Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Евклидовы пространства

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством****, если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X,Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot Y^t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t\cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы****,* $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение.

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством***, *если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***, $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение. Проверим, что введенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством****, если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr *—* ***след матрицы****,* $\bullet^t$ *—* ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение. Проверим, что введенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Выполнение первой и второй аксиомы следует из свойств операций транспонирования матриц и умножения матриц.

Пример 1. *Докажите, что* ***линейное пространство*** U ***симметричных матриц*** *размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами является* ***евклидовым пространством***, *если* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***, $\bullet^t$ — ***транспонирование*** *матрицы.*

Решение. Проверим, что введенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Выполнение первой и второй аксиомы следует из свойств операций транспонирования матриц и умножения матриц.

Мы применим *метод Лагранжа* (метод выделения полных квадратов). Согласно **формуле (1)** получаем

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+$$

$$+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2a^2+2ab-4ad+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+$$

$$+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2a^2+2ab-4ad+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2.$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+$$

$$+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2a^2+2ab-4ad+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2.$$

Выделим полный квадрат в выражении в скобках:

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| + \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+2a\cdot\frac{b}{2}-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 =$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+2a\cdot\frac{b}{2}-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2=a^2+\frac{b^2}{4}+d^2+ab-2ad-bd$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+2a\cdot\frac{b}{2}-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2-\frac{b^2}{4}-d^2+bd\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2=a^2+\frac{b^2}{4}+d^2+ab-2ad-bd$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+2a\cdot\frac{b}{2}-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2-\frac{b^2}{4}-d^2+bd\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2+\frac{9}{2}b^2+6bd+11d^2=$$

$$(X,X) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \mathrm{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2\left(a^2 + ab - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} - 2ad\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{4} - d^2 + bd\right) + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2}b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 - 2d^2 + 11d^2 =$$

$$(X,X)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\left(a^2+ab-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a^2+2a\cdot\frac{b}{2}-2ad\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2-\frac{b^2}{4}-d^2+bd\right)+5b^2+4bd+13d^2=$$

$$=2\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2+\frac{9}{2}b^2+6bd+11d^2=$$

$$=2\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2+\frac{1}{2}\left(3b+2d\right)^2+9d^2.$$

Таким образом,

$$(X,X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Таким образом,

$$(X,X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2}\cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}\left(3b + 2d\right)^2 + 9d^2.$$

Последнее выражение представляет собой сумму квадратов и поэтому принимает только неотрицательные значения.

Таким образом,

$$(X,X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b + 2d)^2 + 9d^2.$$

Последнее выражение представляет собой сумму квадратов и поэтому принимает только неотрицательные значения. При этом оно обращается в 0 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a + \frac{b}{2} - d = 0, \\ 3b + 2d = 0, \\ d = 0. \end{cases}$

Таким образом,

$$(X, X) = 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot b^2 + 6bd + 11d^2 =$$

$$= 2\left(a + \frac{b}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{2}\left(3b + 2d\right)^2 + 9d^2.$$

Последнее выражение представляет собой сумму квадратов и поэтому принимает только неотрицательные значения. При этом оно обращается в 0 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a + \frac{b}{2} - d = 0, \\ 3b + 2d = 0, \\ d = 0. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение $a = b = d = 0$.

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
(X,X) = 2\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2 - \frac{b^2}{2} - 2d^2 + 2bd + 5b^2 + 4bd + 13d^2 = \\
= 2\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2 + \frac{9}{2}\cdot b^2 + 6bd + 11d^2 = \\
= 2\left(a+\frac{b}{2}-d\right)^2 + \frac{1}{2}(3b+2d)^2 + 9d^2.
\end{aligned}
$$

Мы доказали, что это выражение равно 0 тогда и только тогда, когда $a = b = d = 0$.

Итак, U с **указанным скалярным произведением (1)** является евклидовым пространством.

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства*** ***примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства*** ***примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr *—* ***след матрицы****.*

Решение. Требование задачи некорректно, поскольку

Пример 2. *Найдите **матрицу Грама** для **евклидова пространства** **примера 1** т.е. евклидова пространства U **симметричных матриц** размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором **скалярное произведение** задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr *— **след матрицы**.*

Решение. Требование задачи некорректно, поскольку не указано, какому базису должна соответствовать искомая **матрица Грама**.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой* $(X, Y) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \tag{1}$$

где tr *—* ***след матрицы***.

Решение. Требование задачи некорректно, поскольку не указано, какому базису должна соответствовать искомая **матрица Грама**.

Значит, базис мы можем выбрать сами.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой $(X, Y) =$*

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы.***

Решение. Каждая матрица X из U является симметричной, то есть $X^t = X$. Иными словами, если $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, откуда $b = c$.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой $(X, Y) =$*

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы***.

Решение. Каждая матрица X из U является симметричной, то есть $X^t = X$. Иными словами, если $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, откуда $b = c$. Итак, матрица X содержится в

U тогда и только тогда, когда $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ для некоторых вещественных коэффициентов a, b, d.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой $(X, Y) =$*

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr *—* ***след матрицы****.*

Решение. Матрица X содержится в U тогда и только тогда, когда $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ для некоторых вещественных коэффициентов a, b, d. «Протаскивая единичку через параметры» a, b, d, получаем базис пространства U: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой $(X, Y) =$*

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr — ***след матрицы.***

Решение. $\text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{11} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{2},$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{13} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = -2,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{21} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{22} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{5},$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{5} & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{23} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \boxed{2},$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & \boxed{2} \\ & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{31} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{-2},$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ \boxed{-2} & & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{32} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{2},$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & \boxed{2} & \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу Грама** в базисе

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$\gamma_{33} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| +$$

$$+ \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 13,$$

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. *Найдите* ***матрицу Грама*** *для* ***евклидова пространства примера 1*** *т.е. евклидова пространства U* ***симметричных матриц*** *размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, в котором* ***скалярное произведение*** *задано формулой $(X, Y) =$*

$$= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \operatorname{tr}(X^t \cdot Y), \qquad (1)$$

где tr *—* ***след матрицы.***

Решение. Матрица Грама базиса **Б** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Вернуться к лекции?

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение.

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Согласно **формуле (1)** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Согласно **формуле (1)** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Согласно **формуле (1)** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 9 + 2 =$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Согласно **формуле (1)** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 9 + 2 = 11.$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. По **теореме о вычислении скалярного произведения с использованием матрицы Грама** имеем $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 11,$$

что совпадает с результатами **предыдущих вычислений**.

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Для остальных ситуаций приведем лишь результаты вычислений:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3,$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Для остальных ситуаций приведем лишь результаты вычислений:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 6,$$

Пример 3. *В условиях* ***примера 2*** *найдите по определению с помощью матрицы Грама скалярные произведения матриц* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Решение. Для остальных ситуаций приведем лишь результаты вычислений:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 22.$$

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше* 2 *с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Обозначим через **Б** естественный базис пространства многочленов степени не выше 2, т.е. многочленов вида

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Обозначим через **Б** естественный базис пространства многочленов степени не выше 2, т.е. многочленов вида $a + bx + cx^2$: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0$.

Найдем e_2 в виде $e_2 = x + \alpha_{21}e_1 = x + \alpha_{21}x^0$. Можно сразу воспользоваться формулой для коэффициентов, но мы повторим ее вывод.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0=(e_2,e_1)=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0=(e_2,e_1)=\left(x+\alpha_{21}x^0,x^0\right)=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0 = (e_2, e_1) = \left(x + \alpha_{21}x^0, x^0\right) = \left(x, x^0\right) + \alpha_{21}\left(x^0, x^0\right),$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0$.

По выбору вектора e_2 имеем

$$0 = (e_2, e_1) = \left(x + \alpha_{21}x^0, x^0\right) = \left(x, x^0\right) + \alpha_{21}\left(x^0, x^0\right),$$

откуда $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x,x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{(x,x^0)}{(x^0,x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x,x^0\right)=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x, x^0\right) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x, x^0\right) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2},$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$(x, x^0) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad (x^0, x^0) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x, x^0\right) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad \left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^0 dx = 1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x, x^0\right) = \int\limits_0^1 x \cdot x^0 dx = \frac{1}{2}, \quad \left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^0 dx = 1.$$

$$e_2 = x + \frac{1/2}{}x^0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{\left(x,x^0\right)}{\left(x^0,x^0\right)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x,x^0\right)=\int\limits_0^1 x\cdot x^0dx=\frac{1}{2},\qquad \left(x^0,x^0\right)=\int\limits_0^1 x^0\cdot x^0dx=1.$$

$$e_2=x+\frac{1/2}{1}x^0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{\left(x,x^0\right)}{\left(x^0,x^0\right)}$.

Первый способ: по определению. Имеем

$$\left(x,x^0\right)=\int\limits_0^1 x\cdot x^0dx=\frac{1}{2},\quad \left(x^0,x^0\right)=\int\limits_0^1 x^0\cdot x^0dx=1.$$

$$e_2=x+\frac{1/2}{1}x^0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x,x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{(x,x^0)}{(x^0,x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама. Обычно вычисление с помощью матрицы Грама является более легким и быстрым, чем вычисление по определению. Но, к сожалению, саму **матрицу Грама** еще надо вычислить. Однако, «игра стоит свеч», и затраты на ее вычисление «окупятся», так как нам придется много раз вычислять скалярное произведение в рамках рассматриваемой задачи (предстоит еще вычислить e_3 и нормировать векторы).

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{\left(x,x^0\right)}{\left(x^0,x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}\end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11}=\left(x^0,x^0\right)=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x) g(x)\, dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21} x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = \left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 \left(x^0\right)^2 dx =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = \left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 \left(x^0\right)^2 dx = 1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{11} = \left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 \left(x^0\right)^2 dx = 1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21} x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(x^0, x\right) =$$

Пример 4. *Найти **ОНБ** евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x,x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{(x,x^0)}{(x^0,x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=(x^0,x)=\int\limits_0^1 x^0\cdot x\,dx=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{\left(x,x^0\right)}{\left(x^0,x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=\left(x^0,x\right)=\int\limits_0^1 x^0\cdot x\,dx=1/2.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (x^0, x) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x\,dx = 1/2.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(x^0, x^2\right) =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x,x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{(x,x^0)}{(x^0,x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13}=\gamma_{31}=(x^0,x^2)=\int\limits_0^1 x^0\cdot x^2dx=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \gamma_{13} \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(x^0, x^2\right) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^2 dx = 1/3.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1/3 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(x^0, x^2\right) = \int\limits_0^1 x^0 \cdot x^2 dx = 1/3.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 1/3 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$

Продолжая в том же духе (все эти вычисления легко проделать в уме), получаем

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{(x, x^0)}{(x^0, x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\{x^0,x,x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{(x,x^0)}{(x^0,x^0)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

Таким образом,

$$(x,x^0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=1/2.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$*.*

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{\left(x,x^0\right)}{\left(x^0,x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

Таким образом, $\left(x,x^0\right)=1/2$.

И из умножения матриц «на макроуровне», и по определению матрицы Грама, получаем, что этот элемент равен γ_{12}. Но это просто более-менее случайный «подарок судьбы».

