Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы линейной алгебры: определение, базис, алгебра подпространств

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Понятие линейного пространства

Мы рассмотрели несколько алгебр, в которых использовалось понятие сложения векторов и умножения вектора на число.

I. Понятие линейного пространства

Мы рассмотрели несколько алгебр, в которых использовалось понятие сложения векторов и умножения вектора на число.

При этом многие свойства этих операций в разных алгебрах одинаковы:

I. Понятие линейного пространства

Мы рассмотрели несколько алгебр, в которых использовалось понятие сложения векторов и умножения вектора на число.

Векторная алгебра		
1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$;	коммутативность	
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$;	ассоциативность	
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$;	существование нулевого вектора	
4. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;	существование обратного вектора	
5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;		
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}}$;		
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda(\mu\overrightarrow{\mathbf{x}})$;		
8. $1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$		

I. Понятие линейного пространства

Мы рассмотрели несколько алгебр, в которых использовалось понятие сложения векторов и умножения вектора на число.

Векторная алгебра	Матричная алгебра	
1. $\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}=\overrightarrow{\mathbf{y}}+\overrightarrow{\mathbf{x}}$;	1. $\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}$;	
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})+\overrightarrow{\mathbf{z}}=$ $=\overrightarrow{\mathbf{x}}+(\overrightarrow{\mathbf{y}}+\overrightarrow{\mathbf{z}})$;	2. $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z}=$ $=\mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$;	
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{0}}=\overrightarrow{\mathbf{x}}$;	3. $\mathbf{X}+\mathbf{0}=\mathbf{X}$;	
4. $\overrightarrow{\mathbf{x}}+(-\overrightarrow{\mathbf{x}})=\overrightarrow{\mathbf{0}}$;	4. $\mathbf{X}+(-\mathbf{X})=\mathbf{0}$;	
5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})=$ $=\lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}+\lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;	5. $\lambda(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=$ $=\lambda\mathbf{X}+\lambda\mathbf{Y}$;	
6. $(\lambda+\mu)\overrightarrow{\mathbf{x}}=$ $=\lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{x}}$;	6. $(\lambda+\mu)\mathbf{X}=$ $=\lambda\mathbf{X}+\mu\mathbf{X}$;	
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{\mathbf{x}}=\lambda(\mu\overrightarrow{\mathbf{x}})$;	7. $(\lambda\mu)\mathbf{X}=\lambda(\mu\mathbf{X})$;	
8. $1\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}}=\overrightarrow{\mathbf{x}}$	8. $1\cdot\mathbf{X}=\mathbf{X}$	

I. Понятие линейного пространства

Мы рассмотрели несколько алгебр, в которых использовалось понятие сложения векторов и умножения вектора на число.

Векторная алгебра	Матричная алгебра	Алгебра многочленов
1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$;	1. $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X}$;	1. $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$;
2. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} =$ $= \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$;	2. $(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z} =$ $= \mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z})$;	2. $(p(x) + q(x)) + r(x) =$ $= p(x) + (q(x) + r(x))$;
3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$;	3. $\mathbf{X} + \mathbf{0} = \mathbf{X}$;	3. $p(x) + 0 = p(x)$;
4. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + (-\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$;	4. $\mathbf{X} + (-\mathbf{X}) = \mathbf{0}$;	4. $p(x) + (-p(x)) = 0$;
5. $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) =$ $= \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{y}}$;	5. $\lambda(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) =$ $= \lambda\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y}$;	5. $\lambda(p(x) + q(x)) =$ $= \lambda p(x) + \lambda q(x)$;
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} =$ $= \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}}$;	6. $(\lambda + \mu)\mathbf{X} =$ $= \lambda\mathbf{X} + \mu\mathbf{X}$;	6. $(\lambda + \mu)p(x) =$ $= \lambda p(x) + \mu p(x)$;
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda(\mu\overrightarrow{\mathbf{x}})$;	7. $(\lambda\mu)\mathbf{X} = \lambda(\mu\mathbf{X})$;	7. $(\lambda\mu)p(x) = \lambda(\mu p(x))$;
8. $1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$	8. $1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$	8. $1 \cdot p(x) = p(x)$

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Формализуем понятие линейного пространства или сразу **перейдем к формулировке?**

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется...

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$; *3)* $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$; *6)* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$; *8)* $1 \cdot x = x$.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется...

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$; *3)* $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$; *6)* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$; *8)* $1 \cdot x = x$.

