Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Евклидовы, унитарные, нормированные, метрические пространства

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Евклидово пространство **6**
I.1. Неравенство Коши-Буняковского 18
I.2. Матрица Грама 31
I.3. Теорема о вычислении скалярного произведения 39
I.4. Свойства матрицы Грама 44
I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах 58

II. Ортогональность **78**

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта **79**

IV. Теорема о существовании ОНБ в евклидовом пространстве **103**
IV.1. Ортогональное дополнение 104
IV.2. Свойства ортогонального дополнения 113

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении 114
IV.2.2. Теорема о дополнении к линейной оболочке . . . 124
IV.2.3. Следствие об ортогональном дополнении к базису подпространства 126
IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения 130
IV.2.5. Теорема о дополнении к дополнению 144
IV.3. Ортогональная проекция 146

V. Унитарные (эрмитовы) пространства 148
V.1. Определение унитарного пространства 163
V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых 164

VI. Нормированные и метрические пространства 171
VI.1. Метрические пространства 172

VI.2. Нормированные пространства 176
VI.3. Теорема о норме противоположного вектор 185
VI.4. Теорема о норме разности 191
VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве 202
VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств 214
VI.7. Эквивалентность норм 220
VI.8. Лемма о пределе нормы покоординатно бесконечно малой последовательности 225
VI.9. Лемма об ограниченности окрестности 228
VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве 240

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(коммутативность);*

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(коммутативность);*

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ *(линейность);*

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** U *над* $\mathbb{R}$ *называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция* $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$*, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(коммутативность);*

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ *(линейность);*

3) $(x, x) \geq 0$*, причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$ *(положительная определенность).*

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** U *над* $\mathbb{R}$ *называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция* $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$*, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(коммутативность);*

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ *(линейность);*

3) $(x, x) \geq 0$*, причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$ *(положительная определенность).*

Функцию $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$ называют **скалярным произведением**.

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность);

3) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

Примером евклидова пространства является **пространство геометрических векторов**, $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = |\overrightarrow{\mathbf{x}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{y}}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$.

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** U *над* $\mathbb{R}$ *называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция* $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(коммутативность);*

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ *(линейность);*

3) $(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$ *(положительная определенность).*

Примером евклидова пространства является **арифметическое пространство** $U = \mathbb{R}^n$, где
$(X, Y) = \det(X^t Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность);

3) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

Пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, и $(f, g) = \int\limits_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx$, где ρ — положительная на (a, b) функция, называемая **весовой функцией**.

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность);

3) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

Рассмотреть пример?

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность);

3) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

В качестве *длины вектора* можно взять $\sqrt{(x, x)}$.

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность);

3) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

Если обобщить формулу $(x, y) = |x| \cdot |y| \cos\varphi$ на произвольные евклидовы пространства, то косинус угла между векторами следует определить формулой $\dfrac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)(y, y)}}$.

I. Евклидово пространство

Определение 1. ***Линейное пространство*** *U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(\,,\,) : U \times U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем* **аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве***:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность);

3) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

В связи с этим естественно определить ортогональность векторов:

Определение 2. *Векторы x, y называются* **ортогональными** *тогда и только тогда, когда $(x, y) = 0$.*

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов* x, y *выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

Доказательство.

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

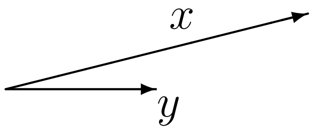
Теорема 1. *В **евклидовом пространстве** для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского): $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.*

Доказательство. Идею доказательства можно почерпнуть из алгебры геометрических векторов. Дело в том, что, если x, y — геометрические векторы, то доказываемое неравенство Коши-Буняковского можно переписать в виде $|y|\text{пр}_y x \leq |x| \cdot |y|$, то есть, при ненулевом y, $\text{пр}_y x \leq |x|$. Геометрически это означает, что вектор x не короче своей проекции.

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов* x, y *выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

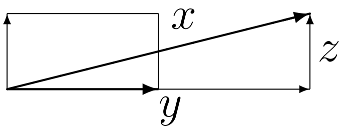
Доказательство. Оказывается, можно получить неравенство Коши-Буняковского с помощью вычисления «площади прямоугольника», образованного вектором y и вектором, проецирующим вектор x на y.



I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В **евклидовом пространстве** для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

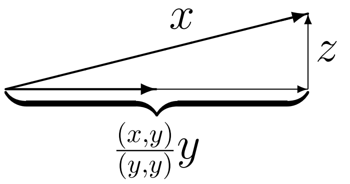
Доказательство. Оказывается, можно получить неравенство Коши-Буняковского с помощью вычисления «площади прямоугольника», образованного вектором y и вектором, проецирующим вектор x на y.



I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов* x, y *выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

Доказательство. Оказывается, можно получить неравенство Коши-Буняковского с помощью вычисления «площади прямоугольника», образованного вектором y и вектором, проецирующим вектор x на y.

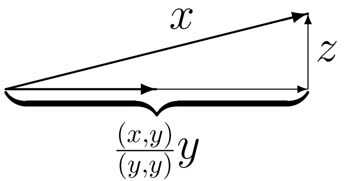


Геометрическая проекция вектора x на y, как нетрудно понять, имеет вид $\dfrac{(x, y)}{(y, y)} y$.

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В **евклидовом пространстве** для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского): $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.*

Доказательство. Оказывается, можно получить неравенство Коши-Буняковского с помощью вычисления «площади прямоугольника», образованного вектором y и вектором, проецирующим вектор x на y.



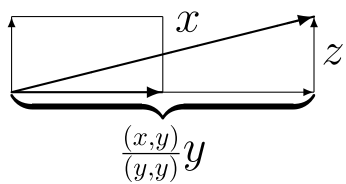
Геометрическая проекция вектора x на y, как нетрудно понять, имеет вид $\dfrac{(x, y)}{(y, y)}y$.

Значит, «проецирующий вектор» z равен $x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y$.

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В **евклидовом пространстве** для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$.

Доказательство. Оказывается, можно получить неравенство Коши-Буняковского с помощью вычисления «площади прямоугольника», образованного вектором y и вектором, проецирующим вектор x на y.



Площадь прямоугольника со сторонами, полученными откладыванием векторов y и z, равна

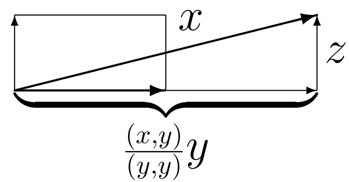
$$|y| \cdot |z| = \sqrt{(y,y)\,(z,z)},$$

где $z = x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y$.

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

Доказательство. Оказывается, можно получить неравенство Коши-Буняковского с помощью вычисления «площади прямоугольника», образованного вектором y и вектором, проецирующим вектор x на y.



Поэтому площадь прямоугольника со сторонами, полученными откладыванием векторов y и z, равна

$$\sqrt{(y, y)\left(x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y,\ x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y\right)}.$$

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В **евклидовом пространстве** для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

Доказательство. В силу **положительной определенности скалярного произведения**

$$0 \leq (y, y)\left(x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y\right) =$$

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В **евклидовом пространстве** для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского): $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.*

Доказательство. В силу **положительной определенности скалярного произведения**

$$0 \leq (y, y)\left(x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y\right) =$$

$$= (y, y)\left((x, x) - 2\frac{(x, y)}{(y, y)}(x, y) + \frac{(x, y)^2}{(y, y)^2}(y, y)\right) =$$

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов* x, y *выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$.

Доказательство. В силу **положительной определенности скалярного произведения**

$$0 \leq (y,y)\left(x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y, x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y\right) =$$

$$= (y,y)\left((x,x) - 2\frac{(x,y)}{(y,y)}(x,y) + \frac{(x,y)^2}{(y,y)^2}(y,y)\right) =$$

$$= (x,x)(y,y) - (x,y)^2.$$

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского): $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.*

Доказательство. В силу **положительной определенности скалярного произведения**

$$0 \leq (y, y)\left(x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y\right) =$$

$$= (y, y)\left((x, x) - 2\frac{(x, y)}{(y, y)}(x, y) + \frac{(x, y)^2}{(y, y)^2}(y, y)\right) =$$

$$= (x, x)(y, y) - (x, y)^2.$$

Поэтому $(x, y) \ldots$

I.1. Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. *В* ***евклидовом пространстве*** *для любых векторов* x, y *выполняется неравенство (неравенство Коши-Буняковского):* $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$.

Доказательство. В силу **положительной определенности скалярного произведения**

$$0 \leq (y, y)\left(x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y\right) =$$

$$= (y, y)\left((x, x) - 2\frac{(x, y)}{(y, y)}(x, y) + \frac{(x, y)^2}{(y, y)^2}(y, y)\right) =$$

$$= (x, x)(y, y) - (x, y)^2.$$

Поэтому $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$, что и требовалось доказать.

I.2. Матрица Грама

В соответствии со сформулированным нами принципом, мы должны понять, как «переадресовать» вопросы о скалярном произведении в *произвольном* **евклидовом пространстве** в пространство $\mathbb{R}^n$ (то есть «пространство координат»).

С чего начать?

I.2. Матрица Грама

В соответствии со сформулированным нами принципом, мы должны понять, как «переадресовать» вопросы о скалярном произведении в *произвольном* **евклидовом пространстве** в пространство $\mathbb{R}^n$ (то есть «пространство координат»).