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x+\alpha_{21}x^0,\quad$ где $\alpha_{21}=-\dfrac{\left(x,x^0\right)}{\left(x^0,x^0\right)}$.

Второй способ: с помощью матрицы Грама $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

Таким образом, $\left(x,x^0\right)=1/2$.

Кроме того в данном случае щедрая судьба отвесила нам еще один подарочек: $\left(x^0,x^0\right)=\gamma_{11}=1$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x + \alpha_{21}x^0, \quad$ где $\alpha_{21} = -\dfrac{\left(x, x^0\right)}{\left(x^0, x^0\right)}$.

Таким образом, и этим, и другим способом получили $\alpha_{21} = -1/2$, откуда $e_2 = x - \dfrac{1}{2}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\, dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,
$e_3 = \dots$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = \ldots$

> Осторожно! В этом месте обычно делают «стандартную ошибку». Обратите внимание, мы ищем e_3 не в виде $x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}x$, а в виде $e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,

$$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}$,

$e_3 = x^2 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 = x^2 + \alpha_{31}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31} = -\frac{\left(x^2, e_1\right)}{(e_1, e_1)} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x-\dfrac{1}{2}$,

$e_3=x^2+\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2=x^2+\alpha_{31}x^0+\alpha_{32}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31}=-\frac{(x^2,e_1)}{(e_1,e_1)}=-\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x-\dfrac{1}{2}$,

$e_3=x^2+\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2=x^2+\alpha_{31}x^0+\alpha_{32}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31}=-\frac{(x^2,e_1)}{(e_1,e_1)}=-\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}=-1/3,$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x-\dfrac{1}{2}$,

$e_3=x^2+\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2=x^2-\dfrac{1}{3}x^0+\alpha_{32}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$\alpha_{31}=-\frac{\left(x^2,e_1\right)}{(e_1,e_1)}=-\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}=-1/3,$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0,\quad e_2=x-\dfrac{1}{2},\quad e_3=x^2-\dfrac{1}{3}x^0+\alpha_{32}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32}=-\frac{(x^2,e_2)}{(e_2,e_2)}=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32} = -\frac{(x^2, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + \alpha_{32}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32} = -\frac{\left(x^2, e_2\right)}{(e_2, e_2)} = -\frac{-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}}{1/12} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1=x^0$, $\quad e_2=x-\dfrac{1}{2}$, $\quad e_3=x^2-\dfrac{1}{3}x^0+\alpha_{32}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\alpha_{32}=-\frac{\left(x^2,e_2\right)}{(e_2,e_2)}=-\frac{-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}}{1/12}=-1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \dfrac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^0 + (-1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right).$

$$\alpha_{32} = -\frac{\left(x^2, e_2\right)}{(e_2, e_2)} = -\frac{-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}}{1/12} = -1.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализуем базис $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта**, потом нормируем полученный базис.

Положим $e_1 = x^0, \quad e_2 = x - \frac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - \frac{1}{3}x^0 + (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$
$= x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

$$\mathbf{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

$$\mathbf{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\}.$$

Проверим ортогональность:

$$(e_1,e_2)=\int\limits_0^1 x^0\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

$$\mathbf{Б'} = \{e_1;\; e_2;\; e_3\} = \left\{x^0;\; x - \frac{1}{2};\; x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}.$$

Следующее скалярное произведение также легче вычислить по определению, без матрицы Грама:

$$(e_1, e_3) = \int\limits_0^1 x^0 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

$$\mathbf{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}.$$

А следующее скалярное произведение легче вычислить с помощью матрицы Грама:

$$(e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Ортогонализацией естественного базиса $\mathbf{Б}=\left\{x^0,x,x^2\right\}$ с помощью **процесса Грама-Шмидта** получили ортогональный базис

$$\mathbf{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\}.$$

А следующее скалярное произведение легче вычислить с помощью матрицы Грама:

$$(e_2,e_3)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Итак, проверено, что

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}$ — *ортогональный* базис. Осталось его нормировать: $e_i' = \frac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}} e_i$. Вычислим скалярные произведения более удобным в каждом случае образом:

$$(e_1, e_1) = \int\limits_0^1 x^0 x^0 dx = 1,$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\},\quad \text{Б''}=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$$

$$=\left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{(e_2,e_2)}}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3,e_3)}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2,e_2)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\textbf{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\},\quad \textbf{Б''}=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$$

$$=\left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{(e_2,e_2)}}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3,e_3)}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2,e_2)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

Решение. Имеем

$$\textbf{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\},\quad \textbf{Б''}=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$$

$$=\left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{(e_2,e_2)}}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3,e_3)}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2,e_2)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{12}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}$, **Б''** $= \{e'_1;\ e'_2;\ e'_3\} =$

$$= \left\{x^0;\ \frac{1}{\sqrt{1/12}}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}.$$

Пример 4. *Найти **ОНБ** евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\textbf{Б'} = \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}, \quad \textbf{Б''} = \{e'_1;\ e'_2;\ e'_3\} =$$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3, e_3)}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

Б' $=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\}$, **Б''** $=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$

$$=\left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3,e_3)}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=$$

Пример 4. *Найти* **ОНБ** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\text{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\},\quad \text{Б''}=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$$

$$=\left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3,e_3)}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3,e_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{180}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=$$

Пример 4. *Найти **ОНБ** евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\textbf{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\},\quad \textbf{Б''}=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$$

$$=\left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{(e_3,e_3)}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3,e_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{180}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{180}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

$$\textbf{Б'}=\{e_1;\ e_2;\ e_3\}=\left\{x^0;\ x-\frac{1}{2};\ x^2-x+\frac{1}{6}\right\},\quad \textbf{Б''}=\{e_1';\ e_2';\ e_3'\}=$$

$$=\left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{1/180}}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3,e_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{180}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{180}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Имеем

Б' $= \{e_1;\ e_2;\ e_3\} = \left\{x^0;\ x - \frac{1}{2};\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}$, **Б"** $= \{e_1';\ e_2';\ e_3'\} =$

$$= \left\{x^0;\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right);\ 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

$$(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{180}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства U всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.*

Решение. Следовательно, мы нашли один из ортонормированных базисов этого евклидова пространства:

$$\left\{x^0,\ \sqrt{3}(2x-1),\ \sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}.$$

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Следовательно, мы нашли один из ортонормированных базисов этого евклидова пространства:

$$\left\{x^0,\ \sqrt{3}(2x-1),\ \sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}.$$

Задача решена.

Пример 4. *Найти* ***ОНБ*** *евклидова пространства* U *всех многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Решение. Следовательно, мы нашли один из ортонормированных базисов этого евклидова пространства:

$$\left\{x^0,\ \sqrt{3}(2x-1),\ \sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}.$$

Задача решена.

Вернемся к лекции или **рассмотрим следующий пример?**

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом:

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти?

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U*, что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти? Подпространство V.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти? Подпространство V.

В каком виде запишем ответ?

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Сначала зададим подпространство V стандартным образом: системой линейных уравнений и с помощью базиса.

Что надо найти? Подпространство V.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. *Введем переменные.*

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Составим систему уравнений.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Составим систему уравнений. Воспользуемся характеристическим свойством элементов из V:

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Введем переменные.* Обозначим буквами коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $f(x) = a + bx + cx^2$.

Составим систему уравнений. Воспользуемся характеристическим свойством элементов из V: $a + b + c = a + b(-1) + c(-1)^2$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \qquad \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы строим базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

$(0\ 1\ 0)$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили систему из одного уравнения $b = 0$. **Фундаментальная система решений** этого уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Это базис пространства решений системы $0a + 1b + 0c = 0$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \{1 \cdot x^0 +$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \{1 \cdot x^0 + \boxed{0} \cdot x +$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \{1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + \boxed{0} \cdot x^2,$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \{x^0, 0 \cdot x^0 +$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U*, что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \{x^0, 0 \cdot x^0 + \boxed{0} \cdot x +$

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1)=f(1)$.

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\quad \text{в базисе } \mathbf{Б}=\{x^0,x,x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V=\left\{x^0, 0\cdot x^0+0\cdot x+1\cdot x^2\right\}$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. Получили столбцы координат

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{в базисе } \mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}.$$

«Возвращаясь из $\mathbb{R}^3$ на родину», в U, получаем базис линейного пространства V: $\mathbf{Б}_V = \{x^0, x^2\}$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. Теперь займемся поиском **ортогонального дополнения**.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. *Что надо найти?*

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U*, что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. *Что надо найти?* Подпространство (согласно **теореме об ортогональном дополнении**).

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U, *что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ?

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству* V *всех таких многочленов из* U*, что* $f(-1) = f(1)$.

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Что надо найти?* Подпространство.

В каком виде запишем ответ? Системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные. Возьмем произвольный вектор из V, его координаты в базисе **Б** обозначим буквами: $g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.*

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.* По следствию об ортогональном дополнении к базису подпространства $g(x)$ принадлежит $V^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $g(x)$ ортогонален к базисным векторам пространства V.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.* Поэтому можно двумя способами вычислить скалярное произведение многочлена $g(x)$ с базисными векторами пространства V.

Пример 5. *В условиях примера 4 найдите* ***ортогональное дополнение*** *к подпространству V всех таких многочленов из U, что $f(-1) = f(1)$.*

Решение. *Составим систему уравнений.* Поэтому можно двумя способами вычислить скалярное произведение многочлена $g(x)$ с базисными векторами пространства V. По теореме о вычислении скалярного произведения, используя найденную при решении примера 4 **матрицу Грама**, получаем

$$
\begin{cases}
0 = (x^0, g(x)) = \\
\\
0 = (x^2, g(x)) =
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ 0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Получилась система уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Получилась система уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases} \text{ с ФСР } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$ — это координаты базисного вектора одномерного пространства $V^{\perp}$, заданного ОСЛУ $\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases}$

поэтому

$$V^{\perp} =$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$ — это координаты базисного вектора одномерного пространства $V^{\perp}$, заданного ОСЛУ $\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases}$

поэтому

$$V^{\perp} = \left\{ \alpha + \beta x + \gamma x^2 \,\middle|\, \begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0 \end{cases} \right\} =$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$ — это координаты базисного вектора одномерного пространства $V^{\perp}$, заданного ОСЛУ $\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0, \end{cases}$ поэтому

$$V^{\perp} = \left\{ \alpha + \beta x + \gamma x^2 \,\middle|\, \begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{5} = 0 \end{cases} \right\} = \langle 3 - 16x + 15x^2 \rangle.$$

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

$$\left(x^0, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0,$$

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

$$\left(x^0, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\,dx = 0,$$

$$\left(x^2, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 x^2\left(3 - 16x + 15x^2\right)\,dx = 0.$$

Проверим правильность вычислений, вычислив скалярное произведение полученного многочлена с базисными векторами пространства V:

$$\left(x^0, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0,$$

$$\left(x^2, 3x^0 - 16x + 15x^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(3 - 16x + 15x^2\right)\, dx = 0.$$

Результат подтвердился. Задача решена.

Вернуться к лекции?

