Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Идеалы полугрупп и колец

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1 идеалов полугруппы 5

Пример 2 построения идеала в полугруппе 35

Пример 3 произведения и пересечения идеалов полугруппы 56

Пример 4 объединения идеалов в полугруппе 72

Пример 5 произведения и пересечения идеалов кольца 81

Пример 6 суммы идеалов в кольце 97

Пример 7 нахождения главного идеала кольца 108

Пример 8 представления НОД в виде линейной комбинации 128

Идеалы полугрупп 153

Задача I.1 154

Задача I.2 155

Задача I.3 156

Понятие «кольцо» 156

Задача II.4 157

Идеалы колец 157

Задача III.5 158

Задача III.6 159

Задача III.7 160

Задача III.8 161

Применения к НОД, НОК 161

Задача IV.9 162

Задача IV.10 163

Ответы и решения 164

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** P.

Решение.

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы. Ясно, что левыми идеалами являются нулевой идеал $I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы. Ясно, что левыми идеалами являются нулевой идеал $I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ и полугруппа P.

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** P.

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** P.

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** P.

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** P*.*

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы. Продолжая в том же духе, получаем

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Найдем левые идеалы. Продолжая в том же духе, получаем

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Нетрудно проверить, что список левых идеалов имеет вид:

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad P.$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Аналогично получаем список правых идеалов:

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** P*.*

Решение. Аналогично получаем список правых идеалов:

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$I_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad P.$$

Пример 1. *Рассмотрим полугруппу*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние ***идеалы полугруппы*** *P.*

Решение. Двусторонние идеалы:

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad P.$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример**?

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. С чего начать?

Пример 2. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I.

Как задать I?

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I.

Как задать I?

I — это подмножество множества $\mathbb{N}$.

Задать множество — значит

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I.

Как задать I?

I — это подмножество множества $\mathbb{N}$.

Задать множество — значит описать его элементы.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.

Полугрупповая операция — умножение. Поэтому для чисел m и 6 напрашивается рассмотреть

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.

Полугрупповая операция — умножение. Поэтому для чисел m и 6 напрашивается рассмотреть произведение или частное.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$. По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$. По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$. Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.

Пример 2. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$. По определению **идеала полугруппы** $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$. Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

Пример 2. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$. По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} =$$

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.
По определению **идеала полугруппы** $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} =$$

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.
По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} = \left\{6n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.
По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} = \left\{6n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq J.$$

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$. По определению **идеала полугруппы** $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} = \left\{6n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.
По определению **идеала полугруппы** $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} = \left\{6n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**.
Ясно, что это минимальный идеал, содержащий 6.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.
По определению **идеала полугруппы** $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} = \left\{6n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**.
Ясно, что это минимальный идеал, содержащий 6.

Все ли в решении оптимально?

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Решение. Обозначим искомый идеал через I. Возьмём $m \in I$.
По определению **идеала полугруппы** $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.
Поэтому $\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq I$.
Проверим, что $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{6kx \,\middle|\, \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\right\} = \left\{6n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является **идеалом**.
Ясно, что это минимальный идеал, содержащий 6.

Мы не использовали m, можно его не вводить.

Пример 2. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал****, включающий в себя число 6.*

Ответ. Искомый идеал можно представить в виде

$$\left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} = \{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ \ldots\}\,.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 3. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \Big\{6k \,\Big|\, k \in \mathbb{N}\Big\}$ *и* $J = \Big\{9m \,\Big|\, m \in \mathbb{N}\Big\}$.

Решение.

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \Big\{6k \,\Big|\, k \in \mathbb{N}\Big\}$ *и* $J = \Big\{9m \,\Big|\, m \in \mathbb{N}\Big\}$.