С чего начать? Естественно, *начинаем с введения базиса.* Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U. Тогда

I.2. Матрица Грама

В соответствии со сформулированным нами принципом, мы должны понять, как «переадресовать» вопросы о скалярном произведении в *произвольном* **евклидовом пространстве** в пространство $\mathbb{R}^n$ (то есть «пространство координат»).

С чего начать? Естественно, *начинаем с введения базиса*. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U. Тогда

$$(x, y) =$$

I.2. Матрица Грама

В соответствии со сформулированным нами принципом, мы должны понять, как «переадресовать» вопросы о скалярном произведении в *произвольном* **евклидовом пространстве** в пространство $\mathbb{R}^n$ (то есть «пространство координат»).

С чего начать? Естественно, *начинаем с введения базиса*. Пусть **Б** $= \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$$

I.2. Матрица Грама

В соответствии со сформулированным нами принципом, мы должны понять, как «переадресовать» вопросы о скалярном произведении в *произвольном* **евклидовом пространстве** в пространство $\mathbb{R}^n$ (то есть «пространство координат»).

С чего начать? Естественно, *начинаем с введения базиса*. Пусть **Б** $= \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) y_j. \tag{0}$$

I.2. Матрица Грама

В соответствии со сформулированным нами принципом, мы должны понять, как «переадресовать» вопросы о скалярном произведении в *произвольном* **евклидовом пространстве** в пространство $\mathbb{R}^n$ (то есть «пространство координат»).

С чего начать? Естественно, *начинаем с введения базиса.* Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) y_j. \tag{0}$$

Заметим, что величины (e_i, e_j) не зависят от векторов x, y, а представляют собой характеристику базиса.

I.2. Матрица Грама

Определение 3. *Матрица* $\Gamma_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ & \ldots & & \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ *называется* **матрицей Грама** *базиса* **Б**.

Рассмотреть пример?

I.2. Матрица Грама

Определение 3. *Матрица* $\Gamma_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ & & \ldots & \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ *называется* **матрицей Грама** *базиса* **Б**.

Полученное ранее равенство

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) y_j. \qquad (0)$$

можно записать в **матричном виде**, что мы сделаем, оформив результат в виде теоремы:

I.3. Теорема о вычислении скалярного произведения

Теорема 2. *Если* **Б** *— базис* ***евклидова пространства*** U, *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *—* ***матрица Грама*** *этого базиса, то для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство:*

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \det \left([x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} \right). \tag{1}$$

I.3. Теорема о вычислении скалярного произведения

Теорема 2. *Если* **Б** *— базис* ***евклидова пространства*** U, *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *—* ***матрица Грама*** *этого базиса, то для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство:*

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \det \left([x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} \right). \qquad (1)$$

Эта теорема уже доказана ранее:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) y_j.$$

I.3. Теорема о вычислении скалярного произведения

Теорема 2. *Если* **Б** *— базис* ***евклидова пространства*** U, *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *—* ***матрица Грама*** *этого базиса, то для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство:*

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \det \left([x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} \right). \qquad (1)$$

Учитывая, что матрица $[x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$ — однокомпонентная, часто в правой части равенства (1) функцию det не пишут, получая формулу $(x, y) = [x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$.

I.3. Теорема о вычислении скалярного произведения

Теорема 2. *Если* **Б** *— базис* ***евклидова пространства*** U, *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *—* ***матрица Грама*** *этого базиса, то для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство:*

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \det \left([x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} \right). \tag{1}$$

При записи формулы (1) в виде $(x, y) = \left([x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} \right)$ однокомпонентную матрицу отождествляют с ее единственным элементом. Это, в принципе, может привести к проблемам при записи матричных операций (скаляр можно умножить на матрицу любой размерности, а матрицу размерности 1×1 можно умножить на матрицу далеко не любой размерности).

I.3. Теорема о вычислении скалярного произведения

Теорема 2. *Если* **Б** *— базис* ***евклидова пространства*** U, *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *—* ***матрица Грама*** *этого базиса, то для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство:*

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \det\left([x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}\right). \qquad (1)$$

При записи формулы (1) в виде $(x, y) = \left([x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}\right)$ однокомпонентную матрицу отождествляют с ее единственным элементом. Однако в рассматриваемой теории эта некорректность практически никогда не вызывает недоразумений, *поэтому мы тоже будем записывать формулу (1) в виде* $(x, y) = [x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$.

Рассмотреть пример?

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

2) **Матрица Грама** любого базиса евклидова[1] пространства симметричная, то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma^t_{\mathbf{Б}}$.

Доказательство.

[1]Для **унитарных пространств** матрица Грама любого базиса обладает свойством $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^t_{\mathbf{Б}}}$ (здесь $^{-}$ — комплексное сопряжение).

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Рассмотрим СЛУ

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ x_2;\ \ldots\ x_n)\, \Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (0) \quad \Rightarrow$$

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ x_2;\ \ldots\ x_n)\, \Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,\ x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = 0 \quad \Rightarrow$$

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ x_2;\ \ldots\ x_n)\,\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,\ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ x_2; \ \ldots \ x_n)\,\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,\ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Следовательно, по **теореме о размерности пространства решений ОСЛУ**

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ x_2;\ \ldots\ x_n)\, \Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,\ x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Следовательно, по **теореме о размерности пространства решений ОСЛУ** $\operatorname{Rg}\left(\Gamma_{\mathbf{Б}}\right) = n \ \Rightarrow$

I.4. Свойства матрицы Грама

1) **Матрица Грама** любого базиса **евклидова пространства** является **невырожденной.**

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U, **матрица Грама** в этом базисе. Имеем

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ x_2;\ \ldots\ x_n)\, \Gamma_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,\ x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Следовательно, по **теореме о размерности пространства решений ОСЛУ** $\operatorname{Rg}\left(\Gamma_{\mathbf{Б}}\right) = n \ \Rightarrow \ \det\left(\Gamma_{\mathbf{Б}}\right) \neq 0.$

I.4. Свойства матрицы Грама

2) **Матрица Грама** любого базиса евклидова[2] пространства симметричная, то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^t$.

Доказательство.

[2]Для унитарных пространств, рассмотренных в разделе V, стр.148, матрица Грама любого базиса обладает свойством $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}^t}$ (здесь $^-$ — комплексное сопряжение).

I.4. Свойства матрицы Грама

2) **Матрица Грама** любого базиса евклидова пространства симметричная, то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma^t_{\mathbf{Б}}$.

Доказательство.

Очевидно, так как по аксиомам скалярного произведения в **евклидовом пространстве**

$$\gamma_{ij} =$$

I.4. Свойства матрицы Грама

2) **Матрица Грама** любого базиса евклидова пространства симметричная, то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma^t_{\mathbf{Б}}$.

Доказательство.

Очевидно, так как по аксиомам скалярного произведения в **евклидовом пространстве**

$$\gamma_{ij} = (e_i, e_j) =$$

I.4. Свойства матрицы Грама

2) **Матрица Грама** любого базиса евклидова пространства симметричная, то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^t$.

Доказательство.

Очевидно, так как по аксиомам скалярного произведения в **евклидовом пространстве**

$$\gamma_{ij} = (e_i, e_j) = (e_j, e_i) =$$

I.4. Свойства матрицы Грама

2) **Матрица Грама** любого базиса евклидова пространства симметричная, то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}^t$.

Доказательство.

Очевидно, так как по аксиомам скалярного произведения в **евклидовом пространстве**

$$\gamma_{ij} = (e_i, e_j) = (e_j, e_i) = \gamma_{ji}.$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть* U — ***евклидово пространство***, $\Gamma_{\text{Б}}$ *и* $\Gamma_{\text{Б}'}$ — ***матрицы Грама*** *базисов* Б *и* Б$'$ *соответственно,* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б$'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot T_{\text{Б}\to\text{Б}'}, \qquad (2)$$

Доказательство.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{Б}'$. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. Мы приведем два доказательства формулы (2). В первом случае переход к матричной алгебре проведем в последний момент, а во втором случае начнем с перехода к матричной алгебре.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть* U *—* ***евклидово пространство****,* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрицы Грама*** *базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$*. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \quad \mathbf{Б}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ и $e'_p = \sum\limits_{q=1}^{n} t_{qp} e_q$.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* **Б** *и* **Б**$'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* **Б** *в базис* **Б**$'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Первый способ.* Надо доказать *равенство матриц*. Следовательно, надо доказать равенство соответствующих компонентов матрицы.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *— **матрица перехода** из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Первый способ.* Имеем

$$\gamma'_{ij} =$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть* U — ***евклидово пространство***, $\Gamma_{\text{Б}}$ *и* $\Gamma_{\text{Б}'}$ — ***матрицы Грама*** *базисов* Б *и* Б′ *соответственно,* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б′. *Тогда*

$$\Gamma_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot T_{\text{Б}\to\text{Б}'}, \qquad (2)$$

