Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

# Отображения. Функции

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

*Изд. 4-е, испр. и доп.*

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

# I. Отображение. Функция

Какие ассоциации вызывает у вас слово «отображение»?

# I. Отображение. Функция

Основные ассоциации, имеющие отношение к математике, связаны с двумя трактовками термина «отображение»:

— отображение как процесс (осуществляет отображение...);

# I. Отображение. Функция

Основные ассоциации, имеющие отношение к математике, связаны с двумя трактовками термина «отображение»:

— отображение как процесс (осуществляет отображение...);

— отображение как результат (это есть отображение...).

# I. Отображение. Функция

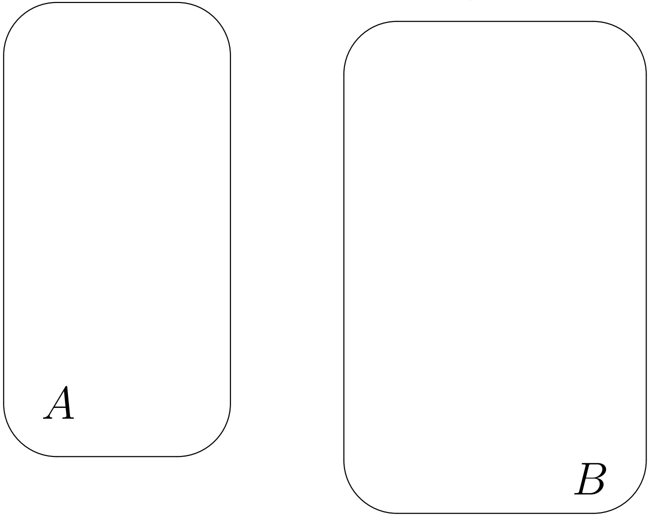
Основные ассоциации, имеющие отношение к математике, связаны с двумя трактовками термина «отображение»:

— отображение как процесс (осуществляет отображение...);

— отображение как результат (это есть отображение...).

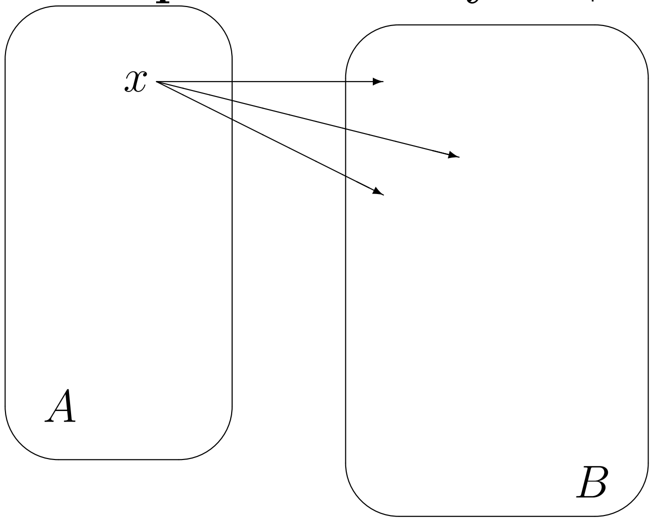
Мы будем ориентироваться на второе понимание термина «отображение»: отображение как результат.

# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

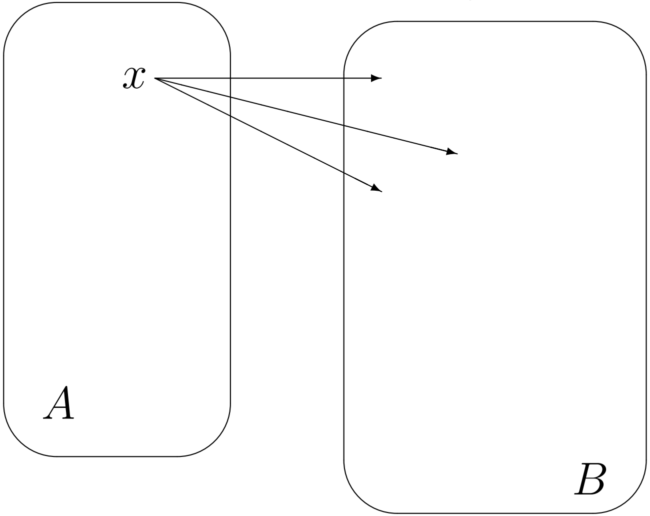
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Например, элементу $x$ из $A$ соответствует несколько элементов из $B$.

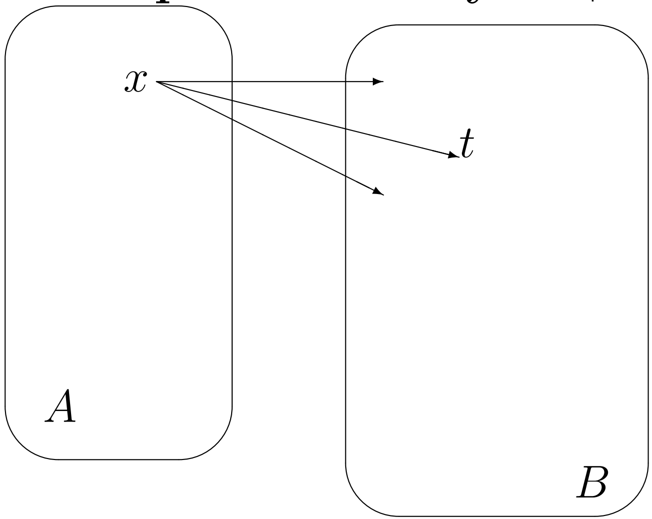
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Любой из элементов множества $B$, который отображением $f$ сопоставлен элементу $x$, называется **образом** элемента $x$ относительно действия $f$.

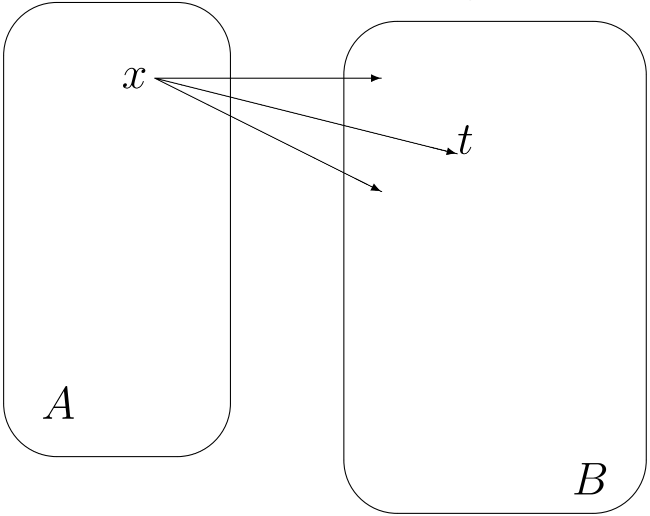
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Элемент $x$, образом которого является элемент $t$ из $B$, называется **прообразом** элемента $t$.

# I. Отображение. Функция

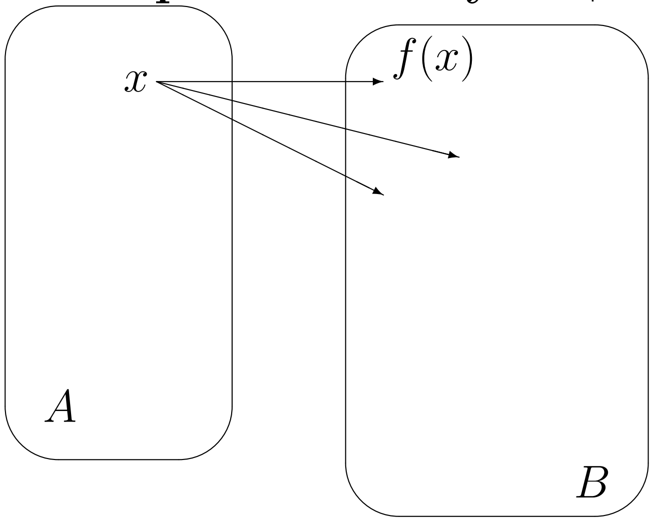



Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Элемент $x$, образом которого является элемент $t$ из $B$, называется **прообразом** элемента $t$.

В данном случае элемент $x$ является прообразом элемента $t$.

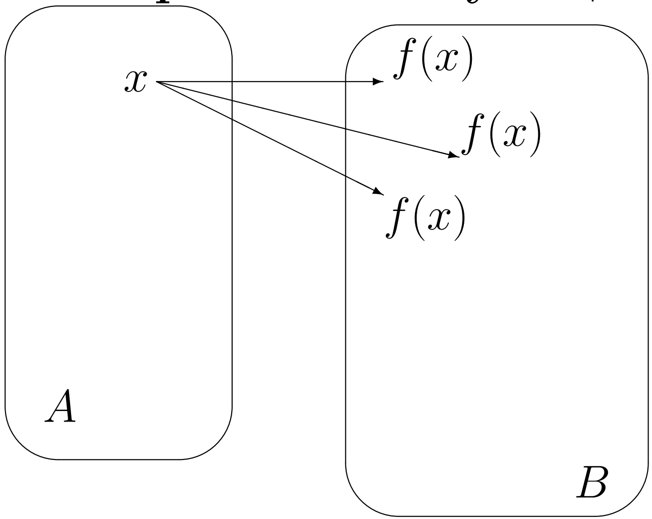
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Образ элемента $x$ относительно отображения $f$ обозначается через $f(x)$.

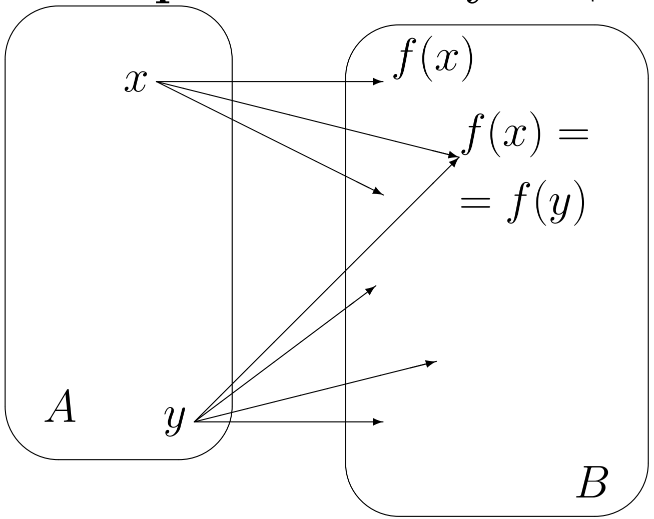
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Образ элемента $x$ относительно отображения $f$ обозначается через $f(x)$.

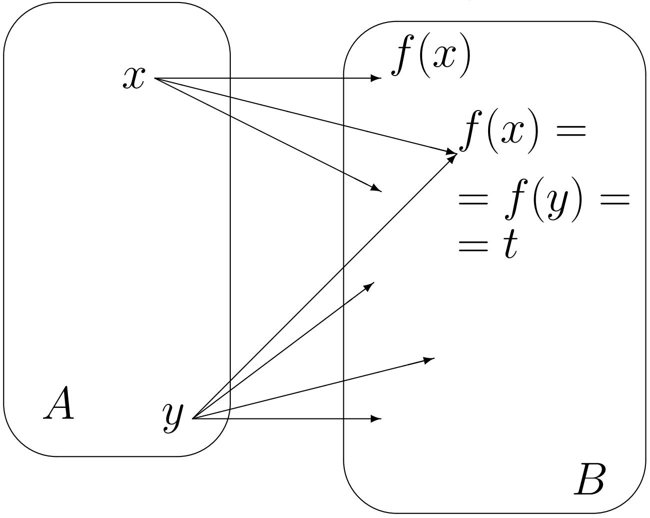
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Вообще говоря, один и тот же элемент может быть образом разных элементов из $A$.

# I. Отображение. Функция

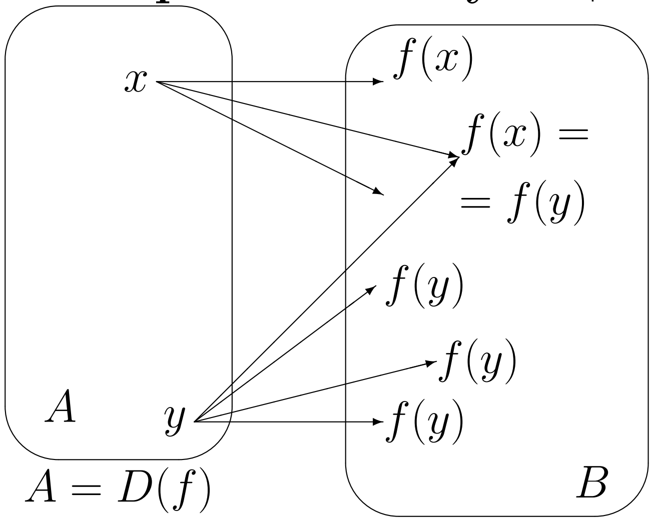



Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Вообще говоря, один и тот же элемент может быть образом разных элементов из $A$.

