Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Идеалы полугрупп и колец

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Полугруппа

Определение 1. *Группоид* $\langle A, \{*\}\rangle$ *называется* **полугруппой**, *если* $*$ *—* **ассоциативная** *операция, то есть выполняется тождество* $(x*y)*z = x*(y*z)$.

Иногда говорят, что A — полугруппа **относительно операции** $*$. При этом равенство $(x*y)*z = x*(y*z)$ называют **аксиомой полугруппы**.

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование полугрупп?

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, анпример, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, анпример, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

– можно применить только для конечных полугрупп;

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, анпример, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

– можно применить только для конечных полугрупп;

– громоздкость задания для полугрупп большого порядка;

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, анпример, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

– можно применить только для конечных полугрупп;

– громоздкость задания для полугрупп большого порядка;

– непрозрачность «структуры» **полугруппы**, ее устройства и т.д.

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, анпример, таблицей Кэли.

Другой вариант — «конструирование» **полугруппы** с помощью других полугрупп и специальных преобразований. Этот способ представляется более перспективным. В частности, таким образом исследование сводится к изучению «более простых» полугрупп.

I.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, анпример, таблицей Кэли.

Другой вариант — «конструирование» **полугруппы** с помощью других полугрупп и специальных преобразований. Этот способ представляется более перспективным. В частности, таким образом исследование сводится к изучению «более простых» полугрупп.

Итак, надо выбрать подполугруппы, наиболее перспективные для изучения.

I.1. Идеал полугруппы

Определение 2. *Подмножество* I ***полугруппы*** P *называется* ***левым идеалом****, если для любого* x *из* P *выполняется включение* $x * I \subseteq I$, *т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \ x * y \in I. \tag{1}$$

I.1. Идеал полугруппы

Определение 2. *Подмножество I **полугруппы** P называется **левым идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \ x * y \in I. \tag{1}$$

Определение 3. *Подмножество I **полугруппы** P называется **правым идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $I * x \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \ y * x \in I. \tag{1}$$

I.1. Идеал полугруппы

Определение 4. *Подмножество I* ***полугруппы*** *P называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

I.1. Идеал полугруппы

Определение 4. *Подмножество I* ***полугруппы*** *P называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

В частности, идеал **полугруппы** является одновременно ее левым и правым идеалом.

Рассмотреть пример?

I.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. *Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полугруппы** P.*

Доказательство.

I.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. *Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полугруппы** P.*

Доказательство. Если a и b — элементы из I, то, по формуле (2)

I.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. *Подмножество I* ***полугруппы*** *P называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \qquad (2)$$

Теорема 1. *Идеал I* ***полугруппы*** *P есть подполугруппа* ***полугруппы*** *P.*

Доказательство. Если a и b — элементы из I, то, по **формуле (2)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow$$

I.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. *Подмножество I* ***полугруппы*** *P называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Идеал I* ***полугруппы*** *P есть подполугруппа* ***полугруппы*** *P.*

Доказательство. Если a и b — элементы из I, то, по **формуле (2)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow a * b \in I.$$

I.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. *Подмножество I* ***полугруппы*** *P называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Идеал I* ***полугруппы*** *P есть подполугруппа* ***полугруппы*** *P.*

Доказательство. Если a и b — элементы из I, то, по **формуле (2)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow a * b \in I.$$

Ассоциативность ограничения операции $*$ на I следует из ассоциативности операции $*$ в P.

I.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. *Подмножество I* ***полугруппы*** *P называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Идеал I* ***полугруппы*** *P есть подполугруппа* ***полугруппы*** *P.*

Доказательство. Если a и b — элементы из I, то, по **формуле (2)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow a * b \in I.$$

Ассоциативность ограничения операции $*$ на I следует из ассоциативности операции $*$ в P. Теорема доказана.

I.3. Алгебра идеалов полугруппы

В соответствии со **стратегией перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов** напрашивается ввести операции и отношения на множестве идеалов.

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \qquad (3)$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Рассмотрим пример?

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right. \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I * J \end{cases} \quad \overset{\text{по } (3)}{\Longrightarrow}$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \qquad (3)$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \quad \overset{\text{по } (3)}{\Longrightarrow} \quad \exists a\ \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по (3)}}{\Rightarrow} \exists a\, \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = \\ (a * b) * x = \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (3)}{\Rightarrow} \exists a\, \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = \\ (a * b) * x = \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (3)}{\Longrightarrow} \exists a \, \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (3)}{\Rightarrow} \exists a\ \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = a * (b * x) = \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (3)}{\Longrightarrow} \quad \exists a \; \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = a * (b * x) = a * b' \in \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (2)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (3)}{\Longrightarrow} \exists a \, \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = a * (b * x) = a * b' \in I * J. \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a * b \in I, \\ \\ \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right. \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} *b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a * b \in I, \\ \\ \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a * b \in I, \\ a * b \in J \end{array} \right.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a * b \in I, \\ a * b \in J \end{array} \right. \Rightarrow \; a * b \in I \cap J.$$

I.3.1. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то множество*

$$I * J = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

является идеалом полугруппы P, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\begin{cases} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a * b \in I, \\ a * b \in J \end{cases} \Rightarrow \; a * b \in I \cap J.$$

Теорема доказана.

I.3.2. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

I.3.2. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow$$

I.3.2. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow$$

I.3.2. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow$$

I.3.2. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

I.3.2. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

Теорема доказана.

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Рассмотрим пример?

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно формуле (2):

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow$$

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in P, \\ y \in J \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно **формуле (2)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in P, \\ y \in J \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x * y \in J, \\ y * x \in J \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

I.3.3. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. *Если I и J — **идеалы** полугруппы P, то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P.*

Доказательство. Согласно формуле (2):

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in P, \\ y \in J \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x * y \in J, \\ y * x \in J \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cup J, \\ y * x \in I \cup J. \end{cases}$$

II. Кольцо

Примером переноса понятия на усложненный математический объект является введение понятия *идеала кольца*.

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения* (**аксиомы кольца**)*:*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

Значит, $\langle K, \{+\}\rangle$ — ***полугруппа****.*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*
1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*
3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*
1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*
3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*
Значит, $\langle K, \{+\}\rangle$ ***— полугруппа с нейтральным элементом (с «единицей»).***

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

Значит, $\langle K, \{+\}\rangle$ — ***группа***.

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

Значит, $\langle K, \{+\}\rangle$ ***— абелева (коммутативная) группа — аддитивная группа кольца.***

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(ассоциативность «умножения»);*

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(ассоциативность «умножения»);*

Значит, $\langle K, \{\cdot\}\rangle$ — ***полугруппа***.

II.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра* $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность «сложения»);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность «сложения»);*

3) в K *существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого* x *из* K *выполняется соотношение* $x + 0 = x$ *(наличие нулевого элемента);*

4) для любого x *из* K *существует такой элемент* $(-x)$*, что* $(-x) + x = 0$ *(элемент, обратный относительно +);*

5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(ассоциативность «умножения»);*

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ *(левая и правая дистрибутивности).*

II.1. Определение кольца

Часто это определение формулируют следующим образом: *кольцом называется непустое множество K с операциями, которые мы обозначим $+$ и $\cdot$, в котором имеется элемент, который мы обозначим символом 0, причем выполняются приведенные выше аксиомы кольца.*

II.1. Определение кольца

Иногда в определении кольца отказываются от **аксиомы 5 (ассоциативность «умножения»)** и заменяют ее какой-нибудь другой. В этом случае говорят о **неассоциативных кольцах**.