Решение.

$$I \cdot J =$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cdot \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

Пример 3. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cdot \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{54mk \,\middle|\, \{k,\ m\} \subseteq \mathbb{N}\right\} =$$

Пример 3. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cdot \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{54mk \,\middle|\, \{k,\ m\} \subseteq \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{ 6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ *и* $J = \left\{ 9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N} \right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{ 54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$I \cap J =$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow$$

Пример 3. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \;\Rightarrow$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \;\Rightarrow\; 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \;\Rightarrow\; 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = I \cap J.$$

Пример 3. *В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \{54;\ 108;\ 162;\ 216;\ \ldots\}$$

$$\left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = I \cap J.$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \{54;\ 108;\ 162;\ 216;\ \ldots\}$$

$$\{18;\ 36;\ 54;\ 72;\ \ldots\} = \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = I \cap J.$$

Пример 3. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \{54;\ 108;\ 162;\ 216;\ \ldots\} \subseteq$$

$$\subseteq \{18;\ 36;\ 54;\ 72;\ \ldots\} = \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = I \cap J.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M =$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \; ? \; J =$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \cup J =$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \cup J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$\left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = K.$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \cup J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ \ldots\} \cup \{9;\ 18;\ 27;\ 36;\ \ldots\}$$

$$\left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = K.$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \cup J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ \ldots\} \cup \{9;\ 18;\ 27;\ 36;\ \ldots\} \ ?\ \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ \ldots\} =$$

$$= \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = K.$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \cup J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ \ldots\} \cup \{9;\ 18;\ 27;\ 36;\ \ldots\} \neq \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ \ldots\} =$$

$$= \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = K.$$

Пример 4. *В* ***полугруппе*** $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Решение.

$$M = I \cup J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ \ldots\} \cup \{9;\ 18;\ 27;\ 36;\ \ldots\} \neq \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ \ldots\} =$$

$$= \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = K.$$

Например, $3 \in K$, но $3 \notin I \cup J$.

Вернёмся к лекции?

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

Пример 5. *В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J =$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cdot \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

Пример 5. *В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cdot \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{54m_1k_1 + \ldots + 54m_sk_s \,\middle|\, \{k,\ m\} \subseteq \mathbb{Z}\right\} =$$

Пример 5. *В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{ 6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ и $J = \left\{ 9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{ 6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cdot \left\{ 9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \left\{ 54m_1k_1 + \ldots + 54m_sk_s \,\middle|\, \{k,\ m\} \subseteq \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J =$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \;\Rightarrow$$

Пример 5. *В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \;\Rightarrow\; 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$I \cap J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$6k = 9m \;\Rightarrow\; 2k = 3m \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \;\Rightarrow\; 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} ?$$

$$? \ \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = I \cap J.$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = \{54;\, -54;\ 108;\ \ -108;\ 162;\ -162;\ \ldots\}\ ?$$

$$?\ \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = I \cap J.$$

Пример 5. *В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов*** $I = \left\{ 6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ *и* $J = \left\{ 9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{ 54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{54; -54;\ 108;\ \ -108;\ 162;\ -162;\ \ldots\} \ ?$$

$$?\ \{18;\ -18;\ 36;\ -36;\ 54;\ -54;\ 72;\ -72;\ \ldots\} = \left\{ 18n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = I \cap J.$$

Пример 5. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *найдите* ***произведение*** *и пересечение* ***идеалов*** $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \left\{54n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = \{54; -54;\ 108;\ \ -108;\ 162;\ -162;\ \ldots\} \subseteq$$

$$\subseteq \{18;\ -18;\ 36;\ -36;\ 54;\ -54;\ 72;\ -72;\ \ldots\} = \left\{18n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = I \cap J.$$

Сравните с результатами **решения** задачи 3.

Вернёмся к лекции?