В данном случае прообразами элемента $t$ будут и элемент $x$, и элемент $y$.

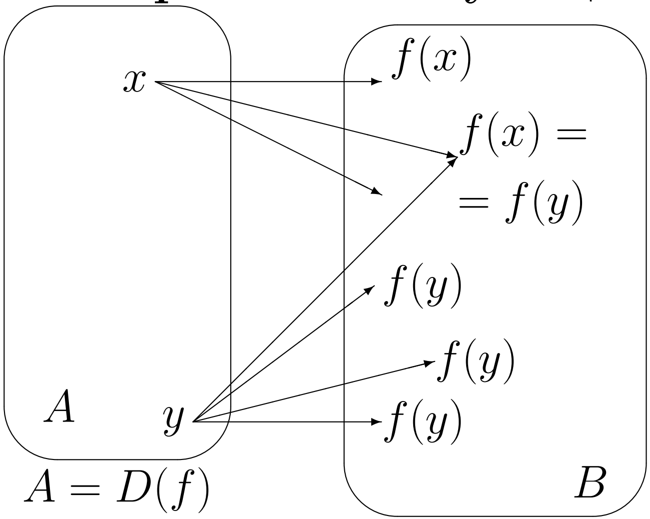
# I. Отображение. Функция



$A = D(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$. Множество $A$ называется **областью определения отображения** $f$, обозначаемой через $D(f)$.

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

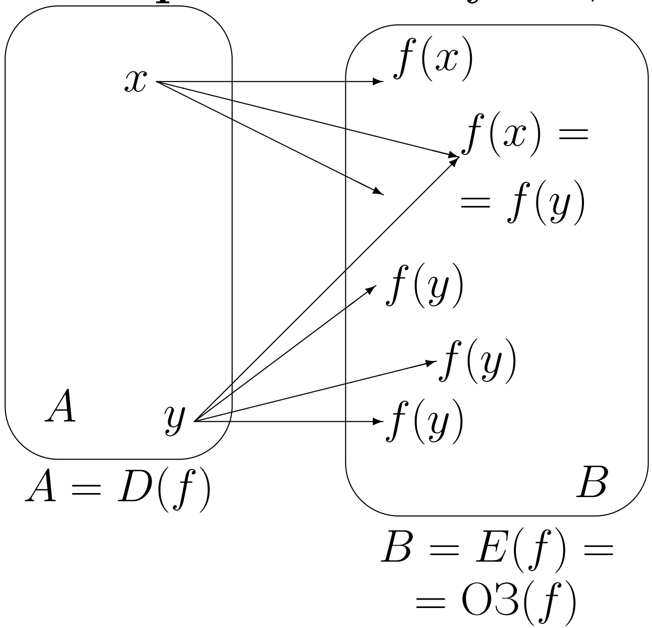
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$. Множество $A$ называется **областью определения отображения** $f$, обозначаемой через $D(f)$.

Множество всех значений отображения $f$ образует **область значений отображения** $f$ и обозначается как $E(f)$ или $\text{ОЗ}(f)$.

Тот факт, что $D(f) = A$ и $E(f) \subseteq B$ обычно записывают так: $f : A \mapsto B$.

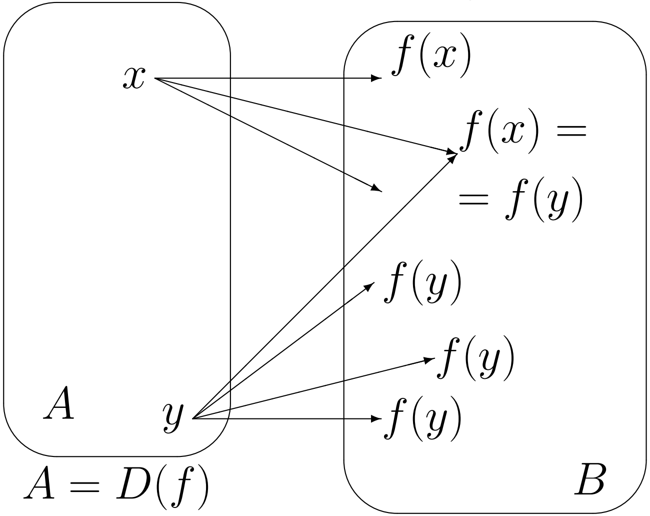
# I. Отображение. Функция




Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

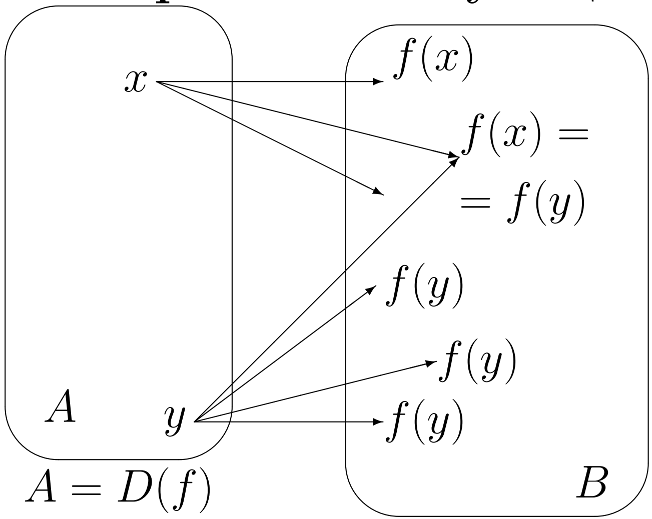
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

Иногда термины *отображение* и *функция* отождествляются, но мы будем считать функцией только однозначное отображение.

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

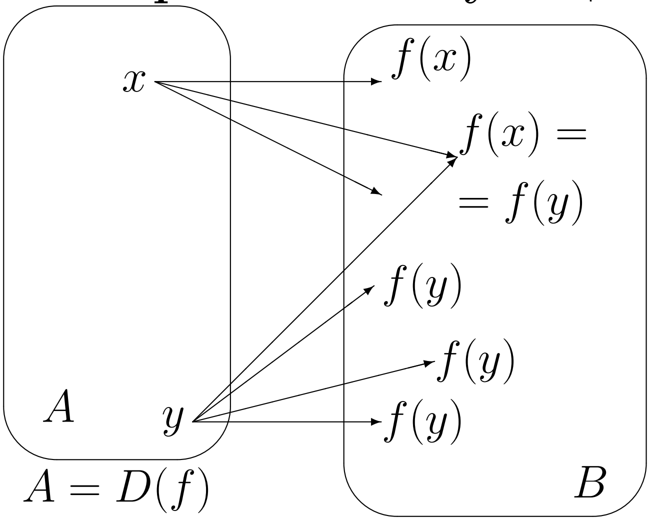
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

Что плохо в этом определении функции?

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

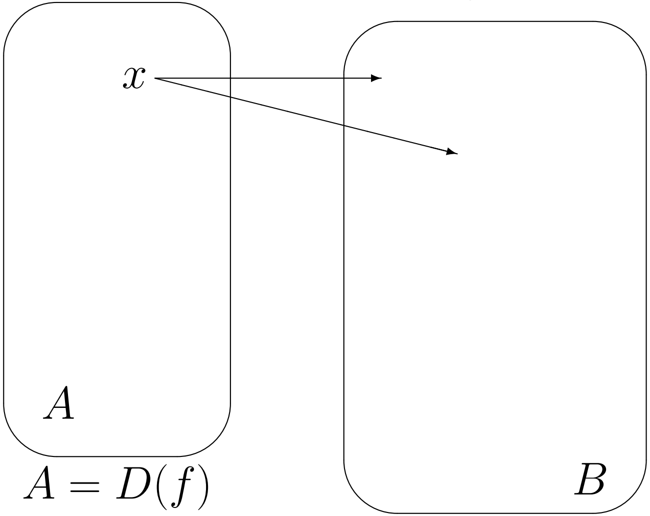
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

Главный недостаток состоит в том, что оно сформулировано не на «языке равенств и неравенств».

# I. Отображение. Функция



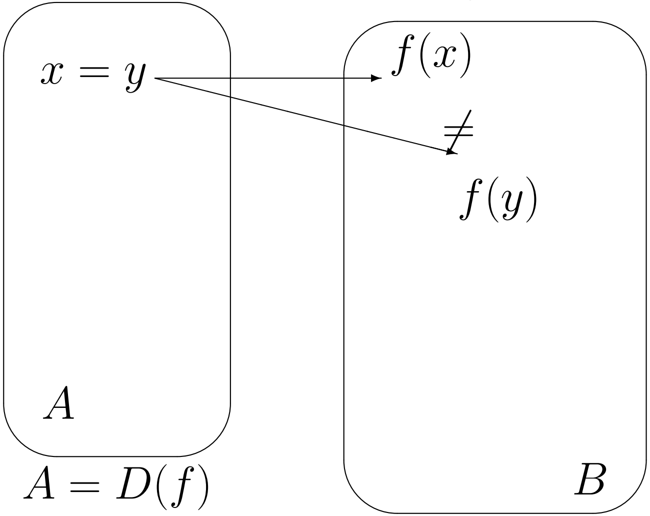

$A = D(f)$

$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.
Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

Как записать на «языке равенств» невозможность изображенной ситуации?

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

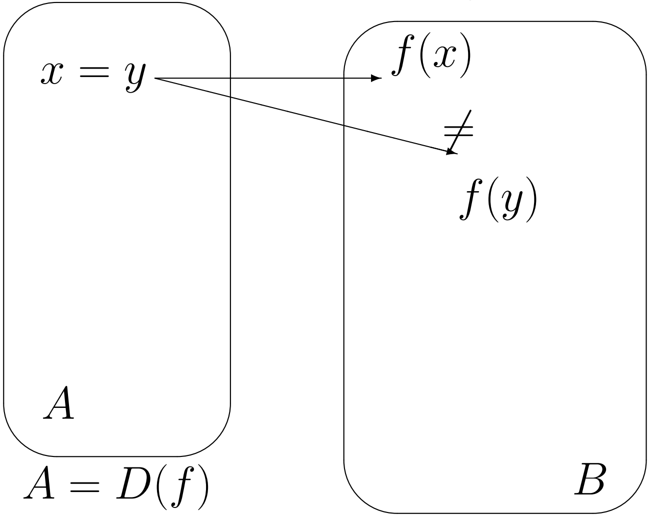
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

Как записать на «языке равенств» невозможность изображенной ситуации?

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

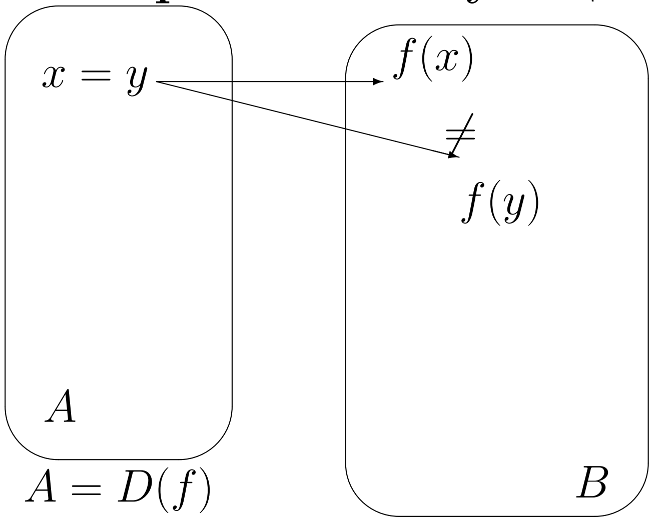
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

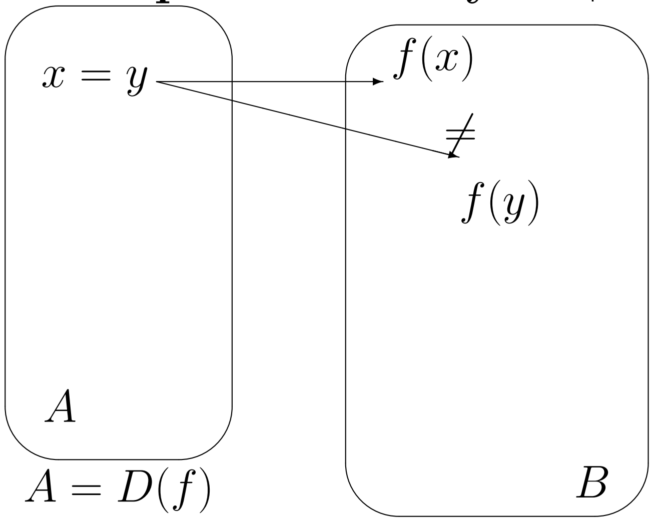
Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

Мы получили формулу. Что надо сделать в первую очередь?