Выполнение аксиом 2-4 говорит о том, что K является **группой** относительно сложения, а выполнение при этом аксиомы 1 говорит о том, что это абелева или, иными словами, коммутативная **группа**.

II.2. Элементарные теоремы теории колец

Рассмотрим несколько следствий из определений.

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство.

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x* ***кольца*** *K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$= x \cdot (y + 0) =$$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x* ***кольца*** *K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) =$$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x* ***кольца*** *K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x* ***кольца*** *K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

По **критерию нейтрального элемента** $x \cdot 0$ является нейтральным элементом аддитивной группы кольца, т.е.

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

По **критерию нейтрального элемента** $x \cdot 0$ является нейтральным элементом аддитивной группы кольца, т.е.

$$x \cdot 0 = 0.$$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \;\Rightarrow$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x* ***кольца*** *K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \ \Rightarrow \ \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_{0} = \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_{0} + x \cdot 0 \ \Rightarrow$$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x* ***кольца*** *K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_{0} = \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_{0} + x \cdot 0 \;\Rightarrow\; x \cdot 0 = 0.$$

II.2.1. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5 (об умножении на 0 в кольце). *Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_{0} = \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_{0} + x \cdot 0 \;\Rightarrow\; x \cdot 0 = 0.$$

Утверждение $0 \cdot x = 0$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство* $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство.

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y =$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y =$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y =$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство* $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -(x\cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x)\cdot y + x\cdot y = ((-x)+x)\cdot y = 0\cdot y = 0.$$

По **теореме об однозначности** g' элемент $(-x)\cdot y$ является противоположным к элементу $\big(-(x\cdot y)\big)$, т.е.

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

По **теореме об однозначности** g' элемент $(-x) \cdot y$ является противоположным к элементу $\big(-(x \cdot y)\big)$, т.е.

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **теоремы об однозначности g'**:

$(-x) \cdot y + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство* $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **теоремы об однозначности** g':

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; (-x) \cdot y + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = 0 + (-(x \cdot y)) \;\Rightarrow$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **теоремы об однозначности** g':

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; (-x) \cdot y + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = 0 + (-(x \cdot y)) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y =$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство* $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) =$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 =$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство* $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

По **теореме об однозначности** g' элемент $x \cdot (-y)$ является противоположным к элементу $\big(-(x \cdot y)\big)$, т.е.

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (-y) + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y) \;\Rightarrow$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (-y) + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \cdot (-y) = -(x \cdot y).$$

II.2.2. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6 (об умножении на противоположный элемент). *Для любых элементов x и y* ***кольца*** *K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.*

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (-y) + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \cdot (-y) = -(x \cdot y).$$

Теорема доказана.

II.3. Частные виды колец

Для развития теории следует обогатить понятийный аппарат. В частности, следует выделить некоторые частные виды колец. Для выделения этих типов применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

II.3.1. Конечные кольца

Определение 6. ***Кольцо*** K *называется* **конечным кольцом**, *если множество* K *является конечным.*

II.3.2. Кольцо с единицей

Определение 7. ***Кольцо*** $\mathcal{K} = \langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *называется* **кольцом с единицей**, *если в* ***мультипликативной полугруппе кольца*** *имеется элемент* e *такой, что для любого ненулевого элемента* x *выполняются равенства* $x \cdot e = e \cdot x = x$.

II.3.2. Кольцо с единицей

Определение 7. ***Кольцо*** $\mathcal{K} = \langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *называется* **кольцом с единицей**, *если в* ***мультипликативной полугруппе кольца*** *имеется элемент e такой, что для любого ненулевого элемента x выполняются равенства $x \cdot e = e \cdot x = x$.*

Кольцами с единицей являются кольцо целых чисел и кольцо матриц размерности $n \times n$ (при фиксированном n).

II.3.2. Кольцо с единицей

Определение 7. ***Кольцо*** $\mathcal{K} = \langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$ *называется* **кольцом с единицей**, *если в* ***мультипликативной полугруппе кольца*** *имеется элемент e такой, что для любого ненулевого элемента* x *выполняются равенства* $x \cdot e = e \cdot x = x$.

Кольцами с единицей являются кольцо целых чисел и кольцо матриц размерности $n \times n$ (при фиксированном n).

Кольцо всех четных целых чисел является кольцом без 1.

II.3.3. Коммутативные кольца

Определение 8. ***Кольцо*** K *называется* **коммутативным кольцом**, *если операция* $*$ *является коммутативной, т.е.* $x * y = y * x$ *для любых* x, y *из* K.

II.3.3. Коммутативные кольца

Определение 8. ***Кольцо*** *K называется* **коммутативным кольцом**, *если операция $*$ является коммутативной, т.е. $x * y = y * x$ для любых x, y из K.*

Примерами коммутативных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле.

Примером некоммутативного кольца является кольцо матриц размерности $n \times n$.

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** *K называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце K нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Иными словами, в целостном кольце произведение ненулевых элементов не может быть равно 0.

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** *K называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце K нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** K *называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце* K *нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array} \right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} =$

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** *K называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце K нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{aligned} a &= 0, \\ b &= 0. \end{aligned}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** K *называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце* K *нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** *K называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце K нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** *K называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце K нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,
$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} =$

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** *K называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце K нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

II.3.4. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо*** K *называется* **целостным кольцом** *или* **областью целостности**, *если в кольце* K *нет* **делителей нуля**, *т.е.*

$$x * y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.3.5. Евклидовы кольца

Понятие евклидова кольца обусловлено желанием выделить основные свойства, позволяющие гарантировать выполнение в кольце теоремы о делении с остатком, доказанную для целых чисел и **многочленов**.

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*

во-первых,

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*

во-первых, K *— коммутативное кольцо,*

во-вторых,

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*

во-первых, K *— коммутативное кольцо,*

во-вторых, K *является* ***целостным кольцом****,*

в-третьих,

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K *— коммутативное кольцо,*
во-вторых, K *является* ***целостным кольцом****,*
в-третьих, на K *определена функция* g*, удовлетворяющая условиям:*
1)

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K *— коммутативное кольцо,*
во-вторых, K *является* ***целостным кольцом****,*
в-третьих на K *определена функция* g*, удовлетворяющая условиям:*
1) если x *— ненулевой элемент из* K*, то* $g(x)$ *является неотрицательным целым числом, т.е.* $g(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*;*
2)

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K *— коммутативное кольцо,*
во-вторых, K *является* ***целостным кольцом****,*
в-третьих на K *определена функция* g*, удовлетворяющая условиям:*
1) если x *— ненулевой элемент из* K*, то* $g(x)$ *является неотрицательным целым числом, т.е.* $g(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*;*
2) для $a \neq 0$ *и* $b \neq 0$ *имеем* $g(a * b) \geq g(a)$*;*
3)

II.3.5. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо*** K *называется* **евклидовым кольцом** *тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K *— коммутативное кольцо,*
во-вторых, K *является* ***целостным кольцом****,*
в-третьих на K *определена функция* g*, удовлетворяющая условиям:*
1) если x *— ненулевой элемент из* K*, то* $g(x)$ *является неотрицательным целым числом, т.е.* $g(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*;*
2) для $a \neq 0$ *и* $b \neq 0$ *имеем* $g(a * b) \geq g(a)$*;*
3) если $a \neq 0$*, то для любого* $b \in K$ *найдутся такие* c, r *из* K*, что* $b = ca + r$*,* *где* $g(r) < g(a)$ *или* $r = 0$*.*

Здесь элемент c называется **частным от деления** b на a, а элемент r — **остатком от деления** b на a.