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M =$$

$$= \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I \,?\, J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \,?\, \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I \ ? \ J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \ ? \ \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} \ ? \ \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

Пример 6. *В* **кольце** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* **идеал** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* **идеалом** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I \mathbin{?} J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \mathbin{?} \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} \mathbin{?} \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

$3 = \underbrace{?}_{\in I} + \underbrace{?}_{\in J}$,

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I \mathbin{?} J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \mathbin{?} \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} \mathbin{?} \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$*.*

Решение.

$$M = I \ ?\ J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \ ?\ \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} \ ?\ \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$

$-15 = \underbrace{?}_{\in I} + \underbrace{?}_{\in J},$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M, *включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$. *Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I \; ? \; J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \; ? \; \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} \; ? \; \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$

$-15 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{(-9)}_{\in J} \in M,$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I + J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} + \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} + \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$

$-15 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{(-9)}_{\in J} \in M, \ldots$

Пример 6. *В* ***кольце*** $\mathbb{Z}$ *натуральных чисел найдите минимальный* ***идеал*** M*, включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли* M *с* ***идеалом*** $K = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$*. Выразите* M *через* $I = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *и* $J = \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Решение.

$$M = I + J = \left\{6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} + \left\{9m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{6;\ -6;\ 12;\ -12;\ \ldots\} + \{9;\ -9;\ 18;\ -18;\ \ldots\} =$$

$$= \{\pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 15;\ \pm 18;\ \ldots\} = \left\{3n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = K.$$

Сравните с результатами **решения** задачи 4.

Вернёмся к лекции?

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ слагаемых}} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ слагаемых}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ слагаемых}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ c_1'' & c_2'' & c_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ c_1'' & c_2'' & c_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 0 \\ b_1'' & 0 & 0 \\ c_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 \\ c''_1 & c''_2 & c''_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 0 \\ b_1'' & 0 & 0 \\ c_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} p_1' & p_2' & p_3' \\ q_1' & q_2' & q_3' \\ r_1' & r_2' & r_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1'' & p_2'' & p_3'' \\ q_1'' & q_2'' & q_3'' \\ r_1'' & r_2'' & r_3'' \end{pmatrix} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 0 \\ b_1'' & 0 & 0 \\ c_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} p_1' & 0 & 0 \\ q_1' & 0 & 0 \\ r_1' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1'' & p_2'' & p_3'' \\ q_1'' & q_2'' & q_3'' \\ r_1'' & r_2'' & r_3'' \end{pmatrix} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 0 \\ b_1'' & 0 & 0 \\ c_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} p_1' & 0 & 0 \\ q_1' & 0 & 0 \\ r_1' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1'' & p_2'' & p_3'' \\ q_1'' & q_2'' & q_3'' \\ r_1'' & r_2'' & r_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1'p_1'' & p_1'p_2'' & p_1'p_3'' \\ q_1'p_1'' & q_1'p_2'' & q_1'p_3'' \\ r_1'p_1'' & r_1'p_2'' & r_1'p_3'' \end{pmatrix},$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1p''_1 & p'_1p''_2 & p'_1p''_3 \\ q'_1p''_1 & q'_1p''_2 & q'_1p''_3 \\ r'_1p''_1 & r'_1p''_2 & r'_1p''_3 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 0 \\ b_1'' & 0 & 0 \\ c_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1'p_1'' & p_1'p_2'' & p_1'p_3'' \\ q_1'p_1'' & q_1'p_2'' & q_1'p_3'' \\ r_1'p_1'' & r_1'p_2'' & r_1'p_3'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m + a_1' + a_1'' + p_1'p_1'' & a_2' + p_1'p_2'' & a_3' + p_1'p_3'' \\ b_1'' + q_1'p_1'' & q_1'p_2'' & q_1'p_3'' \\ c_1'' + r_1'p_1'' & r_1'p_2'' & r_1'p_3'' \end{pmatrix} =$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 0 \\ b_1'' & 0 & 0 \\ c_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1'p_1'' & p_1'p_2'' & p_1'p_3'' \\ q_1'p_1'' & q_1'p_2'' & q_1'p_3'' \\ r_1'p_1'' & r_1'p_2'' & r_1'p_3'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m + a_1' + a_1'' + p_1'p_1'' & a_2' + p_1'p_2'' & a_3' + p_1'p_3'' \\ b_1'' + q_1'p_1'' & q_1'p_2'' & q_1'p_3'' \\ c_1'' + r_1'p_1'' & r_1'p_2'' & r_1'p_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v & \alpha & \beta \\ w & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

$$= \left\{ \middle| \right\}.$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v & \alpha & \beta \\ w & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix} \middle| \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}.$$

Пример 7. *В кольце* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *матриц размерности* 3×3 *найти минимальный идеал, содержащий* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v & \alpha & \beta \\ w & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \{u_i,\ v,\ w_2, \alpha,\ \beta,\ \gamma\} \subseteq \mathbb{R} \right\}.$$

Вернемся к лекции?