Доказательство. *Первый способ.* Имеем

$$\gamma'_{ij} = \left(e'_i, e'_j\right) =$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\text{Б}}$ и $\Gamma_{\text{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* Б *и* Б′ *соответственно,* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ *— **матрица перехода** из базиса* Б *в базис* Б′*. Тогда*

$$\Gamma_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot T_{\text{Б}\to\text{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Первый способ.* Имеем

$$\gamma'_{ij} = (e'_i, e'_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} t_{pi} e_p, \sum_{q=1}^{n} t_{qj} e_q \right) =$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\text{Б}}$ и $\Gamma_{\text{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов Б и Б$'$ соответственно, $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса Б в базис Б$'$. Тогда*

$$\Gamma_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot T_{\text{Б}\to\text{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Первый способ.* Имеем

$$\gamma'_{ij} = (e'_i, e'_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} t_{pi} e_p, \sum_{q=1}^{n} t_{qj} e_q\right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} t_{pi} t_{qj} \left(e_p, e_q\right) =$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть* U *—* ***евклидово пространство****,* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрицы Грама*** *базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$*. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Первый способ.* Имеем

$$\gamma'_{ij} = (e'_i, e'_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} t_{pi}e_p, \sum_{q=1}^{n} t_{qj}e_q\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} t_{pi}t_{qj}\,(e_p, e_q) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} t_{pi}\gamma_{pq}t_{qj}.$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\text{Б}}$ и $\Gamma_{\text{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов Б и Б$'$ соответственно, $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса Б в базис Б$'$. Тогда*

$$\Gamma_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot T_{\text{Б}\to\text{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Первый способ.* В **матричной форме записи** полученное равенство

$$\gamma'_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} t_{pi}\gamma_{pq}t_{qj}.$$

«превращается» в формулу (2). В данном случае «оформление» доказательства сводится к «удалению лишних рассуждений», сделайте это сами.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{Б}'$. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Перейдем в «пространство координат» на самом первом этапе. Согласно формуле (1) для вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама, для любых векторов $x, y \in U$ имеем, с одной стороны,

$$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}'} \, \Gamma_{\mathbf{Б}'} \, [y]_{\mathbf{Б}'} \, .$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* **Б** *и* **Б**$'$ *соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса* **Б** *в базис* **Б**$'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \qquad (2)$$

Доказательство. *Второй способ.* Перейдем в «пространство координат» на самом первом этапе. Согласно формуле (1) для вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама, для любых векторов $x, y \in U$ имеем, с одной стороны,

$$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\, \Gamma_{\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'}\,.$$

С другой стороны,

$$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [y]_{\mathbf{Б}}\,.$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *— **матрица перехода** из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Итак,

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'} = (x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[y]_{\mathbf{Б}}\,.$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{Б}'$. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Итак,

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'} \, \Gamma_{\mathbf{Б}'} \, [y]_{\mathbf{Б}'} = (x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \, \Gamma_{\mathbf{Б}} \, [y]_{\mathbf{Б}} \, .$$

В выражении $[x]^t_{\mathbf{Б}} \, \Gamma_{\mathbf{Б}} \, [y]_{\mathbf{Б}}$ перейдем к координатам векторов в базисе $\mathbf{Б}'$ с помощью **формулы для вычисления координат вектора в другом базисе**.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{Б}'$. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Итак,

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'} = (x,y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[y]_{\mathbf{Б}}\,.$$

Согласно **свойствам транспонирования матриц** $[x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[y]_{\mathbf{Б}} =$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Итак,

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'} = (x,y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[y]_{\mathbf{Б}}\,.$$

Согласно **свойствам транспонирования матриц** $[x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[y]_{\mathbf{Б}} =$

$$= \left(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[x]_{\mathbf{Б}'}\right)^t \Gamma_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'} =$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — **матрица перехода** из базиса $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{Б}'$. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \qquad (2)$$

Доказательство. *Второй способ.* Итак,

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\, \Gamma_{\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'} = (x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [y]_{\mathbf{Б}}\,.$$

Согласно **свойствам транспонирования матриц** $[x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [y]_{\mathbf{Б}} =$

$$= \left(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\, [x]_{\mathbf{Б}'}\right)^t \Gamma_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\, T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \Gamma_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'}\,.$$

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть* U *—* ***евклидово пространство****,* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрицы Грама*** *базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$*. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Итак, получили равенство

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\,T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'}\,.$$

Конечно, хотелось бы «сократить на матрицы» $[x]_{\mathbf{Б}'}$ и $[y]_{\mathbf{Б}'}$. К сожалению, это не так просто.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть U — **евклидово пространство**, $\Gamma_{\text{Б}}$ и $\Gamma_{\text{Б}'}$ — **матрицы Грама** базисов* Б *и* Б$'$ *соответственно,* $T_{\text{Б}\to\text{Б}'}$ — ***матрица перехода*** *из базиса* Б *в базис* Б$'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\text{Б}'} = T^t_{\text{Б}\to\text{Б}'} \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot T_{\text{Б}\to\text{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* Например

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

но, разумеется, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, то есть «сокращать на матрицы» $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ нельзя.

I.5. Теорема о матрице Грама в разных базисах

Теорема 3. *Пусть* U *—* ***евклидово пространство****,* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрицы Грама*** *базисов* $\mathbf{Б}$ *и* $\mathbf{Б}'$ *соответственно,* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *—* ***матрица перехода*** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$*. Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \tag{2}$$

Доказательство. *Второй способ.* В нашем случае «положение спасает» один «нюансик»: обсуждаемое равенство

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\,T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'}$$

справедливо *для любых* матриц $[x]_{\mathbf{Б}'}$ и $[y]_{\mathbf{Б}'}$ соответствующей размерности. Поэтому мы можем сослаться на **лемму о сокращении на произвольную матрицу**. Теорема доказана.

II. Ортогональность

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет в геометрии (в том числе аналитической геометрии) выделить параллельность и перпендикулярность объектов (векторов, прямых, плоскостей) в качестве конфигураций, наиболее перспективных для изучения и использования. В аналитической геометрии понятие ортогональности играет даже большую роль, чем параллельность.

Введение скалярного произведения со свойствами, зафиксированными в определении **евклидова** пространства, позволяет перенести на произвольные евклидовы и унитарные пространства геометрическое отношение ортогональности и соответствующие инструменты.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

В геометрии огромную роль играет прямоугольная декартова система координат. Система ортов координатных осей называется, как известно, *ортонормированным базисом*. Его главная черта: базисные векторы взаимно ортогональны и их длина равна 1, то есть $\sqrt{(x,x)} = 1$. Многие выкладки в такой системе координат значительно упрощаются. Дело в том, что **матрица Грама** такого базиса — единичная, и формула (1) преобразуется к виду $(x,y) = \det\left([x]^t_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}\right)$ или, с учетом принятого соглашения об отождествлении матрицы размерности 1×1 с ее единственным элементом, $(x,y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}$.

В геометрии очень полезным оказалось понятие *ортонормированного базиса*, сокращенно ОНБ. Это понятие оказывается достаточно удобным и для произвольного **евклидова пространства**.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Определение 4. *Базис* **Б** $= \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ***евклидова пространства*** U *называется* **ортонормированным базисом** *(ОНБ) тогда и только тогда, когда для любых* $1 \le i, j \le n$ *имеем* $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, *где* $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ 1, & \text{при } i = j \end{cases}$ *— так называемый* **символ Кронекера** *или* **δ-символ Кронекера**.

Доказательство.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Определение 4. *Базис* $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ***евклидова пространства*** U *называется* **ортонормированным базисом** *(ОНБ) тогда и только тогда, когда для любых* $1 \leq i, j \leq n$ *имеем* $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, *где* $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ 1, & \text{при } i = j \end{cases}$ *— так называемый* **символ Кронекера** *или* δ**-символ Кронекера**.

Но сейчас все упирается в ответ на вопрос: *в любом ли (конечномерном)* ***евклидовом пространстве*** *есть ортонормированный базис?*

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Но сейчас все упирается в ответ на вопрос: *в любом ли (конечномерном)* ***евклидовом пространстве*** *есть ортонормированный базис?*

Как можно было бы доказать, что в **евклидовом пространстве** есть **ОНБ**? Есть два пути: первый — «от противного» (косвенный путь), и второй — найти **ОНБ** («прямой, конструктивный путь»).

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Но сейчас все упирается в ответ на вопрос: *в любом ли (конечно-мерном)* ***евклидовом пространстве*** *есть ортонормированный базис?*

Как можно было бы доказать, что в **евклидовом пространстве** есть **ОНБ**? Есть два пути: первый — «от противного» (косвенный путь), и второй — найти **ОНБ** («прямой, конструктивный путь»).

Второй путь, разумеется, предпочтительнее.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Но сейчас все упирается в ответ на вопрос: *в любом ли (конечномерном)* ***евклидовом пространстве*** *есть ортонормированный базис?*

Как можно было бы доказать, что в **евклидовом пространстве** есть **ОНБ**? Есть два пути: первый — «от противного» (косвенный путь), и второй — найти **ОНБ** («прямой, конструктивный путь»).

По-видимому, начинать придется с произвольного базиса. Для того, чтобы «превратить» его в **ОНБ**, нужна какая-то процедура. Такая процедура по именам авторов называется **процессом ортогонализации Грама-Шмидта**.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Но сейчас все упирается в ответ на вопрос: *в любом ли (конечномерном)* ***евклидовом пространстве*** *есть ортонормированный базис?*

Сначала мы построим **ортогональный базис**, то есть базис, в котором все векторы попарно ортогональны (но их модуль может быть отличен от 1).