II.4. Идеал кольца

Множество элементов кольца с операцией умножения образует **полугруппу**. Поэтому понятие **идеала** естественным образом переносится в теорию колец.

II.4.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 11. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***левым идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow x * y \in I. \tag{4}$$

II.4.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 11. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***левым идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \ x * y \in I. \tag{4}$$

Определение 12. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***правым идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $I * x \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \ y * x \in I. \tag{5}$$

II.4.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

II.4.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

В частности, идеал кольца является одновременно его левым и правым идеалом.

II.4.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). *Идеал I кольца K является подкольцом кольца K.*

II.4.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). *Идеал I кольца K является подкольцом кольца K.*

Доказательство. Из **определения идеала** следует, что остается доказать замкнутость I относительно умножения.

II.4.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). *Идеал I кольца K является подкольцом кольца K.*

Доказательство. Согласно **формуле (6)**

II.4.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). *Идеал I кольца K является подкольцом кольца K.*

Доказательство. Согласно **формуле (6)**

$$\begin{cases} x \in I, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.4.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. *Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется* ***идеалом*** *или* ***двусторонним идеалом****, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.*

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). *Идеал I кольца K является подкольцом кольца K.*

Доказательство. Согласно **формуле (6)**

$$\begin{cases} x \in I, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases}$$

II.5. Алгебра идеалов кольца

По аналогии с идеалами полугруппы и в соответствии со **стратегией перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов** напрашивается ввести операции и отношения на множестве идеалов.

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right. \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, *причем* $I * J \subseteq I \cap J$.

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right. \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, *причем* $I * J \subseteq I \cap J$.

Рассмотрим пример?

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right. \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I * J$ является подруппой аддитивной группы кольца:

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I*J$ является подруппой аддитивной группы кольца:

$$\underbrace{(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p)}_{\in I*J} + \underbrace{\left(a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \ldots + a'_q * b'_q\right)}_{\in I*J} =$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right. \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I*J$ является подгруппой аддитивной группы кольца:

$$\underbrace{(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p)}_{\in I*J} + \underbrace{(a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \ldots + a'_q * b'_q)}_{\in I*J} =$$

$$= a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p + a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \ldots + a'_q * b'_q \in I * J.$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right. \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I*J$ является подруппой аддитивной группы кольца:

$$\underbrace{(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p)}_{\in I*J} + \underbrace{(a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \ldots + a'_q * b'_q)}_{\in I*J} =$$

$$= a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p + a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \ldots + a'_q * b'_q \in I * J.$$

Значит, произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K.

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K. Ассоциативность выполняется для любых элементов из K, тем более равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ выполняется на подмножестве $I * J$ множества K.

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \,\middle|\, \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K. Ассоциативность выполняется для любых элементов из K, тем более равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ выполняется на подмножестве $I * J$ множества K.

Обратным к элементу $a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p$ является элемент $(-a_1) * b_1 + (-a_2) * b_2 + \ldots + (-a_p) * b_p$.

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \,\middle|\, \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, *причем* $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K. Ассоциативность выполняется для любых элементов из K, тем более равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ выполняется на подмножестве $I * J$ множества K.

Обратным к элементу $a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p$ является элемент $(-a_1) * b_1 + (-a_2) * b_2 + \ldots + (-a_p) * b_p$.

Нейтральным (нулевым) элементом является элемент $0 * 0$.

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, *причем* $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \qquad (7)$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I * J \end{cases} \overset{\text{по } (7)}{\Longrightarrow}$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right. \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, *причем* $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (7)}{\Rightarrow} \exists a_i \; \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p \end{array} \right. \Rightarrow$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \qquad (7)$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I * J \end{cases} \overset{\text{по } (7)}{\Rightarrow} \exists a_i \ \exists b_i \begin{cases} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x * (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) = \\ (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) * x = \end{cases}$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right. \right\} \qquad (7)$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right. \overset{\text{по } (7)}{\Rightarrow} \exists a_i \; \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) = (x * a_1) * b_1 + \ldots + (x * a_p) * b_p \in I * J, \\ (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) * x = \end{array} \right.$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \tag{7}$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I * J \end{cases} \overset{\text{по } (7)}{\Longrightarrow} \exists a_i \; \exists b_i \begin{cases} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x * (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) = (x * a_1) * b_1 + \ldots + (x * a_p) * b_p \in I * J, \\ (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) * x = a_1 * (b_1 * x) + \ldots + a_p * (b_p * x) \in I * J. \end{cases}$$

II.5.1. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K, то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \ldots + a_p * b_p \;\middle|\; \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \qquad (7)$$

является идеалом кольца K, причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I * J \end{cases} \overset{\text{по } (7)}{\Rightarrow} \exists a_i\ \exists b_i \begin{cases} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x * (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) = (x * a_1) * b_1 + \ldots + (x * a_p) * b_p \in I * J, \\ (a_1 * b_1 + \ldots + a_p * b_p) * x = a_1 * (b_1 * x) + \ldots + a_p * (b_p * x) \in I * J. \end{cases}$$

Теорема доказана.

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K, очевиден:

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K, очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K, очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ y \in I, \\ x \in J, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K, очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ y \in I, \\ x \in J, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in I, \\ x + y \in J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их пересечение* $(I \cap J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K, очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ y \in I, \\ x \in J, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in I, \\ x + y \in J \end{cases} \Rightarrow x + y \in I \cap J.$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их пересечение* $(I \cap J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow \ 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \ \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x) \in I, \\ (-x) \in J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow \ 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \ \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x) \in I, \\ (-x) \in J \end{cases} \Rightarrow \ (-x) \in I \cap J.$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их пересечение* $(I \cap J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их пересечение* $(I \cap J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их пересечение* $(I \cap J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

II.5.2. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K, то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

Теорема доказана.

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Определение 14. Суммой идеалов *I и J кольца K называется множество*

$$I + J = \left\{ a + b \;\middle|\; \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \tag{8}$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Рассмотрим пример?