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\text{Б}}$

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\text{Б}}$
Подпространство V	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\textbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\textbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\textbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n \times n}$ в базисе **Б**

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n\times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n \times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$

Задача II.1. (Ответ приведен на стр.203.) Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением

$$\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

является **евклидовым пространством**.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.239.) Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.271.) Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Задача IV.4. (Ответ приведен на стр.300.) Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) X Y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.378.) Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\left(f(x); g(x)\right) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.440.) Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x,y); g(x,y)\big) = \iint\limits_G f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy$, где G — чертверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Задача V.7. (Ответ приведен на стр.444.) Если X — подпространство евклидова пространства Y, то $X^{\perp} = \dots$

Задача V.8. (Ответ приведен на стр.447.) Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Задача V.9. (Ответ приведен на стр.454.) Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $M^{\perp} = \ldots$

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.459.) Пусть $X \leq U$, $Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Задача V.11. (Ответ приведен на стр.469.) Пусть $X \leq U$, $Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Задача V.12. (Ответ приведен на стр.477.) Пусть $X \leq U$, $Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Задача V.13. (Ответ приведен на стр.487.) Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Задача V.14. (Ответ приведен на стр.494.) В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;\ 4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2 \rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5 \rangle$
ортогональное дополнение к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2 \rangle$.

Задача V.15. (Ответ приведен на стр.555.) Пусть в базисе $\mathbf{B} = \left\{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\right\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов

$$M = \left\{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;\right.$$
$$\left.2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\right\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}.$$

Задача V.16. (Ответ приведен на стр.634.) В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \left\{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\right\}$.

Задача V.17. (Ответ приведен на стр.647.) Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\big(f(x), g(x)\big) =$ $= \big(g(x), f(x)\big)$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx =$ $= \big(g(x), f(x)\big)\,.$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = \qquad = \big(g(x), f(x)\big)\,.$

Воспользуемся свойством коммутативности произведения многочленов.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

1. Коммутативность: $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 g(x)\, f(x)\, dx = \big(g(x), f(x)\big)$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность:

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \lambda\, \big(f(x), h(x)\big) + \mu\, \big(g(x), h(x)\big) \qquad (\textbf{?})$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \lambda \big(f(x), h(x)\big) + \mu \big(g(x), h(x)\big) \qquad (\textbf{?})$

$$\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\ h(x)\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \lambda \left(f(x), h(x)\right) + \mu \left(g(x), h(x)\right) \qquad (\textbf{?})$

$$\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\; h(x)\, dx = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x) h(x) + \mu g(x) h(x)\big)\; dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \lambda\left(f(x), h(x)\right) + \mu\left(g(x), h(x)\right)$ **(?)**

$$\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\ h(x)\,dx = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x)\big)\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda f(x)h(x)\,dx + \int\limits_0^1 \mu g(x)h(x)\,dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \lambda \big(f(x), h(x)\big) + \mu \big(g(x), h(x)\big) \qquad \textbf{(?)}$

$$\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\ h(x)\, dx = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x)\big)\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda f(x)h(x)\, dx + \int\limits_0^1 \mu g(x)h(x)\, dx = \lambda \int\limits_0^1 f(x)h(x)\, dx + \mu \int\limits_0^1 g(x)h(x)\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

2. Линейность: $\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \lambda\left(f(x), h(x)\right) + \mu\left(g(x), h(x)\right) \qquad (\textbf{?})$

$$\big(\lambda f(x) + \mu g(x), h(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\ h(x)\,dx = \int\limits_0^1 \big(\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x)\big)\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda f(x)h(x)\,dx + \int\limits_0^1 \mu g(x)h(x)\,dx = \lambda\int\limits_0^1 f(x)h(x)\,dx + \mu\int\limits_0^1 g(x)h(x)\,dx =$$

$$= \lambda\left(f(x), h(x)\right) + \mu\left(g(x), h(x)\right).$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

3. Положительная определенность: $\big(f(x), f(x)\big) \geq 0 \quad$ и $\quad \big(f(x), f(x)\big) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx =$$

Мы рассматриваем линейное пространство многочленов степени не более двух, то есть многочленов вида $\quad f(x) = a + bx + cx^2$.

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \left(a + bx + cx^2\right)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\,\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\,\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\,\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\,\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\,\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \left(a + bx + cx^2\right)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \left(a + bx + cx^2\right)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \quad + \quad\right)^2 - \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5 \Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2 \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3 \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4 \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \qquad\right)^2 - \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \qquad\qquad + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \big(a + bx + cx^2\big)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \left(a + bx + cx^2\right)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b^2 + 2bc\right) + \frac{4}{45}c^2 =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \left(a + bx + cx^2\right)^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\,dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\,dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\,dx + \int\limits_0^1 2abx\,dx + \int\limits_0^1 2acx^2\,dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\bigg|_{x=0}^{x=1} + abx^2\bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b^2 + 2bc\right) + \frac{4}{45}c^2 = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 - \frac{1}{12}c^2 + \frac{4}{45}c^2 =$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Докажем, что введенная операция удовлетворяет **трем аксиомам скалярного произведения**:

$$\big(f(x), f(x)\big) = \int\limits_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = \int\limits_0^1 \left(a + bx + cx^2\right)^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 a^2\, dx + \int\limits_0^1 b^2x^2\, dx + \int\limits_0^1 c^2x^4\, dx + \int\limits_0^1 2abx\, dx + \int\limits_0^1 2acx^2\, dx + \int\limits_0^1 2bcx^3\, dx =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{c^2}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} + abx^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{3}acx^3\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{bc}{2}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + ab + \frac{2}{3}ac + \frac{bc}{2} = \left(a^2 + ab + \frac{2}{3}ac\right) + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{bc}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{1}{6}bc + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b^2 + 2bc\right) + \frac{4}{45}c^2 = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 - \frac{1}{12}c^2 + \frac{4}{45}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 + \frac{1}{180}c^2 \geq 0.$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\big(f(x), f(x)\big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\big(f(x), f(x)\big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b + c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\big(f(x), f(x)\big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(b + c\right)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\big(f(x), f(x)\big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\big(f(x), f(x)\big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Наконец, равенство $\big(f(x), f(x)\big) = 0$ выполняется только тогда, когда

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\,(b+c)^2 + \frac{1}{180}c^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b + c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv 0.$

Задача 1. Докажите, что **линейное пространство** многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами со скалярным произведением $\big(f(x), g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Итак для рассматриваемого скалярного произведения выполняются все **аксиомы**, поэтому указанное в условии линейное пространство является **евклидовым пространством**.

Решение задачи 2.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\big(f(x,y),g(x,y)\big)=$$

$$=\big(g(x,y),f(x,y)\big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)=$$

$$=\big(g(x,y),f(x,y)\big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots =$$

$$= \big(g(x,y), f(x,y)\big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)=$$

$$=f(1,1)g(1,1)+f(1,2)g(1,2)+f(2,1)g(2,1)+\ldots=$$

$$=g(1,1)f(1,1)+g(1,2)f(1,2)+g(2,1)f(2,1)+\ldots=$$

$$=\big(g(x,y),f(x,y)\big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$
\begin{aligned}
\big(f(x,y), g(x,y)\big) &= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) = \\
&= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots = \\
&= g(1,1)f(1,1) + g(1,2)f(1,2) + g(2,1)f(2,1) + \ldots = \\
&= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g(m,n)\, f(m,n) = \big(g(x,y), f(x,y)\big)
\end{aligned}
$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **первой аксиомы**.

$$\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n) =$$

$$= f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(2,1)g(2,1) + \ldots =$$

$$= g(1,1)f(1,1) + g(1,2)f(1,2) + g(2,1)f(2,1) + \ldots =$$

$$= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g(m,n)\, f(m,n) = \big(g(x,y), f(x,y)\big)$$

Проверено выполнение **первой аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является евклидовым пространством.

Ответ. Проверим выполнение второй аксиомы.

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\big) =$$

$$= \lambda \big(f(x,y), h(x,y)\big) + \mu \big(g(x,y), h(x,y)\big)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\big)\ h(m,n) =$$

$$= \lambda \left(f(x,y), h(x,y)\right) + \mu \left(g(x,y), h(x,y)\right)$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\big)\; h(m,n) =$$

$$= \big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\big)\, h(1,1) + \big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\big)\, h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\left(f(x,y), h(x,y)\right) + \mu\left(g(x,y), h(x,y)\right)$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\big)\ h(m,n) =$$

$$= \big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\big)\, h(1,1) + \big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\big)\, h(1,2) + \ldots =$$
$$= \lambda f(1,1)h(1,1) + \mu g(1,1)h(1,1) + \lambda f(1,2)h(1,2) + \mu g(1,2)h(1,2) + \ldots =$$

$$= \lambda\left(f(x,y), h(x,y)\right) + \mu\left(g(x,y), h(x,y)\right)$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y)+\mu g(x,y),h(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\big(\lambda f(m,n)+\mu g(m,n)\big)\ h(m,n)=$$

$$=\big(\lambda f(1,1)+\mu g(1,1)\big)\,h(1,1)+\big(\lambda f(1,2)+\mu g(1,2)\big)\,h(1,2)+\ldots=$$
$$=\lambda f(1,1)h(1,1)+\mu g(1,1)h(1,1)+\lambda f(1,2)h(1,2)+\mu g(1,2)h(1,2)+\ldots=$$
$$=\lambda\left(f(1,1)h(1,1)+f(1,2)h(1,2)+\ldots\right)+\mu\left(f(1,1)h(1,1)+f(1,2)h(1,2)+\ldots\right)=$$

$$=\lambda\big(f(x,y),h(x,y)\big)+\mu\big(g(x,y),h(x,y)\big)$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), h(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\big(\lambda f(m,n) + \mu g(m,n)\big)\ h(m,n) =$$

$$= \big(\lambda f(1,1) + \mu g(1,1)\big)\, h(1,1) + \big(\lambda f(1,2) + \mu g(1,2)\big)\, h(1,2) + \ldots =$$
$$= \lambda f(1,1)h(1,1) + \mu g(1,1)h(1,1) + \lambda f(1,2)h(1,2) + \mu g(1,2)h(1,2) + \ldots =$$
$$= \lambda\left(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\right) + \mu\left(f(1,1)h(1,1) + f(1,2)h(1,2) + \ldots\right) =$$
$$= \lambda\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)h(m,n) + \mu\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} g(m,n)h(m,n) =$$
$$= \lambda\left(f(x,y), h(x,y)\right) + \mu\left(g(x,y), h(x,y)\right)$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **второй аксиомы**.

