Исчисления

Одна из задач математической логики — построение процедур, которые позволяли бы на синтаксическом уровне выяснять, истинны ли те или иные утверждения в любой модели при определенной интерпретации грамматических конструкций.

Исчисления

Одна из задач математической логики — построение процедур, которые позволяли бы на синтаксическом уровне выяснять, истинны ли те или иные утверждения в любой модели при определенной интерпретации грамматических конструкций.

Определение 1 *Говорят, что задано* **исчисление** I*, если заданы следующие четыре множества:*

- **алфавит** $A(I)$*;*
- *множество* $E(I)$ *слов алфавита* $A(I)$*, называемое* **множеством выражений** *исчисления* I*;*
- *множество* $Ax(I)$ *выражений исчисления* I*, называемое* **множеством аксиом** *исчисления* I*;*
- *множество* $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ *частичных операций на множестве* $E(I)$*, называемых* **правилами вывода** *исчисления* I*.*

Выражения исчисления I, в соответствии с обозначениями из [?], называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

При этом указывается область определения функции f, если она не совпадает с $(E(I))^n$. При этом $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ называются **посылками**, а $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — **заключением**.

Пара $\langle A(I), E(I) \rangle$ называется **языком исчисления** I и обозначим через $\mathcal{L}(I)$.

Определение 2 *Пусть $T(I)$ — подмножество множества выражений $E(I)$, определяемое индуктивным правилом (то есть наименьшее множество, для которого выполняются следующие утверждения)*

- $Ax(I) \subseteq T(I)$;
- *если* $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subseteq T(I)$, *то для любого* n*-местного правила вывода* f *исчисления* I *имеем* $f(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in T(I)$.

Тогда множество $T(I)$ *называется* **множеством теорем** *исчисления* I *или* **множеством доказуемых выражений** *исчисления* I, *а его элементы —* **теоремами** *исчисления* I.

Теория языка $L(I)$ — произвольное множество теорем этого языка.

Одной из основных целей введения исчисления в каждом разделе математики (разумеется, не только математики) является обеспечение «работы» с соответствующими объектами на грамматическом, формальном уровне, без привлечения семантики (то есть смыслового значения) соответствующих грамматических конструкций: слов, символов, обозначений, выражений, формул и т.п.

Например, человек, изучивший правила дифференцирования, может правильно продифференцировать функцию даже в случае, когда он не знает определения этой функции. Он может не знать, например, что такое тригонометрическая функция, но если ему известна формула $(\sin x)' = \cos x$ и формальные правила дифференцирования, то он может получить равенство

$$(\sin 2x - \sin 3x)' = 2\cos 2x - 3\cos 3x,$$

не смотря на то, что этот человек, быть может, не понимает, что такое производная, и что такое $\sin$ и $\cos$.

Можно, разумеется, получить последнее равенство и используя семантику понятия «производная» и обозначений $\sin$ и $\cos$: $(\sin 2x - \sin 3x)' =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin 2(x + \Delta x) - \sin 3(x + \Delta x)) - (\sin 2x - \sin 3x)}{\Delta x} =$$

$$= \ldots = 2\cos 2x - 3\cos 3x,$$

но это, понятно, намного труднее и зачастую требует виртуознейшего владения аппаратом теории пределов и глубокого знания свойств соответствующих функций.

Основными инструментальными понятиями исчислений являются понятие формулы и выводимости формулы. Под формулой понимается высказывание, записанное средствами соответствующего языка, а под выводом формулы — некая жестко формализованная процедура «доказательства истинности» этой формулы. Следует отметить, что выразительные возможности различных языков существенно различаются. «Платой» за повышение универсальности языка часто является, например, большая громоздкость формул, существенное «уменьшение» (в том или ином смысле) множества доказуемых формул и т.п.

Например, в исчислении высказываний фактически невозможно отметить «общие черты» высказываний «всякий x обладает свойством $P(x)$» и «существует хотя бы один такой x, который обладает свойством $P(x)$». На языке исчисления предикатов каждое из этих высказываний можно «расщепить», и выделить общий предикат $P(x)$, при этом эти высказывания можно записать формулами, учитывающими «общий» предикат $P(x)$: $\forall x\ P(x)$ и $\exists x\ P(x)$. С другой стороны, в так называемом «узком исчислении предикатов», или языке теорий первого порядка нельзя таким образом «расщепить» высказывание «для любого x найдется такой предикат P, который истинен на элементе x» (то есть для которого верно $P(x)$). Дело в том, что в этом высказывании необходимо поставить квантор существования перед *предикатом*, что недопустимо в узком исчислении предикатов.

Векторное исчисление

В данном случае мы не будем выписывать аксиомы и правила вывода.

Вернуться?

Список литературы

[1] Алесенко Л.П., Махнев А.А., Тягунов Л.И. Элементы дискретной математики. Изд-во УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 1994.

[2] Алимов Ю. И. Альтернатива методу математической статистики.— М.: Знание.— сер. Математика и кибернетика.— N 3, 1980.

[3] Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях.— В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений.— Мир.— 1976.— С.172-215.

