Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Ранг матрицы

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Минор матрицы

Определение 1. Минором *матрицы* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *построенным на строках* $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ *и столбцах* $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ *назовем определитель* M *матрицы* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ & \dots & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix}$. *При этом саму матрицу* $\mathbf{M}$ *мы будем называть матрицей,* **соответствующей минору** M*. Таким образом,* $M = \det \mathbf{M}$*. Количество строк матрицы* $\mathbf{M}$ *(то есть порядок детерминанта* $M = \det \mathbf{M}$*) называется* **порядком** *этого минора.*

Как разобраться с определением?

I. Минор матрицы

Определение 1. Минором *матрицы* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *построенным на строках* $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ *и столбцах* $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ *назовем определитель* M *матрицы* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ & \dots & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix}$. *При этом саму матрицу* $\mathbf{M}$ *мы будем называть матрицей,* **соответствующей минору** M. *Таким образом,* $M = \det \mathbf{M}$. *Количество строк матрицы* $\mathbf{M}$ *(то есть порядок детерминанта* $M = \det \mathbf{M}$*) называется* **порядком** *этого минора.*

Анализ определения (в частности, получение теорем) или

I. Минор матрицы

Определение 1. Минором *матрицы* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *построенным на строках* $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ *и столбцах* $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ *назовем определитель* M *матрицы* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ & \dots & & \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$. *При этом саму матрицу* $\mathbf{M}$ *мы будем называть матрицей,* **соответствующей минору** M*. Таким образом,* $M = \det \mathbf{M}$*. Количество строк матрицы* $\mathbf{M}$ *(то есть порядок детерминанта* $M = \det \mathbf{M}$*) называется* **порядком** *этого минора.*

Анализ определения или рассмотрение примеров (моделей).

I. Минор матрицы

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ 5 & 4 & -9 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-8} & \mathbf{5} \\ 4 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

I. Минор матрицы

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\mathbf{2}} & -1 & \color{blue}{\mathbf{5}} & 7 \\ \mathbf{3} & \color{magenta}{\mathbf{7}} & \mathbf{2} & \color{magenta}{\mathbf{-3}} \\ \color{blue}{\mathbf{5}} & 4 & \color{blue}{\mathbf{-9}} & 1 \\ \mathbf{1} & \color{magenta}{\mathbf{3}} & \mathbf{-8} & \color{magenta}{\mathbf{5}} \\ \color{blue}{\mathbf{4}} & -7 & \color{blue}{\mathbf{3}} & -5 \end{pmatrix}$$

I. Минор матрицы

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & \boxed{2} & -3 \\ 5 & 4 & -9 & 1 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-8} & 5 \\ 4 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

I. Минор матрицы

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & \boxed{2} & -3 \\ 5 & 4 & -9 & 1 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-8} & 5 \\ 4 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$$

II. Окаймляющий минор матрицы

Определение 2. *Пусть* M — *минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках с номерами* $i_1, \ldots, i_k$, *и столбцах с номерами* $j_1, \ldots, j_k$, i_{k+1} — *номер строки матрицы* $\mathbf{A}$, *не входящий в множество* $\{i_1, \ldots, i_k\}$, j_{k+1} — *номер столбца, не входящий в список* $\{j_1, \ldots, j_k\}$. *Тогда минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках* $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ *и столбцах* $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$ *называется* **окаймляющим** *для минора* M.

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & \boxed{2} & -3 \\ 5 & 4 & -9 & 1 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-8} & 5 \\ 4 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$$

II. Окаймляющий минор матрицы

Определение 2. *Пусть M — минор матрицы $\mathbf{A}$, построенный на строках с номерами $i_1, \ldots, i_k$, и столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_k$, i_{k+1} — номер строки матрицы $\mathbf{A}$, не входящий в множество $\{i_1, \ldots, i_k\}$, j_{k+1} — номер столбца, не входящий в список $\{j_1, \ldots, j_k\}$. Тогда минор матрицы $\mathbf{A}$, построенный на строках $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ и столбцах $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$ называется* **окаймляющим** *для минора M.*

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & \boxed{2} & \mathbf{-3} \\ 5 & 4 & -9 & 1 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-8} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & -7 & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & -3 \\ \boxed{1} & \boxed{-8} & 5 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Окаймляем **5-й строкой** и **4-м столбцом**.