$$\big(\lambda f(x,y)+\mu g(x,y),h(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\big(\lambda f(m,n)+\mu g(m,n)\big)\ h(m,n)=$$

$$=\big(\lambda f(1,1)+\mu g(1,1)\big)\,h(1,1)+\big(\lambda f(1,2)+\mu g(1,2)\big)\,h(1,2)+\ldots=$$

$$=\lambda f(1,1)h(1,1)+\mu g(1,1)h(1,1)+\lambda f(1,2)h(1,2)+\mu g(1,2)h(1,2)+\ldots=$$

$$=\lambda\left(f(1,1)h(1,1)+f(1,2)h(1,2)+\ldots\right)+\mu\left(f(1,1)h(1,1)+f(1,2)h(1,2)+\ldots\right)=$$

$$=\lambda\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f(m,n)h(m,n)+\mu\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}g(m,n)h(m,n)=$$

$$=\lambda\left(f(x,y),h(x,y)\right)+\mu\left(g(x,y),h(x,y)\right).$$

Проверено выполнение **второй аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y), f(x,y)\big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y), f(x,y)\big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \big(f(x,y), f(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\big(ax^2+bxy+cy^2,\; ax^2+bxy+cy^2\big)=0$$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\big(ax^2+bxy+cy^2,\ ax^2+bxy+cy^2\big)=0$$

$$\big(a+b+c)^2+(a+2b+4c)^2+(a+3b+9c)^2+(4a+2b+c)^2+(4a+4b+4c)^2+$$
$$+(4a+6b+9c)^2+(9a+3b+c)^2+(9a+6b+4c)^2+(9a+9b+9c)^2\big)=0;\Leftrightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\big(ax^2+bxy+cy^2,\;ax^2+bxy+cy^2\big)=0$$

$$\big(a+b+c)^2+(a+2b+4c)^2+(a+3b+9c)^2+(4a+2b+c)^2+(4a+4b+4c)^2+$$
$$+(4a+6b+9c)^2+(9a+3b+c)^2+(9a+6b+4c)^2+(9a+9b+9c)^2\big)=0;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;294a^2+196b^2+294c^2+432ab+392ac+432bc=0\Leftrightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\big(ax^2+bxy+cy^2,\; ax^2+bxy+cy^2\big)=0$$

$$\big((a+b+c)^2+(a+2b+4c)^2+(a+3b+9c)^2+(4a+2b+c)^2+(4a+4b+4c)^2+$$

$$+(4a+6b+9c)^2+(9a+3b+c)^2+(9a+6b+4c)^2+(9a+9b+9c)^2\big)=0;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 294a^2+196b^2+294c^2+432ab+392ac+432bc=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a+\frac{36}{7}b+\frac{14}{3}c\right)^2+\frac{914}{49}\left(b+\frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2+\frac{16709}{7131}c^2=0.$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y), f(x,y)\big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \big(f(x,y), f(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y), f(x,y)\big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18 \cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x,y), g(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f(m,n)\, g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y), f(x,y)\big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \big(f(x,y), f(x,y)\big) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n) \geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y), f(x,y)\big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18\cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow \\ c = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\ 3\left(7a+\frac{36}{7}b+\frac{14}{3}c\right)^2+\frac{914}{49}\left(b+\frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2+\frac{16709}{7131}c^2=0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c,\\ b+\dfrac{18\cdot 49}{457}c=0\Rightarrow b=0,\\ c=0\end{cases}\Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами a, b, c со скалярным произведением $\big(f(x, y), g(x, y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3} \sum\limits_{n=1}^{3} f(m, n)\, g(m, n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x, y), f(x, y)\big) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \big(f(x, y), f(x, y)\big) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} f^2(m, n) \geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x, y), f(x, y)\big) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x, y) \equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a + \frac{36}{7}b + \frac{14}{3}c\right)^2 + \frac{914}{49}\left(b + \frac{18 \cdot 49}{457}c\right)^2 + \frac{16709}{7131}c^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c, \\ b + \dfrac{18 \cdot 49}{457}c = 0 \Rightarrow b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + \dfrac{36}{7}b + \dfrac{14}{3}c \Rightarrow \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\ 3\left(7a+\frac{36}{7}b+\frac{14}{3}c\right)^2+\frac{914}{49}\left(b+\frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2+\frac{16709}{7131}c^2=0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c, \\ b+\dfrac{18\cdot 49}{457}c=0\Rightarrow b=0, \\ c=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c\Rightarrow a=0, \\ b=0, \\ c=0 \end{cases}\Rightarrow$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3} f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\; 3\left(7a+\frac{36}{7}b+\frac{14}{3}c\right)^2+\frac{914}{49}\left(b+\frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2+\frac{16709}{7131}c^2=0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases} 7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c, \\ b+\dfrac{18\cdot 49}{457}c=0\Rightarrow b=0, \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c\Rightarrow a=0, \\ b=0, \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=0, \\ c=0. \end{cases}$$

Задача 2. Докажите, что линейное пространство квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Проверим выполнение **третьей аксиомы**.

$$\big(f(x,y),f(x,y)\big)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \big(f(x,y),f(x,y)\big)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}f^2(m,n)\geq 0.$$

Докажем, что $\big(f(x,y),f(x,y)\big)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x,y)\equiv 0$:

$$\Leftrightarrow\ 3\left(7a+\frac{36}{7}b+\frac{14}{3}c\right)^2+\frac{914}{49}\left(b+\frac{18\cdot 49}{457}c\right)^2+\frac{16709}{7131}c^2=0.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда все слагаемые равны нулю:

$$\begin{cases}7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c,\\ b+\dfrac{18\cdot 49}{457}c=0\Rightarrow b=0,\\ c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7a+\dfrac{36}{7}b+\dfrac{14}{3}c\Rightarrow a=0,\\ b=0,\\ c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=0,\\ c=0.\end{cases}$$

Следовательно, $f(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ f(x,y)\equiv 0.$

Задача 2. Докажите, что **линейное пространство** квадратичных форм $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами a,b,c со скалярным произведением $\big(f(x,y),g(x,y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}f(m,n)\,g(m,n)$ является **евклидовым пространством**.

Ответ. Итак для рассматриваемого скалярного произведения выполняются все **аксиомы**, поэтому указанное в условии линейное пространство является **евклидовым пространством**.

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\quad\left(x^2;y^2\right)$, $\quad\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\quad\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$(x^2;y^2) =$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} +$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $\quad (x^2;y^2)$, $\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)$, $\quad (x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} +$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $\quad (x^2;y^2)$, $\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)$, $\quad (x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m} \alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,, \quad (x^2;y^2)\,, \quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,, \quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\}\subseteq\mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б}=\{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$\left(x^2;y^2\right)=\underbrace{1^2\cdot1^2+1^2\cdot1^2+1^2\cdot1^2}_{n=1}+\underbrace{2^2\cdot2^2+2^2\cdot2^2}_{n=2}+\underbrace{3^2\cdot3^2}_{n=3}=116,$$

$$\left(x^2;xy\right)=$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\}\subseteq\mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б}=\{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2)=\underbrace{1^2\cdot1^2+1^2\cdot1^2+1^2\cdot1^2}_{n=1}+\underbrace{2^2\cdot2^2+2^2\cdot2^2}_{n=2}+\underbrace{3^2\cdot3^2}_{n=3}=116,$$

$$(x^2;xy)=\underbrace{1^2\cdot(1\cdot1)+1^2\cdot(1\cdot2)+1^2\cdot(1\cdot3)}_{n=1}+\underbrace{2^2\cdot(2\cdot1)+2^2\cdot(2\cdot2)}_{n=2}+\underbrace{3^2\cdot(3\cdot1)}_{n=3}=$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot 1) + 1^2\cdot(1\cdot 2) + 1^2\cdot(1\cdot 3)}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot(2\cdot 1) + 2^2\cdot(2\cdot 2)}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot(3\cdot 1)}_{n=3} = 6 + 24 + 27 =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot1^2+1^2\cdot1^2+1^2\cdot1^2}_{n=1}+\underbrace{2^2\cdot2^2+2^2\cdot2^2}_{n=2}+\underbrace{3^2\cdot3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot1)+1^2\cdot(1\cdot2)+1^2\cdot(1\cdot3)}_{n=1}+\underbrace{2^2\cdot(2\cdot1)+2^2\cdot(2\cdot2)}_{n=2}+\underbrace{3^2\cdot(3\cdot1)}_{n=3} = 6+24+27=57,$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot 1) + 1^2\cdot(1\cdot 2) + 1^2\cdot(1\cdot 3)}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot(2\cdot 1) + 2^2\cdot(2\cdot 2)}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot(3\cdot 1)}_{n=3} = 6+24+27=57,$$

$\ldots$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & \\ 57 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot 1) + 1^2\cdot(1\cdot 2) + 1^2\cdot(1\cdot 3)}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot(2\cdot 1) + 2^2\cdot(2\cdot 2)}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot(3\cdot 1)}_{n=3} = 6 + 24 + 27 = 57,$$

$\ldots$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & & \\ 43 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot 1) + 1^2\cdot(1\cdot 2) + 1^2\cdot(1\cdot 3)}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot(2\cdot 1) + 2^2\cdot(2\cdot 2)}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot(3\cdot 1)}_{n=3} = 6 + 24 + 27 = 57,$$

$\ldots$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & \\ 43 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot 1) + 1^2\cdot(1\cdot 2) + 1^2\cdot(1\cdot 3)}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot(2\cdot 1) + 2^2\cdot(2\cdot 2)}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot(3\cdot 1)}_{n=3} = 6 + 24 + 27 = 57,$$

...

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Сначала найдём матрицу Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$:

$$(x^2;y^2) = \underbrace{1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1^2}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^2}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot 3^2}_{n=3} = 116,$$

$$(x^2;xy) = \underbrace{1^2\cdot(1\cdot 1) + 1^2\cdot(1\cdot 2) + 1^2\cdot(1\cdot 3)}_{n=1} + \underbrace{2^2\cdot(2\cdot 1) + 2^2\cdot(2\cdot 2)}_{n=2} + \underbrace{3^2\cdot(3\cdot 1)}_{n=3} = 6 + 24 + 27 = 57,$$

$\dots$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$(x^2;x^2) = 116$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\}\subseteq\mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big)=\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б}=\{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma=\begin{pmatrix}116&57&43\\57&43&57\\43&57&116\end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2)=116\ ??\ \begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}116&57&43\\57&43&57\\43&57&116\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$\left(x^2;x^2\right) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$\left(x^2;x^2\right) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(x^2;y^2\right) =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57 \; ?? \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$\left(x^2;x^2\right) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(x^2;y^2\right) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right) =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;x^2-y^2) = 0$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $\left(x^2;x^2\right)$, $\left(x^2;y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right)$, $\left(x^2+y^2;xy\right)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$\left(x^2;x^2\right) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(x^2;y^2\right) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(x^2+y^2;x^2-y^2\right) = 0\ ??\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;x^2-y^2) = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;xy) =$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б}=\{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}.$

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;x^2-y^2) = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;xy) = 114$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)\,,\quad (x^2;y^2)\,,\quad (x^2+y^2;x^2-y^2)\,,\quad (x^2+y^2;xy)\,.$

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}.$

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;x^2-y^2) = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;xy) = 114\ ??\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть в **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $\{a;\ b;\ c\} \subseteq \mathbb{R}$, скалярное произведение задано формулой $\big(\alpha(x;y);\beta(x;y)\big) = \sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{4-m}\alpha(m;n)\beta(m;n)$. Вычислите по определению и с **помощью матрицы Грама** скалярные произведения $(x^2;x^2)$, $(x^2;y^2)$, $(x^2+y^2;x^2-y^2)$, $(x^2+y^2;xy)$.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^2;\ xy;\ y^2\}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}$.