[4] Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра.— М.: Мир.— 1976.— 400 с.

[5] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики: Учеб.пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука.— 1992.— 408 с.

[6] Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка.— 1989 г.— 376 с.

[7] Гусев Л. А., Смирнова И. М. Размытые множества. Теория и приложения. (Обзор).— Автоматика и телемеханика.— N.5, 1973 г.— С.66-85.

[8] Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.— М.: Мир.— 1976.

[9] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов.— М.:Наука. 1990.— 384 с.

[10] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.— М.: Наука.— 1987.— 336 с.

[11] Жоль К. К. Логика в лицах и символах.— М.: Педагогика-пресс.— 1993.— 256 с.

[12] Зыкин ?.?. Теория графов.—

[13] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. Изд.третье, перераб.и доп. М.: Наука, 288 с. 1982.

[14] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей.— М.: Мир.— 1977.— 616 с.

[15] Клини С. Математическая логика.— М.: Мир.— 1973.— 480 с.

[16] Кук Д. Бейз Г. Компьютерная математика.- М.: Наука.- 1990.- 384 с.

[17] Курош А.Г. Теория групп. Изд-е третье, доп. М.: Наука, 648 с. 1967.

[18] Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра. Учеб.пособие. Пер.с англ., Екатеринбург, Изд-во Урал.ун-та, 1996, xx+744 с.

[19] Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука. — 1970.— 392 с.

[20] Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. Общая алгебра. т.1/ — М.:Наука, 1990.— С. 31.

[21] *Мельников Ю.Б.* Доказательство теорем. Задачи, требующие составления системы уравнений и неравенств. Функции и графики. Учеб. пособие по курсу "Математика". Изд-е третье исправленное и дополненное/ Екатеринбург: изд-во УГТУ, 2001. 196 с.

[22] *Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б.* Лекции по алгебре. Учеб. пос. по курсу "Математика", Изд-е третье, исправленное и дополненное/ Екатеринбург: Уральское издательство, 2003, 512 с, ISBN 5-93667-036-8.

[23] *Мельников Ю.Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография.– Екатеринбург: Уральское издательство, 2004, 384 с

[24] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука.- 1984.- 320 с.

[25] Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. Москва, Изд-во МАИ, 1992, 262 с.

[26] Оре О. Теория графов.— 2-е изд.— М.: Наука.— 1980.— 336 с.

[27] Орлов А. И. Случайные множества: законы больших чисел, проверка статистических гипотез.— Теория вероятностей и ее применения.— т. 23, N 2.— 1978, С.462-464.

[28] Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука. — 1967.— 376 с.

[29] Смелянский Р.Л. Применение темпоральной логики для спецификации поведения программных систем.— Программирование.— 1993, **N** 1.— С. 3-28.

[30] Справочная книга по математической логике. Под ред. Дж.Барвайса, ч.2: Теория множеств. М.:Наука.- 1982.- С.10,103.

[31] Справочная книга по математической логике. Под ред. Дж.Барвайса, ч.3: Теория рекурсии. М.:Наука.— 1982.-360 с.

[32] Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Злементы дискретной математики: Учебник.– М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.— 280 с.

[33] Такеути Г. Теория доказательств.- М.: Мир.- 1978.- 412 с.

[34] Черч А. Введение в математическую логику. Т.1.- М.: Изд-во иностранной литературы.- 1960.- 486 с.

[35] Фейс Р. Модальная логика.— М.: Наука.— 1974.— 520 с.

[36] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику

[37] Hoare C. A. R. An axiomatic basis for computer programming// CACM 1969. V. 12. N^o 10. P. 576-583.

[38] Huppert B. Endlishe Gruppen I, Springer-Verlag, 1967, 793 p.

[39] Zadeh L. Fussy Sets.— Inf.Control., v.8., 1965.— p. 338-353.

Дополнительная литература

[40] Воронков А. А. Автоматическое доказательство теорем, ч.1. Кибернетика и системный анализ, 1986, N 3, С. 27.

[41] Воронков А. А. Автоматическое доказательство теорем, ч.2. Кибернетика и системный анализ, 1987, N 4, С. 88.

[42] Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966, 227 с.

[43] Грис Д. Наука программирования. 1984.

[44] Дидук Н. Н. Нечеткость с точки зрения теории информации. Кибернетика и системный анализ, 1987, N 2, С. 80.

[45] Кузичев А.С. Диаграммы Венна. — М.: Наука.— 1968.— 252 с.

[46] Кулиш Ю. И. Темпоральная теория множеств. Кибернетика и системный анализ, 1990, N 5, С. 127.

[47] Непомнящий В. А., Рякин О. М. Прикладные методы верификации программ. 1988 г. Семантика языков программироввания, 1980.

[48] Нечеткие множества в моделях управления и интеллекта. Сб. под редакцией Поспелова, 1986, 198 с.

[49] Орлов А. И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные // М.: Знание.— сер. Математика и кибернетика.— N. 8, 1980.— 64 с.

[50] Самохвалов ?. ?. Метод проблемно-ориентированного доказательства в нечеткой логике. Кибернетика и системный анализ, 1995, N 5, C. 58.