II. Окаймляющий минор матрицы

Определение 2. *Пусть M — минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках с номерами* $i_1, \ldots, i_k$, *и столбцах с номерами* $j_1, \ldots, j_k$, i_{k+1} — *номер строки матрицы* $\mathbf{A}$, *не входящий в множество* $\{i_1, \ldots, i_k\}$, j_{k+1} — *номер столбца, не входящий в список* $\{j_1, \ldots, j_k\}$. *Тогда минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках* $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ *и столбцах* $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$ *называется* **окаймляющим** *для минора* M.

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \boxed{3} & \mathbf{7} & \boxed{2} & -3 \\ 5 & 4 & -9 & 1 \\ \boxed{1} & \mathbf{3} & \boxed{-8} & 5 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \boxed{3} & 7 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-8} \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$

Окаймляем **5-й строкой** и **2-м столбцом**.

II. Окаймляющий минор матрицы

Определение 2. *Пусть* M *— минор матрицы* $\mathbf{A}$*, построенный на строках с номерами* $i_1, \ldots, i_k$*, и столбцах с номерами* $j_1, \ldots, j_k$*,* i_{k+1} *— номер строки матрицы* $\mathbf{A}$*, не входящий в множество* $\{i_1, \ldots, i_k\}$*,* j_{k+1} *— номер столбца, не входящий в список* $\{j_1, \ldots, j_k\}$*. Тогда минор матрицы* $\mathbf{A}$*, построенный на строках* $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ *и столбцах* $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$ *называется* **окаймляющим** *для минора* M.

Рассмотрим минор матрицы, построенный на строках с номерами 2, 4 и столбцах с номерами 1, 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ \boxed{3} & \mathbf{7} & \boxed{2} & -3 \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{-9} & 1 \\ \boxed{1} & \mathbf{3} & \boxed{-8} & 5 \\ 4 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \boxed{3} & 7 & \boxed{2} \\ 5 & 4 & -9 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-8} \end{vmatrix}$$

Окаймляем **3-й строкой** и **2-м столбцом**.

II. Окаймляющий минор матрицы

Определение 2. *Пусть* M *— минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках с номерами* $i_1, \ldots, i_k$, *и столбцах с номерами* $j_1, \ldots, j_k$, i_{k+1} *— номер строки матрицы* $\mathbf{A}$, *не входящий в множество* $\{i_1, \ldots, i_k\}$, j_{k+1} *— номер столбца, не входящий в список* $\{j_1, \ldots, j_k\}$. *Тогда минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках* $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ *и столбцах* $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$ *называется* **окаймляющим** *для минора* M.

Определение 3. *Ненулевой минор матрицы* $\mathbf{A}$, *имеющий наибольший порядок, называется* **базисным минором** *матрицы* $\mathbf{A}$.

II. Окаймляющий минор матрицы

Определение 2. *Пусть M — минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках с номерами $i_1, \ldots, i_k$, и столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_k$, i_{k+1} — номер строки матрицы* $\mathbf{A}$, *не входящий в множество $\{i_1, \ldots, i_k\}$, j_{k+1} — номер столбца, не входящий в список $\{j_1, \ldots, j_k\}$. Тогда минор матрицы* $\mathbf{A}$, *построенный на строках $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ и столбцах $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$ называется* **окаймляющим** *для минора M.*

Определение 3. *Ненулевой минор матрицы* $\mathbf{A}$, *имеющий наибольший порядок, называется* **базисным минором** *матрицы* $\mathbf{A}$.

