммирование матриц» и «произведение матрицы на скаляр». Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ — матрицы соответствующей размерности, $\lambda, \mu, \ldots$ — числа.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения матриц);

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциативность сложения матриц);

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента в алгебре матриц);

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n})+\mathbf{C}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}+(\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{0}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n}+(-\mathbf{A}_{m\times n})=\mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного элемента в алгебре матриц);

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n})+\mathbf{C}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}+(\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{0}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n}+(-\mathbf{A}_{m\times n})=\mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n})=\lambda\mathbf{A}_{m\times n}+\lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$;

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n})+\mathbf{C}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}+(\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{0}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n}+(-\mathbf{A}_{m\times n})=\mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n})=\lambda\mathbf{A}_{m\times n}+\lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A}=\lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$;
9. $0\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

Эти свойства обобщаются в понятии «линейное пространство».

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Доказательства.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если...*

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L = R$:

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L=R$:

- метод *эквивалентных преобразований*, который сводится к тому, что левую и правую часть тождественными или «одновременными» взаимно однозначными преобразованиями приводим к одному и тому же виду;

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L=R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам*: если L и R — числа, то из $L\leq R$ и $L\geq R$ следует $L=R$; аналогично, если L и R — множества, то из $L\subseteq R$ и $L\supseteq R$ следует $L=R$;

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L=R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L = R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

Второй способ в данном случае применить нельзя, так как на множестве матриц мы не ввели отношение $\leq$. Метод «от противного» мы обычно применяем в «безвыходной ситуации». Поэтому попробуем применить метод алгебраических преобразований.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L=R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

В данном случае можно просто вычислить левую часть и правую часть доказываемого равенства, и потом с помощью известных свойств сложения чисел доказать, что получается одна и та же матрица.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L = R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

Обозначим матрицу в левой части доказываемого равенства через $L_{m\times n}$ (от слова left): $L_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}$. Правую часть обозначим, соответственно, через $R_{m\times n}$: $R_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L = R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

Согласно определению суммы матриц, элемент матрицы L определяется равенством $l_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Для матрицы R имеем $r_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$. Но сложение чисел коммутативно, поэтому получаем

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L = R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

$$l_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = r_{ij}.$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);

Доказательство. *Генерация доказательства.* Мы доказываем теорему-импликацию: *если* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ — *матрицы, то* $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$. Надо доказать равенство.

Есть три основных способа **доказательства равенства** $L = R$:

- метод *эквивалентных преобразований*;
- метод *сведения к двум неравенствам.*
- метод *от противного.*

$$l_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = r_{ij}.$$

В данном примере на этапе генерации мы фактически получили уже оформленное доказательство, необходимо лишь удалить «посторонние рассуждения».

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Докажем ассоциативность:

$$l_{ij} =$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Докажем ассоциативность:

$$l_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} =$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Докажем ассоциативность:

$$l_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) =$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Докажем ассоциативность:

$$l_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = r_{ij}.$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Докажем ассоциативность:

$$l_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = r_{ij}.$$

$$(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n}).$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Приведем еще доказательство свойства 5 сложения матриц: $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$.

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

$$l_{ij} = \lambda d_{ij} = \lambda\,(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}.$$

$$r_{ij} = f_{ij} + g_{ij} = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = l_{ij}.$$

II.5. Свойства суммирования матриц и умножения матрицы на число

1. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения);
2. $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциат.);
3. $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента);
4. $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного);
5. $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\,(\mu\mathbf{A})$;
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Таким образом,

$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{L} = \mathbf{R} = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B},$$

что и требовалось доказать.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

Рассмотренные выше операции были «естественными». В отличие от них рассмотренная ниже операция «произведение матриц» такой не кажется, в всяком случае, на первый взгляд.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

Определение 7. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— матрица размерности* $p \times n$, $\mathbf{B}$ *— матрица размерности* $n \times q$. *Тогда* **произведением матриц A** *и* **B** *называется матрица* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, *компоненты которой определяются равенствами*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \tag{1}$$

где $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

Фу-у, как «много букав...»

II.6. Матричные операции: произведение матриц

Определение 7.

$$\mathbf{C}_{p\times q} = \mathbf{A}_{p\times n}\mathbf{B}_{n\times q} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Другое дело!