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(x^2;x^2) = 116 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x^2;y^2) = 57 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;x^2-y^2) = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(x^2+y^2;xy) = 114 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 & 57 & 43 \\ 57 & 43 & 57 \\ 43 & 57 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X,Y) = (2 \quad 1)XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) X Y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) X Y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \left(\qquad\qquad \right),$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&&\\&&\\&&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(2\quad 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix} + (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 = g_{21},$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&\\2&&\\&&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(2\quad 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2=g_{21},$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \\ 2 & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \\ 2 & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}4&2&\\2&&\\&&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (2 \quad 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0 \quad 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \\ 2 & & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{22} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{22} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{22} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&&\\0&&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{22}=\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(2\quad 1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=5,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1)XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{22} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&\\0&&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&\\0&&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{23}=\gamma_{32}=\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X, Y) = (2 \quad 1)XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{33} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{33} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{33}=\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(2\quad 1)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{33} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X, Y) = (2 \quad 1)XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Возьмём естественный базис линейного пространства симметричных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ размерности 2×2:
$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_{33} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \qquad \right\}$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{В} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21}e_1 =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right\}$

$$e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_{21}e_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_{21}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$\alpha_{21}=-\frac{(e_2,e_1)}{(e_1,e_1)}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\qquad\right\}$

$$e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_{21}e_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_{21}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$\alpha_{21}=-\frac{(e_2,e_1)}{(e_1,e_1)}=-\frac{\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right\}$

$$e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_{21}e_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_{21}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$\alpha_{21}=-\frac{(e_2,e_1)}{(e_1,e_1)}=-\frac{\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)}=-\frac{\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(e_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$

$$e_2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \alpha_{21}e_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \alpha_{21}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(e_2,e_1)}{(e_1,e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)} = -\frac{\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(e_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(e_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$e_3 =$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{В} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 =$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(e_3, e_1)}{(e_1, e_1)} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(e_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(e_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(e_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Ответ. } \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(e_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{32} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\right\}$

$$e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_{32}\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\alpha_{32}=-\frac{(e_3,e_2)}{(e_2,e_2)}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(e_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(e_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\right\}$

$$e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_{32}\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\alpha_{32}=-\frac{(e_3,e_2)}{(e_2,e_2)}=-\frac{\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}=-\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}=$$

$$=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X,Y) = (2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{В} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad\qquad \right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$
$$= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix} =$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(e_3,e_2)}{(e_2,e_2)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)} = -\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}} =$$
$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\right\}$

$$e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}.$$

$$\alpha_{32}=-\frac{(e_3,e_2)}{(e_2,e_2)}=-\frac{\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}=-\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}=$$

$$=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}\right\}$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}.$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(e_3,e_2)}{(e_2,e_2)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)} = -\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}} =$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) X Y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{ \qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B}=\left\{\begin{pmatrix}1/2&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=(1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B}=\left\{\begin{pmatrix}1/2&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\qquad\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B}=\left\{\begin{pmatrix}1/2&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=(-1/2\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X, Y) = (2 \quad 1) XY \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (-1/2 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 4 \quad 0) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (-1/2 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 4 \quad 0)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B}=\left\{\begin{pmatrix}1/2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/4&1/2\\1/2&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=(-1/2\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(0\quad 4\quad 0)\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}=4,$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y)=(2\quad 1)XY\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(0\quad 1)X\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B}=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&1\end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B}=\left\{\begin{pmatrix}1/2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/4&1/2\\1/2&0\end{pmatrix},\qquad\qquad\qquad\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&-1/2\\-1/2&0\end{pmatrix}\right)=(1/4\quad -1/2\quad 1)\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/4\\-1/2\\1\end{pmatrix}=$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением
$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$\mathbf{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad\qquad \right\}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1/4 \quad -1/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 0 \quad 3)\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Б $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \right) = (1/4 \quad -1/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 0 \quad 3)\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Задача 4. Найдите ортонормированный базис евклилова пространства симметричных матриц размерности 2×2 со скалярным произведением

$$(X,Y) = (2 \quad 1)XY\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1)X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

Ортогональный базис: $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Для получения ортонормированного базиса остаётся нормировать векторы:

$$\mathbf{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1/4 \quad -1/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 0 \quad 3)\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \textbf{?} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \textbf{?} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \left(x^0; x^0\right) =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x);g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\,g(x)\,dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \textbf{?} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0;x^0) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,x^0\,x^0\,dx =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \textbf{?} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x^0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^0\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{?} & \\ \mathbf{?} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{?} & \\ \mathbf{?} & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{?} & \\ \mathbf{?} & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{?} \\ 1 & & \\ \mathbf{?} & & \end{pmatrix}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{?} \\ 1 & & \\ \mathbf{?} & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{?} \\ 1 & & \\ \mathbf{?} & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad (x; x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad (x; x^2) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \big(x^2; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \big(x^2; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \qquad \big(x^2; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1'\right.$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)}e_1',\right.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Big\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',\right.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{ x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1', \right.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \dfrac{1}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',\right.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',\right.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{1}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{ x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1', \right.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \dfrac{1}{1} =$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\,g(x)\,dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \Big\{x^0,\ x - \dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x - e_1',$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1,$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e_1' - \dfrac{(x^2,\ e_2')}{(e_2',\ e_2')}e_2'\right\}$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x);g(x)\big)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,f(x)\,g(x)\,dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б}=\{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&6\\2&6&24\end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\}=\left\{x^0,\ x-1, x^2-\dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e_1'-\dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ОБ: } \{e'_1,\ e'_2;\ e'_3\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \frac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e'_1 - \frac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)} e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}}}$$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - \dfrac{(x^2,\ x^0)}{(x^0,\ x^0)}e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \frac{2}{1}$$

$$[x^0]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x^0]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2e_1' - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}$.

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \dfrac{2}{1}$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x^2;\ x^0)}{(x^0;\ x^0)} = \dfrac{2}{1}$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$

$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e'_1,\ e'_2;\ e'_3\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\,[x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e'_1,\ e'_2;\ e'_3\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{(x^2;\ x-1)}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x^2]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x-1]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x);g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e'_1,\ e'_2;\ e'_3\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2-2-\dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x-1]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2-2-\dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$$\frac{4}{(x-1;\ x-1)} =$$

$$[x-1]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^0,\ x-1, x^2 - 2 - \dfrac{(x^2,\ x-1)}{(x-1,\ x-1)}(x-1)\right\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{4}{1} =$

$$[x-1]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1, x^2-2-4(x-1)\}.$

Согласно **формуле вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама** получаем

$\dfrac{4}{1} = 4$

$[x-1]^t_{\mathbf{Б}}\, \Gamma_{\mathbf{Б}}\, [x-1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \{x^0,\ x-1,\ x^2-4x+2\}$.

Задача 5. Пусть в **евклидовом пространстве** многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Найдите **ортонормированный базис**.

Ответ. Матрица Грама в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$ имеет вид:

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

ОБ: $\{e'_1,\ e'_2;\ e'_3\} = \{x^0,\ x-1,\ x^2-4x+2\}$.

ОНБ: $\{e''_1,\ e''_2;\ e''_3\} = \left\{x^0,\ x-1,\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1\right\}$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x,y); g(x,y)\big) = \iint\limits_G f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy$, где G — четверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Задача 6. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x,y); g(x,y)\big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — чертверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{32} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} \\ \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} \\ \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{32} \end{pmatrix}$.

Задача 6. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x,y); g(x,y)\big) = \iint\limits_G f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy$, где G — четверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{32} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} \\ \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} \\ \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{32} \end{pmatrix}$.

ОБ: $\{e'_1,\ e'_2;\ e'_3\} = \left\{x^2,\ xy - \frac{4}{3\pi}x^2,\ y^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2 - 16}\left(xy - \frac{4}{3\pi}x^2\right)\right\} =$

$= \left\{x^2,\ xy - \frac{4}{3\pi}x^2,\ \frac{16 - \pi^2}{3\pi^2 - 16}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2 - 16}xy + y^2\right\}$.

Задача 6. Пусть в евклидовом пространстве квадратичных форм от переменных x, y скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x,y); g(x,y)\big) = \iint\limits_G f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy$, где G — четверть круга $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ Найдите ортонормированный базис.

Ответ. $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{32} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} \\ \frac{1}{24} & \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} \\ \frac{\pi}{96} & \frac{1}{24} & \frac{\pi}{32} \end{pmatrix}$.

ОБ: $\{e_1',\ e_2';\ e_3'\} = \left\{x^2,\ xy - \frac{4}{3\pi}x^2,\ \frac{16-\pi^2}{3\pi^2-16}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2-16}xy + y^2\right\}$.

ОНБ: $\{e_1'',\ e_2'';\ e_3''\} = \left\{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}x^2,\ \frac{12\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3\pi^2-16}}\left(xy - \frac{4}{3\pi}x^2\right),\right.$

$\left.\frac{2\sqrt{3\left(3\pi^2-16\right)}}{\sqrt{\pi\left(\pi^2-8\right)}}\left(\frac{16-\pi^2}{3\pi^2-16}x^2 - \frac{8\pi}{3\pi^2-16}xy + y^2\right)\right\}$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Если X — подпространство евклидова пространства Y, то $X^{\perp} = \ldots$

Задача 7. Если X — подпространство евклидова пространства Y, то $X^{\perp} = \ldots$

Ответ. $X^{\perp} = \left\{ y \;\middle|\; \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}.$

Задача 7. Если X — подпространство евклидова пространства Y, то $X^{\perp} = \ldots$

Ответ. $X^{\perp} = \left\{ y \;\middle|\; x \in X \;\Rightarrow\; (x, y) = 0 \right\}.$

Решение задачи 8.

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Ответ. $P^{\perp} =$

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Ответ. $P^{\perp} = \left\{ s \,\middle|\, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\} =$

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Ответ. $P^{\perp} = \left\{ s \,\middle|\, p \in P \ \Rightarrow\ (p, s) = 0 \right\} =$

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Ответ. $P^{\perp} = \left\{ s \,\middle|\, p \in P \;\Rightarrow\; (p, s) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ s \,\middle|\, (p, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} + \delta\mathbf{z}) = 0 \right\} =$$

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Ответ. $P^{\perp} = \left\{ s \,\middle|\, p \in P \ \Rightarrow \ (p, s) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ s \,\middle|\, (p, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} + \delta\mathbf{z}) = 0 \right\} = \left\{ s \,\middle|\, \begin{cases} (p, \mathbf{u}) = 0, \\ (p, \mathbf{v}) = 0, \\ (p, \mathbf{w}) = 0, \\ (p, \mathbf{z}) = 0 \end{cases} \right\} =$$

Задача 8. Если $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ — подпространство евклидова пространства S, то $P^{\perp} = \ldots$

Ответ. $P^{\perp} = \left\{ s \,\middle|\, p \in P \;\Rightarrow\; (p, s) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ s \,\middle|\, (p, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} + \delta\mathbf{z}) = 0 \right\} = \left\{ s \,\middle|\, \begin{cases} (p, \mathbf{u}) = 0, \\ (p, \mathbf{v}) = 0, \\ (p, \mathbf{w}) = 0, \\ (p, \mathbf{z}) = 0 \end{cases} \right\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}^{\perp}.$$

Решение задачи 9.