В матрице может быть несколько базисных миноров, т.е. ненулевых миноров порядка r, причем *все* миноры порядка $r+1$ и выше, нулевые.

III. Определения ранга матрицы

Определение 4. Рангом матрицы A *называется максимальный порядок ненулевых миноров. Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.*

III. Определения ранга матрицы

Определение 4. Рангом матрицы A *называется максимальный порядок ненулевых миноров. Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.*

Например, ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен двум.

Дело в том, что имеются ненулевые миноры, построенные на одной строке и одном столбце (таких много), поэтому ранг этой матрицы не меньше 1. Есть ненулевые миноры, построенные на двух строках и двух столбцах, например, первой и третьей строках и первом и втором столбце (есть и другие): $\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} & 2 & 0 \\ 1 \quad 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1 \quad 1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$

III. Определения ранга матрицы

Определение 4. Рангом матрицы A *называется максимальный порядок ненулевых миноров. Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.*

Например, ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен двум.

Любой минор, построенный на трех строках исходной матрицы, равен 0. Действительно, четвертый столбец исходной матрицы — нулевой, поэтому любой минор, построенный на системе столбцов, включающей в себя четвертый столбец, будет нулевым. Осталось заметить, что минор, построенный на первом, втором и третьем столбцах исходной матрицы: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

III. Определения ранга матрицы

Определение 4. Рангом матрицы A *называется максимальный порядок ненулевых миноров. Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.*

Определение 5. Строчным (столбцовым) рангом *матрицы* **A** *назовем максимальное число строк (столбцов) матрицы, образующих* ***линейно независимую*** *систему. Иными словами, строчный ранг матрицы — размерность* ***линейной оболочки*** *системы матриц-строк (матриц-столбцов) матрицы* **A**.

Рассмотреть пример?

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Определение 5. Строчным (столбцовым) рангом *матрицы* $\mathbf{A}$ *назовем максимальное число строк (столбцов) матрицы, образующих* ***линейно независимую*** *систему. Иными словами, строчный ранг матрицы — размерность* ***линейной оболочки*** *системы матриц-строк (матриц-столбцов) матрицы* $\mathbf{A}$.

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда множество строк с номерами из I является базисом* ***линейной оболочки*** *множества строк матрицы $\mathbf{A}$. Аналогично множество столбцов с номерами из J является базисом* ***линейной оболочки*** *множества столбцов матрицы $\mathbf{A}$.*

Можно сформулировать эту лемму иначе.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Замечание к названию леммы. Фактически это свойство не базисного минора, а минора, формально более общего вида - ненулевого минора, все **окаймляющие** миноры которого нулевые. Мы докажем потом, что такой минор обязательно является базисным.

Рассмотреть пример?

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Согласно теореме о линейных комбинациях базисных векторов (критерию базиса) надо проверить, что, во-первых, все строки матрицы $\mathbf{A}$ с номерами из I линейно независимы и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является **линейной комбинацией** строк матрицы $\mathbf{A}$ с номерами из I.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Пусть набор строк матрицы $\mathbf{A}$ с номерами из I является линейно зависимой системой векторов. Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & a_{i_1,2} & \ldots & a_{i_1,n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{i_2,1} & a_{i_2,2} & \ldots & a_{i_2,n} \end{pmatrix} + \ldots +$$
$$+\lambda_k \begin{pmatrix} a_{i_k,1} & a_{i_k,2} & \ldots & a_{i_k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Тогда для любого номера $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справедливо равенство $\lambda_1 a_{i_1,j} + \lambda_2 a_{i_2,j} + \ldots + \lambda_k a_{i_k,j} = 0.$

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий **окаймляющий** его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует **линейно независимую систему**, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является **линейной комбинацией** строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Тогда для любого номера $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справедливо равенство $\lambda_1 a_{i_1,j} + \lambda_2 a_{i_2,j} + \ldots + \lambda_k a_{i_k,j} = 0.$