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Но сейчас все упирается в ответ на вопрос: *в любом ли (конечномерном)* ***евклидовом пространстве*** *есть ортонормированный базис?*

Сначала мы построим **ортогональный базис**, то есть базис, в котором все векторы попарно ортогональны (но их модуль может быть отличен от 1).

Процедура построения ортогонального базиса носит индуктивный характер.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Мы будем строить ортогональный базис $\mathbf{В} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

База. Положим $e_1 = v_1$.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \le i \le m$ и для любых j, k с условиями $1 \le j < k \le m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

Если $m = n$, то искомый базис уже получен.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

Осталось рассмотреть случай $m < n$.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

Построим вектор e_{m+1} таким образом, чтобы сохранить выполнение требований 1)-2). Для этого будем искать этот вектор в виде

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \tag{3}$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \qquad (3)$$

Первое условие при этом выполняется «автоматически».

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \le i \le m$ и для любых j, k с условиями $1 \le j < k \le m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m. \qquad (3)$$

Из второго условия имеем:

$$0 = (e_{m+1}, e_k) =$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m. \tag{3}$$

Из второго условия имеем:

$$0 = (e_{m+1}, e_k) = (v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m, e_k) =$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \tag{3}$$

Из второго условия имеем:

$$0 = (e_{m+1}, e_k) = (v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m, e_k) =$$

$$= (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,1}(e_1, e_k) + \alpha_{m+1,2}(e_2, e_k) + \ldots + \alpha_{m+1,m}(e_m, e_k) =$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \le i \le m$ и для любых j, k с условиями $1 \le j < k \le m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m. \qquad (3)$$

Из второго условия имеем:

$$0 = (e_{m+1}, e_k) = (v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m, e_k) =$$

$$= (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,1}(e_1, e_k) + \alpha_{m+1,2}(e_2, e_k) + \ldots + \alpha_{m+1,m}(e_m, e_k) =$$

$$= (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,k}(e_k, e_k).$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \le i \le m$ и для любых j, k с условиями $1 \le j < k \le m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \qquad (3)$$

Из второго условия имеем:

$$0 = (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,k}(e_k, e_k).$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \leq i \leq m$ и для любых j, k с условиями $1 \leq j < k \leq m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \qquad (3)$$

Из второго условия имеем:

$$0 = (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,k}(e_k, e_k).$$

Следовательно, *получаем формулу для вычисления коэффициентов в формуле (3)*:

$$\alpha_{m+1,k} = -\frac{(v_{m+1}, e_k)}{(e_k, e_k)}. \qquad (4)$$

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Шаг. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \le i \le m$ и для любых j, k с условиями $1 \le j < k \le m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_j \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_j \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$.

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \tag{3}$$

$$\alpha_{m+1,k} = -\frac{(v_{m+1}, e_k)}{(e_k, e_k)}. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что при таком выборе этих коэффициентов предположение индукции выполняется.

III. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольный базис **евклидова пространства** U.

Значит, на шаге с номером $m = n$ получим искомый ортогональный базис, состоящий из векторов вида

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m \quad \text{где} \tag{3}$$

$$\alpha_{m+1,k} = -\frac{(v_{m+1}, e_k)}{(e_k, e_k)}. \tag{4}$$

Остается **нормировать** его, то есть построить базис $\mathbf{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$, где $e'_i = \dfrac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}} \cdot e_i$.

IV. Теорема о существовании ОНБ в евклидовом пространстве

Теорема 4. *Если U — конечномерное* ***евклидово пространство****, то существует* ***ортонормированный базис*** *пространства U.*

Рассмотреть пример построения ОНБ?

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения

стратегии

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения
стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения
стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

Рассмотрим некоторое множество M векторов **евклидова пространства** U. Какое расположение векторов из U относительно M наиболее интересно для изучения?

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения

стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

Рассмотрим некоторое множество M векторов **евклидова пространства** U. Какое расположение векторов из U относительно M наиболее интересно для изучения?

Наиболее перспективным представляется применение

стратегии

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения
стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

Рассмотрим некоторое множество M векторов **евклидова пространства** U. Какое расположение векторов из U относительно M наиболее интересно для изучения?

Наиболее перспективным представляется применение
стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения
стратегии перехода от отдельного объекта к изучению системы объектов.

Рассмотрим некоторое множество M векторов **евклидова пространства** U. Какое расположение векторов из U относительно M наиболее интересно для изучения?

«Экстремальным» расположением векторов является коллинеарность и ортогональность.

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения
стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

Рассмотрим некоторое множество M векторов **евклидова пространства** U. Какое расположение векторов из U относительно M наиболее интересно для изучения?

«Экстремальным» расположением векторов является коллинеарность и ортогональность.

Поэтому наиболее интересны векторы, по отношению к векторам из M

IV.1. Ортогональное дополнение

К настоящему моменту сложились условия, благоприятные для применения
стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов.

Рассмотрим некоторое множество M векторов **евклидова пространства** U. Какое расположение векторов из U относительно M наиболее интересно для изучения?

«Экстремальным» расположением векторов является коллинеарность и ортогональность.

Поэтому наиболее интересны векторы, по отношению к векторам из M ***ортогональные***.

IV.1. Ортогональное дополнение

Определение 5. *Пусть M — подмножество (не обязательно подпространство!)* ***евклидова пространства*** *U. Тогда* **ортогональным дополнением** *к M называется множество $M^\perp$ всех векторов из U, ортогональных ко всем векторам из M, то есть*

$$M^\perp = \left\{ u \,\middle|\, \quad u \in U \quad \text{и} \quad \forall v \in M \quad (u, v) = 0 \right\}. \tag{4}$$

IV.2. Свойства ортогонального дополнения

Естественно изучить свойства ортогонального дополнения.

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством **евклидова пространства** U.*

Доказательство.

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Очевидное следствие **критерия подпространства**.

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством **евклидова пространства** U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^{\perp}$, то $\lambda x + \mu y \in M^{\perp}$.

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^\perp$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^\perp$, то $\lambda x + \mu y \in M^\perp$. Множество $M^\perp$ задано *характеристическим свойством* (см. равенство (4)) выполнение которого для элемента $\lambda x + \mu y$ легко проверяется:

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^\perp$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^\perp$, то $\lambda x + \mu y \in M^\perp$. Множество $M^\perp$ задано *характеристическим свойством* (см. равенство (4)) выполнение которого для элемента $\lambda x + \mu y$ легко проверяется: для любого $v \in M$

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^{\perp}$, то $\lambda x + \mu y \in M^{\perp}$. Множество $M^{\perp}$ задано *характеристическим свойством* (см. равенство (4)) выполнение которого для элемента $\lambda x + \mu y$ легко проверяется: для любого $v \in M$

$$(\lambda x + \mu y, v) =$$

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^{\perp}$, то $\lambda x + \mu y \in M^{\perp}$. Множество $M^{\perp}$ задано *характеристическим свойством* (см. равенство (4)) выполнение которого для элемента $\lambda x + \mu y$ легко проверяется: для любого $v \in M$

$$(\lambda x + \mu y, v) = \lambda(x, v) + \mu(y, v) =$$

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^{\perp}$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^{\perp}$, то $\lambda x + \mu y \in M^{\perp}$. Множество $M^{\perp}$ задано *характеристическим свойством* (см. равенство (4)) выполнение которого для элемента $\lambda x + \mu y$ легко проверяется: для любого $v \in M$

$$(\lambda x + \mu y, v) = \lambda(x, v) + \mu(y, v) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 =$$

IV.2.1. Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 5. *$M^\perp$ является подпространством* ***евклидова пространства*** *U.*

Доказательство. Действительно, надо проверить, что если $x, y \in M^\perp$, то $\lambda x + \mu y \in M^\perp$. Множество $M^\perp$ задано *характеристическим свойством* (см. равенство (4)) выполнение которого для элемента $\lambda x + \mu y$ легко проверяется: для любого $v \in M$

$$(\lambda x + \mu y, v) = \lambda(x, v) + \mu(y, v) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

IV.2.2. Теорема о дополнении к линейной оболочке

Теорема 6. *В любом конечномерном* ***евклидовом пространстве*** *имеет место равенство* $\langle v_1, v_2 \ldots \rangle^{\perp} = \{v_1, v_2 \ldots\}^{\perp}$.

Доказательство.

IV.2.2. Теорема о дополнении к линейной оболочке

Теорема 6. *В любом конечномерном* ***евклидовом пространстве*** *имеет место равенство* $\langle v_1, v_2 \ldots \rangle^\perp = \{v_1, v_2 \ldots\}^\perp$.

Доказательство. Это очевидное следствие **теоремы о внутренней характеризации линейной оболочки**.

IV.2.3. Следствие об ортогональном дополнении к базису подпространства

Следствие 1. *Если* Б *— базис подпространства* V *линейного пространства* U*, то* $\text{Б}^{\perp} = V^{\perp}$*.*

Доказательство.

IV.2.3. Следствие об ортогональном дополнении к базису подпространства

Следствие 1. *Если* Б *— базис подпространства* V *линейного пространства* U, *то* $\text{Б}^{\perp} = V^{\perp}$.

Доказательство. Надо **доказать равенство множеств.**

IV.2.3. Следствие об ортогональном дополнении к базису подпространства

Следствие 1. *Если* Б *— базис подпространства* V *линейного пространства* U, *то* $\text{Б}^{\perp} = V^{\perp}$.