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} & 6 \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} \underline{108} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3\cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \hline 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6\cdot 18,$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3\cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} \underline{108} & 6 \\ 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6\cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} & \\ \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \hline 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \hline 6 & \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \hline 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

Число 12 делится на 6 нацело. Значит, 6 — НОД чисел 378 и 120.

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} \underline{108} & 6 \\ 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 1 \\ 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$6 = 18 - 1 \cdot 12 =$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} \underline{108} & 6 \\ 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 1 \\ 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 3 \\ 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} \underline{108} & 6 \\ 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 1 \\ 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) = 7 \cdot 18 - 1 \cdot 120 =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) = 7 \cdot 18 - 1 \cdot 120 =$$
$$= 7 \cdot (378 - 3 \cdot 120) - 1 \cdot 120 =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \hline 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) = 7 \cdot 18 - 1 \cdot 120 =$$
$$= 7 \cdot (378 - 3 \cdot 120) - 1 \cdot 120 = 7 \cdot 378 - 22 \cdot 120.$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \cline{2-2} 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \cline{2-2} 108 & 6 \\ \hline 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$6 = 7 \cdot 378 - 22 \cdot 120.$$

Вернёмся к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.166.) Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2. Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE, где E — **единичная матрица**.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.169.) Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Задача I.3. (Ответ приведен на стр.176.) Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.182.) Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.202.) Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.243.) Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Задача III.7. (Ответ приведен на стр.259.) Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Задача III.8. (Ответ приведен на стр.267.) Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Задача IV.9. (Ответ приведен на стр.281.) Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Задача IV.10. (Ответ приведен на стр.287.) Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2. Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE, где E — **единичная матрица**.

Задача 1. Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2. Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE, где E — **единичная матрица**.

Ответ.

Задача 1. Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2. Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE, где E — **единичная матрица**.

Ответ. Идеалами полугруппы $\mathcal{P}$ являются множества A и G.

Решение задачи 2.

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:
$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix},$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix},$$

следовательно, идеал полугруппы $\mathcal{M}$, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со множеством всех вырожденных матриц размерности 2×2.

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix},$$

следовательно, идеал полугруппы $\mathcal{M}$, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со множеством всех вырожденных матриц размерности 2×2.

Для множеств $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ и $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ результат тот же самый.

Идеал полугруппы $\mathcal{M}$ идеал, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, совпадает со всей полугруппой.

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Идеалами, кроме P, являются множества:

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Идеалами, кроме P, являются множества:

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2, у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Идеалами, кроме P, являются множества:

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} +$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} +$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) +$$
$$+ a_{i1}\left(-b_{11} - b_{12}\right) + a_{i2}\left(-b_{21} - b_{22}\right) + \left(-a_{i1} - a_{i2}\right)\left(-b_{13} - b_{23}\right) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $\quad c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) +$$
$$+ a_{i1}\left(-b_{11} - b_{12}\right) + a_{i2}\left(-b_{21} - b_{22}\right) + \left(-a_{i1} - a_{i2}\right)\left(-b_{13} - b_{23}\right) =$$
$$= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} -$$
$$- a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - \left(a_{i1} + a_{i2}\right)\left(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})\right) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) +$$

$$+ a_{i1}\left(-b_{11} - b_{12}\right) + a_{i2}\left(-b_{21} - b_{22}\right) + \left(-a_{i1} - a_{i2}\right)\left(-b_{13} - b_{23}\right) =$$

$$= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} -$$

$$- a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - \left(a_{i1} + a_{i2}\right)\left(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})\right) = 0.$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) +$$

$$+ a_{i1}\left(-b_{11} - b_{12}\right) + a_{i2}\left(-b_{21} - b_{22}\right) + \left(-a_{i1} - a_{i2}\right)\left(-b_{13} - b_{23}\right) =$$

$$= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} -$$

$$-a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - \left(a_{i1} + a_{i2}\right)\left(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})\right) = 0.$$