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Очевидно, что $(I+J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K:

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство. Очевидно, что $(I+J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\underbrace{(a_1+b_1)}_{I+J}+\underbrace{(a_2+b_2)}_{I+J}=$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Очевидно, что $(I+J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\underbrace{(a_1+b_1)}_{I+J}+\underbrace{(a_2+b_2)}_{I+J}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Очевидно, что $(I+J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\underbrace{(a_1+b_1)}_{I+J}+\underbrace{(a_2+b_2)}_{I+J}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\in I+J.$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow \ \exists u\ \exists v \begin{cases} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow \ \exists u \ \exists v \begin{cases} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u + v \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их **сумма** $(I+J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow \ \exists u \ \exists v \begin{cases} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*u \in I, \\ x*v \in J, \\ u*x \in I, \\ v*x \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x*u + x*v \in I+J, \\ u*x + v*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если* I *и* J *— идеалы кольца* K, *то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца* K.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow \ \exists u\ \exists v \begin{cases} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x*u + x*v \in I+J, \\ u*x + v*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*(u+v) \in I+J, \\ (u+v)*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их **сумма** $(I+J)$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow \exists u\, \exists v \begin{cases} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x*u + x*v \in I+J, \\ u*x + v*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*(u+v) \in I+J, \\ (u+v)*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*y \in I+J, \\ y*x \in I+J. \end{cases}$$

II.5.3. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. *Если I и J — идеалы кольца K, то их* ***сумма*** $(I+J)$ *является идеалом кольца K.*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (6)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I+J \end{cases} \Rightarrow \exists u\ \exists v \begin{cases} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*u \in I, \\ x*v \in J, \\ u*x \in I, \\ v*x \in J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x*u + x*v \in I+J, \\ u*x + v*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*(u+v) \in I+J, \\ (u+v)*x \in I+J, \\ y = u+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x*y \in I+J, \\ y*x \in I+J. \end{cases}$$

Теорема доказана.

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Рассмотрим идеал, порожденный минимальным числом элементов. Попробуем рассмотреть случай, когда идеал порожден *единственным* элементом.

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a. Тогда

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a. Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a. Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K,$$

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a. Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K, \quad a * y \in K,$$

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a. Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K, \quad a * y \in K, \quad x * a * y \in K,$$

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a. Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K, \quad a * y \in K, \quad x * a * y \in K, \quad \underbrace{a + a + \ldots + a}_{m \text{ слагаемых}}.$$

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$x*a+a*y+u_1*a*v_1+u_2*a*v_2+\ldots+u_p*a*v_p+\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m\text{ слагаемых}} \in I,$$

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p + \underbrace{a + a + \ldots + a}_{m \text{ слагаемых}} \in I,$$

то есть

II.6. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$x*a+a*y+u_1*a*v_1+u_2*a*v_2+\ldots+u_p*a*v_p+\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m\ \text{слагаемых}}\in I,$$

то есть

$$x*a+a*y+u_1*a*v_1+u_2*a*v_2+\ldots+u_p*a*v_p+ma\in I.$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку,

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$ma + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \ldots + u'_p * a * v'_p +$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$ma + x' * a + a * y' + u_1' * a * v_1' + u_2' * a * v_2' + \ldots + u_p' * a * v_p' +$$
$$+ na + x'' * a + a * y'' + u_1'' * a * v_1'' + u_2'' * a * v_2'' + \ldots + u_q'' * a * v_q'' =$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\begin{gathered} ma + x' * a + a * y' + u_1' * a * v_1' + u_2' * a * v_2' + \ldots + u_p' * a * v_p' + \\ + na + x'' * a + a * y'' + u_1'' * a * v_1'' + u_2'' * a * v_2'' + \ldots + u_q'' * a * v_q'' = \\ = (m+n)a + \end{gathered}$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\begin{gathered} ma + x' * a + a * y' + u_1' * a * v_1' + u_2' * a * v_2' + \ldots + u_p' * a * v_p' + \\ + na + x'' * a + a * y'' + u_1'' * a * v_1'' + u_2'' * a * v_2'' + \ldots + u_q'' * a * v_q'' = \\ = (m+n)a + (x' + x'') * a + \end{gathered}$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\begin{gathered} ma + x' * a + a * y' + u_1' * a * v_1' + u_2' * a * v_2' + \ldots + u_p' * a * v_p' + \\ + na + x'' * a + a * y'' + u_1'' * a * v_1'' + u_2'' * a * v_2'' + \ldots + u_q'' * a * v_q'' = \\ = (m+n)a + (x' + x'') * a + a * (y' + y'') + \end{gathered}$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K:

$$\begin{gathered}ma + x' * a + a * y' + u_1' * a * v_1' + u_2' * a * v_2' + \ldots + u_p' * a * v_p' + \\ + na + x'' * a + a * y'' + u_1'' * a * v_1'' + u_2'' * a * v_2'' + \ldots + u_q'' * a * v_q'' = \\ = (m+n)a + (x' + x'') * a + a * (y' + y'') + \\ + u_1' * a * v_1' + \ldots + u_p' * a * v_p' + u_1'' * a * v_1'' + \ldots + u_q'' * a * v_q'' \in I.\end{gathered}$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K, и, во-вторых, для любого z из K

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K, и, во-вторых, для любого z из K

$$z * (ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p) =$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K, и, во-вторых, для любого z из K

$$z * (ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p) =$$

$$= (mz) * a + (z * x) * a + z * a * y + (z * u_1) * a * v_1 + \ldots + (z * u_p) * a * v_p \in I.$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K, и, во-вторых, для любого z из K

$$(ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p) * z =$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K, и, во-вторых, для любого z из K

$$(ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p) * z =$$

$$= a*(mz)+x*a*z+a*(y*z)+u_1*a*(v_1*z)+\ldots+u_p)*a*(v_p*z) \in I.$$

II.6. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a, то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K, поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K, и, во-вторых, I выдерживает умножение на z из K слева и справа.

II.6.1. Теорема о главных идеалах кольца

Мы доказали теорему:

Теорема 11 (о главном идеале кольца). *Подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида*

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p,$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x, y, u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p\} \subseteq K$, *является идеалом кольца* K.

II.6.1. Теорема о главных идеалах кольца

Теорема 11 (о главном идеале кольца). *Подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида*

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p,$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x,\ y,\ u_1,\ v_1,\ \ldots,\ u_p,\ v_p\} \subseteq K$, *является идеалом кольца* K.

Следствие 1 (о главных идеалах коммутативного кольца). *В* ***коммутативном кольце*** K *элементы главного идеала* $I(a)$ *можно представить в виде* $ma + x * a$, *где* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in K$.

II.6.2. Определение главного идеала кольца

Определение 15. Главным идеалом *кольца* K, *порожденным элементом* a *из* K, *называется подкольцо* $I(a)$, *состоящее из элементов вида*

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p,$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \{x,\ y,\ u_1,\ v_1,\ \ldots,\ u_p,\ v_p\} \subseteq K$.

Рассмотрим пример?

II.6.2. Определение главного идеала кольца

Определение 15. Главным идеалом *кольца* K, *порожденным элементом* a *из* K, *называется подкольцо* $I(a)$, *состоящее из элементов вида*

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p,$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x,\ y,\ u_1,\ v_1,\ \ldots,\ u_p,\ v_p\} \subseteq K$.