Доказательство. Следует доказать включения $\text{Б}^{\perp} \subseteq V^{\perp}$ и $V^{\perp} \subseteq \text{Б}^{\perp}$.

IV.2.3. Следствие об ортогональном дополнении к базису подпространства

Следствие 1. *Если* Б *— базис подпространства* V *линейного пространства* U, *то* $\text{Б}^{\perp} = V^{\perp}$.

Доказательство. Следует доказать включения $\text{Б}^{\perp} \subseteq V^{\perp}$ и $V^{\perp} \subseteq \text{Б}^{\perp}$.

Сделайте это самостоятельно.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. V, как подпространство **евклидова пространства**, является евклидовым пространством. Значит, у него есть ОНБ.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $\text{Б}_V = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — ОНБ подпространства V.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_V = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — ОНБ подпространства V. Продолжим его до базиса пространства U, получим базис $\mathbf{Б}' = \{e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_V = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — ОНБ подпространства V. Продолжим его до базиса пространства U, получим базис $\mathbf{Б}' = \{e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$.

Применим к полученному базису **процесс ортогонализации Грама-Шмидта**. При этом первые векторы не изменятся, поэтому получим базис $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ пространства U. Очевидно, что для $i > k$ имеем $e_i \in V^{\perp}$.

Следовательно $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle \subseteq V^{\perp}$.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U. Очевидно, что для $i > k$ имеем $e_i \in V^{\perp}$.

Следовательно $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle \subseteq V^{\perp}$.

По определению суммы подпространств имеем $U = V + V^{\perp}$. Действительно,

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U. Очевидно, что для $i > k$ имеем $e_i \in V^{\perp}$.

Следовательно $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle \subseteq V^{\perp}$.

По определению суммы подпространств имеем $U = V + V^{\perp}$. Действительно, по теореме о линейных комбинациях базисных векторов для любого вектора x из U

$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n.$

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U. Очевидно, что для $i > k$ имеем $e_i \in V^{\perp}$.

Следовательно $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle \subseteq V^{\perp}$.

По определению суммы подпространств имеем $U = V + V^{\perp}$. Действительно, по теореме о линейных комбинациях базисных векторов для любого вектора x из U

$$x = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k}_{V} + \underbrace{\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n}_{V^{\perp}}.$$

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U. Очевидно, что для $i > k$ имеем $e_i \in V^{\perp}$.

Следовательно $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle \subseteq V^{\perp}$.

По определению суммы подпространств имеем $U = V + V^{\perp}$. Действительно, по теореме о линейных комбинациях базисных векторов для любого вектора x из U

$$x = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k}_{V} + \underbrace{\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n}_{V^{\perp}}.$$

Значит, равенство $U = V + V^{\perp}$ доказано.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ пространства U. Очевидно, что для $i > k$ имеем $e_i \in V^{\perp}$.

Следовательно $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle \subseteq V^{\perp}$.

Мы доказали, что по определению суммы подпространств $U = V + V^{\perp}$.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U.

Мы доказали, что по определению суммы подпространств $U = V + V^{\perp}$. Осталось проверить, что $V \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U.

Мы доказали, что по определению суммы подпространств $U = V + V^{\perp}$. Осталось проверить, что $V \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $x \in V \cap V^{\perp}$. Тогда, как вектор из V, вектор x ортогонален к любому вектору из $V^{\perp}$, в частности, к x.

IV.2.4. Теорема о сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Теорема 7. *Если $V \leq U$, то есть V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.*

Доказательство. Получили ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ пространства U.

Мы доказали, что по определению суммы подпространств $U = V + V^{\perp}$. Осталось проверить, что $V \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $x \in V \cap V^{\perp}$. Тогда, как вектор из V, вектор x ортогонален к любому вектору из $V^{\perp}$, в частности, к x.

Поэтому x ортогонален к x, то есть $(x, x) = 0$, что по аксиомам евклидова пространства означает, что $x = \mathbf{0}$.

Теорема доказана.

IV.2.5. Теорема о дополнении к дополнению

Теорема 8. *Если V — подпространство* ***евклидова пространства*** U, *то* $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$.

Доказательство.

IV.2.5. Теорема о дополнении к дополнению

Теорема 8. *Если V — подпространство* ***евклидова пространства*** *U, то* $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$.

Доказательство. Очевидно: надо доказать два включения: $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq V$ и $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} \supseteq V$, что не вызывает никаких проблем.

Рассмотреть пример поиска ортогонального дополнения?

IV.3. Ортогональная проекция

Определение 6. *Пусть* U *— евклидово пространство и* V *— его подпространство и* $x \in U$. *По теореме 7 о сумме подпространства и его ортогонального дополнения существуют такие векторы* $v \in V$ *и* $w \in V^{\perp}$, *что* $x = v + w$. *Тогда* v *называется* **ортогональной проекцией** *вектора* x *на подпространство* V, *а вектор* w *— его* **ортогональной составляющей**.

IV.3. Ортогональная проекция

Определение 6. *Пусть U — евклидово пространство и V — его подпространство и $x \in U$. По теореме 7 о сумме подпространства и его ортогонального дополнения существуют такие векторы $v \in V$ и $w \in V^{\perp}$, что $x = v + w$. Тогда v называется* **ортогональной проекцией** *вектора x на подпространство V, а вектор w — его* **ортогональной составляющей**.

Важную роль играют **неравенство Коши-Буняковского**, для сумм называемое **неравенством Коши**:

$$(x;y) \leq \sqrt{(x;x)}\sqrt{(y;y)}. \tag{3}$$

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Говоря о евклидовых пространствах, мы ограничивались только случаем поля действительных чисел $\mathbb{R}$ в качестве основного поля линейного пространства U. Однако, во многих приложениях (в частности, в физике и в радиоэлектронике) важную роль играет поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ в качестве основного поля. Понятно, что такая полезная конструкция, как скалярное произведение, в случае удачного переноса ее на линейные пространства над $\mathbb{C}$ существенно обогатит соответствующие теории и, в частности, математический аппарат.

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

Коммутативность хотелось бы сохранить. В крайнем случае, если это не удастся, надо хотя бы ее «не очень испортить».

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

Линейность по первому множителю тоже желательно оставить: $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

Наибольшие проблемы доставляет третья аксиома:

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

Дело в том, что, вообще говоря, число (x, x) теперь является комплексным, а для комплексных чисел отношение $\geq$ не определено! Значит, из аксиом должно следовать, что $(x, x) \in \mathbb{R}$.

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

Дело в том, что, вообще говоря, число (x, x) теперь является комплексным, а для комплексных чисел отношение $\geq$ не определено! Значит, из аксиом должно следовать, что $(x, x) \in \mathbb{R}$.

Сложность в том, что попытка, например, добавить это требование в качестве аксиомы при сохранении первых двух аксиом обречена на провал.

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

Дело в том, что, вообще говоря, число (x, x) теперь является комплексным, а для комплексных чисел отношение $\geq$ не определено! Значит, из аксиом должно следовать, что $(x, x) \in \mathbb{R}$.

Если $(x, x) = k \in \mathbb{R}$, то

$$((1+i)x, (1+i)x) =$$

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

Дело в том, что, вообще говоря, число (x, x) теперь является комплексным, а для комплексных чисел отношение $\geq$ не определено! Значит, из аксиом должно следовать, что $(x, x) \in \mathbb{R}$.

Если $(x, x) = k \in \mathbb{R}$, то

$$((1+i)x, (1+i)x) = (1+i)^2(x, x) =$$

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

Дело в том, что, вообще говоря, число (x, x) теперь является комплексным, а для комплексных чисел отношение $\geq$ не определено! Значит, из аксиом должно следовать, что $(x, x) \in \mathbb{R}$.

Если $(x, x) = k \in \mathbb{R}$, то

$$((1+i)x, (1+i)x) = (1+i)^2 (x, x) = 2i(x, x) =$$

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

$(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

Дело в том, что, вообще говоря, число (x, x) теперь является комплексным, а для комплексных чисел отношение $\geq$ не определено! Значит, из аксиом должно следовать, что $(x, x) \in \mathbb{R}$.

Если $(x, x) = k \in \mathbb{R}$, то

$$((1+i)x, (1+i)x) = (1+i)^2(x, x) = 2i(x, x) = 2ki \notin \mathbb{R}(!?)$$

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

Значит, для сохранения третьей аксиомы:

$$(x, x) \geq 0, \textit{ причем } (x, x) = 0 \textit{ тогда и только тогда, когда } x = \mathbf{0}$$

придется отказаться хотя бы от одной из первых двух аксиом.

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

Значит, для сохранения третьей аксиомы:

$$(x, x) \geq 0, \textit{ причем } (x, x) = 0 \textit{ тогда и только тогда, когда } x = \mathbf{0}$$

придется отказаться хотя бы от одной из первых двух аксиом.

Линейность «жалко до слез», уж лучше мы «испортим» коммутативность!

V. Унитарные (эрмитовы) пространства

Что надо изменить в определении евклидова пространства, чтобы сохранить «все самое ценное» в скалярном произведении для пространств над $\mathbb{C}$?

Ясно, что теперь скалярное произведение должно отображать $U \times U$ в $\mathbb{C}$. Поэтому основное внимание следует уделить аксиомам скалярного произведения.