Аналогично можно показать, что сумма всех элементов столбца матрицы $\mathbf{C}$ равна 0.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) +$$

$$+ a_{i1}\left(-b_{11} - b_{12}\right) + a_{i2}\left(-b_{21} - b_{22}\right) + \left(-a_{i1} - a_{i2}\right)\left(-b_{13} - b_{23}\right) =$$

$$= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} -$$

$$-a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - \left(a_{i1} + a_{i2}\right)\left(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})\right) = 0.$$

Аналогично можно показать, что сумма всех элементов столбца матрицы $\mathbf{C}$ равна 0. Следовательно, произведение элементов из K есть элемент из K.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K:

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K:

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} = (a_{i1} + b_{i1}) + (a_{i2} + b_{i2}) + (a_{i3} + b_{i3}) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K:

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} = (a_{i1} + b_{i1}) + (a_{i2} + b_{i2}) + (a_{i3} + b_{i3}) = \underbrace{a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}}_{=0} + \underbrace{b_{i1} + b_{i2} + b_{i3}}_{=0} =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3, у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K:

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} = (a_{i1} + b_{i1}) + (a_{i2} + b_{i2}) + (a_{i3} + b_{i3}) = \underbrace{a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}}_{=0} + \underbrace{b_{i1} + b_{i2} + b_{i3}}_{=0} = 0.$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j,$
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j,$
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj)=$
$=(a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj)=0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) =$$

$$= ((a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j)+(u+vi+wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) =$$

$$= ((a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j)+(u+vi+wj) =$$

$$= (a+x-2ax+u-2u(a+x-2ax))+(b+y-2by+v-2v(b+y-2by))i+(c+z-2cz+w-2w(c+z-2cz))j =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) =$$

$$= ((a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j)+(u+vi+wj) =$$

$$= (a+x-2ax+u-2u(a+x-2ax))+(b+y-2by+v-2v(b+y-2by))i+(c+z-2cz+w-2w(c+z-2cz))j =$$

$$= (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) =$$

$$= (a+bi+cj)+((x+u-2xu)+(y+v-2yv)i+(z+w-2zw)j) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj)=0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) =$$

$$= (a+bi+cj)+((x+u-2xu)+(y+v-2yv)i+(z+w-2zw)j) =$$

$$= (a{+}x{+}u{-}2xu{-}2a(x{+}u{-}2xu)){+}(b{+}y{+}v{-}2yv{-}2b(y{+}v{-}2yv))i{+}(c{+}z{+}w{-}2zw{-}2c(z{+}w{-}2zw))j =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) =$$

$$= (a+bi+cj)+((x+u-2xu)+(y+v-2yv)i+(z+w-2zw)j) =$$

$$= (a+x+u-2xu-2a(x+u-2xu))+(b+y+v-2yv-2b(y+v-2yv))i+(c+z+w-2zw-2c(z+w-2zw))j =$$

$$= (a+x+u-2xu-2ax-2au+4axu)+$$

$$+(b+y+v-2yv-2by-2bv+4byv)i+(c+z+w-2zw-2cz-2cw+4czw)j.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) = (a+x+u-2xu-2ax-2au+4axu)+$$

$$+(b+y+v-2yv-2by-2bv+4byv)i+(c+z+w-2zw-2cz-2cw+4czw)j.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) = (a+x+u-2xu-2ax-2au+4axu)+$$

$$+(b+y+v-2yv-2by-2bv+4byv)i+(c+z+w-2zw-2cz-2cw+4czw)j.$$

Следовательно, $L = R$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$
$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$
$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) = (a+x+u-2xu-2ax-2au+4axu)+$$
$$+(b+y+v-2yv-2by-2bv+4byv)i+(c+z+w-2zw-2cz-2cw+4czw)j.$$