Согласно **следствию о главных идеалах коммутативного кольца** главный идеал $I(a)$ коммутативного кольца K состоит из элементов вида

II.6.2. Определение главного идеала кольца

Определение 15. Главным идеалом *кольца K, порожденным элементом a из K, называется подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида*

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \ldots + u_p * a * v_p,$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x,\ y,\ u_1,\ v_1,\ \ldots,\ u_p,\ v_p\} \subseteq K$.

Согласно **следствию о главных идеалах коммутативного кольца** главный идеал $I(a)$ коммутативного кольца K состоит из элементов вида $ma + x * a$.

II.7. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов

Сосредоточим наше внимание на введенных ранее **евклидовых кольцах** и кольцах, все идеалы которых являются **главными**.

II.7. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов

Сосредоточим наше внимание на введенных ранее **евклидовых кольцах** и кольцах, все идеалы которых являются **главными**.

Определение 16. ***Кольцо***, *все идеалы которого являются **главными идеалами**, называется* **кольцом главных идеалов**.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало

Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Если $I = \{0\}$, то I является **главным идеалом**.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Если $I = \{0\}$, то I является **главным идеалом**.

Значит, можно считать, что в I имеется ненулевой элемент.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца**

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов***.

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $\quad x = c * a + r, \quad$ где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r,$ где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - c * \underbrace{a}_{\in I}$

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало *__Евклидово кольцо__ является кольцом __главных идеалов__.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I}$

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов***.

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов***.

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов***.

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

Следовательно, $x = c * a$

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $\quad x = c * a + r, \quad$ где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

Следовательно, $x = c * a \in I(a)$.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало

Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K. Обозначим через a такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I. По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{array}\right.$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

Следовательно, $x = c * a \in I(a)$. Теорема доказана.

II.7.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Доказательство. Мы показали, что если a — такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально, то для любого $x \in I$ имеет место $x = c * a \in I(a)$. Теорема доказана.

II.7.2. Следствие из доказательства теоремы 12

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов***.

Доказательство. Мы показали, что если a — такой ненулевой элемент из I, что значение $g(a)$ минимально, то для любого $x \in I$ имеет место $x = c * a \in I(a)$. Теорема доказана.

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало *__Евклидово кольцо__ является кольцом __главных идеалов__.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** кольцо K как идеал, является главным идеалом, т.е. $K = I(a)$ для некоторого a.

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** кольцо K как идеал, является главным идеалом, т.е. $K = I(a)$ для некоторого a.

В силу **следствия из доказательства теоремы 12** $a = a * e$ для некоторого $e \in K$.

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало ***Евклидово кольцо*** *является кольцом* ***главных идеалов***.

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a, причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a, причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a =$$

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a, причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a = d * (a * e) =$$

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a, причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a = d * (a * e) = (d * a) * e =$$

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a, причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a = d * (a * e) = (d * a) * e = b * e.$$

II.7.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12 (о евклидовых кольцах и кольцах главных идеало
Евклидово кольцо *является кольцом* ***главных идеалов****.*

Следствие 2 (из доказательства теоремы 12). *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3 (о существовании 1 в евклидовом кольце). *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство.

$$b = d * a = d * (a * e) = (d * a) * e = b * e.$$

Следовательно, e — нейтральный элемент мультипликативной полугруппы кольца, т.е. $e = 1$.

II.8. Алгебра идеалов евклидова кольца

Рассмотрим конкретизацию **операций алгебры идеалов евклидова кольца**.

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство.

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.*

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) =$$

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\} \rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{ a * x \,\middle|\, x \in K \right\},$$

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{a * x \,\middle|\, x \in K\right\}, \quad I(b) =$$

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{a * x \,\middle|\, x \in K\right\}, \quad I(b) = \left\{b * y \,\middle|\, y \in K\right\}.$$

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.*

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{a * x \,\middle|\, x \in K\right\}, \quad I(b) = \left\{b * y \,\middle|\, y \in K\right\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.*

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{a * x \,\middle|\, x \in K\right\}, \quad I(b) = \left\{b * y \,\middle|\, y \in K\right\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

$$(a * x_1) * (b * y_1) + (a * x_2) * (b * y_2) + \ldots + (a * x_m) * (b * y_m) =$$

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.*

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{a * x \,\middle|\, x \in K\right\}, \quad I(b) = \left\{b * y \,\middle|\, y \in K\right\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

$$(a * x_1) * (b * y_1) + (a * x_2) * (b * y_2) + \ldots + (a * x_m) * (b * y_m) =$$

$$= a * b * (x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \ldots + x_m * y_m) = a * b * z,$$

где $z \in K$.

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.*

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{a * x \,\middle|\, x \in K\right\}, \quad I(b) = \left\{b * y \,\middle|\, y \in K\right\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

$$(a * x_1) * (b * y_1) + (a * x_2) * (b * y_2) + \ldots + (a * x_m) * (b * y_m) =$$

$$= a * b * (x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \ldots + x_m * y_m) = a * b * z,$$

где $z \in K$. Следовательно, $I(a) * I(b) = I(a * b)$.

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. Мы доказали равенство $I(a) * I(b) = I(a * b)$. Включение $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$ следует из

II.8.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13 (о произведении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. Мы доказали равенство $I(a) * I(b) = I(a * b)$. Включение $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$ следует из **теоремы 8 о произведении идеалов кольца**.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ — *идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.

Доказательство.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.*

Доказательство. В силу **теоремы 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. В силу **теоремы 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.*

Доказательство. В силу **теоремы 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K.

Следовательно, для любого элемента $z * c$ из K найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = z * c.$$

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K, причем для любого элемента $z * c$ из K найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = z * c.$$

Положим $z = 1$, тогда $x * a = y * b = c$.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.*

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K, причем для любого элемента $z*c$ из K найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = z * c.$$

Положим $z = 1$, тогда $x * a = y * b = c$. Значит, c делится нацело на a и b. Осталось проверить минимальность c.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$, причем найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = c.$$

Осталось проверить минимальность c. Если d делится нацело на a и b, то $d = p * a = q * b$.

II.8.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14 (о пересечении идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$, причем найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = c.$$

Осталось проверить минимальность c. Если d делится нацело на a и b, то $d = p * a = q * b$. Значит, $d \in I(a) \cap I(b)$, значит, по **следствию из доказательства теоремы 12**, d делится нацело на c. Теорема доказана.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) + I(b) = I(c)$ для некоторого c из K.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) + I(b) = I(c)$ для некоторого c из K.

Согласно **следствию 2 из доказательства теоремы 12** всякий элемент из идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) + I(b) = I(c)$ для некоторого c из K.