В частности, это равенство справедливо для любого номера $j \in J$.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Тогда для любого номера $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справедливо равенство $\lambda_1 a_{i_1,j} + \lambda_2 a_{i_2,j} + \ldots + \lambda_k a_{i_k,j} = 0.$

В частности, это равенство справедливо для любого номера $j \in J$. Поэтому система строк матрицы $\mathbf{M}$, соответствующей минору M, линейно зависима.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Тогда для любого номера $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справедливо равенство $\lambda_1 a_{i_1,j} + \lambda_2 a_{i_2,j} + \ldots + \lambda_k a_{i_k,j} = 0.$

В частности, это равенство справедливо для любого номера $j \in J$. Поэтому система строк матрицы $\mathbf{M}$, соответствующей минору M, линейно зависима. Следовательно, $M = \det \mathbf{M}$ — нулевой минор, что противоречит выбору M.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Нам осталось доказать, что любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является линейной комбинацией строк с номерами из I.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Нам осталось доказать, что любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является **линейной комбинацией** строк с номерами из I. Пусть i — номер произвольной строки матрицы $\mathbf{A}$.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Если $i \in I$, то i-я строка матрицы $\mathbf{A}$ является **линейной комбинацией** строк матрицы $\mathbf{A}$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где $\lambda_j = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad j \neq i, \\ 1, & \text{при} \quad j = i. \end{cases}$

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Лемма 1 (о свойстве строк «базисного» минора.). *Пусть минор M матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, построенный на строках с номерами из $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ таков, что $M \neq 0$, но всякий* ***окаймляющий*** *его минор — нулевой. Тогда, во-первых, множество строк с номерами из I образует* ***линейно независимую систему****, и, во-вторых, любая строка матрицы $\mathbf{A}$ является* ***линейной комбинацией*** *строк с номерами из I (аналогично для столбцов).*

Доказательство. Остается рассмотреть случай $i \notin I$. Пусть j — номер произвольного столбца матрицы $\mathbf{A}$.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Положим $\mathbf{M}^{[j]} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_k} & a_{i_1j} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_k} & a_{i_2j} \\ & & \ldots & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \ldots & a_{i_kj_k} & a_{i_kj} \\ a_{ij_1} & a_{ij_2} & \ldots & a_{ij_k} & a_{ij} \end{pmatrix}$. Таким образом, $\mathbf{M}^{[j]}$ получена из $\mathbf{M}$ добавлением строки снизу и столбца справа, состоящих из соответствующих элементов i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{A}$. Заметим, что $\det\left(\mathbf{M}^{[j]}\right) = 0$. В самом деле, если $j \in J$, то в $\mathbf{M}^{[j]}$ имеется два одинаковых столбца, поэтому $\det\left(\mathbf{M}^{[j]}\right) = 0$. Если же $j \notin J$, то $\mathbf{M}^{[j]}$ — матрица, соответствующая минору, **окаймляющему** минор M, поэтому $\det\left(\mathbf{M}^{[j]}\right) = 0$ по выбору минора M.

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

Итак, доказано, что $\det\left(\mathbf{M}^{[j]}\right) = 0$. А сейчас нас ожидает приятный сюрприз. «Раскроем» этот детерминант по последнему столбцу:

$$0 = \det\left(\mathbf{M}^{[j]}\right) = a_{i_1 j}B_1 + a_{i_2 j}B_2 + \ldots + a_{i_k j}B_k + a_{ij}M, \qquad (1)$$

$$B_p = (-1)^{p+k+1}\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ & \ldots & & \\ a_{i_{p-2} j_1} & a_{i_{p-2} j_2} & \ldots & a_{i_{p-2} j_k} \\ a_{i_{p-1} j_1} & a_{i_{p-1} j_2} & \ldots & a_{i_{p-1} j_k} \\ a_{i_{p+1} j_1} & a_{i_{p+1} j_2} & \ldots & a_{i_{p+1} j_k} \\ a_{i_{p+2} j_1} & a_{i_{p+2} j_2} & \ldots & a_{i_{p+2} j_k} \\ & \ldots & & \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \\ a_{i j_1} & a_{i j_2} & \ldots & a_{i j_k} \end{vmatrix}.$$