Значит, для сохранения третьей аксиомы:

$$(x, x) \geq 0, \textit{ причем } (x, x) = 0 \textit{ тогда и только тогда, когда } x = \mathbf{0}$$

придется отказаться хотя бы от одной из первых двух аксиом.

Оказывается, достаточно положить $(x, y) = \overline{(y, x)}$. В частности, меняя местами сомножители в выражении (x, x), получаем $(x, x) = \overline{(x, x)}$, откуда $(x, x) \in \mathbb{R}$. Итак, получили следующее определение.

V.1. Определение унитарного пространства

Определение 7. Унитарным *или* **эрмитовым** *пространством называется линейное пространство U над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, на котором определена функция $(\,,\,) : U \times U \mapsto \mathbb{C}$, называемая* **скалярным произведением** *(в унитарном пространстве), для которой выполняются следующие утверждения, называемые* **аксиомами скалярного произведения** *в унитарном пространстве:*

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2. *(линейность по первому множителю)* $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$;
3. $(x, x) \geq 0$, *кроме того,* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$.

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

Почти все утверждения, которые мы доказали для евклидовых пространств, после небольших исправлений становятся справедливыми для унитарных пространств. В этом разделе мы укажем эти исправления.

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

Во-первых, скалярное произведение в унитарных пространствах не является линейным по второму множителю. Точнее, вместо линейности для второго множителя получаем следующее свойство:

$$(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda}(x, y) + \overline{\mu}(x, z). \tag{4}$$

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

Во-вторых, матрица Грама для базиса $\mathbf{Б}$ не является, вообще говоря, симметричной, точнее, имеем равенство $\Gamma_{\mathbf{Б}}^t = \overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}}$, где для матрицы $X_{m\times n}$ под $\overline{X_{m\times n}}$ понимается такая матрица $Y_{m\times n}$, что для $(i,j) \in \{1,2,\dots m\} \times \{1,2,\dots,n\}$ имеем

$$y_{ij} = \overline{x_{ij}}.$$

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

В-третьих, формула (1) для вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама в унитарном пространстве имеет вид:

$$(x, y) = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}}. \tag{5}$$

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

В-третьих, формула (1) для вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама в унитарном пространстве имеет вид:

$$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}}. \qquad (5)$$

Как и прежде, в этой формуле мы опустили операцию, извлекающую из однокомпонентной матрицы $[x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}}$ ее единственную компоненту. В качестве такой операции можно взять det или tr, то есть формула 5 на самом деле имеет вид $(x, y) = \det \left([x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} \right)$ или $(x, y) = \operatorname{tr} \left([x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} \right)$.

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

В-четвертых, при переходе в другой базис формула (2) для унитарного пространства изменяется следующим образом:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot \overline{T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}}, \tag{6}$$

V.2. Некоторые отличия унитарных пространств от евклидовых

В-пятых, в формуле (4) из процесса ортогонализации Грама-Шмидта порядок сомножителей для унитарного пространства, в отличие от евклидова, важен!

VI. Нормированные и метрические пространства

Мы рассмотрим обобщения понятий «расстояние между точками», «длина», «площадь» и др.

VI.1. Метрические пространства

Скалярное произведение позволяет применять в евклидовых пространствах математический аппарат метрических и нормированных пространств. В этих линейных пространствах введены специальные математические конструкции, обобщающие понятие «длины вектора» или «расстояния между точками». В некоторых приложениях линейной алгебры обобщение понятия «длина вектора», основанное на формуле $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ является неудобным.

Расстояние между точками (концами радиус-векторов) обобщает определенная ниже *метрика*.

VI.1. Метрические пространства

Определение 8. *Линейное пространство U над полем $\mathbb{R}$ называется* **метрическим пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена такая функция $\rho : U \times U \to \mathbb{R}$, для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы метрики):*

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(симметричность);*
2. $\rho(x, y) \geq 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$ *(невырожденность);*
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(неравенство треугольника).*

При этом функция ρ называется **метрикой**.

VI.1. Метрические пространства

Метрическими пространствами являются следующие алгебры.

1. Пространство геометрических векторов, $\rho(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = |\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}|$.

VI.1. Метрические пространства

Метрическими пространствами являются следующие алгебры.

1. Пространство геометрических векторов, $\rho(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = |\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}|$.

2. U — произвольное конечномерное линейное пространство, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \neq y \\ 0, & \text{при} \quad x = y \end{cases}$ Такое метрическое пространство называется **дискретным**.

VI.2. Нормированные пространства

Определенное ниже понятие *нормы* обобщает длину вектора. Отметим, что во многих случаях, когда речь идет о евклидовом пространстве, требуется, чтобы норма была «естественной» для такого пространства, то есть $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

VI.2. Нормированные пространства

Определение 9. *Линейное пространство U называется* **нормированным** *тогда и только тогда, когда в нем определена такая функция $||\bullet|| : U \to \mathbb{R}$, что выполняются следующие утверждения (аксиомы нормы):*

1. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ *(однородность нормы);*
2. $||x|| \geq 0$, *причем* $||x|| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$*;*
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(неравенство треугольника);*

При этом функция $||\bullet||$ называется **нормой***.*

VI.2. Нормированные пространства

Рассмотрим линейное пространство векторов плоскости с ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. На этом пространстве обычно определяют одну из следующих норм:

1. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

VI.2. Нормированные пространства

Рассмотрим линейное пространство векторов плоскости с ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. На этом пространстве обычно определяют одну из следующих норм:

1. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \sqrt{x^2+y^2}$;
2. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = |x| + |y|$;

VI.2. Нормированные пространства

Рассмотрим линейное пространство векторов плоскости с ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. На этом пространстве обычно определяют одну из следующих норм:

1. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = |x| + |y|$;
3. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \max\{|x|, |y|\}$.

VI.2. Нормированные пространства

Рассмотрим линейное пространство векторов плоскости с ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$. На этом пространстве обычно определяют одну из следующих норм:

1. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = |x| + |y|$;
3. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \max\{|x|, |y|\}$.

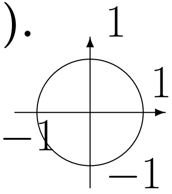
Для того, чтобы «геометрически» представить себе, что представляет собой каждая из этих норм, построим «единичный шар»: множество точек, концы радиусов-векторов которых удовлетворяют условию $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| \leq 1$. В силу **аксиомы 1** нормы «форма» этого шара не зависит от его «радиуса». Для каждой из перечисленных выше норм получаем:

VI.2. Нормированные пространства

1. $||x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,||=\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $||x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,||=|x|+|y|$;
3. $||x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,||=\max\{|x|,|y|\}$.

Построим «единичный шар»: множество точек, концы радиусов-векторов которых удовлетворяют условию $||x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,||\leq 1$. В силу **аксиомы 1** нормы «форма» этого шара не зависит от его «радиуса».

1).

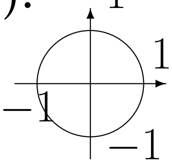


VI.2. Нормированные пространства

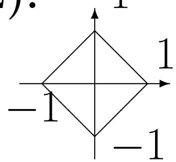
1. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = |x| + |y|$;
3. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \max\{|x|, |y|\}$.

Построим «единичный шар»: множество точек, концы радиусов-векторов которых удовлетворяют условию $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| \leq 1$. В силу **аксиомы 1** нормы «форма» этого шара не зависит от его «радиуса».

1).



2).

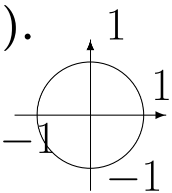


VI.2. Нормированные пространства

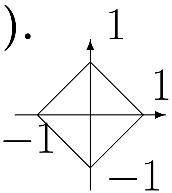
1. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = |x| + |y|$;
3. $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| = \max\{|x|, |y|\}$.

Построим «единичный шар»: множество точек, концы радиусов-векторов которых удовлетворяют условию $||x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}|| \leq 1$. В силу **аксиомы 1** нормы «форма» этого шара не зависит от его «радиуса».

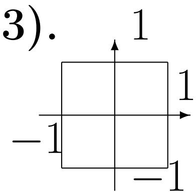
1).



2).



3).



VI.3. Теорема о норме противоположного вектор

Теорема 9. *Для любого вектора x линейного нормированного пространства U имеет место равенство* $||-x|| = ||x||$.

Доказательство.

VI.3. Теорема о норме противоположного вектор

Теорема 9. *Для любого вектора x линейного нормированного пространства U имеет место равенство $||-x|| = ||x||$.*

Доказательство.

Согласно **аксиоме однородности нормы** и **аксиомам линейного пространства**, имеем

$$||-x|| =$$

VI.3. Теорема о норме противоположного вектор

Теорема 9. *Для любого вектора x линейного нормированного пространства U имеет место равенство $||-x|| = ||x||$.*

Доказательство.

Согласно **аксиоме однородности нормы** и **аксиомам линейного пространства**, имеем

$$||-x|| = ||(-1)\cdot x|| =$$

VI.3. Теорема о норме противоположного вектор

Теорема 9. *Для любого вектора x линейного нормированного пространства U имеет место равенство $||-x|| = ||x||$.*

Доказательство.

Согласно **аксиоме однородности нормы** и **аксиомам линейного пространства**, имеем

$$||-x|| = ||(-1)\cdot x|| = |-1|\cdot ||x|| =$$

VI.3. Теорема о норме противоположного вектор

Теорема 9. *Для любого вектора x линейного нормированного пространства U имеет место равенство $|| - x|| = ||x||$.*

Доказательство.