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

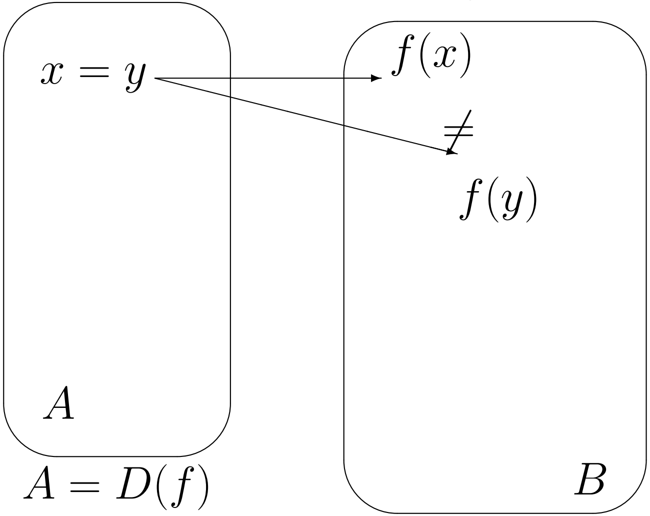
Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \tag{1}$$

Надо проверить правильность этой формулы. Что плохо в этой формуле?

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

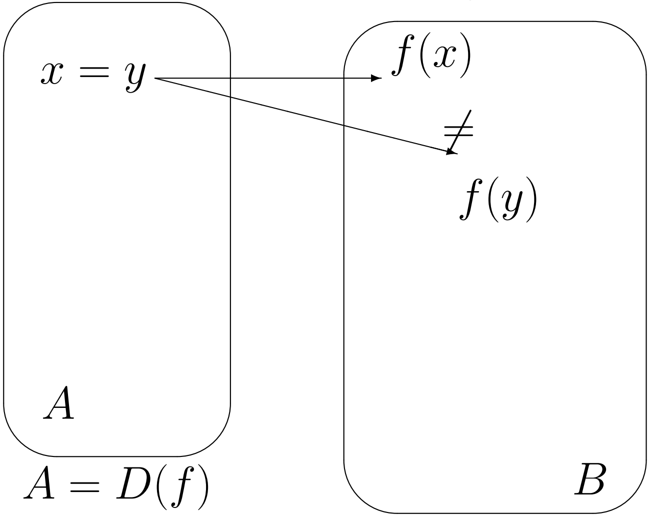
$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.
Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

$$x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y). \qquad (1)$$

Не указано явно, что $x$ и $y$ берутся из области определения функции $f$.

# I. Отображение. Функция




$A = D(f)$

$B = E(f) =$
$= \text{ОЗ}(f)$

Пусть каждому элементу множества $A$ сопоставлен один или несколько элементов из множества $B$.

Если каждому элементу из $A$ сопоставлен *только один* элемент из $B$, то отображение $f$ назовем **функцией**.

$$\begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \ \bigl(x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y)\bigr)\,.$$

## I.1. Определение функции

**Определение 1.** *Отображение $f$ называется* **функцией** *или* **однозначным отображением**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \Rightarrow f(x) = f(y)\Big), \tag{2}$$

*что равносильно*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \\ x = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(y), \tag{3}$$

## I.1. Определение функции

**Определение 1.** *Отображение $f$ называется* **функцией** *или* **однозначным отображением**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \ \big(x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y)\big)\,, \tag{2}$$

*что равносильно*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \\ x = y \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(y), \tag{3}$$

Можно привести формулировку на языке неравенств: *отображение называется однозначным тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \ \big(f(x) \neq f(y) \ \Rightarrow \ x \neq y\big)\,.$$

## I.1. Определение функции

Из наших рассуждений можно сделать вывод, что отображение мы фактически рассматриваем как **неопределяемое понятие**. На самом деле понятие «отображение» можно свести к понятию **«множество»**, но такое сведение представляет скорее академический, чем практический интерес. Поэтому нам сейчас проще ввести новое неопределяемое понятие, чем сводить его к известным понятиям, несмотря на то, что при этом мы, к сожалению, нарушаем принцип **«бритвы Оккама»**.

## I.2. Направления развития исследования?

Можно выделить следующие направления исследования.

## I.2. Направления развития исследования?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует изучить некоторые **частные виды функций**, в частности, **частные виды функций** натурального аргумента и **частные виды функций** действительнозначного аргумента, а также **алгебраические операции**, **булевы** и **логические** функции.

## I.2. Направления развития исследования?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует изучить некоторые **частные виды функций**, в частности, **частные виды функций** натурального аргумента и **частные виды функций** действительнозначного аргумента, а также **алгебраические операции**, **булевы** и **логические** функции.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

## I.2. Направления развития исследования?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует изучить некоторые **частные виды функций**, в частности, **частные виды функций** натурального аргумента и **частные виды функций** действительнозначного аргумента, а также **алгебраические операции**, **булевы** и **логические** функции.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

В соответствии со стратегией построения модели следует установить **стандартные формы задания функции**.

## I.2. Направления развития исследования?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует изучить некоторые **частные виды функций**, в частности, **частные виды функций** натурального аргумента и **частные виды функций** действительнозначного аргумента, а также **алгебраические операции**, **булевы** и **логические** функции.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

В соответствии со стратегией построения модели следует установить **стандартные формы задания функции**.

Сейчас не будем рассматривать применение других базовых стратегий: стратегии поиска аналогии, стратегии предвкушения, стратегии обогащения модели, стратегии смены ролей и приоритетов.

## I.2. Направления развития исследования?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует изучить некоторые **частные виды функций**, в частности, **частные виды функций** натурального аргумента и **частные виды функций** действительнозначного аргумента, а также **алгебраические операции**, **булевы** и **логические** функции.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

В соответствии со стратегией построения модели следует установить **стандартные формы задания функции**.

Наука работает только с информацией, имеющей стандартный, типовой вид. Поэтому начнём с...

## I.2. Направления развития исследования?

Воспользуемся **базовыми исследовательскими стратегиями**.

Согласно стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций следует изучить некоторые **частные виды функций**, в частности, **частные виды функций** натурального аргумента и **частные виды функций** действительнозначного аргумента, а также **алгебраические операции**, **булевы** и **логические** функции.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов приводит к идее выделения разных типов функций, введения **различных преобразований функций**.

В соответствии со стратегией построения модели следует установить **стандартные формы задания функции**.

Наука работает только с информацией, имеющей стандартный, типовой вид. Поэтому начнём с

выделения **стандартных форм задания функции**.

# II. «Стандартные» способы задания функции

Обычно применяются следующие типовые способы задания функции.

## II.1. Задание функции: формула

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.** Это наиболее часто встречающийся математике способ задания функции.

## II.1. Задание функции: формула

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.** Например, формула $f(x) = \sin^2 x$ представляет собой именно такой способ задания функции. Переменная, вместо которой надо подставлять элемент из области определения функции (в данном примере это $x$), называется **аргументом функции**. При этом явно указывается процедура *вычисления* значения $f(x)$ функции $f$ на аргументе $x$, точнее, при любом *значении аргумента*. Фактически этим способом мы указываем *правило* вычисления значения функции $f$ при произвольном значении аргумента $x$.

## II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

## II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

Например, если функция $f$ задана таблицей

| $x$ | $-3$ | $4$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

, то

$f(-3) =\quad$ , $\quad f(4) =\quad$ , $\quad f(2) =\quad$ ,

$D(f) =\qquad$ , $\quad E(f) =\qquad$ .

## II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

Например, если функция $f$ задана таблицей

| $x$ | $-3$ | $4$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

, то

$f(-3) = 0, \quad f(4) = \qquad , \quad f(2) = \quad ,$

$D(f) = \qquad\qquad , \quad E(f) = \qquad\qquad .$

# II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

Например, если функция $f$ задана таблицей

| $x$ | $-3$ | $4$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

, то

$f(-3) = 0, \quad f(4) = -1, \quad f(2) = \quad ,$

$D(f) = \qquad\qquad , \quad E(f) = \qquad\qquad .$

# II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

Например, если функция $f$ задана таблицей

| $x$ | $-3$ | $4$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

, то

$f(-3) = 0, \quad f(4) = -1, \quad f(2) = 1,$

$D(f) = \qquad\qquad\qquad, \quad E(f) = \qquad\qquad\qquad.$

## II.2. Задание функции: таблица значений ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

Например, если функция $f$ задана таблицей

| $x$ | $-3$ | $4$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

, то

$f(-3) = 0, \quad f(4) = -1, \quad f(2) = 1,$

$D(f) = \{-3, 4, 2\}, \quad E(f) = \qquad\qquad .$

## II.2. Задание функции: таблица значений ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Таблица значений функции одного аргумента состоит, как правило, из двух строк. В первой строке перечисляются *все (!)* элементы области определения, а во второй строке — соответствующие им значения функции, при этом соответствующее значение записывается непосредственно под значением аргумента.

Например, если функция $f$ задана таблицей

| $x$ | $-3$ | $4$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

, то

$f(-3) = 0, \quad f(4) = -1, \quad f(2) = 1,$

$D(f) = \{-3, 4, 2\}, \quad E(f) = \{0, -1, 1\}.$

## II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Следует отметить, что таблица не всегда имеет такой вид. У Вас, наверное, есть или была тетрадка, на задней обложке которой приведена таблица умножения. Она задана иначе. Отметим, что таблицей умножения задается функция $f(x, y) = x \cdot y$ от двух переменных, ее область определения состоит из *пар чисел*. Обычно при задании таблицей значений функции двух переменных (то есть функции $f$ такой, что $D(f) = A \times B$) эта таблица значений имеет следующий вид:

| $y \backslash x$ | $\dots$ | $x_i$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $y_j$ | $\dots$ | $f(x_i, y_j)$ | $\dots$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |

.

## II.2. Задание функции: таблица значений ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Например, для функции $f(x,y) = x \cdot y$, где $D(f) = \{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\}$ таблицу значений можно записать в виде

| $y \backslash x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

. Такой вид таблицы значений для функции двух переменных обычно удобнее таблицы из двух строчек:

| $(x,y)$ | $(-1;-1)$ | $(-1;0)$ | $(-1;1)$ | $(0;-1)$ | $(0;0)$ | $(0;1)$ | $(1;-1)$ | $(1;0)$ | $(1;1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x,y)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

## II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Отметим один важный факт: *таблицей, как правило, нельзя задавать функцию с бесконечной областью определения*, за исключением случая, когда

## II.2. Задание функции: таблица значений

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

Отметим один важный факт: *таблицей, как правило, нельзя задавать функцию с бесконечной областью определения*, за исключением случая, когда
функция имеет «регулярный вид», т.е. по фрагменту участку таблицы её значений можно понять соответствующую закономерность, как, например, для **арифметической** и **геометрической** прогрессий.

## II.3. Задание функции: график

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

**ГРАФИК.** **Получим определение графика функции?**

## II.3. Задание функции: график

**ВЫРАЖЕНИЕ или ФОРМУЛА.**

**ТАБЛИЦА.** Ее еще называют **таблицей значений**.

**ГРАФИК.** **Получим определение графика функции?**

**Определение 2. Графиком** *функции $f$ называется множество точек плоскости с координатами* $\big(x, f(x)\big)$.

**Рассмотрим пример?**

## II.4. Статические и динамические модели функции

При изучении этой главы до этого момента основная нагрузка приходилась, в основном, на левую половину мозга, отвечающую за логическое мышление. Для того чтобы усвоить материал, необходимо, чтобы подключилась правая половина мозга — образное мышление, интуиция и т.п. Надо, чтобы у Вас сформировалась система моделей изучаемого понятия. Мы предлагаем два типа «моделей» понятия функции.

# II.4. Статические и динамические модели функции

В **динамических** моделях функция $f$ представляется «черным ящиком», на вход которого подается $x$, а на выходе получаем $f(x)$.

## II.4. Статические и динамические модели функции

В **динамических** моделях функция $f$ представляется «черным ящиком», на вход которого подается $x$, а на выходе получаем $f(x)$.

Пример — задание функции выражением. Кроме привычных выражений типа $x^2 - 2x$, могут быть выражения других типов. Например, можно задать некоторую функцию такой *словесной* формулой: «отображение $h$ каждой цифре ставит в соответствие количество букв в русском слове, обозначающем эту цифру».

## II.4. Статические и динамические модели функции

В **динамических** моделях функция $f$ представляется «черным ящиком», на вход которого подается $x$, а на выходе получаем $f(x)$.

Пример — задание функции выражением. Кроме привычных выражений типа $x^2 - 2x$, могут быть выражения других типов. Например, можно задать некоторую функцию такой *словесной* формулой: «отображение $h$ каждой цифре ставит в соответствие количество букв в русском слове, обозначающем эту цифру».

Отличительная черта «динамических моделей»: четко выделено, куда надо подставлять элемент из области определения (например, при задании функции выражением этот элемент надо подставлять вместо аргумента функции), и где получим значение функции.