Следовательно, $L = R$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) = (a+x+u-2xu-2ax-2au+4axu)+$$

$$+(b+y+v-2yv-2by-2bv+4byv)i+(c+z+w-2zw-2cz-2cw+4czw)j.$$

Следовательно, $L = R$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части **доказываемого равенства**:

$$L = ((a+bi+cj)+(x+yi+zj))+(u+vi+wj) = (a+x-2ax+u-2au-2xu+4axu)+$$

$$+(b+y-2by+v-2vb-2vy+4byv)i+(c+z-2cz+w-2wc-2wz+4czw)j.$$

$$R = (a+bi+cj)+((x+yi+zj)+(u+vi+wj)) = (a+x+u-2xu-2ax-2au+4axu)+$$

$$+(b+y+v-2yv-2by-2bv+4byv)i+(c+z+w-2zw-2cz-2cw+4czw)j.$$

Следовательно, $L = R$.
Ассоциативность операции $+$ доказана.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j,$
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна:

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S=\{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj)=$
$=(a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj)=0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0=0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a+bi+cj)*(x+yi+zj))*(u+vi+wj)=$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a+bi+cj)*(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a+bi+cj)*(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

$$(a+bi+cj)*((x+yi+zj)*(u+vi+wj)) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a+bi+cj)*(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

$$(a+bi+cj)*((x+yi+zj)*(u+vi+wj)) = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a+bi+cj)*(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

$$(a+bi+cj)*((x+yi+zj)*(u+vi+wj)) = 0,$$

$$\underbrace{((a+bi+cj)*(x+yi+zj))*(u+vi+wj)}_{=0} = \underbrace{(a+bi+cj)*((x+yi+zj)*(u+vi+wj))}_{=0}.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

$$(a+bi+cj)*(u+vi+wj)+(x+yi+zj)*(u+vi+wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj)=$
$=(a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj)=0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0=0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj)=0,$$

$$(a+bi+cj)*(u+vi+wj)+(x+yi+zj)*(u+vi+wj)=0+0=$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j,$
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

$$(a+bi+cj)*(u+vi+wj)+(x+yi+zj)*(u+vi+wj) = 0+0 = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj) = 0,$$

$$(a+bi+cj)*(u+vi+wj)+(x+yi+zj)*(u+vi+wj) = 0+0 = 0,$$

$$\underbrace{((a+bi+cj)+(x+yi+zj))*(u+vi+wj)}_{=0} =$$

$$= \underbrace{(a+bi+cj)*(u+vi+wj)}_{=0} + \underbrace{(x+yi+zj)*(u+vi+wj)}_{=0}.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j,$
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj)=0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.
Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0+0i+0j$.
Обратным к элементу $a+bi+cj$ относительно сложения является выражение $-a-bi-cj$.
Коммутативность сложения очевидна.
Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.
Ассоциативность операции $*$ очевидна.
Дистрибутивность выполняется. Таким образом, доказано, что S является **кольцом**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0;\ j;\ i;\ i+j;\ 1;\ 1+j;\ 1+i;\ 1+i+j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a+bi+cj)+(x+yi+zj) =$
$= (a+x-2ax)+(b+y-2by)i+(c+z-2cz)j$,
$(a+bi+cj)*(x+yi+zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Носитель каждой подгруппы аддитивной группы кольца S является носителем идеала этого кольца. При этом, например, идеал

$$\{0;\ 1;\ i;\ 1+i\}\,.$$

не является главным.