Мы формулировали **свойства** для:

— множества геометрических векторов (прямой, плоскости или пространства);

— множества матриц размерности $m \times n$;

— многочленов.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$; *3)* $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$; *6)* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$; *8)* $1 \cdot x = x$.

Мы формулировали **свойства** для:

— множества геометрических векторов (прямой, плоскости или пространства);

— множества матриц размерности $m \times n$;

— многочленов.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

В свойствах, помимо элементов x, y, z фигурируют обозначения **операций**.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество

с операциями $+$ *и* $\cdot$

Аксиомы: *1)* $x+y=y+x$; *2)* $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3) $x+\mathbf{0}=x$; *4)* $x+(-x)=\mathbf{0}$; *5)* $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$;
6) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$; *7)* $(\lambda\cdot\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$;
8) $1\cdot x=x$.

В свойствах, помимо элементов x, y, z фигурируют обозначения **операций**.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество с операциями $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Но умножение $\lambda x = \lambda \cdot x$ не является **операцией**, поскольку

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество

с операциями $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x+y=y+x$; *2)* $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3) $x+\mathbf{0}=x$; *4)* $x+(-x)=\mathbf{0}$; *5)* $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$;
6) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$; *7)* $(\lambda\cdot\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$;
8) $1\cdot x=x$.

Но умножение $\lambda x=\lambda\cdot x$ не является **операцией**, поскольку первый сомножитель не является элементом основного множества.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество с операциями $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$; *3)* $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$; *6)* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$; *8)* $1 \cdot x = x$.

Но умножение $\lambda x = \lambda \cdot x$ не является **операцией**, поскольку первый сомножитель не является элементом основного множества.

Кстати, это основное множество надо как-то обозначить, чтобы отличать его от множества, из которого берутся λ.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Но умножение $\lambda x = \lambda \cdot x$ не является **операцией**, поскольку первый сомножитель не является элементом основного множества.

Кстати, это основное множество надо как-то обозначить, чтобы отличать его от множества, из которого берутся λ.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством называется множество U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$; *3)* $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$; *6)* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$; *8)* $1 \cdot x = x$.

Но умножение $\lambda x = \lambda \cdot x$ не является **операцией**, поскольку первый сомножитель не является элементом основного множества.

Считается, что λ — действительное число, но в общем случае λ могут быть элементами других **полей**.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над ***полем*** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Но умножение $\lambda x = \lambda \cdot x$ не является **операцией**, поскольку первый сомножитель не является элементом основного множества.

Считается, что λ — действительное число, но в общем случае λ могут быть элементами других **полей**.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над **полем** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$*;* *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$*;*
3) $x + \mathbf{0} = x$*;* *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$*;* *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$*;*
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$*;* *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$*;*
8) $1 \cdot x = x$*.*

Но умножение $\lambda x = \lambda \cdot x$ не является **операцией**, поскольку первый сомножитель не является элементом основного множества.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над ***полем*** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Применяется два выхода:

— считать это «умножение» так называемой **внешней операцией**;

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над ***полем*** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Применяется два выхода:
— считать это «умножение» так называемой **внешней операцией**;
— считать операцией не $\cdot$, а $\lambda\cdot$, т.е. умножение на скаляр λ.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над **полем** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\underbrace{\cdot}_{?}$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Мы будем считать, что у нас не две операции, а операция сложения векторов линейного пространства U и набор операций $\lambda\cdot$, вообще говоря, различных для разных λ.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над ***полем*** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\lambda\cdot$

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Мы будем считать, что у нас не две операции, а операция сложения векторов линейного пространства U и набор операций $\lambda\cdot$, вообще говоря, различных для разных λ.

I.1. Формализация понятия «линейное пространство»

Линейным пространством над **полем** K *называется множество* U *с операциями* $+$ *и* $\lambda\cdot$.
Об операциях известно лишь, что для них выполняются следующие аксиомы.

Аксиомы: *1)* $x + y = y + x$; *2)* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + \mathbf{0} = x$; *4)* $x + (-x) = \mathbf{0}$; *5)* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$; *7)* $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8) $1 \cdot x = x$.

Звучит как-то коряво...

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем $\mathbf{K}$ — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция $+$ и, для каждого λ из поля $\mathbf{K}$, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ (коммутативность);

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем $\mathbf{K}$ — *это множество* U *(его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция + и, для каждого* λ *из поля* $\mathbf{K}$*, операция* $\lambda\cdot$ *умножения на* λ*, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем K — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция $+$ и, для каждого λ из поля* **K***, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. *$x + y = y + x$ (коммутативность);*
2. *$(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);*
3. *существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого вектора x из U выполняется равенство $x + \mathbf{0} = x$ (существование нулевого вектора);*

Не стоит записывать громоздкую словесную формулировку этой аксиомы...