Задача 9. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $M^{\perp} = \ldots$

Задача 9. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $M^{\perp} = \ldots$

Ответ. $M^{\perp} =$

Задача 9. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $M^{\perp} = \ldots$

Ответ. $M^{\perp} = \left\{ v \;\middle|\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\} =$

Задача 9. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $M^{\perp} = \ldots$

Ответ. $M^{\perp} = \left\{ v \,\middle|\, m \in M \;\Rightarrow\; (v, m) = 0 \right\} =$

Задача 9. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $M^{\perp} = \ldots$

Ответ. $M^{\perp} = \left\{ v \,\middle|\, m \in M \;\Rightarrow\; (v, m) = 0 \right\} = \langle M \rangle^{\perp}$.

Решение задачи 10.

Задача 10. Пусть $X \leq U$, $\quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \dots$

Задача 10. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} =$

Задача 10. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \;\middle|\; \phantom{\rule{20em}{3em}} \right\} =$

Задача 10. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} =$

Задача 10. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \Rightarrow\; (z, x+y) = 0 \right\} =$

Задача 10. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z, x+y) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (z;x)=0, \\ (z;y)=0 \end{cases} \right\} =$$

Задача 10. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z, x+y) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (z;x) = 0, \\ (z;y) = 0 \end{cases} \right\} =$$

Поскольку в формуле $\begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z,x) = 0$ в заключении не упоминается y, то $x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0.$

Задача 10. Пусть $X \le U$, $\quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z, x+y) = 0 \right\} =$

$= \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (z;x) = 0, \\ (z;y) = 0 \end{cases} \right\} =$

Поскольку в формуле $\begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z,x) = 0$ в заключении не упоминается y, то $x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0$.

Аналогично $\begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z,y) = 0$ влечет, что $y \in X \;\Rightarrow\; (z;y) = 0$.

Задача 10. Пусть $X \le U$, $\quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z, x+y) = 0 \right\} =$

$= \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (z;x) = 0, \\ (z;y) = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ y \in Y \;\Rightarrow\; (z;y) = 0 \end{cases} \right\} =$

Поскольку в формуле $\begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z,x) = 0$ в заключении не упоминается y, то $x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0.$

Аналогично $\begin{cases} x \in X, \\ y \in Y \end{cases} \;\Rightarrow\; (z,y) = 0$ влечет, что $y \in X \;\Rightarrow\; (z;y) = 0.$

Задача 10. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X+Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X+Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X+Y \;\Rightarrow\; (z,t)=0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in X, \\ y \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z, x+y) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in X, \\ y \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} (z;x) = 0, \\ (z;y) = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ y \in Y \;\Rightarrow\; (z;y) = 0 \end{array} \right. \right\} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Задача 11. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} =$

Задача 11. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \dots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} = \left\{ z \;\middle|\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\} =$

Задача 11. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cap Y \;\Rightarrow\; (z, t) = 0 \right\} =$

Задача 11. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cap Y \;\Rightarrow\; (z,t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} x \in X, \\ x \in Y \end{cases} \Rightarrow\; (z,x) = 0 \right\} =$

Задача 11. Пусть $X \le U$, $\quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cap Y \;\Rightarrow\; (z, t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z, x) = 0 \right\} =$

Можно показать, что если α, β, γ — высказывания, то формула
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \\ \beta \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \gamma$ равносильна $\left[\begin{array}{l} \alpha \;\Rightarrow\; \gamma, \\ \beta \;\Rightarrow\; \gamma. \end{array} \right.$

Задача 11. Пусть $X \le U,\quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \dots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cap Y \;\Rightarrow\; (z,t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z,x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ x \in Y \;\Rightarrow\; (z;x) = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

Можно показать, что если α, β, γ — высказывания, то формула

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \\ \beta \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \gamma$ равносильна $\left[\begin{array}{l} \alpha \;\Rightarrow\; \gamma, \\ \beta \;\Rightarrow\; \gamma. \end{array} \right.$

Задача 11. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cap Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cap Y)^{\perp} = \left\{ z \;\middle|\; t \in X \cap Y \;\Rightarrow\; (z, t) = 0 \right\} = \left\{ z \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z, x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z; x) = 0, \\ x \in Y \;\Rightarrow\; (z; x) = 0 \end{array} \right. \right\} = X^{\perp} + Y^{\perp}.$$

Можно показать, что если α, β, γ — высказывания, то формула

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \\ \beta \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \gamma$ равносильна $\left[\begin{array}{l} \alpha \;\Rightarrow\; \gamma, \\ \beta \;\Rightarrow\; \gamma. \end{array} \right.$

Решение задачи 12.

Задача 12. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \dots$

Задача 12. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} =$

Задача 12. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \;\middle|\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\} =$

Задача 12. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \;\Rightarrow\; (z,t) = 0 \right\} =$

Задача 12. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \;\Rightarrow\; (z,t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array}\right. \;\Rightarrow\; (z,x) = 0 \right\} =$

Задача 12. Пусть $X \leq U, \quad Y \leq U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \dots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \;\Rightarrow\; (z, t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z, x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z; x) = 0, \\ x \in Y \;\Rightarrow\; (z; x) = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

Задача 12. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \;\Rightarrow\; (z, t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z, x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z; x) = 0, \\ x \in Y \;\Rightarrow\; (z; x) = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z; x) = 0, \\ y \in Y \;\Rightarrow\; (z; y) = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

Задача 12. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \ \Rightarrow \ (z,t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \ \Rightarrow \ (z,x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{lll} x \in X & \Rightarrow & (z;x) = 0, \\ x \in Y & \Rightarrow & (z;x) = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{lll} x \in X & \Rightarrow & (z;x) = 0, \\ y \in Y & \Rightarrow & (z;y) = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ y \in Y \end{array} \right. \ \Rightarrow \ (z;x+y) = 0 \right\} =$$

Задача 12. Пусть $X \le U$, $\quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \dots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \;\Rightarrow\; (z,t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z,x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ x \in Y \;\Rightarrow\; (z;x) = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ y \in Y \;\Rightarrow\; (z;y) = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ y \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z;x+y) = 0 \right\} = (X+Y)^{\perp} =$$

Задача 12. Пусть $X \le U, \quad Y \le U$, где U —евклидово пространство. Тогда $(X \cup Y)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $(X \cup Y)^{\perp} = \left\{ z \,\middle|\, t \in X \cup Y \;\Rightarrow\; (z,t) = 0 \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z,x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ x \in Y \;\Rightarrow\; (z;x) = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X \;\Rightarrow\; (z;x) = 0, \\ y \in Y \;\Rightarrow\; (z;y) = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \left\{ z \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ y \in Y \end{array} \right. \;\Rightarrow\; (z; x + y) = 0 \right\} = (X + Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}.$$

Решение задачи 13.

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} =$

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{ u \;\middle|\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\} =$

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{ u \,\middle|\, x \in M^{\perp} \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{ u \,\middle|\, x \in M^{\perp} \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ u \,\middle|\, (v \in M \;\Rightarrow\; (x, v) = 0) \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$$

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{ u \,\middle|\, x \in M^{\perp} \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ u \,\middle|\, (v \in M \;\Rightarrow\; (x, v) = 0) \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ u \,\middle|\, \exists v_1 \in M \quad \ldots \exists v_k \in M \quad \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \ldots \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \right\} =$$

Задача 13. Если L — евклидово пространство и $M \subseteq L$, то $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \ldots$

Ответ. $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{ u \,\middle|\, x \in M^{\perp} \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$

$$= \left\{ u \,\middle|\, (v \in M \;\Rightarrow\; (x, v) = 0) \;\Rightarrow\; (u, x) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ u \,\middle|\, \exists v_1 \in M \quad \ldots \exists v_k \in M \quad \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \ldots \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \right\} = \langle M \rangle .$$

Решение задачи 14.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Ортогональное дополнение.

В каком виде представим ответ?

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Ортогональное дополнение.

В каком виде представим ответ? По **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? По **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.
Стандартными способами задания подпространства являются:

Задача 14. В базисе $\mathbf{A}=\{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2+bxy+cyx+dy^2$ от некоммутирующих переменных x,y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P=\langle 2x^2-xy+yx-y^2;\ x^2+yx-y^2;\ 2x^2+3xy+yx+2y^2;$
$4x^2-xy+3yx-3y^2;\ 3x^2+3xy+2yx+y^2\rangle=\langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q=\langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? По **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.
Стандартными способами задания подпространства являются:
1) системой уравнений (утверждение о координатах вектора из подпространства);
2) в виде линейной оболочки базиса.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Ортогональное дополнение.

В каком виде представим ответ? По **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.

Стандартными способами задания подпространства являются:

1) системой уравнений (утверждение о координатах вектора из подпространства);

2) в виде линейной оболочки базиса.

Введем переменные.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? По **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.
Стандартными способами задания подпространства являются:
1) системой уравнений (утверждение о координатах вектора из подпространства);
2) в виде линейной оболочки базиса.
Введем переменные. Обозначим буквами координаты вектора из $Q^{\perp} \cap P$:

Задача 14. В базисе $\mathbf{A}=\{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2+bxy+cyx+dy^2$ от некоммутирующих переменных x,y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P=\langle 2x^2-xy+yx-y^2;\ x^2+yx-y^2;\ 2x^2+3xy+yx+2y^2;$
$4x^2-xy+3yx-3y^2;\ 3x^2+3xy+2yx+y^2\rangle=\langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q=\langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? По **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.
Стандартными способами задания подпространства являются:
1) системой уравнений (утверждение о координатах вектора из подпространства);
2) в виде линейной оболочки базиса.
Введем переменные. Обозначим буквами координаты вектора из $Q^{\perp}\cap P$:
$v=\alpha x^2+\beta xy+\gamma yx+\delta y^2.$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.

Составим уравнение. Значения какой величины вычислим двумя способами?

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.

Составим уравнение. Значения какой величины вычислим двумя способами?

Координаты вектора v удовлетворяют системе уравнений, определяющих P, и системе уравнений, определяющих $Q^{\perp}$.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

Составим уравнение. Значения какой величины вычислим двумя способами?

Координаты вектора v удовлетворяют системе уравнений, определяющих P, и системе уравнений, определяющих $Q^\perp$.

$v \in Q^\perp$, значит, по **теореме о вычислении скалярного произведения**, с использованием умножения **матриц на макроуровне** получаем систему уравнений

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.

Составим уравнение. Значения какой величины вычислим двумя способами?

Координаты вектора v удовлетворяют системе уравнений, определяющих P, и системе уравнений, определяющих $Q^{\perp}$.