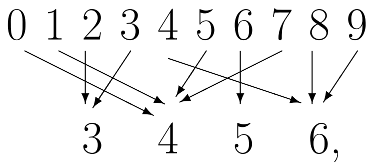
## II.4. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции $h$ можно поставить в соответствие

## II.4. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции $h$ можно поставить в соответствие

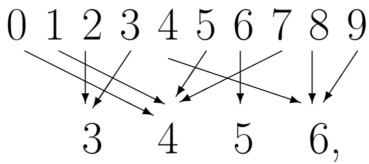
схему:



## II.4. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции $h$ можно поставить в соответствие

схему:

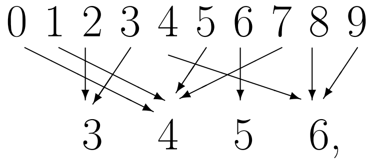



таблицу

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 4 | 4 | 3 | 3 | 6 | 4 | 5 | 4 | 6 | 6 |

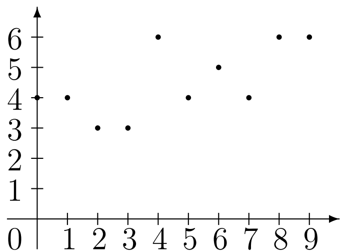
## II.4. Статические и динамические модели функции

В **статических** моделях каким-либо образом изображаем множества $D(f)$ и $E(f)$ и каким-либо образом указываем, как осуществляется отображение. Рассмотренной выше функции $h$ можно поставить в соответствие

схему: 


таблицу

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 4 | 4 | 3 | 3 | 6 | 4 | 5 | 4 | 6 | 6 |

или график 

## II.4. Статические и динамические модели функции

Таким образом, в статических моделях и значения аргумента, и значения отображения «размазаны», то есть не выделено «место, куда подставлять элемент» из области определения.

Чтобы найти $h(2)$ по вышеприведенной таблице, надо *найти* в первой строке число 2, и тогда в соответствующем столбце во второй строке находим значение функции — число 3. Если функция $h$ задана формулой (например: «цифре ставится в соответствие количество букв в русском слове, обозначающем эту цифру»), ситуация принципиально другая: к цифре «2» применяем эту процедуру, не требующую поиска цифры 2 в «объекте», соответствующем области определения функции (например, строке таблицы). Получаем, что числу 2 соответствует слово «два», вычисляем количество букв в нем: 3 и получаем значение $h(2)$.

**Рассмотрим пример?**

## II.4. Статические и динамические модели функции

Таким образом, в статических моделях и значения аргумента, и значения отображения «размазаны», то есть не выделено «место, куда подставлять элемент» из области определения.

Еще пример статической модели — график функции. Напомним, что **график функции** $h$ — *это множество точек плоскости с координатами* $(x, h(x))$.

**Рассмотреть пример?**

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Часто в учебниках, сборниках задач и экзаменационных билетах можно прочитать фразы типа «функция $\sin x$...» или «функция $f(x) = x^2$...» На самом деле в этих случаях следовало бы написать что-нибудь типа «функция sin» или соответственно «функция $f$, заданная *выражением* $f(x) = x^2$...», или «функция $f$, заданная *формулой* $f(x) = x^2$...».

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Что означает в последнем случае термин *выражение*?

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Что означает в последнем случае термин *выражение*?

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

Предполагается, что мы имеем дело с некоторым «алфавитом» и совокупностью грамматических правил, в соответствии с которыми некоторые «слова», составленные из «букв» этого алфавита, считаются грамматически правильными, а некоторые — «неправильными», то есть нарушающими правила используемой грамматики.

# II.5. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

*Грамматически правильно построенные слова называются* **выражениями***.*

Например, если речь идет о русском языке, то выражения — это слова, фразы, предложения и последовательности предложений, построенные с соблюдением формальных правил русского языка: орфографии, пунктуации и т.п.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

*Грамматически правильно построенные слова называются* **выражениями***.*

Нас сейчас не интересует *смысл* высказывания, в данный момент важна *формальная, грамматическая* правильность.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

*Грамматически правильно построенные слова называются* **выражениями**.

Нас сейчас не интересует *смысл* высказывания, в данный момент важна *формальная, грамматическая* правильность.

*У воробьев по шесть ног* — грамматически правильное «слово» (пробел между словами считается «буквой»), то есть эта фраза является выражением. Но это выражение является неверным по *смыслу*, то есть неверным с точки зрения *семантики*.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

*Грамматически правильно построенные слова называются* **выражениями**.

Нас сейчас не интересует *смысл* высказывания, в данный момент важна *формальная, грамматическая* правильность.

*У воробьев по шесть ног* — грамматически правильное «слово» (пробел между словами считается «буквой»), то есть эта фраза является выражением. Но это выражение является неверным по *смыслу* , то есть неверным с точки зрения *семантики*.

А слово *варобей* выражением не является, как и фраза *воробей, похожая на птички*, так как в последнем случае не согласуется род существительного (воробей — мужского рода) и прилагательного (окончание -ая в слове *похожая*).

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Под выражением понимается некоторое «слово», построенное в соответствии с правилами соответствующей грамматики.

*Грамматически правильно построенные слова называются* **выражениями**.

Есть свои грамматические правила для геометрических (а особенно технических) чертежей. Если речь идет о языке школьной математики, то выражения имеют вид $2\sin^2 x$, $1-\cos 2x$, $\log_{x-3}\left(x^2-1\right)+5\cos^3\sqrt{2x+3}<x-2$ и т.п. Слово $\sin(x]\cdot -2$ выражением не является.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Рассмотрим подробнее математические выражения (в рамках школьной математики). Некоторые «слова», то есть последовательности букв, могут иметь специальный смысл. Например, последовательность букв sin обычно обозначает отдельное слово. Для того чтобы отличить его от слова $sin$ в ситуации, когда оно обозначает *произведение* переменных $s, i, n$, точку, обозначающую умножение, лучше не опускать, и писать $s \cdot i \cdot n$.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Следует отличать понятия *выражение* и *формула*. Отметим, что **формула** — *это высказывание,* то есть *фраза, относительно которой осмысленным является вопрос о том, верна ли эта фраза* . Например, $x^2 - 1 = x$ — это формула, $5\vdots(x^2 + 1)$ и $4 < 2$ — тоже формулы. Для того чтобы фраза была осмысленной (иначе она не может быть высказыванием), надо, чтобы она была построена в соответствии с некоторыми грамматическими правилами. Таким образом, *формулы — это частный случай выражений.*

## II.5. Задание функции выражением. Формула

В математике среди выражений, кроме высказываний, особо выделяют еще **арифметические выражения** (это выражения типа $1+2\cdot 3$, $(5-1):2$, $\dfrac{7+2}{4}$ и т.п.) и **алгебраические выражения** (это выражения типа $x-y^2$, $\dfrac{x\left(x^2-\log_3 x\right)}{5^x}$ и т.п.).

## II.5. Задание функции выражением. Формула

В математике среди выражений, кроме высказываний, особо выделяют еще **арифметические выражения** (это выражения типа $1+2\cdot 3$, $(5-1):2$, $\dfrac{7+2}{4}$ и т.п.) и **алгебраические выражения** (это выражения типа $x-y^2$, $\dfrac{x\left(x^2-\log_3 x\right)}{5^x}$ и т.п.).

Арифметические и алгебраические выражения представляют собой частный случай **термов**.

**Терм** — термин из *математической логики*.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

В математике среди выражений, кроме высказываний, особо выделяют еще **арифметические выражения** (это выражения типа $1 + 2 \cdot 3, \quad (5-1) : 2, \quad \dfrac{7+2}{4}$ и т.п.) и **алгебраические выражения** (это выражения типа $x - y^2, \quad \dfrac{x\left(x^2 - \log_3 x\right)}{5^x}$ и т.п.).

*Формулы* в языках программирования часто называют **логическими выражениями**. Таким образом, например, $x - 2 \leq x^2$ — это логическое выражение или формула. Среди логических выражений особо отметим равенство и неравенство. **Левой частью** неравенства или равенства называется алгебраическое выражение, стоящее *слева* от соответствующего знака отношения: $\leq, <, >, \geq, =, \neq$. Соответственно **правой частью** неравенства или равенства называется алгебраическое выражение, стоящее *справа* от соответствующего знака отношения: $\leq, <, >, \geq, =, \neq$.

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Рассмотрим *смысл* выражений типа $\lg\left(x^2+1\right)-5$ и т.п. Выражаясь «по-научному», обратимся к *семантике* математических выражений, задающих функции. Фраза *функция $f$ задана выражением* $f(x)=x^2-x$ означает, что мы явно указываем способ вычисления *значения функции $f$* на произвольном элементе области определения: надо этот элемент подставить вместо аргумента функции, в данном примере — вместо буквы $x$.

**Рассмотрим пример?**

## II.5. Задание функции выражением. Формула

Ясно, что выражения $f(x) = x^2 - x$ и $f(t) = t^2 - t$ задают одну и ту же функцию, просто в первом случае в качестве аргумента функции используется символ $x$, а во втором — $t$. На результате *вычисления значения* функции это не отразится. И в том, и в другом случае получим $f(3) = 3^2 - 3 = 6$, просто в первом случае мы числом 3 заменили букву $x$, а во втором — букву $t$. Из этого примера следует, что обозначение аргумента может быть практически любым (кроме естественных исключений: $0, 1, \ldots, \cos, \ldots$), при этом функция не изменится. То есть формулы $f(x) = x^2 - x, \quad f(t) = t^2 - t, \quad f(s) = s^2 - s$ и т.п. задают *одну и ту же функцию* $f$.

# II.6. Тождественные преобразования

Заметим, что для $f(x) = x^2 - x$ при вычислении $f(3) = 3^2 - 3 = 6$ мы не оставили в ответе «слово» $3^2 - 3$, а преобразовали его в соответствии с правилами арифметики (эти правила носят грамматический характер). Но многие из таких преобразований можно проделать не только *после* подстановки числа вместо аргумента, но и *до* этого, «в общем виде».

## II.6. Тождественные преобразования

Ясно, что выражение $x(x-1)$ задает ту же функцию, что и выражение $x^2-x$, потому что при каждом значении переменной $x$ значение выражения $x(x-1)$ равно значению выражения $x^2-x$. Таким образом, к выражению, задающему функцию, можно применять некоторые преобразования. Такими преобразованиями, например, являются: вынесение за скобку общего множителя, применение формул сокращенного умножения, формул типа $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и т.п. Поставим вопрос в общем виде: какие именно преобразования допустимы?

## II.6. Тождественные преобразования

Ясно, что выражение $x(x-1)$ задает ту же функцию, что и выражение $x^2 - x$, потому что при каждом значении переменной $x$ значение выражения $x(x-1)$ равно значению выражения $x^2 - x$. Таким образом, к выражению, задающему функцию, можно применять некоторые преобразования. Такими преобразованиями, например, являются: вынесение за скобку общего множителя, применение формул сокращенного умножения, формул типа $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и т.п. Поставим вопрос в общем виде: какие именно преобразования допустимы?

Ответ таков: только такие, применение которых приводит к выражению, задающему ту же функцию.

## II.6. Тождественные преобразования

**Определение 3.** *Преобразование алгебраического выражения назовем* **тождественным**, *если преобразованное алгебраическое выражение задает ту же функцию, что и исходное алгебраическое выражение.*

# II.6. Тождественные преобразования

**Определение 3.** *Преобразование алгебраического выражения назовем* **тождественным**, *если преобразованное алгебраическое выражение задает ту же функцию, что и исходное алгебраическое выражение.*

Чем богаче доступный «арсенал» тождественных преобразований, тем проще решать уравнения, неравенства и другие задачи. Именно поэтому так много внимания в школе уделяется формальным правилам алгебры чисел и алгебры числовых функций, в частности, формулам сокращенного умножения, а также тригонометрическим тождествам.

# III. Частные виды функций: общий случай

В соответствии со стратегий приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций, рассмотрим некоторые частные виды функций.

## III.1. Отображение на множество

**Определение 4.** *Говорят, что функция $f : A \to B$ отображает множество $A$* ***на множество*** *$B$ или $f$ — это* **сюръекция**, *если у каждого элемента из $B$ есть* ***прообраз*** *в $U$.*

Слишком много слов и нет равенств...

## III.1. Отображение <u>на множество</u>

**Определение 4.** *Говорят, что функция $f : A \to B$ отображает множество $A$* <u>***на множество***</u> <u>$B$</u> *или $f$ — это* **сюръекция**, *если у каждого элемента из $B$ есть* ***прообраз*** *в $U$, т.е.*

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad b = f(a).$$

Вот теперь хорошо!

## III.2. Взаимно однозначные функции

Итак, мы рассмотрели ситуацию, когда у каждого элемента из области определения имеется только один **образ**.

Естественно рассмотреть ситуацию, когда

## III.2. Взаимно однозначные функции

Итак, мы рассмотрели ситуацию, когда у каждого элемента из области определения имеется только один **образ**.