Согласно **следствию 2 из доказательства теоремы 12** всякий элемент из идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c. \tag{9}$$

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Итак, каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K.$$

Положим $y = 0$. Тогда $x * a + 0 * b = z * c$.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ — *идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Итак, каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K.$$

Положим $x = 1$ и $y = 0$. Тогда $1 * a + 0 * b = z * c$. Согласно **следствию о существовании 1 в евклидовом кольце** и **теореме 5 об умножении на 0 в кольце** имеем $0 * y = 0$, поэтому

$$1 * a + 0 * b = z * c \ \Rightarrow\ a = z * c.$$

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Итак, каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K.$$

Положим $x = 1$ и $y = 0$. Тогда $1 * a + 0 * b = z * c$. Согласно **следствию о существовании 1 в евклидовом кольце** и **теоремы ?? об умножении на 0 в кольце** имеем $0 * y = 0$, поэтому

$$1 * a + 0 * b = z * c \Rightarrow a = z * c.$$

Следовательно, c является делителем элемента a.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\} \rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элемента a. Полагая $(x;\ y) = (0;\ 1)$ можно доказать, что c является делителем элемента b.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элементов a и b.

Осталось показать, что любой общий делитель элементов a и b делит нацело элемент c.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \qquad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элементов a и b.

Осталось показать, что любой общий делитель элементов a и b делит нацело элемент c.

Если $a = p * d$ и $b = q * d$, то полагая в **формуле (9)** $z = 1$, получаем $x * p * d + y * q * d = c$, откуда $(x * p + y * q) * d = c$, т.е. общий множитель d делит нацело элемент c.

II.8.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \qquad \{x,\ y,\ z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элементов a и b.

Осталось показать, что любой общий делитель элементов a и b делит нацело элемент c.

Если $a = p * d$ и $b = q * d$, то полагая в **формуле (9)** $z = 1$, получаем $x * p * d + y * q * d = c$, откуда $(x * p + y * q) * d = c$, т.е. общий множитель d делит нацело элемент c. Теорема доказана.

II.8.4. Следствие о представлении Н.О.Д.

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Следствие 4 (о представлении Н.О.Д.). *Для любых ненулевых элементов* a *и* b *евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$ *для некоторых элементов* x *и* y *из* K *имеет место равенство*

$$x * a + y * b = \text{Н.О.Д.}\{a;\ b\}. \tag{10}$$

Доказательство.

II.8.4. Следствие о представлении Н.О.Д.

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Следствие 4 (о представлении Н.О.Д.). *Для любых ненулевых элементов* a *и* b *евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$ *для некоторых элементов* x *и* y *из* K *имеет место равенство*

$$x * a + y * b = \text{Н.О.Д.}\{a;\ b\}. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно в **формуле (9)** положить $z = 1$. Следствие доказано.

II.8.4. Следствие о представлении Н.О.Д.

Теорема 15 (о сумме идеалов евклидова кольца). *Если* $I(a)$ *и* $I(b)$ *— идеалы евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, *то* $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a;\ b\})$.

Следствие 4 (о представлении Н.О.Д.). *Для любых ненулевых элементов* a *и* b *евклидова кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$ *для некоторых элементов* x *и* y *из* K *имеет место равенство*

$$x * a + y * b = \text{Н.О.Д.}\{a;\ b\}. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно в **формуле (9)** положить $z = 1$. Следствие доказано.

Рассмотрим пример?

II.9. Идеалы и конгруенции кольца

Конкретизируем некоторые результаты **теории алгебраических систем**.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношение эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть T — **конгруенция кольца** K. Определению **идеала кольца** надо проверить,

во-первых, что

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть T — **конгруенция кольца** K. Определению **идеала кольца** надо проверить,

во-первых, что I — подгруппа аддитивной группы кольца;

во-вторых, выполнение **формулы (6)**.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K: по определению **конгруенции**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени* *эквивалентности* *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K: по определению **конгруенции**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a;\ 0) \in T, \\ (b;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является **конгруенцией** тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K: по определению **конгруенции**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a;\ 0) \in T, \\ (b;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (a + b;\ 0 + 0) \in T \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени*** ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K: по определению **конгруенции**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a;\ 0) \in T, \\ (b;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (a + b;\ 0 + 0) \in T \Rightarrow (a + b) \in I.$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени* *эквивалентности* *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I. По определению **конгруенции**

$$a \in I \;\Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени… эквивалентности T на носителе кольца K является **конгруенцией** тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I. По определению **конгруенции**

$$a \in I \;\Rightarrow \begin{cases} (a;\ 0) \in T, \\ (-a;\ -a) \in T \end{cases} \;\Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I. По определению **конгруенции**

$$a \in I \;\Rightarrow\; \begin{cases} (a;\ 0) \in T, \\ (-a;\ -a) \in T \end{cases} \;\Rightarrow\; \big(a + (-a); 0 + (-a)\big) \in T \;\Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I. По определению **конгруенции**

$$a \in I \;\Rightarrow\; \begin{cases} (a;\; 0) \in T, \\ (-a;\; -a) \in T \end{cases} \;\Rightarrow\; \big(a + (-a); 0 + (-a)\big) \in T \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \big(0; (-a)\big) \in T \;\Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени***
эквивалентности *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I. По определению **конгруенции**

$$a \in I \;\Rightarrow \begin{cases} (a;\ 0) \in T, \\ (-a;\ -a) \in T \end{cases} \Rightarrow \big(a + (-a); 0 + (-a)\big) \in T \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(0; (-a)\big) \in T \;\Rightarrow\; (-a) \in I.$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени[е] эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является **конгруенцией** тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

По определению **конгруенции**

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени[е] эквивалентности T на носителе кольца K является **конгруенцией** тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

По определению **конгруенции**

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x;\; x) \in T, \\ (a;\; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

По определению **конгруенции**

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x;\ x) \in T, \\ (a;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow \ \big(x \cdot a; x \cdot 0\big) \in T \ \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

По определению **конгруенции**

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x;\ x) \in T, \\ (a;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow \ \big(x \cdot a; x \cdot 0\big) \in T \ \Rightarrow$$

по **теореме об умножении на ноль в кольце**

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение формулы (6).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x;\ x) \in T, \\ (a;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow \big(x \cdot a; x \cdot 0\big) \in T \Rightarrow$$

по теореме об умножении на ноль в кольце

$$\Rightarrow \big(x \cdot a; 0\big) \in T \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \Big\{t \,\Big|\, (t, 0) \in T\Big\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

По определению **конгруенции**

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x;\ x) \in T, \\ (a;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow \Big(x \cdot a; x \cdot 0\Big) \in T \Rightarrow$$

по **теореме об умножении на ноль в кольце**

$$\Rightarrow \Big(x \cdot a; 0\Big) \in T \Rightarrow (x \cdot a) \in I.$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является **конгруенцией** тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K. Осталось проверить выполнение **формулы (6)**.

По определению **конгруенции**

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \ (x \cdot a) \in I.$$

Доказано, что если T — **конгруенция**, то I — **идеал кольца** K.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является **конгруенцией** тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t,0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Осталось доказать обратное утверждение: если I — **идеал кольца** K, то T — **конгруенция**.

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени* ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{ (a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I \right\}$. Для сложения в кольце K имеем:

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени*** ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \Big\{ t \Big| (t, 0) \in T \Big\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \Big\{ (a;\ b) \Big| (a + (-b)) \in I \Big\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени*** ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \in I \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени*** ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество* $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ *является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \in I\ \Rightarrow\ (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \in I\ \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени[е] эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{ (a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I \right\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \in I\ \Rightarrow\ (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \in I\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in T.$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени экивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени* *эквивалентности* T *на носителе кольца* K *является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество* $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ *является* ***идеалом кольца*** K.