$v \in Q^{\perp}$, значит, по **теореме о вычислении скалярного произведения**, с использованием умножения **матриц на макроуровне** получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} [p_1]_{\mathbf{A}} & [p_2]_{\mathbf{A}} \end{pmatrix}^t \Gamma_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.
$v \in Q^\perp$, значит,

$$\begin{pmatrix} [p_1]_{\mathbf{A}} & [p_2]_{\mathbf{A}} \end{pmatrix}^t \Gamma_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.
$v \in Q^{\perp}$, значит,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.
$v \in Q^{\perp}$, значит,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.
$v \in Q^\perp$, значит,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-4} & 6 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 2 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.
$v \in Q^{\perp}$, значит,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \bullet \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.
$v \in Q^{\perp}$, значит,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & \mathbf{6} & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{-3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \bullet \\ 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} \\ -1 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A}=\{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2+bxy+cyx+dy^2$ от некоммутирующих переменных x,y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P=\langle 2x^2-xy+yx-y^2;\ x^2+yx-y^2;\ 2x^2+3xy+yx+2y^2;$
$4x^2-xy+3yx-3y^2;\ 3x^2+3xy+2yx+y^2\rangle=\langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q=\langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v=\alpha x^2+\beta xy+\gamma yx+\delta y^2\in Q^{\perp}\cap P$.
$v\in Q^{\perp}$, значит,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & \mathbf{6} & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{-3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & \mathbf{-6} \\ 2 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{2} \\ -1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P: (мы ввели переменные x, y, z, t — коэффициенты искомого уравнения)

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A}=\{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2+bxy+cyx+dy^2$ от некоммутирующих переменных x,y **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите в подпространстве
$P=\langle 2x^2-xy+yx-y^2;\ x^2+yx-y^2;\ 2x^2+3xy+yx+2y^2;$
$4x^2-xy+3yx-3y^2;\ 3x^2+3xy+2yx+y^2\rangle=\langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q=\langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v=\alpha x^2+\beta xy+\gamma yx+\delta y^2\in Q^\perp\cap P$.

$v\in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v\in Q$, значит, уравнению $x\alpha+y\beta+z\gamma+t\delta=0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите в подпространстве

$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ. Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.

$v \in Q^{\perp}$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \quad \middle| \quad \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \qquad \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.

$v \in Q^{\perp}$, значит, $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \left\{ \phantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right. \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \\ \end{cases} \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \\ \end{cases} \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ \end{cases} \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v=\alpha x^2+\beta xy+\gamma yx+\delta y^2\in Q^\perp\cap P$.

$v\in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6\\ 2 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}$

$v\in Q$, значит, уравнению $x\alpha+y\beta+z\gamma+t\delta=0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 4 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{-7}\\ \mathbf{-4}\end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp\cap P=\left\{\alpha x^2+\beta xy+\gamma yx+\delta y^2\;\middle|\;\begin{cases}2\alpha-4\beta+6\gamma=0,\\ \beta-3\gamma+2\delta=0,\\ \end{cases}\right\}=$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-7} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 18 & -32 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 18 & -32 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & -44 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 18 & -32 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & -44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^\perp \cap P$.

$v \in Q^\perp$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 14.

Пусть $v = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \in Q^{\perp} \cap P$.

$v \in Q^{\perp}$, значит, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$

$v \in Q$, значит, уравнению $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$ удовлетворяют координаты всех векторов из P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве

$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве

$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве

$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.
$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$
Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^{\perp}$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.
$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$
Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^{\perp}$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in Q^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in P$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.
$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$
Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in P$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.
$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$
Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in P$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна
$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.
$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$
Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in P$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^{\perp} \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in P$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пятый столбец является линейной комбинацией первых трех.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A} = \{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2 + bxy + cyx + dy^2$ от некоммутирующих переменных x, y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P = \langle 2x^2 - xy + yx - y^2;\ x^2 + yx - y^2;\ 2x^2 + 3xy + yx + 2y^2;$
$4x^2 - xy + 3yx - 3y^2;\ 3x^2 + 3xy + 2yx + y^2\rangle = \langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q = \langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^\perp \cap P = \left\{ \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2 \,\middle|\, \begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0, \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - 7\gamma - 4\delta = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle 2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2 + 4xy + 2yx + y^2 \in P$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, рассматриваемый вектор является линейной комбинацией векторов p_1, p_2, p_3.

Задача 14. В базисе $\mathbf{A}=\{x^2;\ xy;\ yx;\ y^2\}$ евклидова пространства квадратичных форм $ax^2+bxy+cyx+dy^2$ от некоммутирующих переменных x,y **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите в подпространстве
$P=\langle 2x^2-xy+yx-y^2;\ x^2+yx-y^2;\ 2x^2+3xy+yx+2y^2;$
$4x^2-xy+3yx-3y^2;\ 3x^2+3xy+2yx+y^2\rangle=\langle p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5\rangle$ **ортогональное дополнение** к линейной оболочке $Q=\langle p_1;\ p_2\rangle$.

Ответ.

$$Q^{\perp}\cap P=\left\{\alpha x^2+\beta xy+\gamma yx+\delta y^2\ \middle|\ \begin{cases} 2\alpha-4\beta+6\gamma=0, \\ \beta-3\gamma+2\delta=0, \\ 3\alpha+3\beta-7\gamma-4\delta=0 \end{cases}\right\}=\left\langle 2x^2+4xy+2yx+y^2\right\rangle.$$

Проверим, верно ли, что $2x^2+4xy+2yx+y^2\in P$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому из **теоремы о внутренней характеризации линейной оболочки** следует требуемое включение.

Решение задачи 15.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Сначала надо определиться, в каком базисе будем проводить вычисления: **а) в базисе B** или **б) в естественном базисе** $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе $\mathbf{B}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе $\mathbf{B}$. Воспользуемся **теоремой о координатах вектора в разных базисах**.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе $\mathbf{B}$. Воспользуемся **теоремой о координатах вектора в разных базисах**.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе $\mathbf{B}$. Воспользуемся **теоремой о координатах вектора в разных базисах**.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\ \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе **B**. Воспользуемся **теоремой о координатах вектора в разных базисах**.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе $\mathbf{B}$. Воспользуемся **теоремой о координатах вектора в разных базисах**.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\ \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B. Найдем координаты векторов из M в базисе $\mathbf{B}$. Воспользуемся **теоремой о координатах вектора в разных базисах**.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\,\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} =$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя **теорему о координатах вектора в разных базисах** и умножение **матриц на макроуровне** имеем

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

Найдем **матрицу** **перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя **теорему о координатах вектора в разных базисах** и умножение **матриц на макроуровне** имеем

$$T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} \cdot \begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{Б}} & [m_2]_{\mathbf{Б}} & [m_3]_{\mathbf{Б}} & [m_4]_{\mathbf{Б}} & [m_5]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix},$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B}=\{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 10\end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M=\{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\}=\{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\text{Б}\to\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{B}\to\text{Б}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Используя **теорему о координатах вектора в разных базисах** и умножение **матриц на макроуровне** имеем

$$T_{\mathbf{B}\to\text{Б}}\cdot\begin{pmatrix}[m_1]_{\text{Б}} & [m_2]_{\text{Б}} & [m_3]_{\text{Б}} & [m_4]_{\text{Б}} & [m_5]_{\text{Б}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}}\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -2 & -14 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 1 & -3 & -5\\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5\end{pmatrix}=$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

Найдем **матрицу перехода**: $T_{\text{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T_{\mathbf{B}\to\text{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя **теорему о координатах вектора в разных базисах** и умножение **матриц на макроуровне** имеем

$T_{\mathbf{B}\to\text{Б}} \cdot \begin{pmatrix} [m_1]_{\text{Б}} & [m_2]_{\text{Б}} & [m_3]_{\text{Б}} & [m_4]_{\text{Б}} & [m_5]_{\text{Б}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -2 & -14 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему векторов:

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему векторов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему векторов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему векторов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выберем максимальную линейно независимую подсистему векторов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Значит, векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^\perp$ применим **стратегию составления уравнений**.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти?

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ?

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left([m_1]_{\mathbf{B}} \quad [m_2]_{\mathbf{B}} \quad [m_3]_{\mathbf{B}} \quad [m_4]_{\mathbf{B}} \quad [m_5]_{\mathbf{B}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? Согласно **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? Согласно **теореме об ортогональном дополнении** мы ищем подпространство.
Стандартными способами задания подпространства являются:
1) системой уравнений (утверждение о координатах вектора из подпространства);
2) в виде линейной оболочки базиса.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? Системой уравнений (утверждением о координатах вектора из подпространства).

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^{\perp}$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? Системой уравнений (утверждением о координатах вектора из подпространства).
Введем переменные.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}.$

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\quad [m_2]_{\mathbf{B}}\quad [m_3]_{\mathbf{B}}\quad [m_4]_{\mathbf{B}}\quad [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Для нахождения $M^\perp$ применим **стратегию составления уравнений**.
Что надо найти? Ортогональное дополнение.
В каком виде представим ответ? Системой уравнений (утверждением о координатах вектора из подпространства).
Введем переменные. Возьмем произвольный вектор из $M^\perp$, обозначим его координаты в $\mathbf{B}$ через $a; b; c; d$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Возьмем произвольный вектор из $M^{\perp}$, $a; b; c; d$ — его координаты в $\mathbf{B}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Возьмем произвольный вектор из $M^{\perp}$, $a; b; c; d$ — его координаты в $\mathbf{B}$.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right)$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Возьмем произвольный вектор из $M^{\perp}$, $\ a; b; c; d$ — его координаты в $\mathbf{B}$.
Значит, в силу **теоремы о дополнении к линейной оболочке**

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \ \Leftrightarrow$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.
Возьмем произвольный вектор из $M^{\perp}$, $a; b; c; d$ — его координаты в $\mathbf{B}$.
Значит, в силу **теоремы о дополнении к линейной оболочке**

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m_1;\ p(x)) = 0, \\ (m_2;\ p(x)) = 0, \end{array} \right.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (m_1;\ p(x)) = 0, \\ (m_2;\ p(x)) = 0, \end{array} \right.$$

В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mathbf{m_1};\ \mathbf{p(x)}) = \mathbf{0}, \\ (m_2;\ p(x)) = 0, \end{cases}$$

В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{(m_1;\ p(x)) = 0}, \\ (m_2;\ p(x)) = 0, \end{array} \right.$$

В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m_1;\ p(x)) = 0, \\ (\mathbf{m_2};\ \mathbf{p(x)}) = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m_1;\ p(x)) = 0, \\ (\mathbf{m_2};\ \mathbf{p(x)}) = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Векторы m_1 и m_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему системы M.

$$p(x) = a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \in M^{\perp} \iff \begin{cases} (m_1;\ p(x)) = 0, \\ (m_2;\ p(x)) = 0, \end{cases}$$