Естественно рассмотреть ситуацию, когда у каждого элемента из $E(f)$ имеется только один **прообраз**.

## III.2. Взаимно однозначные функции

Итак, мы рассмотрели ситуацию, когда у каждого элемента из области определения имеется только один **образ**.

Естественно рассмотреть ситуацию, когда у каждого элемента из $E(f)$ имеется только один **прообраз**.

Такая функция называется взаимно однозначной.

## III.2. Взаимно однозначные функции

**Определение 5.** *Функция $f$ называется* **взаимно однозначной функцией**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)\Big). \tag{4}$$

# III.2. Взаимно однозначные функции

**Определение 5.** *Функция $f$ называется* **взаимно однозначной функцией**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)\Big). \tag{4}$$

Характеристическое свойство на языке неравенств можно записать, например, в виде:

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x \neq y \;\Leftrightarrow\; f(x) \neq f(y)\Big). \tag{5}$$

## III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция* $f$ *является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого* $y$ *из* $E(f)$ *уравнение* $f(x) = y$ *имеет единственное решение.*

**Доказательство**

## III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция $f$ является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

**Доказательство** этой теоремы следует непосредственно из определения и расшифровки с помощью правил перевода на **«язык равенств и неравенств»**.

## III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция $f$ является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

**Доказательство необходимости.** Пусть для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

## III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция $f$ является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

**Доказательство необходимости.** Пусть для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

## III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция $f$ является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

**Доказательство необходимости.** Пусть для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

$$\begin{cases} f(a) = y \\ f(b) = y \end{cases} \Rightarrow \ a = b,$$

откуда

# III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция $f$ является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

**Доказательство необходимости.** Пусть для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

$$\begin{cases} f(a) = y \\ f(b) = y \end{cases} \Rightarrow \; a = b,$$

откуда

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b,$$

то есть $f$ — взаимно однозначная функция.

## III.3. Критерий взаимной однозначности

**Теорема 1.** *Функция $f$ является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

**Доказательство необходимости.** Пусть для любого $y$ из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.

Словосочетание *единственное* решение означает, что

$$\begin{cases} f(a) = y \\ f(b) = y \end{cases} \Rightarrow \ a = b,$$

откуда

$$f(a) = f(b) \ \Rightarrow \ a = b,$$

то есть $f$ — взаимно однозначная функция.

Достаточность доказывается аналогично.

# IV. Некоторые функции натурального аргумента

Рассмотрим несколько основных функций с областью определения $\mathbb{N}$ или $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

# IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! =$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа $n$ называется произведение $n!$ всех натуральных чисел от 1 до $n$, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. По определению полагают, что $0! = 1$.*

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 =$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа $n$ называется произведение $n!$ всех натуральных чисел от 1 до $n$, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. По определению полагают, что $0! = 1$.*

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! =$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа $n$ называется произведение $n!$ всех натуральных чисел от 1 до $n$, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. По определению полагают, что $0! = 1$.*

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа $n$ называется произведение $n!$ всех натуральных чисел от 1 до $n$, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. По определению полагают, что $0! = 1$.*

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot$

# IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

# IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

$5! =$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$

## IV.1. Факториал

**Определение 6. Факториалом** *натурального числа* $n$ *называется произведение* $n!$ *всех натуральных чисел от 1 до* $n$, *т.е.* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *По определению полагают, что* $0! = 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

# IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! =$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot$

# IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! =$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,
$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

К сожалению, к этому обозначению нельзя применять «правило подстановки»: например, если нам надо вычислить $(2n)!!$ при $n = 3$ мы не можем заменить

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

К сожалению, к этому обозначению нельзя применять «правило подстановки»: например, если нам надо вычислить $(2n)!!$ при $n = 3$ мы не можем заменить $(2n)!!$ на $(2 \cdot 3)!!$.

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

К сожалению, к этому обозначению нельзя применять «правило подстановки»: например, если нам надо вычислить $(2n)!!$ при $n = 3$ мы не можем заменить $(2n)!!$ на $(2 \cdot 3)!!$.

Можно применить обозначение

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

К сожалению, к этому обозначению нельзя применять «правило подстановки»: например, если нам надо вычислить $(2n)!!$ при $n = 3$ мы не можем заменить $(2n)!!$ на $(2 \cdot 3)!!$.

Можно применить обозначение $(2n)!!\big|_{n=3} = 2 \cdot 6 = 12$.

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

$(n^2+1)!!\big|_{n=3} =$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,
$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,
$(n^2+1)!!\Big|_{n=3} = 2 \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

$(n^2+1)!!\Big|_{n=3} = 2 \cdot 5 \cdot$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

$(n^2+1)!!\Big|_{n=3} = 2 \cdot 5 \cdot 10 =$

## IV.2. Двойной факториал

**Определение 7. Двойной факториал** *определяется формулой* $f(n)!! = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$.

Например, $(2n-1)!! = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-1)-1) \cdot (2n-1)$,

$n^2!! = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n^2$,

$(n^2+1)!!\Big|_{n=3} = 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$.

## IV.3. Последовательность

**Определение 8. Последовательность** — *функция, область определения которой равна множеству натуральных чисел (область значений — произвольная).*

## IV.3. Последовательность

**Определение 8. Последовательность** — *функция, область определения которой равна множеству натуральных чисел (область значений — произвольная).*

Последовательность можно было бы задать таблицей

| $n$ | 1 | 2 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|
| $f(n)$ | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ |

Однако

## IV.3. Последовательность

**Определение 8. Последовательность** — *функция, область определения которой равна множеству натуральных чисел (область значений — произвольная).*

Однако для задания последовательности часто применяется специальный способ, более удобный для этих функций.

Первая строка у всех таких функций одинакова. Поэтому иногда последовательность задают, указывая список ее значений при $n = 1$, $n = 2$ и т.п. Например, вместо «последовательность $f$», где $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2, \ldots$, обычно пишут «последовательность $a_1, a_2, \ldots$», причем $a_n$ называют **$n$-м членом** этой последовательности.

### IV.3.1. Арифметическая прогрессия

**Определение 9.** *Пусть* $d$ *— фиксированное число.* **Арифметическая прогрессия** *— это такая последовательность* $a_1, a_2, \ldots,$ *что* $a_n = a_{n-1} + d$ *для любого номера* $n$*. Число* $d$ *называется* **разностью** *этой арифметической прогрессии.*

## IV.3.1. Арифметическая прогрессия

**Определение 9.** *Пусть $d$ — фиксированное число.* **Арифметическая прогрессия** *— это такая последовательность $a_1, a_2, \ldots,$ что $a_n = a_{n-1} + d$ для любого номера $n$. Число $d$ называется* **разностью** *этой арифметической прогрессии.*

Очевидно, что для арифметической прогрессии с первым членом $a_1$ и разностью $d$ $n$-й член можно вычислить по формуле $a_1 + (n-1)d$.

## IV.3.1. Арифметическая прогрессия

**Определение 9.** *Пусть $d$ — фиксированное число.* **Арифметическая прогрессия** *— это такая последовательность $a_1, a_2, \ldots,$ что $a_n = a_{n-1} + d$ для любого номера $n$. Число $d$ называется* **разностью** *этой арифметической прогрессии.*

Очевидно, что для арифметической прогрессии с первым членом $a_1$ и разностью $d$ $n$-й член можно вычислить по формуле $a_1 + (n-1)d$.

Утверждение, что последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$ является арифметической прогрессией на «язык равенств» переводится следующим образом:

$$x_2 - x_1 = x_{n+1} - x_n.$$

## IV.3.2. Геометрическая прогрессия

**Определение 10.** *Пусть $q$ — фиксированное число.* **Геометрическая прогрессия** *— это такая последовательность $b_1, b_2, \ldots,$ что $b_n = b_{n-1} \cdot q$ для любого номера $n$. Число $q$ называется ее* **знаменателем***.*

## IV.3.2. Геометрическая прогрессия

**Определение 10.** *Пусть $q$ — фиксированное число.* **Геометрическая прогрессия** *— это такая последовательность $b_1, b_2, \ldots,$ что $b_n = b_{n-1} \cdot q$ для любого номера $n$. Число $q$ называется ее* **знаменателем**.

Очевидно, что для арифметической прогрессии с первым членом $a_1$ и разностью $d$ $n$-й член можно вычислить по формуле $a_1 + (n-1)d$.

У геометрической прогрессии с первым членом $b_1$ и знаменателем $q$ $n$-й член равен $b_1 q^{n-1}$.

## IV.3.2. Геометрическая прогрессия

**Определение 10.** *Пусть $q$ — фиксированное число.* **Геометрическая прогрессия** *— это такая последовательность $b_1, b_2, \ldots$, что $b_n = b_{n-1} \cdot q$ для любого номера $n$. Число $q$ называется ее* **знаменателем**.

Очевидно, что для арифметической прогрессии с первым членом $a_1$ и разностью $d$ $n$-й член можно вычислить по формуле $a_1 + (n-1)d$.

У геометрической прогрессии с первым членом $b_1$ и знаменателем $q$ $n$-й член равен $b_1 q^{n-1}$.

Утверждение, что последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, является арифметической прогрессией на «язык равенств» переводится следующим образом:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

## IV.3.3. Теорема о сумме конечного числа членов прогрессии

**Теорема 2.** *Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии равна* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\, n}{2} =$

$$= a_1 + (a_1 + d) + \ldots + \Big(a_1 + (n-1)d\Big) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d, \tag{6}$$

*а сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии равна*

$$b_1 + b_1 + \ldots + b_n = b_1 \left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{7}$$

## IV.3.4. Сумма всех членов геометрической прогрессии

**Теорема 2.** *Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии равна* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\, n}{2} =$

$$= a_1 + (a_1 + d) + \ldots + \Big(a_1 + (n-1)d\Big) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d, \qquad (6)$$

*а сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии равна*

$$b_1 + b_1 + \ldots + b_n = b_1 \left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (7)$$

***Отсюда следует, что при*** $|q| < 1$

$$b_1 + \ldots + b_n + \ldots = b_1 \left(1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots\right) = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \qquad (8)$$

## V. Некоторые виды функций вещественнозначного аргумента

Рассмотрим некоторые виды вещественнозначных функций вещественнозначного аргумента, т.е. функций $f$ таких, что $\mathbf{D}(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathbf{E}(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}$.

## V.1. Четные и нечетные функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E}(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 11.** *Функция $f$ называется* **четной**, *если для любого $x \in \mathbf{D}(\mathbf{f})$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.*

## V.1. Четные и нечетные функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E(f)} \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 11.** *Функция $f$ называется* **четной**, *если для любого $x \in \mathbf{D(f)}$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.*

**Определение 12.** *Функция $f$ называется* **нечетной**, *если для любого $x \in \mathbf{D(f)}$ выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.*

## V.2. Ограниченные и неограниченные функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E(f)} \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 13.** *Функция $f$ называется* **ограниченной сверху** *на множестве $D \subseteq \mathbf{D(f)}$, если существует такое число $M$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.*

## V.2. Ограниченные и неограниченные функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E(f)} \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 13.** *Функция $f$ называется* **ограниченной сверху** *на множестве $D \subseteq \mathbf{D(f)}$, если существует такое число $M$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.*

**Определение 14.** *Функция $f$ называется* **ограниченной снизу** *на множестве $D \subseteq \mathbf{D(f)}$, если существует такое число $M$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \geq M$.*

## V.2. Ограниченные и неограниченные функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E(f)} \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 13.** *Функция $f$ называется* **ограниченной сверху** *на множестве $D \subseteq \mathbf{D(f)}$, если существует такое число $M$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.*

**Определение 14.** *Функция $f$ называется* **ограниченной снизу** *на множестве $D \subseteq \mathbf{D(f)}$, если существует такое число $M$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \geq M$.*

**Определение 15.** *Функция $f$ называется* **ограниченной** *на множестве $D \subseteq \mathbf{D(f)}$, если существует такое число $M$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.*

# V.3. Периодические функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E(f)} \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 16.** *Функция $f$ называется* **периодической** *на $\mathbf{D(f)} \subseteq \mathbb{R}$, если существует такое положительное число $T$ (т.е. $T > 0$), что для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.*

## V.3. Периодические функции

Рассмотрим вещественнозначные функции, т.е. для рассматриваемой функции $f$ выполняется $\mathbf{E(f)} \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 16.** *Функция* $f$ *называется* **периодической** *на* $\mathbf{D(f)} \subseteq \mathbb{R}$, *если существует такое положительное число* $T$ *(т.е.* $T > 0$*), что для любого* $x \in D(f)$ *выполняется равенство* $f(x+T) = f(x)$.

**Определение 17.** *Если для периодической функции* $f$ *существует минимальное такое положительное число* $T$, *что* $f(x+T) = f(x)$, *то такое число* $T$ *называется* **периодом**.