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

А теперь — обещанный сюрприз: *числа B_p не зависят от выбора j.* Действительно, от выбора номера j зависят только элементы последнего столбца матрицы

$$\mathbf{M}^{[j]} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_k} & a_{i_1j} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_k} & a_{i_2j} \\ & & \ldots & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \ldots & a_{i_kj_k} & a_{i_2j} \\ a_{ij_1} & a_{ij_2} & \ldots & a_{ij_k} & a_{ij} \end{pmatrix},$$

но *при вычислении дополнительных миноров к элементам последнего столбца матрицы $\mathbf{M}^{[j]}$ сам этот столбец вычеркивается.* Вы не видите повода для ликования? Вот он: мы получили равенство (1), из которого следует, что

$$a_{ij} = -\frac{B_1}{M} \cdot a_{i_1j} - \frac{B_2}{M} \cdot a_{i_2j} - \ldots - \frac{B_k}{M} \cdot a_{i_kj},$$

IV. Лемма о свойстве строк базисного минора

$$a_{ij} = -\frac{B_1}{M} \cdot a_{i_1 j} - \frac{B_2}{M} \cdot a_{i_2 j} - \ldots - \frac{B_k}{M} \cdot a_{i_k j},$$

причем в этом равенстве коэффициенты $-\dfrac{B_p}{M}$ *не зависят от* j. И вот эффектная концовка: по определению матричных операций «сложение» и «умножение на скаляр» получаем равенство

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{k} \left(-\frac{B_p}{M}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_{i_p 1} & \ldots & a_{i_p n} \end{pmatrix},$$

то есть i-я строка матрицы $\mathbf{A}$ действительно является **линейной комбинацией** строк матрицы $\mathbf{A}$ с номерами из I. Лемма доказана.

V. Критерий базисного минора

Теорема 1 (критерий базисного минора). *Минор матрицы* $\mathbf{A}$ *является* ***базисным*** *тогда и только тогда, когда он ненулевой и все миноры, его* ***окаймляющие****, равны 0.*

Доказательство.

V. Критерий базисного минора

Теорема 1 (критерий базисного минора). *Минор матрицы* $\mathbf{A}$ *является* ***базисным*** *тогда и только тогда, когда он ненулевой и все миноры, его* ***окаймляющие****, равны 0.*

Доказательство. Необходимость следует из определения базисного минора.

Достаточность. Пусть у рассматриваемого ненулевого минора M^0 все миноры, его **окаймляющие**, равны 0. В качестве M в условии леммы о свойстве строк «базисного» минора можно взять и минор M^0, и любой базисный минор. По лемме о свойстве строк «базисного» минора и теореме о количестве базисных векторов у этих миноров одинаковая размерность. Таким образом, M^0 — максимальный ненулевой минор, то есть базисный. Теорема доказана.

VI. Теорема о совпадении трех рангов

Теорема 2 (**о совпадении трех рангов**). *Ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *совпадает с ее строчным и столбцовым рангом.*

Доказательство теоремы о совпадении трех рангов.