II.6. Матричные операции: произведение матриц

Определение 7.

$$\mathbf{C}_{p\times q} = \mathbf{A}_{p\times n}\mathbf{B}_{n\times q} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

На **рис.1** подробно расписан процесс вычисления произведения $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj}, \qquad c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 5 + 2 \cdot 7 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

Рис. 1. Пример вычисления произведения матриц. Здесь символ $\bullet$ обозначает арифметическое выражение, значение которого нас в данный момент не интересует.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj}, \qquad c_{12} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 7 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

Рис. 1. Пример вычисления произведения матриц. Здесь символ $\bullet$ обозначает арифметическое выражение, значение которого нас в данный момент не интересует.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj}, \qquad c_{21} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} b_{k1} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 7 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 2 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \quad 2 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 7 & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 13 & \bullet \end{pmatrix},$$

Рис. 1. Пример вычисления произведения матриц. Здесь символ $\bullet$ обозначает арифметическое выражение, значение которого нас в данный момент не интересует.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj}, \qquad c_{22} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} b_{k2} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 5 + 2 \cdot 7 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & (-1)\cdot 6 + 2 \cdot 3 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 2 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \quad 2 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ (-3)\cdot 5 + 4 \cdot 7 & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 13 & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = {\color{magenta}2} \\ j = {\color{blue}2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \quad 2 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & (-3)\cdot 6 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & -6 \end{pmatrix},$$

Рис. 1. Пример вычисления произведения матриц. Здесь символ $\bullet$ обозначает арифметическое выражение, значение которого нас в данный момент не интересует.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 7 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i = 2 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \quad 2 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 7 & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 13 & \bullet \end{pmatrix},$$

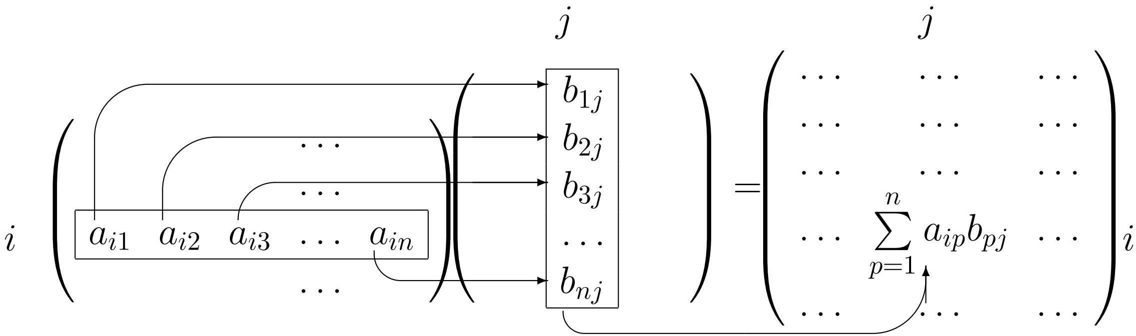
$$\begin{cases} i = 2 \\ j = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \quad 2 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & (-3) \cdot 6 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & -6 \end{pmatrix},$$

Итог: $$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 7 & (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 \\ (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 7 & (-3) \cdot 6 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 13 & -6 \end{pmatrix},$$

Рис. 1. Пример вычисления произведения матриц. Здесь символ $\bullet$ обозначает арифметическое выражение, значение которого нас в данный момент не интересует.

II.6. Матричные операции: произведение матриц

Вычисление произведения матриц можно также проиллюстрировать рисунком, на котором изображен процесс вычисления элемента c_{ij} матрицы $\mathbf{C}_{m\times k} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times k}$:



Выполним упражнения?

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, то есть умножение матриц **некоммутативно**. Как доказать?

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, то есть умножение матриц **некоммутативно**. Пример:

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, то есть умножение матриц **некоммутативно**. Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \qquad\qquad = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, то есть умножение матриц **некоммутативно**. Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, то есть умножение матриц **некоммутативно**. Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).

2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля). Как доказать?

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).