## V.4. Монотонные функции

**Определение 18.** *Функция* $\alpha$ *называется* **возрастающей** *на множестве* $M \subseteq \mathbf{D}(\alpha)$, *если*

$$\forall x, y \quad \{x,\ y\} \subseteq M \ \Rightarrow\ (x < y \ \Rightarrow\ \alpha(x) < \alpha(y))\,, \tag{9}$$

**неубывающей**, *если*

$$\forall x, y \quad \{x,\ y\} \subseteq M \ \Rightarrow\ (x < y \ \Rightarrow\ \alpha(x) \leq \alpha(y))\,, \tag{10}$$

**невозрастающей**, *если*

$$\forall x, y \quad \{x,\ y\} \subseteq M \ \Rightarrow\ (x < y \ \Rightarrow\ \alpha(x) \geq \alpha(y))\,, \tag{11}$$

**убывающей**, *если*

$$\forall x, y \quad \{x,\ y\} \subseteq M \ \Rightarrow\ (x < y \ \Rightarrow\ \alpha(x) > \alpha(y))\,. \tag{12}$$

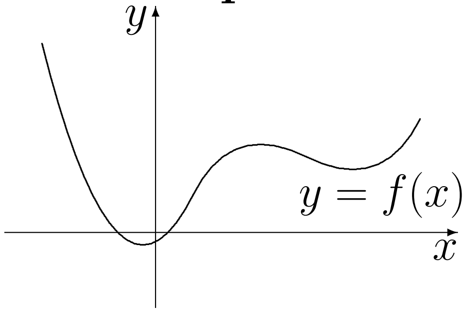
## V.4. Монотонные функции

**Определение 19.** ***Возрастающие***, ***неубывающие***, ***невозрастающие*** *и* ***убывающие*** *на множестве* $M \subseteq \mathbf{D}(\alpha)$ *функции называются* **монотонными** *на* $M$.

# VI. Преобразования функций

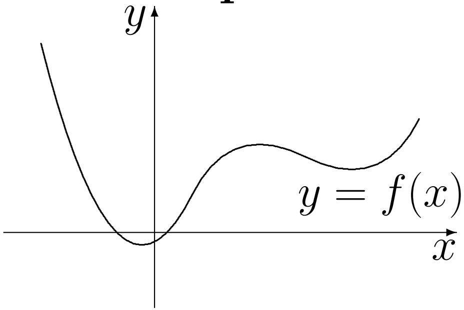
В соответствии **предложенными направлениями исследований** рассмотрим преобразования функций как результат применения **стратегии перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

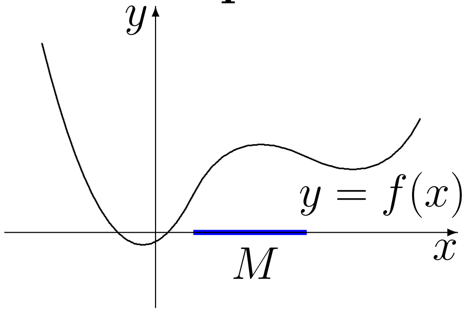
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

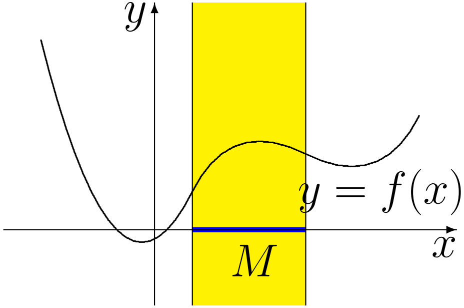
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

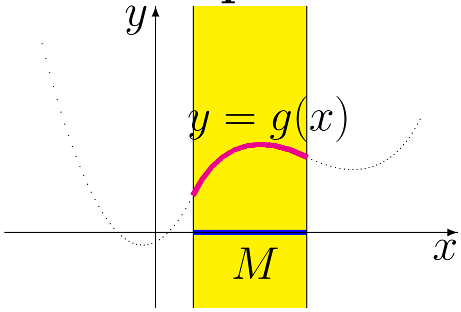
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

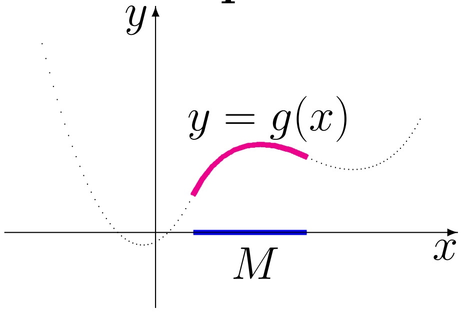
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

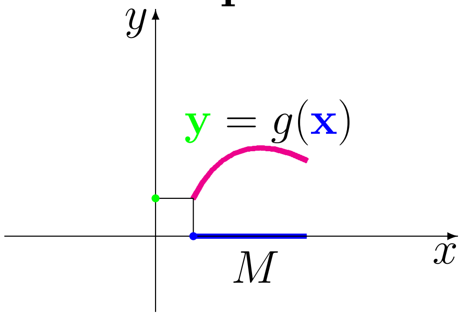
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

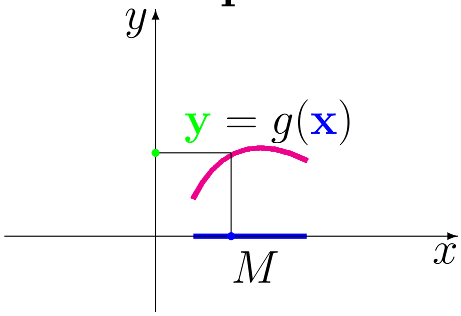
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

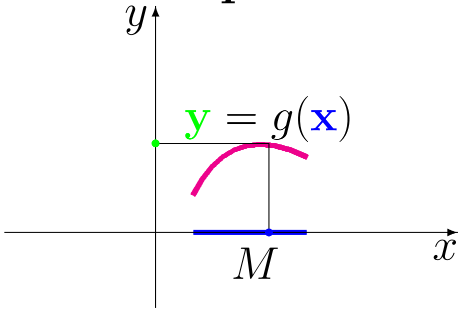
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

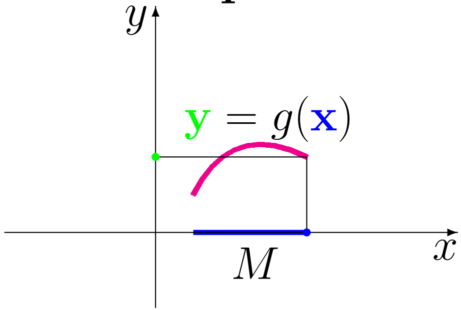
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

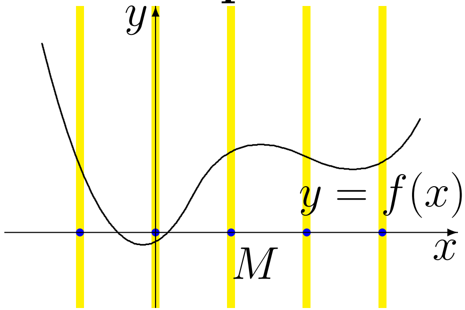
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

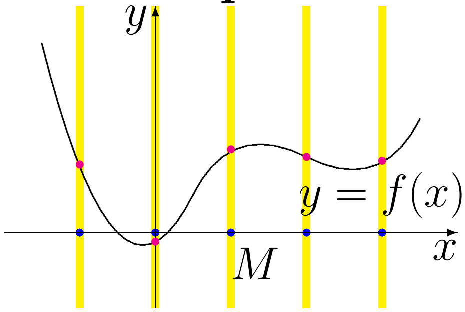



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

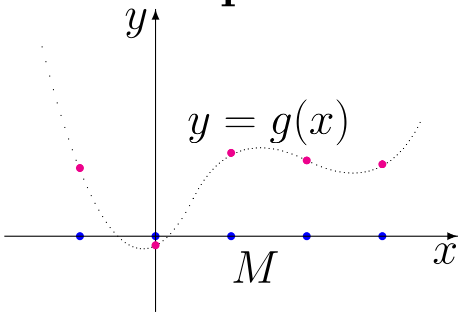



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

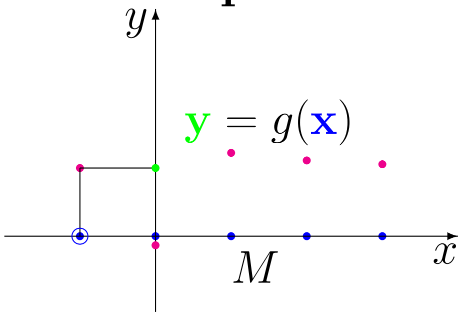



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

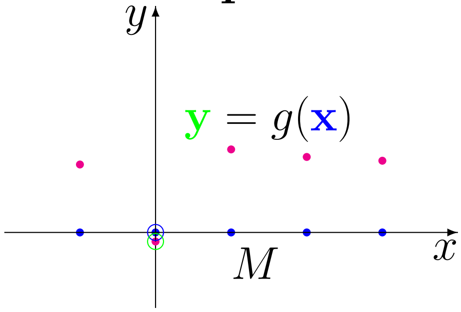



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

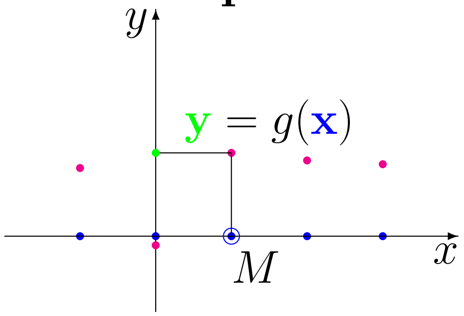



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

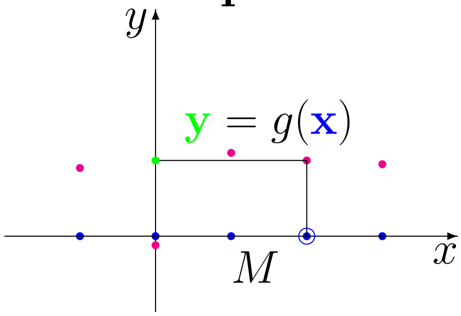



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

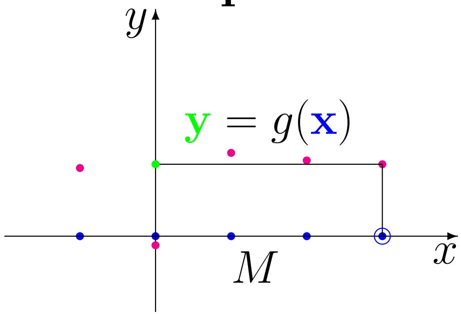



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

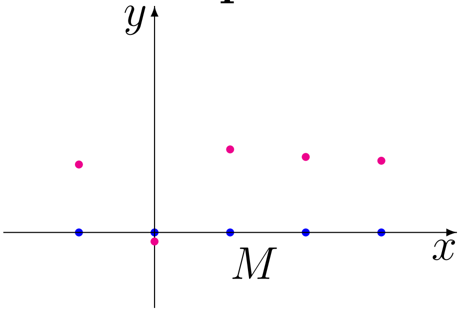



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Рассмотрим функцию, которая определена на $M$ и принимает на $M$ те же значения, что и функция $f$.

$M$ может быть и «дискретным».

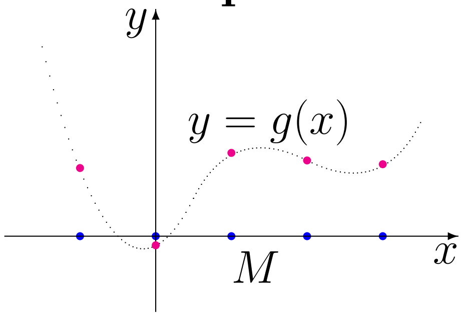
# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D}(\mathbf{f})$, не входящие в $M$.

# VI.1. Ограничение функции на подмножество



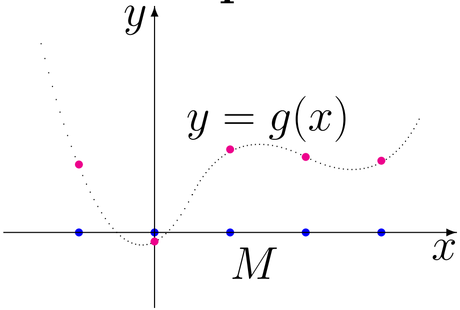

Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D(f)}$, не входящие в $M$.

Такая функция $g$ называется *ограничением функции $f$ на множество $M$.*

Сформулируем определение **ограничения функции на множество**.

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

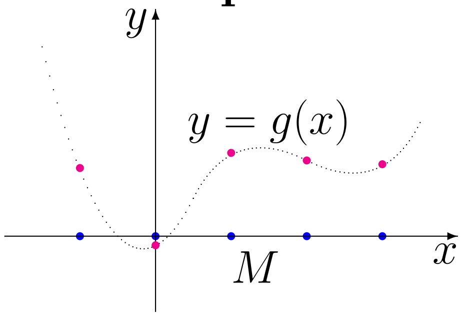



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D(f)}$, не входящие в $M$.