Решение задачи 6.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 (1 - 2x)\,dx = 0,$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 (1 - 2x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 x(1 - 2x)\,dx =$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 (1 - 2x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 x(1 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{array} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 (1 - 2x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 x(1 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} \neq 0,$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \middle| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \middle| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \middle| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\, dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как,

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left.\frac{d(x-2)^2}{dx}\right|_{x=2} = 0, \quad \text{но}$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left.\frac{d(x-2)^2}{dx}\right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left.\frac{d\left(x(x-2)^2\right)}{dx}\right|_{x=2} =$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \;\middle|\; \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left.\frac{d(x-2)^2}{dx}\right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left.\frac{d\left(x(x-2)^2\right)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{d\left(x^3 - 2x^2 + x\right)}{dx}\right|_{x=2} =$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left.\frac{d(x-2)^2}{dx}\right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left.\frac{d\left(x(x-2)^2\right)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{d\left(x^3 - 2x^2 + x\right)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\left(3x^2 - 4x + 1\right)\right|_{x=2}$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0;\ 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \,\middle|\, \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.
Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left.\frac{d(x-2)^2}{dx}\right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left.\frac{d\left(x(x-2)^2\right)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{d\left(x^3 - 2x^2 + x\right)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\left(3x^2 - 4x + 1\right)\right|_{x=2} \neq 0.$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix} =$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+ap & aq \\ w+cp & cq \end{pmatrix},$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + ap & aq \\ w + cp & cq \end{pmatrix},$$

поэтому идеал, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со всем **кольцом** $\mathcal{M}$.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ответ. Идеал, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со всем **кольцом** $\mathcal{M}$. Аналогичный результат получается для остальных порождающих множеств.

Решение задачи 8.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из является матрицей из I.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из является матрицей из I. Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из является матрицей из I. Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.
Умножение матриц сводится к умножению их коэффициентов и суммированию произведений.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из является матрицей из I. Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.
Умножение матриц сводится к умножению их коэффициентов и суммированию произведений. Произведение неотрицательного целого числа на четное число есть четное число (считая 0 четным числом). Сумма четных чисел есть число четное.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из является матрицей из I. Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.
Умножение матриц сводится к умножению их коэффициентов и суммированию произведений. Произведение неотрицательного целого числа на четное число есть четное число (считая 0 четным числом). Сумма четных чисел есть число четное.
Следовательно, I является идеалом.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I, состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Любую матрицу из I можно представить в виде суммы полученных матриц.

Решение задачи 9.

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - \_ \cdot 15 = 12,$

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12,$

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12$,
$15 - 12 = 3$,

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12$,
$15 - 12 = 3$,
$3 = 15 - (147 - 9 \cdot 15) =$

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12$,
$15 - 12 = 3$,
$3 = 15 - (147 - 9 \cdot 15) = 10 \cdot 15 - 147$.

Решение задачи 10.

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - \_\,(x^5 - x^3 - x^2 + 1) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4,$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-\left(\qquad\qquad\right)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21$,

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21$,
$\underbrace{19^2}\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+\left(\qquad\qquad\right)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4,$
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21,$
$\underbrace{19^2}_{361}\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(\qquad\qquad\qquad)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21$,
$\underbrace{19^2}_{361}\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=3250x+3250$,

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21$,
$\underbrace{19^2}_{361}\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=3250x+3250$,
$3250x+3250=361\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21$,
$\underbrace{19^2}_{361}\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=3250x+3250$,

$3250x+3250=361\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=$
$=361\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)\right)=$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6+4x^4-x^2-4$ и $x^5-x^3-x^2+1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6+4x^4-x^2-4-x\left(x^5-x^3-x^2+1\right)=5x^4+x^3-x^2-x-4$,
$25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)=-19x^3-21x^2+19x+21$,
$\underbrace{19^2}_{361}\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=3250x+3250$,

$$3250x+3250=361\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(-19x^3-21x^2+19x+21\right)=$$
$$=361\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(95x-86)\left(25\left(x^5-x^3-x^2+1\right)-(5x-1)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)\right)=$$
$$=\left(-475x^2+525x+275\right)\left(5x^4+x^3-x^2-x-4\right)+(2375x-2150)\left(x^5-x^3-x^2+1\right).$$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?