VI. Теорема о совпадении трех рангов

Теорема 2 (**о совпадении трех рангов**). *Ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *совпадает с ее строчным и столбцовым рангом.*

Доказательство теоремы о совпадении трех рангов. Докажем, что **строчный** ранг равен рангу матрицы. Пусть строки с номерами $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ образуют базис **линейной оболочки** множества строк матрицы $\mathbf{A}$. Пусть M — базисный минор матрицы $\mathbf{A}$. Тогда по лемме о свойстве строк «базисного» минора и теореме о количестве базисных векторов получаем, что количество строк минора M (то есть ранг матрицы $\mathbf{A}$) равно размерности **линейной оболочки** множества строк матрицы $\mathbf{A}$ (то есть строчному рангу матрицы $\mathbf{A}$). Аналогично доказывается и утверждение о равенстве ранга матрицы $\mathbf{A}$ и столбцового ранга матрицы $\mathbf{A}$. Теорема доказана.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Теорема 3 (**об инвариантности рангов матрицы**). *При любых элементарных преобразованиях матрицы ее* ***строчный*** *и* ***столбцовый*** *ранги не меняются. Не меняют ранга также следующие преобразования матрицы:*

1) удаление нулевой строки;

2) удаление нулевого столбца;

3) удаление строки, являющейся ***линейной комбинацией*** *остальных строк матрицы;*

4) удаление столбца, являющегося ***линейной комбинацией*** *остальных столбцов матрицы;*

5) транспонирование матрицы;

6) умножение на ***невырожденную*** *матрицу.*

Доказательство

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Доказательство, что не меняют ранга матрицы преобразования: 1) удаление нулевой строки; 2) удаление нулевого столбца; 3) удаление строки, являющейся **линейной комбинацией** остальных строк матрицы; 4) удаление столбца, являющегося **линейной комбинацией** остальных столбцов матрицы; 5) транспонирование матрицы — следует из теоремы 2 о совпадении трех рангов и свойств линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Осталось показать, что умножение на невыроженную матрицу не меняет ранга исходной матрицы.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Осталось показать, что умножение на невыроженную матрицу не меняет ранга исходной матрицы. Сначала докажем это для случая, когда умножение на **невырожденную** матрицу проводится слева. Итак, пусть

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Осталось показать, что умножение на невыроженную матрицу не меняет ранга исходной матрицы. Сначала докажем это для случая, когда умножение на **невырожденную** матрицу проводится слева. Итак, пусть $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times m}, \quad \mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}, \quad \det\mathbf{A} \neq 0$. Надо доказать, что $\mathrm{Rg}\left(\mathbf{AB}\right) = \mathrm{Rg}\left(\mathbf{B}\right)$.

Рассмотрим линейное пространство U размерности m, и выберем в нем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Положим $e'_i = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{mi}e_m$ для $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, где a_{ji} — коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$. Тогда система $\mathbf{Б'} = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ является базисом линейного пространства U, причем, согласно формуле из определения матрицы перехода, для матрицы перехода имеем $\mathbf{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}} = \mathbf{A}$.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Рассмотрим линейное пространство U размерности m, и выберем в нем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Положим $e'_i = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{mi}e_m$ для $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, где a_{ji} — коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$. Тогда система $\mathbf{Б'} = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ является базисом линейного пространства U, причем, согласно формуле из определения матрицы перехода, для матрицы перехода имеем $\mathbf{T}_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б'}} = \mathbf{A}$. Обозначим через V линейную оболочку системы векторов вида $v_i = b_{1i}e'_1 + \ldots + b_{mi}e'_m$, где b_{ji} — коэффициенты матрицы $\mathbf{B}$. Согласно теореме о координатах вектора в разных базисах, столбцами матрицы $\mathbf{AB}$ являются столбцы координат векторов v_i в базисе $\mathbf{Б}$.

Таким образом, матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ состоят из столбцов координат векторов v_i в базисах, соответственно, $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б'}$.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Рассмотрим линейное пространство U размерности m, и выберем в нем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Мы ввели обозначения: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times m}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $e'_i = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{mi}e_m$, $\mathbf{Б'} = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, V — линейная оболочка системы векторов вида $v_i = b_{1i}e'_1 + \ldots + b_{mi}e'_m$.

Матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ состоят из столбцов координат векторов v_i в базисах, соответственно, $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б'}$. Выберем в системе векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ максимальную **линейно независимую** подсистему $\{v_{p_1}, v_{p_2}, \ldots, v_{p_r}\}$. Согласно теореме о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$, система матриц-столбцов $\left\{[v_{p_1}]_{\mathbf{Б}}, \ldots, [v_{p_r}]_{\mathbf{Б}}\right\}$ является максимальной **линейно независимой** подсистемой системы столбцов матрицы $\mathbf{B}$, и система матриц-столбцов $\left\{[v_{p_1}]_{\mathbf{Б'}}, \ldots, [v_{p_r}]_{\mathbf{Б'}}\right\}$ является максимальной **линейно независимой** подсистемой системы столбцов матрицы $\mathbf{AB}$.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Рассмотрим линейное пространство U размерности m, и выберем в нем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Мы ввели обозначения: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times m}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $e'_i = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{mi}e_m$, $\mathbf{Б'} = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, V — линейная оболочка системы векторов вида $v_i = b_{1i}e'_1 + \ldots + b_{mi}e'_m$.

Система матриц-столбцов $\left\{[v_{p_1}]_{\mathbf{Б}}, \ldots, [v_{p_r}]_{\mathbf{Б}}\right\}$ является максимальной **линейно независимой** подсистемой системы столбцов матрицы $\mathbf{B}$, и система матриц-столбцов $\left\{[v_{p_1}]_{\mathbf{Б'}}, \ldots, [v_{p_r}]_{\mathbf{Б'}}\right\}$ является максимальной **линейно независимой** подсистемой системы столбцов матрицы $\mathbf{AB}$. Поэтому, по теореме о линейных комбинациях базисных векторов $r = \operatorname{Rg}\mathbf{B} = \operatorname{Rg}(\mathbf{AB})$. Иными словами, умножение слева на **невырожденную** матрицу не меняет ранга исходной матрицы.

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Теорема 3 (об инвариантности рангов матрицы). *При любых элементарных преобразованиях матрицы ее* ***строчный*** *и* ***столбцовый*** *ранги не меняются. Не меняют ранга:*

1) удаление нулевой строки;

2) удаление нулевого столбца;

3) удаление строки, являющейся ***линейной комбинацией*** *остальных строк матрицы;*

4) удаление столбца, являющегося ***линейной комбинацией*** *остальных столбцов матрицы;*

5) транспонирование матрицы;

6) умножение на ***невырожденную*** *матрицу.*

Продолжение доказательства. Если умножение на невырожденную матрицу проводится справа, то с помощью транспонирования ситуация сводится к уже рассмотренному случаю:

VII. Теорема об инвариантности рангов матрицы

Продолжение доказательства. Если умножение на невырожденную матрицу проводится справа, то с помощью транспонирования ситуация сводится к уже рассмотренному случаю: в силу известного тождества имеем $(\mathbf{BA})^t = \mathbf{A}^t\mathbf{B}^t$, имеем

$$\operatorname{Rg}\mathbf{B} = \operatorname{Rg}\left(\mathbf{B}^t\right) = \operatorname{Rg}\left(\mathbf{A}^t\mathbf{B}^t\right) = \operatorname{Rg}\left((\mathbf{BA})^t\right) = \operatorname{Rg}(\mathbf{BA})\,.$$

Наконец, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ — квадратные **невырожденные** матрицы и произведение $\mathbf{ABC}$ определено, то, согласно **ассоциативности операции умножения матриц** и доказанным выше равенствам, имеем

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{Rg}((\mathbf{AB})\,\mathbf{C}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{AB}) = \operatorname{Rg}\mathbf{B}.$$

VIII. Критерий вырожденности матрицы

Теорема 4 (критерий вырожденности матрицы). *Для квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *следующие условия эквивалентны:*

1. *Хотя бы одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является* ***линейной комбинацией*** *остальных строк;*
2. *хотя бы один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является* ***линейной комбинацией*** *остальных столбцов;*
3. $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Это следствие из теоремы о совпадении трех рангов.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?