2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля). Примеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).
2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля).
3. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).
2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля).
3. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность);

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).
2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля).
3. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность);
5. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$; $\quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ $\quad$ (дистрибутивность);

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).
2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля).
3. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность);
5. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$; $\quad(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ $\quad$ (дистрибутивность);
6. $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_{n\times n} = \mathbf{E}_{m\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$, где $\mathbf{E}_{k\times k} = \left(\delta_{ij}\right)_{k\times k}$ (существование единичного элемента в алгебре матриц);

II.7. Свойства произведения матриц

1. Вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц **некоммутативно**).
2. Из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля).
3. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность);
5. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}; \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ (дистрибутивность);
6. $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_{n\times n} = \mathbf{E}_{m\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$, где $\mathbf{E}_{k\times k} = (\delta_{ij})_{k\times k}$ (существование единичного элемента в алгебре матриц);
7. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

II.7. Свойства произведения матриц

Доказательство. Мы приведем только доказательство ассоциативности операции умножения матриц, то есть свойство 4: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство.

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Как доказать равенство матриц?

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Как доказать равенство матриц?

Из **определения матрицы** следует, что *надо проверить совпадение соответствующих коэффициентов матриц в левой и правой частях доказываемого равенства.*

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Как доказать равенство коэффициентов?

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Как **доказать равенство коэффициентов**?

Применим доказательство приведением к одинаковому виду выражений в левой и правой частях равенства.

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} =$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} =$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} =$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} =$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} =$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) =$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uv} c_{vj}.$$

Как известно, индекс суммирования является «глухим», то есть фактически его в выражении «нет».

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Как известно, индекс суммирования является «глухим», то есть фактически его в выражении «нет». Например выражение $\sum\limits_{i=1}^{3} h_i$ от i не зависит, так как $\sum\limits_{i=1}^{3} h_i = h_1 + h_2 + h_3 = \sum\limits_{j=1}^{3} h_j$.

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Поэтому индекс суммирования всегда можно изменить. Полагая в выражении для r_{ij} $\quad u = q$, $v = p$, получим

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uv} c_{vj}.$$

Поэтому индекс суммирования всегда можно изменить. Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

II.7. Свойства произведения матриц

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uv} c_{vj}.$$

Поэтому индекс суммирования всегда можно изменить. Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

Значит, $l_{ij} = r_{ij}$, то есть $\mathbf{R} = \mathbf{L}$, что и требовалось доказать.

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t =$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Можно так:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t =$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Можно так:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Можно так:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t = \left(\begin{array}{rr} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ & \end{array} \right)$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Определение 8. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$, *то есть* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

$$\mathbf{A}^t_{m\times n} = \mathbf{B}_{n\times m} \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} 1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n \end{cases} \Rightarrow\; b_{ij} = a_{ji}\right)$$

Свойства транспонирования

1. $(\lambda\mathbf{A})^t = \lambda\left(\mathbf{A}^t\right)$;

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

$$\mathbf{A}^t_{m\times n} = \mathbf{B}_{n\times m} \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} 1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n \end{array} \right. \Rightarrow b_{ij} = a_{ji} \right)$$

Свойства транспонирования

1. $(\lambda \mathbf{A})^t = \lambda \left(\mathbf{A}^t\right)$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$;

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

$$\mathbf{A}^t_{m\times n} = \mathbf{B}_{n\times m} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n \end{cases} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji} \right)$$

Свойства транспонирования

1. $(\lambda \mathbf{A})^t = \lambda \left(\mathbf{A}^t\right)$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$;
3. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ — транспонирование «меняет местами» порядок сомножителей.

Доказательства.

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Способы **доказательства равенства**:

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Способы **доказательства равенства**:

— алгебраические преобразования;

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Способы **доказательства равенства**:

— алгебраические преобразования;

— сведение к неравенствам $L \le R$ и $L \ge R$;

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Способы **доказательства равенства**:

— алгебраические преобразования;

— сведение к неравенствам $L \leq R$ и $L \geq R$;

— «от противного».