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{ (a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I \right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени*** ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2) \in I \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является идеалом кольца K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2) \in I\ \Rightarrow\ (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \in I\ \Rightarrow$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). *Отношени эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{t \,\middle|\, (t, 0) \in T\right\}$ является **идеалом кольца** K.*

Доказательство. Пусть I — **идеал кольца** K, $T = \left\{(a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I\right\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T, \\ (x_2;\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2) \in I\ \Rightarrow\ (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \in I\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_1 \cdot x_2;\ y_1 \cdot y_2) \in T.$$

II.9.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16 (об идеалах и конгруенциях кольца). ***Отношени*** ***эквивалентности*** *T на носителе кольца K является* ***конгруенцией*** *тогда и только тогда, когда множество $I = \left\{ t \,\middle|\, (t, 0) \in T \right\}$ является* ***идеалом кольца*** *K.*

Доказательство. Итак, мы показали, что если I — **идеал кольца** K, то отношение
$T = \left\{ (a;\ b) \,\middle|\, (a + (-b)) \in I \right\}$ является — **конгруенцией**.

Теорема доказана.

II.9.2. Фактор-кольцо по идеалу

Определение 17. *Если* I *—* ***идеал кольца*** K*, то, в силу* ***теоремы об идеалах и конгруенциях кольца****, отношение* $T = \Big\{(a;\ b) \Big| (a + (-b)) \in I\Big\}$ *является* ***конгруенцией****, и* ***фактор-алгебра*** K/T *называется* **фактор-кольцом по идеалу** I *и обозначается через* K/I.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

Теорема 17 (о кольце вычетов). *Пусть* I — *идеал кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$. *На множестве*

$$K/I = \left\{x + I \,\middle|\, x \in K\right\} = \left\{\left\{x + y \,\middle|\, y \in I\right\} \,\middle|\, x \in K\right\}$$

операции $\oplus$ *и* $\odot$, *индуцированные операциями* $+$ *и*, *соответственно,* $*$ *определим формулами:*

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Тогда K/I *с операциями* $\oplus$ *и* $\odot$ *и нулевым элементом* I *является* ***кольцом****.*

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} (y' + I) \oplus (y'' + I).$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x' + I) \oplus (x'' + I) = \left\{ x' + x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) = \left\{ x' + x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' + p + y'' + q + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x' + I) \oplus (x'' + I) = \left\{ x' + x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' + p + y'' + q + r \,\middle|\, r \in I \right\} = \left\{ y' + y'' + (p + q + r) \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x' + I) \oplus (x'' + I) = \left\{ x' + x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' + p + y'' + q + r \,\middle|\, r \in I \right\} = \left\{ y' + y'' + (p + q + r) \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= y' + y'' + I =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x' + I) \oplus (x'' + I) = \left\{ x' + x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' + p + y'' + q + r \,\middle|\, r \in I \right\} = \left\{ y' + y'' + (p + q + r) \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= y' + y'' + I = (y' + I) \oplus (y'' + I).$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} (x' + I) \odot (x'' + I) = (y' + I) \odot (y'' + I).$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем однозначность операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x' + I) \odot (x'' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем однозначность операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x' + I) \odot (x'' + I) = \left\{ x' * x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем однозначность операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x' + I) \odot (x'' + I) = \left\{ x' * x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ (y' + p) * (y'' + q) + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем однозначность операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; (x' + I) \odot (x'' + I) = \left\{ x' * x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ (y' + p) * (y'' + q) + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' * y'' + (x' * p + y' * q + r) \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x' + I) \odot (x'' + I) = \left\{ x' * x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ (y' + p) * (y'' + q) + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' * y'' + (x' * p + y' * q + r) \,\middle|\, r \in I \right\} = y' * y'' + I =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) = \left\{ x' * x'' + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ (y' + p) * (y'' + q) + r \,\middle|\, r \in I \right\} =$$

$$= \left\{ y' * y'' + (x' * p + y' * q + r) \,\middle|\, r \in I \right\} = y' * y'' + I = (y' + I) \odot (y'' + I).$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

— доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

— доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

— применение метода «от противного».

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

— доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

— применение метода «от противного».

Применим первый метод.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + I) \oplus (x''' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + I) \oplus (x''' + I) =$$

$$= (x' + x'' + x''') + I.$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$R =$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) = (x' + I) \oplus (x'' + x''' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) = (x' + I) \oplus (x'' + x''' + I) =$$
$$= (x' + x'' + x''') + I.$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

$$L = (x' + x'' + x''') + I = R,$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = \big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

$$L = (x' + x'' + x''') + I = R,$$

т.е.

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \oplus (x''' + I) = (x' + I) \oplus \big((x'' + I) \oplus (x''' + I)\big).$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. **Ассоциативность** операции $\odot$ можно доказать аналогично:

$$\big((x' + I) \odot (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. **Ассоциативность** операции $\odot$ можно доказать аналогично:

$$\big((x' + I) \odot (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' * x'' * x''') + I =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. **Ассоциативность** операции $\odot$ можно доказать аналогично:

$$\big((x' + I) \odot (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' * x'' * x''') + I =$$
$$= (x' + I) \odot \big((x'' + I) \odot (x''' + I)\big)\,.$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Нейтральным относительно сложения $\odot$ является элемент

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Нейтральным относительно сложения $\odot$ является элемент $0 + I = I$.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Обратным (относительно сложения $\oplus$) к элементу $x + I$ является элемент

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Обратным (относительно сложения $\oplus$) к элементу $x + I$ является элемент $(-x) + I$.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность.

Надо доказать

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность.

Надо доказать *равенство.*

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность.

Надо доказать *равенство.*

Для этого применяется один из

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность.

Надо доказать *равенство.*

Для этого применяется один из трех методов:

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство.*

Для этого применяется один из трех методов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

— доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

— доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

— применение метода «от противного».

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

— доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

— применение метода «от противного».

Применим первый метод.

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

$$= ((x'+x'')*x''')+I =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

$$= ((x'+x'')*x''')+I = (x'*x'''+x''*x''')+I =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

$$= ((x'+x'')*x''')+I = (x'*x'''+x''*x''')+I = (x'*x'''+I)\oplus(x''*x'''+I) =$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

$$= ((x'+x'')*x''')+I = (x'*x'''+x''*x''')+I = (x'*x'''+I)\oplus(x''*x'''+I) =$$

$$= \big((x' + I) \odot (x''' + I)\big) \oplus \big((x'' + I) \odot (x''' + I)\big).$$

II.9.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \tag{11}$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \tag{12}$$

Доказательство. Осталось доказать дистрибутивность:

$$\big((x' + I) \oplus (x'' + I)\big) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

$$= ((x'+x'')*x''')+I = (x'*x'''+x''*x''')+I = (x'*x'''+I)\oplus(x''*x'''+I) =$$

$$= \big((x' + I) \odot (x''' + I)\big) \oplus \big((x'' + I) \odot (x''' + I)\big)\,.$$

Теорема доказана.