Согласно **аксиоме однородности нормы** и **аксиомам линейного пространства**, имеем

$$|| - x|| = ||(-1) \cdot x|| = | - 1| \cdot ||x|| = ||x||,$$

VI.3. Теорема о норме противоположного вектор

Теорема 9. *Для любого вектора x линейного нормированного пространства U имеет место равенство $||-x|| = ||x||$.*

Доказательство.

Согласно **аксиоме однородности нормы** и **аксиомам линейного пространства**, имеем

$$||-x|| = ||(-1)\cdot x|| = |-1|\cdot||x|| = ||x||,$$

что и требовалось доказать.

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов* x, y *линейного нормированного пространства* U

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \le ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| =$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| =$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов* x, y *линейного нормированного пространства* U

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \le ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \le ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

$$-\left(||x|| - ||y||\right) =$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов* x, y *линейного нормированного пространства* U

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

$$-\left(||x|| - ||y||\right) = -||x|| + ||y - x + x|| \leq$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

$$-(||x|| - ||y||) = -||x|| + ||y - x + x|| \leq -||x|| + ||y - x|| + ||x|| =$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \le ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \le ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

$$-(||x|| - ||y||) = -||x|| + ||y - x + x|| \le -||x|| + ||y - x|| + ||x|| = ||x - y||.$$

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big|\,||x|| - ||y||\,\Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

$$-(||x|| - ||y||) = -||x|| + ||y - x + x|| \leq -||x|| + ||y - x|| + ||x|| = ||x - y||.$$

Следовательно, $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$ и $-(||x|| - ||y||) \leq ||x - y||$,

VI.4. Теорема о норме разности

Теорема 10. *Для любых векторов x, y линейного нормированного пространства U*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

Доказательство.

Согласно **неравенству треугольника** и **теореме о норме противоположного вектора**

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||,$$

$$-(||x|| - ||y||) = -||x|| + ||y - x + x|| \leq -||x|| + ||y - x|| + ||x|| = ||x - y||.$$

Следовательно, $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$ и $-(||x|| - ||y||) \leq ||x - y||$, откуда $\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||$, что и требовалось доказать.

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

В нормированном пространстве естественным образом определяется метрика: $\rho(x, y) = ||x - y||$. На первый взгляд, в метрическом пространстве можно определить норму правилом $||x|| = \rho(x, \mathbf{0})$, однако **пример 2** метрического пространства показывает, что эта функция может не быть нормой, так как может нарушаться **аксиома 1** нормы. Поэтому понятие метрического пространства существенно обобщает понятие нормированного пространства. Оказывается, в евклидовом пространстве норму можно ввести естественным образом, описанным в следующей теореме (теореме о норме в евклидовом пространстве).

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

Это доказательство базируется на **неравенстве Коши-Буняковского**. Действительно,

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x+y|| =$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x + y|| = \sqrt{(x + y, x + y)} =$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ задает в евклидовом пространстве U* ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x+y|| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \leq$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x + y|| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y)} =$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x+y|| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right)^2} =$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ задает в евклидовом пространстве U* ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x+y|| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x,x) + 2(x,y) + (y,y)} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2} = \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} =$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x+y|| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x,x) + 2(x,y) + (y,y)} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2} = \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} = ||x|| + ||y||.$$

VI.5. Теорема о норме в евклидовом пространстве

Теорема 11. *Функция* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *задает в евклидовом пространстве* U ***норму.***

Доказательство.

Нетривиальным является только доказательство **неравенства треугольника**.

$$||x+y|| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right)^2} = \sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)} = ||x||+||y||.$$

Справедливость остальных аксиом нормы докажите самостоятельно. Теорема доказана.

VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств

Теорема 12. *Для любых ортогональных векторов x, y евклидова пространства с нормой $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ справедливо равенство $||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$.*

Доказательство.

VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств

Теорема 12. *Для любых ортогональных векторов x, y евклидова пространства с нормой $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ справедливо равенство $||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2$.*

Доказательство.

Так как по условию теоремы $(x, y) = 0$, то

$$||x+y||^2 =$$

VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств

Теорема 12. *Для любых ортогональных векторов* x, y *евклидова пространства с нормой* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *справедливо равенство* $||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$.

Доказательство.

Так как по условию теоремы $(x, y) = 0$, то

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) =$$

VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств

Теорема 12. *Для любых ортогональных векторов* x, y *евклидова пространства с нормой* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *справедливо равенство* $||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2$.

Доказательство.

Так как по условию теоремы $(x,y) = 0$, то

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$$

VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств

Теорема 12. *Для любых ортогональных векторов* x, y *евклидова пространства с нормой* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *справедливо равенство* $||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$.

Доказательство.

Так как по условию теоремы $(x, y) = 0$, то

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$

$$= (x, x) + (y, y) =$$

VI.6. Теорема Пифагора для евклидовых пространств

Теорема 12. *Для любых ортогональных векторов* x, y *евклидова пространства с нормой* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *справедливо равенство* $||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$.

Доказательство.

Так как по условию теоремы $(x, y) = 0$, то

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$

$$= (x, x) + (y, y) = ||x||^2 + ||y||^2,$$

что и требовалось доказать.

VI.7. Эквивалентность норм

Понятие нормы активно используется при обобщении некоторых методов и понятий математического анализа на произвольные линейные пространства. Поэтому одним из основных вопросов в этой области является следующая проблема: верно ли, что если две точки «близки» в смысле одной нормы, то они «близки» и в смысле второй нормы?

VI.7. Эквивалентность норм

Понятие нормы активно используется при обобщении некоторых методов и понятий математического анализа на произвольные линейные пространства. Поэтому одним из основных вопросов в этой области является следующая проблема: верно ли, что если две точки «близки» в смысле одной нормы, то они «близки» и в смысле второй нормы?

«Близки» не в смысле конкретных значений нормы вектора, а в следующем понимании: пусть $u_1, u_2, u_3 \ldots$ — последовательность векторов линейного пространства U, на котором определены нормы $|| \bullet ||_1$ и $|| \bullet ||_2$.

VI.7. Эквивалентность норм

Понятие нормы активно используется при обобщении некоторых методов и понятий математического анализа на произвольные линейные пространства. Поэтому одним из основных вопросов в этой области является следующая проблема: верно ли, что если две точки «близки» в смысле одной нормы, то они «близки» и в смысле второй нормы?

«Близки» не в смысле конкретных значений нормы вектора, а в следующем понимании: пусть $u_1, u_2, u_3 \ldots$ — последовательность векторов линейного пространства U, на котором определены нормы $|| \bullet ||_1$ и $|| \bullet ||_2$.

Верно ли, что последовательность $||u_1||_1, ||u_2||_1, ||u_3||_1, \ldots$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда последовательность $||u_1||_2, ||u_2||_2, ||u_3||_2, \ldots$ также стремится к нулю?

VI.7. Эквивалентность норм

Определение 10. *Нормы* $|| \bullet ||_1$ *и* $|| \bullet ||_2$ *линейного пространства* U *называются* **эквивалентными** *тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа* A *и* B, *что для любого вектора* x *из* U *имеют место неравенства* $||x||_1 \leq A \cdot ||x||_2$ *и* $||x||_2 \leq B \cdot ||x||_1$.

VI.7. Эквивалентность норм

Определение 10. *Нормы* $||\bullet||_1$ *и* $||\bullet||_2$ *линейного пространства* U *называются* **эквивалентными** *тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа* A *и* B, *что для любого вектора* x *из* U *имеют место неравенства* $||x||_1 \leq A \cdot ||x||_2$ *и* $||x||_2 \leq B \cdot ||x||_1$.

Целью данного раздела является доказательство теоремы об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

VI.8. Лемма о пределе нормы покоординатно бесконечно малой последовательности

Лемма 1. *Пусть* V *— конечномерное нормированное линейное пространство,* $\{x_1, x_2, \ldots, \}$ *— последовательность векторов этого пространства, покоординатно сходящаяся к нулю (то есть для любого базиса и любого* $1 \leq m \leq \dim(V)$ *последовательность* m*-тых координат этих векторов стремится к 0). Тогда* $||x_k|| \to 0$.

Доказательство.

VI.8. Лемма о пределе нормы покоординатно бесконечно малой последовательности

Лемма 1. *Пусть* V *— конечномерное нормированное линейное пространство,* $\{x_1, x_2, \ldots, \}$ *— последовательность векторов этого пространства, покоординатно сходящаяся к нулю (то есть для любого базиса и любого* $1 \leq m \leq \dim(V)$ *последовательность* m*-тых координат этих векторов стремится к 0). Тогда* $||x_k|| \to 0$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$,

$$x_k = \lambda_{k,1}\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_{k,n}\overrightarrow{\mathbf{e}}_n.$$

VI.8. Лемма о пределе нормы покоординатно бесконечно малой последовательности

Лемма 1. *Пусть V — конечномерное нормированное линейное пространство, $\{x_1, x_2, \ldots,\}$ — последовательность векторов этого пространства, покоординатно сходящаяся к нулю (то есть для любого базиса и любого $1 \le m \le \dim(V)$ последовательность m-тых координат этих векторов стремится к 0). Тогда $||x_k|| \to 0$.*

Доказательство. $x_k = \lambda_{k,1}\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_{k,n}\overrightarrow{\mathbf{e}}_n$.

$$||x_k|| \le |\lambda_{k,1}| \cdot ||\overrightarrow{\mathbf{e}}_1|| + \ldots + |\lambda_{k,n}| \cdot ||\overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| \to 0,$$

так как $||\overrightarrow{\mathbf{e}}_1||, \ldots, ||\overrightarrow{\mathbf{e}}_n||$ — константы и для любого i по условию $|\lambda_{k,i}| \to 0$.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\text{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M*, что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\textbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M, *что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. Применим метод доказательства «от противного».