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k\times m}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$. Не будем «экономить на обозначениях»: положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})^t$, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}$.

$$l_{ij} = c_{ji} =$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k\times m}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$. Не будем «экономить на обозначениях»: положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})^t$, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}$.

$$l_{ij} = c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}b_{pi} =$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k\times m}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$. Не будем «экономить на обозначениях»: положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})^t$, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}$.

$$l_{ij} = c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}b_{pi} = \qquad\qquad\qquad = r_{ij}.$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k\times m}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$. Не будем «экономить на обозначениях»: положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})^t$, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}$.

$$l_{ij} = c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp} b_{pi} = \qquad = \sum_{p=1}^{m} u_{ip} v_{pj} = r_{ij}.$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k\times m}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$. Не будем «экономить на обозначениях»: положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})^t$, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}$.

$$l_{ij} = c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}b_{pi} = \sum_{p=1}^{m} b_{jp}a_{pi} = \sum_{p=1}^{m} u_{ip}v_{pj} = r_{ij}.$$

II.8. Матричные операции: транспонирование матриц

Мы приведем доказательство только свойства 3. Остальные доказательства оставляются читателям в качестве упражнения.

Доказываем равенство $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k\times m}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$. Не будем «экономить на обозначениях»: положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})^t$, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}$.

$$l_{ij} = c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}b_{pi} = \sum_{p=1}^{m} b_{jp}a_{pi} = \sum_{p=1}^{m} u_{ip}v_{pj} = r_{ij}.$$

Замечание 1 (о кольцах матриц). *Для любого натурального числа n и любого поля*[1] *K множество матриц размерности $n \times n$ с коэффициентами из K является кольцом.*

[1]Утверждение остается верным даже в случае, если K — не поле, а «всего лишь» кольцо.

II.9. Некоторые виды матриц, выделяемые с помощью операций

Рассмотренные операции позволяют выделить некоторые важные виды операций. Для этого применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

II.9. Некоторые виды матриц, выделяемые с помощью операций

«Экстремальные» ситуации с операцией транспонирования зафиксированы в следующих определениях.

II.9. Некоторые виды матриц, выделяемые с помощью операций

Определение 9. *Матрица* $\mathbf{A}$ *называется* **симметричной** *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$.

II.9. Некоторые виды матриц, выделяемые с помощью операций

Определение 9. *Матрица* $\mathbf{A}$ *называется* **симметричной** *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$.

Определение 10. *Матрица* $\mathbf{A}$ *называется* **кососимметричной** *или (***антисимметричной***) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$.

II.9. Некоторые виды матриц, выделяемые с помощью операций

Определение 9. *Матрица* $\mathbf{A}$ *называется* **симметричной** *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$.

Определение 10. *Матрица* $\mathbf{A}$ *называется* **кососимметричной** *или (***антисимметричной***) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$.

Определение 11. *Говорят, что матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ **коммутируют***, если* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Заметим, что **операция умножения матриц** обладает еще одной очень важной особенностью. Зафиксируем в формуле (1) из определения произведения матриц, в выражении $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ номер i. При этом, когда j пробегает номера всех столбцов матрицы $\mathbf{B}$, получим все компоненты i-ой строки матрицы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Таким образом, *если i-тую строку матрицы* $\mathbf{A}$ *умножить на матрицу* $\mathbf{B}$*, то получим в точности i-тую строку матрицы* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$*:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} \\ & \dots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ & \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ & \dots & & \\ \boxed{c_{i1} \quad c_{i2} \quad \dots \quad c_{iq}} \\ & \dots & & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix}.$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Аналогично и для столбцов: *если матрицу* $\mathbf{A}$ *умножить на* j*-тый столбец матрицы* $\mathbf{B}$*, то получим в точности* j*-тый столбец матрицы* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$*.*

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Умножение матриц «на макроуровне» — это разбиение процесса умножения матриц на три этапа:

Первый: сведение умножения матриц к умножению матрицы-строки на матрицу или матрицы на матрицу-столбец;

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Умножение матриц «на макроуровне» — это разбиение процесса умножения матриц на три этапа:

Первый: сведение умножения матриц к умножению матрицы-строки на матрицу или матрицы на матрицу-столбец;

Второй: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$;

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Умножение матриц «на макроуровне» — это разбиение процесса умножения матриц на три этапа:

Первый: сведение умножения матриц к умножению матрицы-строки на матрицу или матрицы на матрицу-столбец;

Второй: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$;

Третий: «сшивание» полученных строк $\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}$ или столбцов $\mathbf{C}'_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_j$ в матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Первый этап: сведение умножения матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