**Определение 20.** *Пусть $f$ — функция и $M \subseteq D(f)$ (т.е. $M$ — подмножество **области определения функции**)...*

# VI.1. Ограничение функции на подмножество

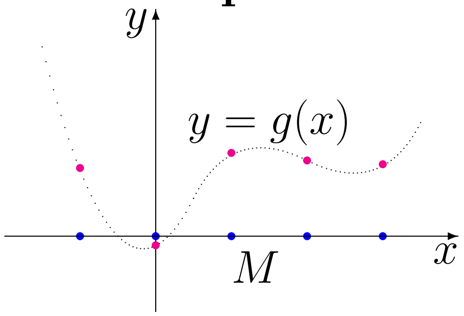



Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D}(\mathbf{f})$, не входящие в $M$.

**Определение 20.** *Пусть $f$ — функция и $M \subseteq D(f)$. Функция $g$ называется* **ограничением** *функции $f$ на множество $M$, если...*

# VI.1. Ограничение функции на подмножество



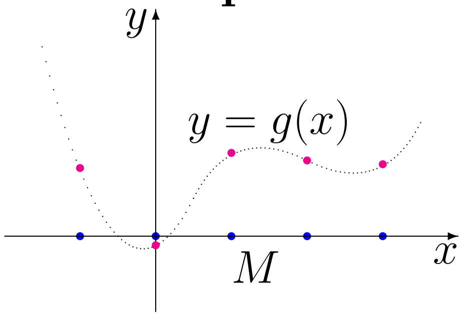

Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D(f)}$, не входящие в $M$.

**Определение 20.** *Пусть $f$ — функция и $M \subseteq D(f)$. Функция $g$ называется* **ограничением** *функции $f$ на множество $M$, если*

$$\begin{cases} D(g) = M, \\ \ldots \end{cases}$$

# VI.1. Ограничение функции на подмножество



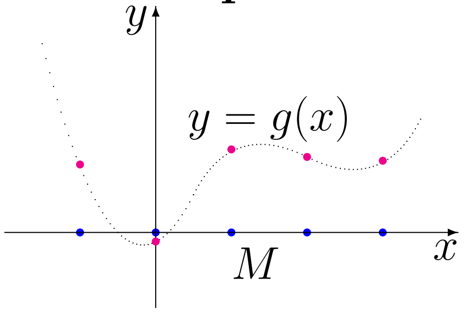

Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D(f)}$, не входящие в $M$.

**Определение 20.** *Пусть $f$ — функция и $M \subseteq D(f)$. Функция $g$ называется* **ограничением** *функции $f$ на множество $M$, если*

$$\begin{cases} D(g) = M, \\ \forall x \ \Big( x \in M \Rightarrow \ \ldots \qquad\qquad \Big). \end{cases}$$

# VI.1. Ограничение функции на подмножество




Допустим, что $M \subseteq \mathbf{D(f)}$.

Функция $g$ отличается от $f$ только тем, что мы «забываем», как выглядят образы элементов из $\mathbf{D(f)}$, не входящие в $M$.

**Определение 20.** *Пусть $f$ — функция и $M \subseteq D(f)$. Функция $g$ называется* **ограничением** *функции $f$ на множество $M$, если*

$$\begin{cases} D(g) = M, \\ \forall x \ \left( x \in M \ \Rightarrow \ g(x) = f(x) \right). \end{cases} \tag{12}$$

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

В школьном курсе вместо термина *суперпозиция (композиция) функций* используют термин *сложная функция*. Разберемся, что это такое, и попробуем сформулировать четкое определение. Рассмотрим ситуацию, когда *значение* функции $f$ подставляется в качестве *значения аргумента* в функцию $g$. Например, функция, заданная выражением $5x-3$, «составлена» из двух функций, первая из которых умножает значение аргумента на 5, а вторая — вычитает из полученного результата число 3.

# VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции $f$ и $g$. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию $h$, последовательно соединяя $f$ и $g$:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g} \xrightarrow{\quad h \quad} g(f(x))$$

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции $f$ и $g$. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию $h$, последовательно соединяя $f$ и $g$:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g} \xrightarrow{h} g(f(x))$$

«Наденем общий кожух» на полученный «механизм».

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции $f$ и $g$. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию $h$, последовательно соединяя $f$ и $g$:

$$x \longrightarrow \boxed{\boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g}}^{\,h} \longrightarrow g(f(x))$$

«Наденем общий кожух» на полученный «механизм».

# VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Пусть нам заданы функции $f$ и $g$. Можно считать, что это некоторые «механизмы», на которые «надет кожух», чтобы мы не отвлекались на их устройство:

$$x \to \boxed{f} \to f(x), \quad y \to \boxed{g} \to g(y).$$

«Составим» новую функцию $h$, последовательно соединяя $f$ и $g$:

$$x \longrightarrow \boxed{\ \boxed{f} \to f(x) \to \boxed{g}\ }^{\,h} \longrightarrow g(f(x))$$

«Наденем общий кожух» на полученный «механизм».

Полученная функция $h$ называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* $f$ и $g$, или *композицией функций* $f$ и $g$.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется …*

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется …*

Теперь нужен термин, обозначающий более общее понятие.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется ...*

Из вышесказанного можно сделать вывод, что суперпозиция функций — это

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется* ...

Из вышесказанного можно сделать вывод, что суперпозиция функций — это функция.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется ...*

Из вышесказанного можно сделать вывод, что суперпозиция функций — это функция.

Итак, получаем: *суперпозицией функций называется функция ...*

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция ...*

Теперь надо задать эту функцию.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция ...*

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа:

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция ...*

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа: *выражение*, *таблица* и *график*.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция …*

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа:
*выражение*, *таблица* и *график*.

Два последних способа применимы к довольно узкому набору функций. Поэтому следует попробовать задать функцию $h$ выражением.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция ...*

Теперь надо задать эту функцию. Как задается функция? Выше указаны три наиболее общеупотребительных способа:
*выражение*, *таблица* и *график*.

Два последних способа применимы к довольно узкому набору функций. Поэтому следует попробовать задать функцию $h$ выражением.

Для этого мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента $x$ с помощью значений исходных функций.*

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция …*

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента $x$ с помощью значений исходных функций.*

Возникает чувство беспомощности, дискомфорт: нам надо работать с тремя функциями, на них надо как-то ссылаться.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция …*

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента $x$ с помощью значений исходных функций.*

Возникает чувство беспомощности, дискомфорт: нам надо работать с тремя функциями, на них надо как-то ссылаться.

В математике обычно в качестве названия произвольного объекта используется либо специальный термин, либо буква.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций называется функция ...*

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента $x$ с помощью значений исходных функций.*

Возникает чувство беспомощности, дискомфорт: нам надо работать с тремя функциями, на них надо как-то ссылаться.

В математике обычно в качестве названия произвольного объекта используется либо специальный термин, либо буква.

Обозначим исходные функции, например, через $f$ и $g$.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций $f$ и $g$ называется функция ...*

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента $x$ с помощью функций $f$ и $g$.*

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

Теперь попробуем дать определение суперпозиции функций. Итак, в соответствии с **одним из «шаблонов»** пишем, например:

*суперпозицией функций $f$ и $g$ называется функция ...*

Для того, чтобы задать эту функцию, мы должны указать, *как вычислить значение получаемой функции на данном значении аргумента $x$ с помощью функций $f$ и $g$.*

Для этого надо сначала вычислить $f(x)$ и потом то, что получилось, подставить в качестве значения аргумента в функцию $g$. В результате получим $g\left(f(x)\right)$.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

**Определение 21. Суперпозицией** *или* **композицией** *функций* $f$ *и* $g$ *называется функция* $h$, *заданная формулой* $h(x) = g(f(x))$.

## VI.2. Суперпозиция (композиция) функций

**Определение 21. Суперпозицией** *или* **композицией** *функций $f$ и $g$ называется функция $h$, заданная формулой $h(x) = g(f(x))$.*

В данной работе мы, для сокращения записей, будем обозначать суперпозицию функций символом $\circ$, то есть суперпозиция функций $f$ и $g$ — это функция $f \circ g$. Здесь $f \circ g$ надо воспринимать как отдельное слово, подобно тому, как мы воспринимаем обозначения sin, log и т.п. То есть нельзя, например, в выражении $\dfrac{f \circ g}{g}$ «сокращать» на $g$.

**Рассмотрим пример?**

## VI.3. Обратная функция

До сих пор мы акцентировали внимание на проблеме нахождения *значения* функции на данном *значении аргумента*, то есть на нахождении *образа элемента*. Но, как обычно, при появлении какой-либо задачи появляется обратная, в некотором смысле, задача. В данном случае это задача нахождения *значения аргумента* функции по *значению этой функции*, то есть *прообраза* элемента.

## VI.3. Обратная функция

До сих пор мы акцентировали внимание на проблеме нахождения *значения* функции на данном *значении аргумента*, то есть на нахождении *образа элемента*. Но, как обычно, при появлении какой-либо задачи появляется обратная, в некотором смысле, задача. В данном случае это задача нахождения *значения аргумента* функции по *значению этой функции*, то есть *прообраза* элемента.

Естественно назвать *обратной функцией* функцию, которая каждому элементу $y$ из $E(f)$ ставит в соответствие его прообраз, то есть такой элемент $x \in D(f)$, что $f(x) = y$. Сформулируем строгое определение обратной функции.

## VI.3. Обратная функция

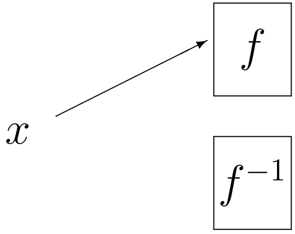
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда* ... Как записать характеристическое условие для функции $f^{-1}$?

## VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».

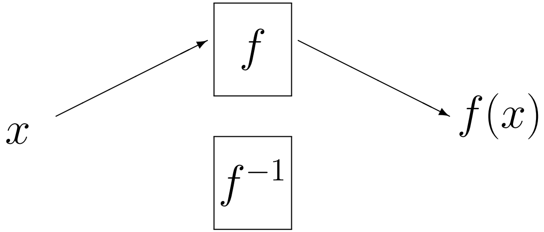
# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда ...* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



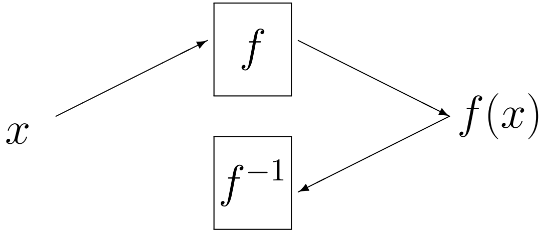
# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



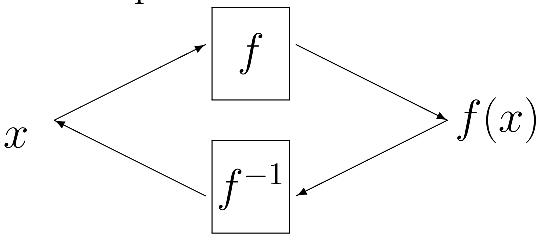
# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



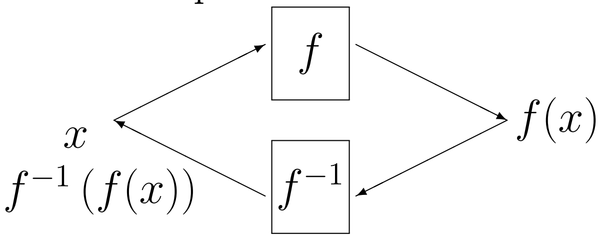
# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



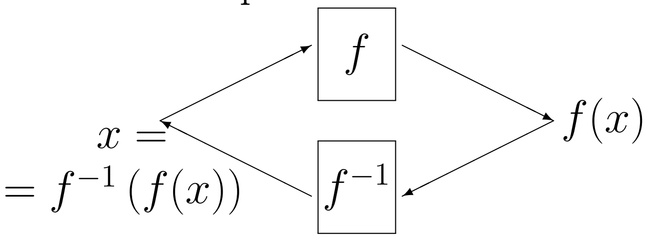
# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



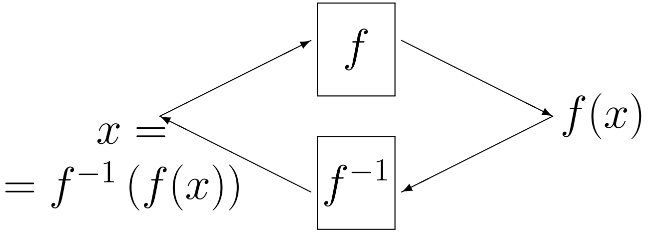
# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда* … Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».