II.9.4. Определение кольца вычетов

Кольцо $\mathcal{K}/I = \langle K/I, \{\oplus, \odot, I\}\rangle$ из доказанной выше **теоремы** называется **кольцом вычетов**.

II.9.5. Сравнения по идеалу

Определение 18. *Пусть* I *— левый, правый или двусторонний идеал кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$*. Говорят, что элементы* x *и* y *кольца* $\mathcal{K}$ **сравнимы по модулю** I*, если* $x + I = y + I$*, т.е.* $x - y \in I$*.*

Сравнимость элементов x и y по модулю I обозначается как $x \equiv y \pmod I$. Если $I = I(a)$ — главный идеал, порожденный элементом a, то пишут $x \equiv y \pmod a$ вместо $x \equiv y \pmod{I(a)}$.

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Теорема 18 (о сумме и произведении сравнимых элементов). *Если* I *— левый (правый) идеал кольца* $\mathcal{K} = \langle K, \{+;\ *;\ 0\}\rangle$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in K$, $a \equiv b \pmod{I}$ *и* $x \equiv y \pmod{I}$, *то*

во-первых, $a + x \equiv b + y \pmod{I}$ *и* $a - x \equiv b - y \pmod{I}$*;*

во-вторых, $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}} \equiv \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n \text{ слагаемых}} \pmod{I}$, *т.е.* $na \equiv nb \pmod{I}$*;*

в-третьих, *если* I *— левый идеал, то* $t * a \equiv t * b \pmod{I}$, *а если* I *— правый идеал, то* $a * t \equiv b * t \pmod{I}$.

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + x = (b + p) + (y + q), \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + x = (b + p) + (y + q), \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + x = (b + y) + (p + q), \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + x = (b + p) + (y + q), \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + x = (b + y) + (p + q), \\ \{p,\ q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a + x + I = (b + y) + I.$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \;\Rightarrow\; a + I = b + I \;\Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod I \;\Rightarrow\; a + I = b + I \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \;\Rightarrow\; a + I = b + I \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \ldots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod I \;\Rightarrow\; a + I = b + I \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \ldots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \;\Rightarrow\; a + I = b + I \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \ldots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} na = nb + np, \\ p \in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \;\Rightarrow\; a+I=b+I \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=b+p, \\ p\in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ слагаемых}} = \underbrace{b+p+b+p+\ldots+b+p}_{n\text{ слагаемых}}, \\ p\in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ слагаемых}} = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{n\text{ слагаемых}} + \underbrace{p+p+\ldots+p}_{n\text{ слагаемых}}, \\ p\in I \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} na=nb+np, \\ p\in I \end{cases} \;\Rightarrow\; na+I=nb+I.$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \quad \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; t * a = t * b + t * p \; \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ t * a = t * b + t * p \Rightarrow \begin{cases} t * a = t * b + t * p, \\ t \in I, \\ t * p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t * a = t * b + t * p \Rightarrow \begin{cases} t * a = t * b + t * p, \\ t \in I, \\ t * p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t * a + I = t * b + I\ \Rightarrow$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t * a = t * b + t * p \Rightarrow \begin{cases} t * a = t * b + t * p, \\ t \in I, \\ t * p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t * a + I = t * b + I \ \Rightarrow\ t * a \equiv t * b \pmod{I}$$

II.9.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Для правого идеала рассуждения аналогичны.

III. Кольцо целых чисел

Уточним некоторые полученные выше результаты для случая кольца целых чисел.

III. Кольцо целых чисел

Уточним некоторые полученные выше результаты для случая кольца целых чисел.

Кольцо целых чисел является **евклидовым кольцом**.

III.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный (по включению) собственный идеал кольца $\mathbb{Z}$, называется* **простым числом**.

III.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный собственный идеал кольца* $\mathbb{Z}$*, называется* **простым числом**.

Это определение равносильно традиционной «школьной» трактовке этого термина. Максимальность идеала I здесь означает, что

III.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный собственный идеал кольца* $\mathbb{Z}$, *называется* **простым числом**.

Это определение равносильно традиционной «школьной» трактовке этого термина. Максимальность идеала I здесь означает, что если для идеала J кольца $\mathbb{Z}$ имеет место включение $I \subset J$, то

III.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный собственный идеал кольца* $\mathbb{Z}$, *называется* **простым числом**.

Это определение равносильно традиционной «школьной» трактовке этого термина. Максимальность идеала I здесь означает, что если для идеала J кольца $\mathbb{Z}$ имеет место включение $I \subset J$, то $J = \mathbb{Z}$.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство проведем, ориентируясь на теорию колец и их идеалов. Пусть n — натуральное число.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число. Применим метод математической индукции. Будем вести индукцию по

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число. Применим метод математической индукции. Будем вести индукцию по количеству натуральных чисел, на которые делится n.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

База индукции. Пусть n — простое число, т.е. количество множителей числа n равно

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

База индукции. Пусть n — простое число, т.е. количество множителей числа n равно 2. Тогда утверждение теоремы выполняется.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.
Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем максимальный идеал $I(p)$, включающий в себя $I(n)$ (т.е.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем максимальный идеал $I(p)$, включающий в себя $I(n)$ (т.е. p является делителем числа n).

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем максимальный идеал $I(p)$, включающий в себя $I(n)$ (т.е. p является делителем числа n).

Обозначим через m **частное от деления** n на p.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Если это частное равно 1, то $n = p$ и шаг индукции доказан.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n. Поэтому количество делителей числа m *меньше* количества делителей числа n, поскольку

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n. Поэтому количество делителей числа m *меньше* количества делителей числа n, поскольку, например, n не является делителем числа m.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n. Поэтому количество делителей числа m *меньше* количества делителей числа n, поскольку, например, n не является делителем числа m.

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n. Поэтому количество делителей числа m *меньше* количества делителей числа n, поскольку, например, n не является делителем числа m.

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда $n = p \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n. Поэтому количество делителей числа m *меньше* количества делителей числа n, поскольку, например, n не является делителем числа m.

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда $n = p \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Здесь p может совпадать с одним из p_i.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p.

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n. Поэтому количество делителей числа m *меньше* количества делителей числа n, поскольку, например, n не является делителем числа m.

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда $n = p \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Шаг индукции доказан.

III.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19 (о разложении в произведение простых чисел). *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Поскольку доказаны база и шаг индукции, теорема доказана.

III.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20 (о бесконечности множества простых чисел).
Множество простых чисел является бесконечным.

III.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20 (о бесконечности множества простых чисел). *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. От противного.

III.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20 (о бесконечности множества простых чисел). *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно: $\{p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n\}$.

III.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20 (о бесконечности множества простых чисел). *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно: $\{p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n\}$.

Тогда по **теореме о разложении в произведение простых чисел** число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_n + 1$ представимо в виде произведения простых чисел.

III.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20 (о бесконечности множества простых чисел). *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно: $\{p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n\}$.

Тогда по **теореме о разложении в произведение простых чисел** число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_n + 1$ представимо в виде произведения простых чисел.

Но число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_n + 1$ не делится ни на одно из чисел $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n$, противоречие.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?