к умножению матрицы-строки на матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Первый этап: сведение умножения матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

или к умножению матрицы на матрицу-столбец:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}b_{n1}; & \ldots & a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \end{pmatrix} =$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}b_{n1}; & \dots & a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11}; & \dots & a_{i1}b_{1k} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{in}b_{n1}; & \dots & a_{in}b_{nk} \end{pmatrix} =$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}b_{n1}; & \ldots & a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11}; & \ldots & a_{i1}b_{1k} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{in}b_{n1}; & \ldots & a_{in}b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \end{pmatrix} + \ldots + a_{in} \begin{pmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix};$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{i1}} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b_{11}} & \mathbf{b_{12}} & \dots & \mathbf{b_{1k}} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{a_{i1}} \begin{pmatrix} \mathbf{b_{11}} & \mathbf{b_{12}} & \dots & \mathbf{b_{1k}} \end{pmatrix} + a_{i2} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \dots + a_{in} \begin{pmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix};$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ \mathbf{b_{21}} & \mathbf{b_{22}} & \ldots & \mathbf{b_{2k}} \\ & \ldots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \end{pmatrix} + \mathbf{a_{i2}} \begin{pmatrix} \mathbf{b_{21}} & \mathbf{b_{22}} & \ldots & \mathbf{b_{2k}} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ \ldots + a_{in} \begin{pmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix};$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ & \ldots & & \\ \mathbf{b_{n1}} & \mathbf{b_{n2}} & \ldots & \mathbf{b_{nk}} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \end{pmatrix} + a_{i2} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ \ldots + \mathbf{a_{in}} \begin{pmatrix} \mathbf{b_{n1}} & \mathbf{b_{n2}} & \ldots & \mathbf{b_{nk}} \end{pmatrix};$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: произведение матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ можно трактовать как произведение матрицы $\mathbf{A}'$ на матрицу-столбец $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \dots \\ \mathbf{B}_n \end{pmatrix}$, где $\mathbf{B}_p = \begin{pmatrix} b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pk} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1k}} \\ \boxed{b_{21} \quad b_{22} \quad \dots \quad b_{2k}} \\ \dots \\ \boxed{b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{nk}} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \end{pmatrix} + \dots + a_{in} \begin{pmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix};$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ \mathbf{a_{m1}} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b_{1j}} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} \\ \mathbf{a_{21}} \\ \ldots \\ \mathbf{a_{m1}} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & \mathbf{a_{m2}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \mathbf{b_{2j}} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \mathbf{b_{2j}} \begin{pmatrix} \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{22}} \\ \dots \\ \mathbf{a_{m2}} \end{pmatrix} + \dots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: представление произведения матрицы-строки $\mathbf{A}'$ на матрицу $\mathbf{B}$ в виде линейной комбинации строк матрицы $\mathbf{B}$ с компонентами из $\mathbf{A}'$, или представление произведения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с компонентами из $\mathbf{B}'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{a_{2n}} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \mathbf{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ \mathbf{b_{nj}} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \mathbf{b_{nj}} \begin{pmatrix} \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{2n}} \\ \dots \\ \mathbf{a_{mn}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Второй этап: произведение матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$ можно воспринимать как произведение матрицы-строки $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ на матрицу-столбец $\mathbf{B}'$, где элементами матрицы-строки $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ являются столбцы матрицы $\mathbf{A}$:

$$\left(\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{matrix}}\,\boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{matrix}}\,\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix}\,\boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{matrix}}\right) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В самом деле, в формуле $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ для вычисления компонент матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, фиксируя, например, j, перебирая все i, получаем соотношение

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \ldots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{nj} \\ \ldots \\ a_{m1}b_{1j} + a_{m2}b_{2j} + \ldots + a_{mn}b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_{1j} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_{2j} + \ldots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_{nj},$$

то есть **равенство (1)**.

II.10. Умножение матриц по строчкам и столбцам («на макроуровне»)

Третий этап: «сшивание» полученных строк $\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}$ или столбцов $\mathbf{C}'_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_j$ в матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \dots \\ \mathbf{C}_m \end{pmatrix}$ или $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & \dots & \mathbf{C}'_n \end{pmatrix}$.

Таким образом,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B} \\ \dots \\ \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим примеры?