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве V для любого базиса* $\text{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M, *что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. Пусть V — контрпример, то есть нормированное пространство, для которого утверждение доказываемой леммы не выполняется.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве V для любого базиса $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число M, что из неравенства $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ следует, что $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.*

Доказательство. Пусть V — контрпример, то есть нормированное пространство, для которого утверждение доказываемой леммы не выполняется. Пусть $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ — соответствующий базис, ε — соответствующее положительное число. Рассмотрим монотонно возрастающую неограниченную последовательность $M_1, M_2, \ldots$ положительных чисел.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M*, что из неравенства* $||\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. Пусть V — контрпример, то есть нормированное пространство, для которого утверждение доказываемой леммы не выполняется. Пусть $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ — соответствующий базис, ε — соответствующее положительное число. Рассмотрим монотонно возрастающую неограниченную последовательность $M_1, M_2, \ldots$ положительных чисел. Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{x}}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{k,i}\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ такой вектор, что для некоторого $1 \leq m \leq n$ выполняется неравенство $|\lambda_{k,m}| > M_k$.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M, *что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. $M_1, M_2, \ldots$ — монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел, $\overrightarrow{\mathbf{x}}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{k,i} \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ такой вектор, что $(\exists m \quad |\lambda_{k,m}| > M_k)$.

У всех векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \overrightarrow{\mathbf{x}}_k$ все координаты не превышают 1. Очевидно, что $||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \to 0$, т.к. $||\overrightarrow{\mathbf{x}}_k|| < \varepsilon$ и

$$\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2} \geq |\lambda_{k,m}| > M_k \to +\infty.$$

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\text{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M, *что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. $M_1, M_2, \ldots$ — монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел, $\overrightarrow{\mathbf{x}}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{k,i} \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ такой вектор, что $(\exists m \quad |\lambda_{k,m}| > M_k)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \overrightarrow{\mathbf{x}}_k$, $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \leq 1$, $\quad ||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \to 0$. Поэтому, по лемме о сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности получаем, что существует покоординатно сходящаяся подпоследовательность последовательности векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k$.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве V для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M, *что из неравенства* $||\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. Мы показали, что существует покоординатно сходящаяся подпоследовательность последовательности векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}}\overrightarrow{\mathbf{x}}_k$. Удалив лишние векторы, можно считать, что последовательность $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k$ сходится к вектору $\overrightarrow{\mathbf{z}}$.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M*, что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. Мы показали, что существует покоординатно сходящаяся подпоследовательность последовательности векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \overrightarrow{\mathbf{x}}_k$. Удалив лишние векторы, можно считать, что последовательность $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k$ сходится к вектору $\overrightarrow{\mathbf{z}}$. По **лемме о пределе нормы покоординатно бесконечно малой последовательности векторов конечномерного пространства** получаем, что $||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \to 0$.

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве* V *для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* M, *что из неравенства* $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ *следует, что* $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.

Доказательство. Мы показали, что существует последовательность векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \overrightarrow{\mathbf{x}}_k$, покоординатно сходящаяся к $\overrightarrow{\mathbf{z}}$, причем $||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \to 0$. Следовательно, для любого $T > 0$ найдется такой N, что для любого $k > N$ выполняются неравенства $||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| < T, \quad ||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \leq T$,

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве V для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число M, что из неравенства $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ следует, что $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.*

Доказательство. Мы показали, что существует последовательность векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \overrightarrow{\mathbf{x}}_k$, покоординатно сходящаяся к $\overrightarrow{\mathbf{z}}$, причем $||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \to 0$. Следовательно, для любого $T > 0$ найдется такой N, что для любого $k > N$ выполняются неравенства
$||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| < T, \quad ||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \leq T,$
$||\overrightarrow{\mathbf{z}}|| \leq ||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| + ||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| < T + T = 2T.$

VI.9. Лемма об ограниченности окрестности

Лемма 2. *В конечномерном пространстве V для любого базиса* $\mathbf{Б} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число M, что из неравенства $||\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e}}_n|| < \varepsilon$ следует, что $|\lambda_1| < M, \ldots, |\lambda_n| < M$.*

Доказательство. Мы показали, что существует последовательность векторов $\overrightarrow{\mathbf{y}}_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,1}^2 + \ldots + \lambda_{k,n}^2}} \overrightarrow{\mathbf{x}}_k$, покоординатно сходящаяся к $\overrightarrow{\mathbf{z}}$, причем $||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \to 0$. Следовательно, для любого $T > 0$ найдется такой N, что для любого $k > N$ выполняются неравенства

$$||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| < T, \quad ||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| \leq T,$$

$$||\overrightarrow{\mathbf{z}}|| \leq ||\overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| + ||\overrightarrow{\mathbf{y}}_k|| < T + T = 2T.$$

Так как это равенство выполняется для сколь угодно малых T, то $||z|| = 0$, что противоречит второй аксиоме нормы. Лемма доказана.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. «От противного». Пусть $|| \bullet ||_1$, $|| \bullet ||_2$ — неэквивалентные нормы. Тогда, по определению,

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. «От противного». Пусть $|| \bullet ||_1$, $|| \bullet ||_2$ — неэквивалентные нормы. Тогда, по определению, существует такое положительное число ε, что для любых положительных чисел B, C множество $\left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < B\right\}$ не включается в $\left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$, или $\left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < C\right\}$ не включается в $\left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < \varepsilon\right\}$.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем сходящуюся к 0 последовательность положительных чисел $A_1, A_2, \ldots,$ и положим $B_k = C_k = A_k$.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем сходящуюся к 0 последовательность положительных чисел $A_1, A_2, \ldots,$ и положим $B_k = C_k = A_k$. Для каждого номера k выберем по элементу x_k из $\left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$ или y_k из $\left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < \varepsilon\right\}$.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем сходящуюся к 0 последовательность положительных чисел $A_1, A_2, \ldots,$ и положим $B_k = C_k = A_k$. Для каждого номера k выберем по элементу x_k из $\left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$ или y_k из $\left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < \varepsilon\right\}$. Хотя бы одно из множеств $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ или $\left\{y_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ бесконечно. Пусть, для определенности, бесконечным является множество $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем $A_1, A_2, \ldots \to 0$, положим $B_k = C_k = A_k$, $x_k \in \left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$ и $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является бесконечным (те члены последовательности A_k, для которых выбирали y_k, удалим, и перенумеруем члены последовательности).

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем $A_1, A_2, \ldots \to 0$, положим $B_k = C_k = A_k$, $x_k \in \left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$ и $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является бесконечным (те члены последовательности A_k, для которых выбирали y_k, удалим, и перенумеруем члены последовательности).

По **лемме об ограниченности окрестности**, определяемой нормой, все координаты векторов x_k ограничены, так как для любого номера k имеем $||x_k||_2 < \varepsilon$. Значит, по лемме о сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности получаем, что существует подпоследовательность последовательности $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$, покоординатно сходящаяся к вектору z.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем $A_1, A_2, \ldots \to 0$, положим $B_k = C_k = A_k$, $x_k \in \left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$ и $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является бесконечным (те члены последовательности A_k, для которых выбирали y_k, удалим, и перенумеруем члены последовательности). Можно считать, что последовательности $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ покоординатно сходится к вектору z.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. Возьмем $A_1, A_2, \ldots \to 0$, положим $B_k = C_k = A_k$, $x_k \in \left\{x \,\middle|\, ||x||_1 < A_k\right\} \setminus \left\{x \,\middle|\, ||x||_2 < \varepsilon\right\}$ и $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ является бесконечным (те члены последовательности A_k, для которых выбирали y_k, удалим, и перенумеруем члены последовательности). Можно считать, что последовательности $\left\{x_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ покоординатно сходится к вектору z.

По **лемме о пределе нормы покоординатно бесконечно малой последовательности векторов конечномерного пространства** получаем, что $||z - x_k||_1 \to 0$. Кроме того, по свойствам предела, так как $A_k > 0$, $A_k \to 0$ и $||x_k||_1 < A_k$ то $||x_k||_1 \to 0$.

VI.10. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве

Теорема 13. *Любые две нормы, определенные на конечномерном линейном пространстве, эквивалентны между собой.*

Доказательство. По **неравенству треугольника**

$$||z||_1 \leq ||z - x_k||_1 + ||x_k||_1.$$

Но выражение в правой части этого неравенства стремится к 0 при k стремящемся к бесконечности. Поэтому, так как $||z||_1$ — константа, то $||z||_1 = 0$. С другой стороны, хотя бы одна координата вектора z отлична от нуля, так как, по выбору x_k, для любого k имеем $||x_k||_2 \geq \varepsilon$. Таким образом, $||z||_1 = 0$, но $z \neq \mathbf{0}$, что противоречит первой аксиоме нормы.

Теорема доказана.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?

Вернуться к оглавлению раздела «Линейные пространства»?