# VI.3. Обратная функция

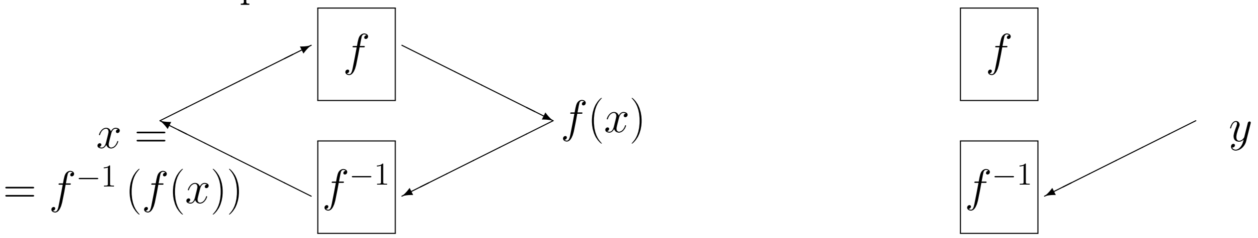
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

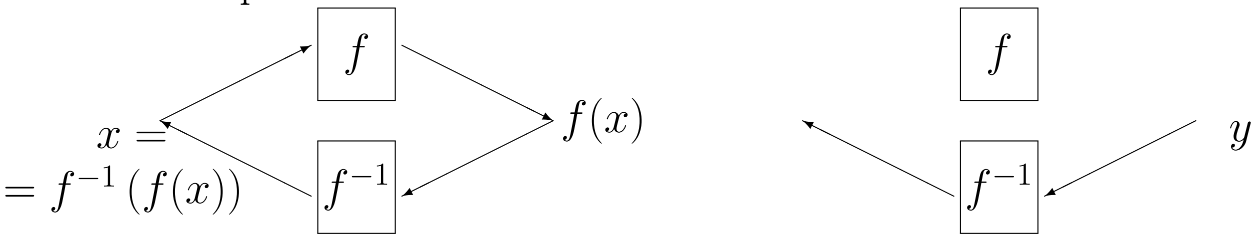
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

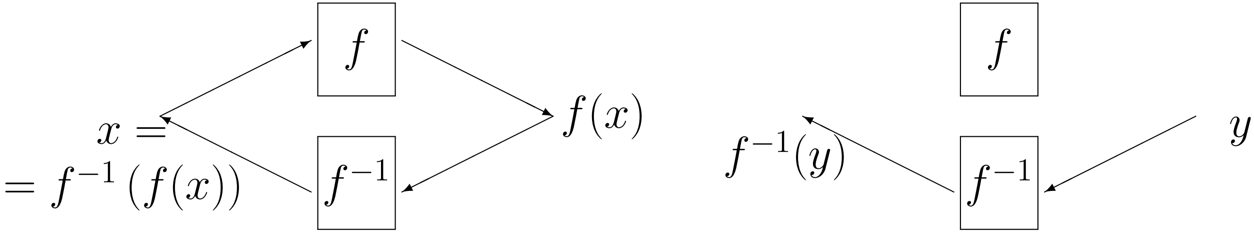
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда* ... Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

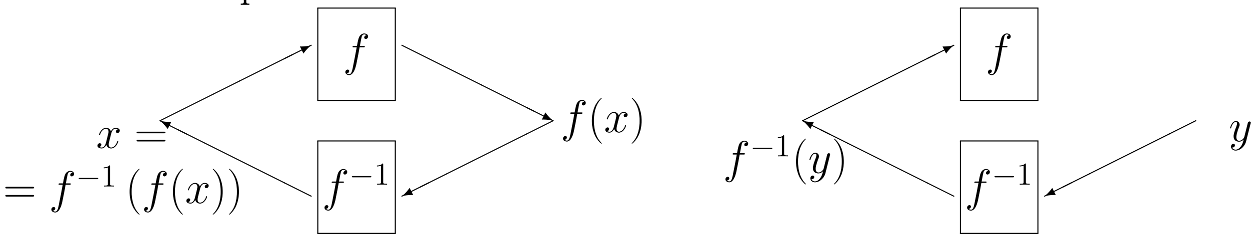
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

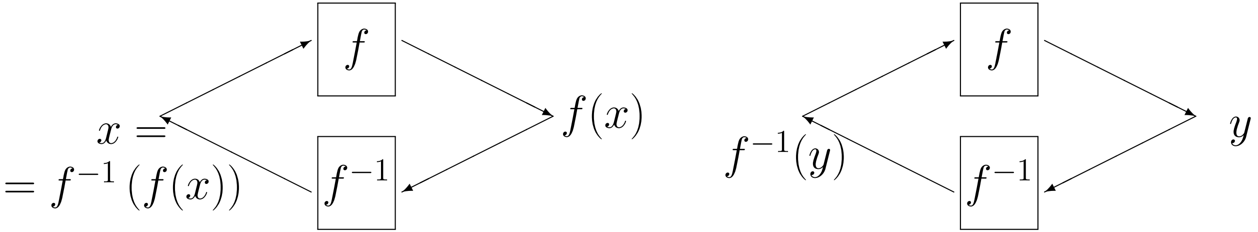
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

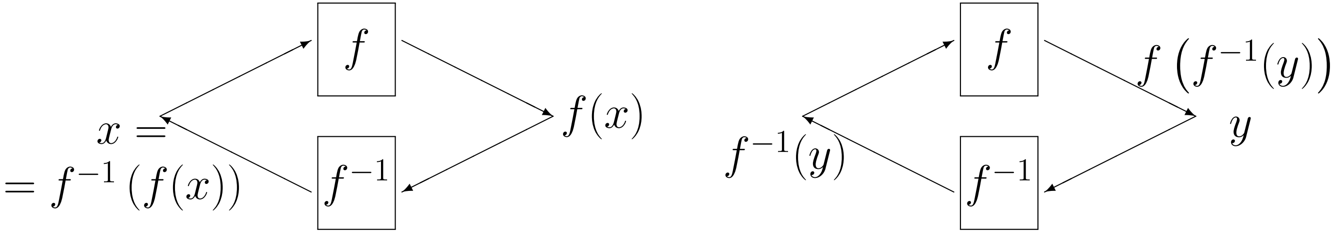
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда ...* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

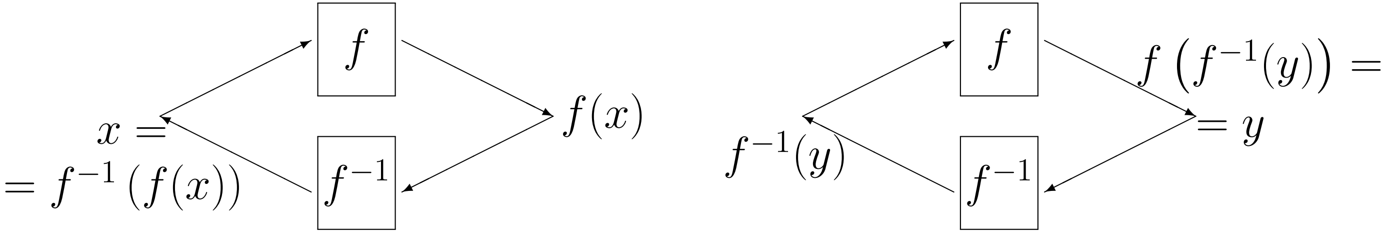
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

# VI.3. Обратная функция

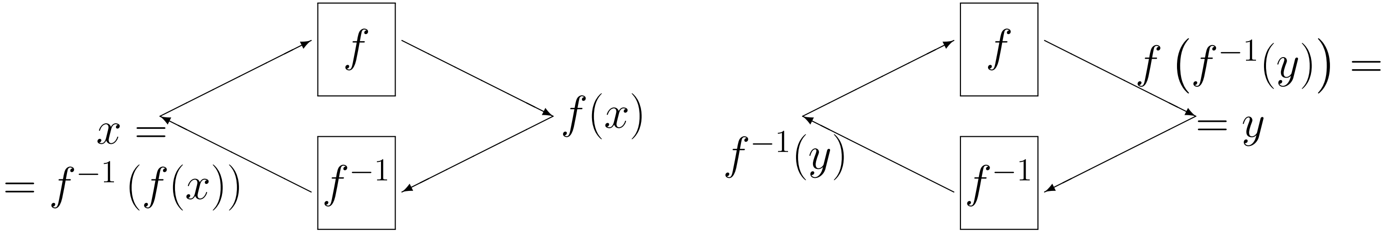
В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда ...* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$.

# VI.3. Обратная функция

В соответствии с **одним из «шаблонов»**, начинаем: *функция* $f^{-1}$ *называется обратной к функции* $f$ *тогда и только тогда, когда …* Надо сформулировать характеристическое свойство «на языке равенств и неравенств».




Значит, характеристическое свойство можно представить равенством $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

## VI.3. Обратная функция

Приведенная выше формулировка слишком громоздкая (и к тому же некорректная). Можно предложить более короткую и корректную формулировку:

**Определение 22.** *Функция $g$ называется* **обратной** *к функции $f$ в области $D$, если для любого $x$ из $D$ и любого $y = f(x)$ имеют место тождества $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.*

> Здесь $f^{-1}$ — это, вообще говоря, не $\frac{1}{f(x)}$!

Рассмотреть пример?

# VII. Теоремы об обратной функции

Все теоремы данного раздела легко доказываются с помощью **рекомендаций для поиска доказательства**.

# VII.1. Теорема о взаимной обратности

**Теорема 3 (о взаимной обратности).** *Если функция $f$ имеет на множестве $D$ обратную функцию $f^{-1}$, то функция $f^{-1}$ имеет обратную на множестве*[1] $\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in D \right\}$, *причем* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

[1] Точнее, обратная функция имеется у **ограничения** функции $f$ на это множество.

## VII.2. Теорема о функции, обратной к суперпозиции

**Теорема 4 (о функции, обратной к суперпозиции).** *Если* $h(x) = f\left(g(x)\right)$, *причем функция* $g$ *имеет на множестве* $D$ *обратную функцию* $g^{-1}$, *и функция* $f$ *имеет обратную на множестве*

$$\left\{g(x) \,\middle|\, x \in D\right\},$$

*то функция* $h$ *имеет обратную* $h^{-1}$ *на множестве* $D$, *причем* $h^{-1}(y) = g^{-1}\left(f^{-1}(y)\right)$.

## VII.3. Критерий существования обратной функции

**Теорема 5.** ***Функция*** *$f$ имеет* ***обратную*** *на множестве $D$ тогда и только тогда, когда $f$ является* ***взаимно однозначной*** *на множестве $D$.*

## VII.4. Некоторые взаимно обратные функции

Если $a$ — нечетное целое число, то к *степенной функции* $x^a$ обратной является *степенная функция* $x^{1/a}$.

К *показательной функции* $a^x$ обратной является *логарифмическая функция* $\log_a x$.

По теореме о взаимной обратности получаем, что обратной к *логарифмической функции* является *показательная функция*.

# VII.4. Некоторые взаимно обратные функции

К тригонометрическим функциям обратные существуют не на всей оси. Можно сформулировать принцип выбора «стандартного участка взаимной однозначности». Этот интервал или отрезок должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Его длина должна быть максимально возможной среди всех отрезков (интервалов), на которых у этой тригонометрической функции есть обратная.

2. Он должен быть смещен как можно дальше вправо.

3. Он должен или включать в себя точку $x = 0$, или граничить с этой точкой.

# VII.4. Некоторые взаимно обратные функции

Таким образом, получаем следующий набор функций, обратных к тригонометрическим:

$\sin:$ обратная функция на $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ — это arcsin;

$\cos:$ обратная функция на $D = [0, \pi]$ — это arccos;

$\mathrm{tg}:$ обратная функция на $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — это arctg;

$\mathrm{ctg}:$ обратная функция на $D = (0, \pi)$ — это arcctg.

## VII.4. Некоторые взаимно обратные функции

Таблицу значений обратной функции легко получить из таблицы значений исходной функции. Действительно, то, что было *значением функции* $f$, для функции $f^{-1}$ является *значением аргумента*, и наоборот. Поэтому для получения таблицы значений функции $f^{-1}$ надо, разумеется, просто поменять местами строки таблицы значений функции $f$.

# VII.4. Некоторые взаимно обратные функции

Таблицу значений обратной функции легко получить из таблицы значений исходной функции. Действительно, то, что было *значением функции* $f$, для функции $f^{-1}$ является *значением аргумента*, и наоборот. Поэтому для получения таблицы значений функции $f^{-1}$ надо, разумеется, просто поменять местами строки таблицы значений функции $f$.

Не всякая функция имеет обратную во всей области определения. Например, у $x^2$ обратной функции в $\mathbb{R}$ нет: функция $\sqrt{y}$ является обратной к функции $x^2$ в области $x \geq 0$, а функция $-\sqrt{y}$ является обратной к функции $x^2$ в области $x \leq 0$.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?