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Следующая лемма носит технический характер и вызвана одним из существенных отличий матричной алгебры от алгебры чисел. Если x, a, b — действительные числа, то в равенстве $xa = xb$ можно сократить на x кроме случая, когда $x = 0$. В матричной алгебре это не так.

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Следующая лемма носит технический характер и вызвана одним из существенных отличий матричной алгебры от алгебры чисел. Если x, a, b — действительные числа, то в равенстве $xa = xb$ можно сократить на x кроме случая, когда $x = 0$. В матричной алгебре это не так.

Как это доказать?

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Следующая лемма носит технический характер и вызвана одним из существенных отличий матричной алгебры от алгебры чисел. Если x, a, b — действительные числа, то в равенстве $xa = xb$ можно сократить на x кроме случая, когда $x = 0$. В матричной алгебре это не так.

Для отрицания общего утверждения достаточно привести контрпример! В самом деле,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \qquad = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Следующая лемма носит технический характер и вызвана одним из существенных отличий матричной алгебры от алгебры чисел. Если x, a, b — действительные числа, то в равенстве $xa = xb$ можно сократить на x кроме случая, когда $x = 0$. В матричной алгебре это не так.

Для отрицания общего утверждения достаточно привести контрпример! В самом деле,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Следующая лемма носит технический характер и вызвана одним из существенных отличий матричной алгебры от алгебры чисел. Если x, a, b — действительные числа, то в равенстве $xa = xb$ можно сократить на x кроме случая, когда $x = 0$. В матричной алгебре это не так.

Для отрицания общего утверждения достаточно привести контрпример! В самом деле,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

но, разумеется, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, то есть «сокращать на матрицу» $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ нельзя, хотя эта матрица и ненулевая!

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

В доказанной ниже лемме рассмотрен важной случай, когда в матричных равенствах $\mathbf{XA} = \mathbf{XB}$ или $\mathbf{AY} = \mathbf{BY}$ можно «сократить» на матрицу $\mathbf{X}$ (соответственно, на матрицу $\mathbf{Y}$).

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;

2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство.

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, второе получается аналогично.

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство. Весь «фокус» состоит в том, что матрица $\mathbf{X}_{1\times m} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}$ — *произвольная*, значит, нам надо лишь «с толком распорядиться свободой» выбора этой матрицы.

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$*, то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$*;*
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$*, то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ строки матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$, и $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ строки матрицы $\mathbf{B}_{m\times n}$. С помощью «умножения на макроуровне» $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$ можно переписать в виде

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ строки матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$, и $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ строки матрицы $\mathbf{B}_{m\times n}$. С помощью «умножения на макроуровне» $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$ можно переписать в виде

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_m\mathbf{A}_m = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + \ldots + x_m\mathbf{B}_m.$$

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство.

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_m\mathbf{A}_m = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + \ldots + x_m\mathbf{B}_m.$$

Полагая $\mathbf{X}_{1\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, получаем $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1$.

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство.

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_m\mathbf{A}_m = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + \ldots + x_m\mathbf{B}_m.$$

Аналогично, полагая $\mathbf{X}_{1\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, имеем $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2$ и т.п.

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство. В конце концов получается, что любая строка матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$ равна соответствующей строке матрицы $\mathbf{B}_{m\times n}$, то есть эти матрицы равны. Доказательство второго пункта идет по той же схеме, но

II.11. Лемма о сокращении на произвольную матрицу

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *и* $\mathbf{B}_{m\times n}$ *— матрицы размерности* $m \times n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
1) если для любой *строки* $\mathbf{X}_{1\times m}$ *выполняется равенство* $\mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{X}_{1\times m}\mathbf{B}_{m\times n}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$;
2) если для любого *столбца* $\mathbf{Y}_{n\times 1}$ *выполняется равенство* $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$, *то* $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$.

Доказательство. В конце концов получается, что любая строка матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$ равна соответствующей строке матрицы $\mathbf{B}_{m\times n}$, то есть эти матрицы равны. Доказательство второго пункта идет по той же схеме, но
сравниваются не строки, а столбцы матриц $\mathbf{A}_{m\times n}$ и $\mathbf{B}_{m\times n}$.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?