В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B}=\{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M=\{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\}=\{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 26 & 6 & -4 & 64 \\ 8 & 0 & 4 & 27 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left([m_1]_{\mathbf{B}} \quad [m_2]_{\mathbf{B}} \quad [m_3]_{\mathbf{B}} \quad [m_4]_{\mathbf{B}} \quad [m_5]_{\mathbf{B}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 26 & 6 & -4 & 64 \\ 8 & 0 & 4 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 34 & 6 & 0 & 91 \\ 8 & 0 & 4 & 27 \end{pmatrix} \sim$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 26 & 6 & -4 & 64 \\ 8 & 0 & 4 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 34 & 6 & 0 & 91 \\ 8 & 0 & 4 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 68 & 12 & 0 & 182 \\ 24 & 0 & 12 & 81 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 68 & \boxed{\begin{matrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{matrix}} & 182 \\ 24 & & 81 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left([m_1]_{\mathbf{B}} \quad [m_2]_{\mathbf{B}} \quad [m_3]_{\mathbf{B}} \quad [m_4]_{\mathbf{B}} \quad [m_5]_{\mathbf{B}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 68 & 12 & 0 & 182 \\ 24 & 0 & 12 & 81 \end{array} \right) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 68 & \boxed{\begin{matrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{matrix}} & 182 \\ 24 & & 81 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \mathbf{12} & 0 \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\left(\ [m_1]_{\mathbf{B}}\ \ [m_2]_{\mathbf{B}}\ \ [m_3]_{\mathbf{B}}\ \ [m_4]_{\mathbf{B}}\ \ [m_5]_{\mathbf{B}}\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbf{68} & 12 & 0 & 182 \\ \mathbf{24} & 0 & 12 & 81 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} \mathbf{12} & 0 \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbf{68} & 12 & 0 & 182 \\ \mathbf{24} & 0 & 12 & 81 \end{array}\right) \quad \to \quad \begin{pmatrix} \mathbf{12} & 0 \\ \mathbf{-68} & \bullet \\ \mathbf{-24} & \bullet \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B}=\{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M=\{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\}=\{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5\\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5\\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27\\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 68 & 12 & 0 & 182\\ 24 & 0 & 12 & 81 \end{array}\right)\quad\to\quad\begin{pmatrix} 12 & 0\\ -68 & \bullet\\ -24 & \bullet\\ 0 & \mathbf{12} \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 68 & 12 & 0 & \mathbf{182} \\ 24 & 0 & 12 & \mathbf{81} \end{array}\right) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & \bullet \\ -24 & \bullet \\ 0 & \mathbf{12} \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 68 & 12 & 0 & \mathbf{182} \\ 24 & 0 & 12 & \mathbf{81} \end{array}\right) \quad \to \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & \mathbf{-182} \\ -24 & \mathbf{-81} \\ 0 & \mathbf{12} \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} [m_1]_{\mathbf{B}} & [m_2]_{\mathbf{B}} & [m_3]_{\mathbf{B}} & [m_4]_{\mathbf{B}} & [m_5]_{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 68 & 12 & 0 & 182 \\ 24 & 0 & 12 & 81 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -17 & -182 \\ -6 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4P \\ Q \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -17 & -182 \\ -6 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$M^{\perp} = \left\{ \qquad \middle| \qquad \right\} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -17 & -182 \\ -6 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$M^{\perp} = \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \middle| \begin{cases} 8a + 4c + 27d = 0, \\ 13a + 3b - 2c + 32d = 0 \end{cases} \right\} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -17 & -182 \\ -6 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$M^{\perp} = \left\{ a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 8a + 4c + 27d = 0, \\ 13a + 3b - 2c + 32d = 0 \end{cases} \right\} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27 \\ 13 & 3 & -2 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -68 & -182 \\ -24 & -81 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{-17} & -182 \\ \mathbf{-6} & -81 \\ \mathbf{0} & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$M^{\perp} = \left\{ a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \,\middle|\, \begin{cases} 8a+4c+27d=0, \\ 13a+3b-2c+32d=0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\langle \mathbf{3}(x-1) + (\mathbf{-17})(x+1) + (\mathbf{-6})\left(x^2-1\right);\right.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B}=\{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 10\end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M=\{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\}=\{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 27\\ 13 & 3 & -2 & 32\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0\\ -68 & -182\\ -24 & -81\\ 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P\\ Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{0}\\ -17 & \mathbf{-182}\\ -6 & \mathbf{-81}\\ 0 & \mathbf{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4P\\ Q\end{pmatrix}$$

$$M^{\perp}=\left\{a(x-1)+b(x+1)+c\left(x^2-1\right)+d\left(x^3-1\right)\ \middle|\ \begin{cases} 8a+4c+27d=0,\\ 13a+3b-2c+32d=0\end{cases}\right\}=$$

$$=\left\langle 3(x-1)-17(x+1)-6\left(x^2-1\right);\ (\mathbf{-182})(x+1)+(\mathbf{-81})\left(x^2-1\right)+\mathbf{12}\left(x^3-1\right)\right\rangle.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в базисе B.

$$M^{\perp} = \left\{ a(x-1) + b(x+1) + c\left(x^2-1\right) + d\left(x^3-1\right) \;\middle|\; \begin{cases} 8a + 4c + 27d = 0, \\ 13a + 3b - 2c + 32d = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\langle 3(x-1) - 17(x+1) - 6\left(x^2-1\right);\ \ -182(x+1) - 81\left(x^2-1\right) + 12\left(x^3-1\right) \right\rangle.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.** Мы нашли **матрицы перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.** Мы нашли **матрицы перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\ \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{B}\ \to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Согласно **теореме о матрице Грама в разных базисах**

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.** Мы нашли **матрицы перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Согласно **теореме о матрице Грама в разных базисах**

$\Gamma_{\mathbf{Б}} =$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$. Мы нашли **матрицы перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{B}\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Согласно **теореме о матрице Грама в разных базисах**

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.** Мы нашли **матрицы перехода**: $T_{\mathbf{Б}\to\,\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{B}\,\to\mathbf{Б}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Согласно **теореме о матрице Грама в разных базисах**

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.**

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.**

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 6 & -2 & 25 \\ -11 & 17 & -16 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -10 & 6 & -2 & 25 \\ -11 & 17 & -16 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$\Gamma_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.**
$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 \in M^{\perp}$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & \bullet \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В силу **теоремы о вычислении скалярного произведения**, а также **теоремы о дополнении к линейной оболочке**, учитывая, что, как мы уже выяснили, максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы m_1 и m_2, включение $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in M^\perp$ равносильно $\begin{cases} (m_1;\ q(x)) = 0, \\ (m_2;\ q(x)) = 0, \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & -358 \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & -358 \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$.

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & -358 \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -358 \\ 5 & 0 \\ 0 & 65 \\ 8 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.**

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & -358 \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -358 \\ 5 & 0 \\ 0 & 65 \\ 8 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13P \\ Q \end{pmatrix}.$$

$M^{\perp} =$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6+x+x^2+2x^3;\ -2+2x-x^2+3x^3;\ -14+4x+x^2+7x^3;$
$2+3x-3x^2+4x^3;\ 6+4x-5x^2+5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.**

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & -358 \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -358 \\ 5 & 0 \\ 0 & 65 \\ 8 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13P \\ Q \end{pmatrix}.$$

$$M^{\perp} = \left\{ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \;\middle|\; \begin{cases} 65\alpha - 299\beta + 358\gamma = 0, \\ -104\beta + 138\gamma + 65\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

Задача 15. Пусть в базисе $\mathbf{B} = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1;\ x^3-1\}$ линейного пространства многочленов степени не выше 3 **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдите ортогональное дополнение к системе векторов
$M = \{-6 + x + x^2 + 2x^3;\ -2 + 2x - x^2 + 3x^3;\ -14 + 4x + x^2 + 7x^3;$
$2 + 3x - 3x^2 + 4x^3;\ 6 + 4x - 5x^2 + 5x^3\} = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4;\ m_5\}$.

Ответ. Вариант вычислений в естественном базисе Б $= \{x^0;\ x;\ x^2;\ x^3\}$**.**

$$\begin{pmatrix} 65 & -299 & 358 & 0 \\ 0 & -104 & 138 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 & -358 \\ 65 & 0 \\ 0 & 65 \\ 104 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -358 \\ 5 & 0 \\ 0 & 65 \\ 8 & 138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13P \\ Q \end{pmatrix}.$$

$$M^{\perp} = \left\{ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \;\middle|\; \begin{cases} 65\alpha - 299\beta + 358\gamma = 0, \\ -104\beta + 138\gamma + 65\delta = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\langle 26 + 5x + 8x^3;\ \ -358 + 65x^2 + 138x^3 \right\rangle.$$

Решение задачи 16.

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\, g(x,y)\, dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} =$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением

$\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^{\perp}$ **имеем** $(x^2 - 2xy + y^2,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy\right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^{\perp}$ **имеем** $(x^2 - 2xy + y^2,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\bigl(f(x,y);\ g(x,y)\bigr) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^{\perp}$ **имеем** $(x^2 + 2xy + y^2,\ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\; g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\, g(x,y)\, dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\; xy,\; y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^{\perp}$ **имеем** $(xy,\; p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$M^\perp =$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$$M^\perp = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases} \right\} =$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy \right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$$M^\perp = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases} \right\} = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} p + r = 0, \\ q = 0. \end{cases} \right\} =$$

Задача 16. В **евклидовом пространстве** квадратичных форм от переменных x, y, т.е. многочленов вида $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$ со скалярным произведением $\big(f(x,y);\ g(x,y)\big) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)\,g(x,y)\,dy\right) dx$ найдите **ортогональное дополнение** к множеству $M = \{(x-y)^2, (x+y)^2, xy\}$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица Грама** имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для **вектора** $p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2$ из $M^\perp$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 7/60 & 19/180 \\ 7/60 & 19/180 & 7/60 \\ 19/180 & 7/60 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ что равносильно

$$\begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases}$$

$$M^\perp = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} 7p + 4q + 7r = 0, \\ 91p + 80q + 91r = 0, \\ 21p + 19q + 21r = 0. \end{cases} \right\} = \left\{ p\,x^2 + q\,xy + r\,y^2 \;\middle|\; \begin{cases} p + r = 0, \\ q = 0. \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\langle -x^2 + y^2 \right\rangle.$$

Решение задачи 17.

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^tY).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**: $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^tY).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**: $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t+Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^tY).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^tY).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t+X)(Y^t+Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^tY).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна
$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:
$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**: $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\,Y)=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}(X^t+X)(Y^t+Y)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\mathrm{tr}(X^tY).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}3&-2&-2&0\\-2&6&0&-2\\-2&0&6&-2\\0&-2&2&9\end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&-2&0\\-2&6&0&-2\\-2&0&6&-2\\0&-2&2&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}3a-2b-2c=0,\\-4a+6b+6c-4d=0,\\-2b+2c+9d=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5a-4d=0,\\20a-57d=0,\\20c+33d=0\end{cases}\Rightarrow$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{tr}(X^t Y).$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица Грама** равна

$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. **Базис** подпространства **симметричных матриц**:

$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, для вектора $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ **имеем**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 4d = 0, \\ 20a - 57d = 0, \\ 20c + 33d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. $\begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$

$V^{\perp} =$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} (X^t + X)(Y^t + Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^t Y).$$

Ответ. $\begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} 3a - 2b - 2c = 0, \\ -4a + 6b + 6c - 4d = 0, \\ -2b + 2c + 9d = 0, \end{cases} \right\} =$$

Задача 17. Найдите ортогональное дополнение к подпространству S **симметричных матриц** евклидова пространства U матриц размерности 2×2 со скалярным произведением, заданным формулой (здесь tr — **след матрицы**, M^t — матрица, **транспонированная** к M)

$$(X,\ Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}(X^t+X)(Y^t+Y)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{tr}(X^tY).$$

Ответ. $$\begin{cases} 3a-2b-2c=0, \\ -4a+6b+6c-4d=0, \\ -2b+2c+9d=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 16 \\ 57 \\ -33 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} 3a-2b-2c=0, \\ -4a+6b+6c-4d=0, \\ -2b+2c+9d=0, \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 16 & 57 \\ -33 & 20 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?