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем $\mathbf{K}$ — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция $+$ и, для каждого λ из поля $\mathbf{K}$, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \quad \big(x + \mathbf{0} = x\big)$ *(существование нулевого вектора);*

Теперь другое дело...

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем $\mathbf{K}$ — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция $+$ и, для каждого λ из поля $\mathbf{K}$, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \quad \big(x + \mathbf{0} = x\big)$ *(существование нулевого вектора);*
4. *для любого вектора x из U существует вектор $-x$ такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$;*

Опять слишком много слов...

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем K — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция $+$ и, для каждого λ из поля* **K***, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \quad \left(x + \mathbf{0} = x\right)$ *(существование нулевого вектора);* 4. $\forall x \in U \quad \exists (-x) \in U \quad \left(x + (-x) = \mathbf{0}\right)$;

Вот теперь лучше...

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем K — *это множество* U *(его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция + и, для каждого* λ *из поля* $\mathbf{K}$*, операция* $\lambda\cdot$ *умножения на* λ*, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \quad \big(x + \mathbf{0} = x\big)$ *(существование нулевого вектора);*
4. $\forall x \in U \quad \exists (-x) \in U \quad \big(x + (-x) = \mathbf{0}\big)$;
5. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем K — *это множество* U *(его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция* $+$ *и, для каждого* λ *из поля* $\mathbf{K}$*, операция* $\lambda\cdot$ *умножения на* λ*, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \qquad \big(x + \mathbf{0} = x\big)$ *(существование нулевого вектора);*
4. $\forall x \in U \quad \exists(-x) \in U \qquad \big(x + (-x) = \mathbf{0}\big)$;
5. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем K — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция + и, для каждого λ из поля* **K***, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \quad \big(x + \mathbf{0} = x\big)$ *(существование нулевого вектора);*
4. $\forall x \in U \quad \exists(-x) \in U \quad \big(x + (-x) = \mathbf{0}\big)$;
5. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
7. $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;

I.2. Определение линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство над полем K — *это множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция $+$ и, для каждого λ из поля* **K***, операция $\lambda\cdot$ умножения на λ, причем выполняются следующие 8 соотношений (аксиом линейного пространства):*

1. $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists \mathbf{0} \in U \quad \forall x \in U \quad \big(x + \mathbf{0} = x\big)$ *(существование нулевого вектора);*
4. $\forall x \in U \quad \exists (-x) \in U \quad \big(x + (-x) = \mathbf{0}\big)$;
5. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
6. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
7. $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;
8. $1 \cdot x = x$.

I.3. Предварительные выводы

Во-первых, мы абстрагируемся от конкретной «природы» элементов линейного пространства, получая более абстрактную и универсальную теорию. Любая теорема теории линейных пространств применима к *любому* линейному пространству!

I.3. Предварительные выводы

Во-первых, мы абстрагируемся от конкретной «природы» элементов линейного пространства, получая более абстрактную и универсальную теорию. Любая теорема теории линейных пространств применима к *любому* линейному пространству!

Во-вторых, если мы хотим *применять* эту теорию к конкретному приложению справедливость аксиом линейного пространства для этого множества с рассматриваемыми операциями надо доказывать. Но *«внутри теории»* эти аксиомы считаются истинными по определению.

I.3. Предварительные выводы

Во-первых, мы абстрагируемся от конкретной «природы» элементов линейного пространства, получая более абстрактную и универсальную теорию. Любая теорема теории линейных пространств применима к *любому* линейному пространству!

Во-вторых, если мы хотим *применять* эту теорию к конкретному приложению справедливость аксиом линейного пространства для этого множества с рассматриваемыми операциями надо доказывать. Но *«внутри теории»* эти аксиомы считаются истинными по определению.

Рассмотреть пример?

I.3. Предварительные выводы

Во-первых, мы абстрагируемся от конкретной «природы» элементов линейного пространства, получая более абстрактную и универсальную теорию. Любая теорема теории линейных пространств применима к *любому* линейному пространству!

Во-вторых, если мы хотим *применять* эту теорию к конкретному приложению справедливость аксиом линейного пространства для этого множества с рассматриваемыми операциями надо доказывать. Но *«внутри теории»* эти аксиомы считаются истинными по определению.

В-третьих, указанная «универсальность» теории приводит к некоторым проблемам в создании математического аппарата. Нам нужны формулы для вычисления величин и задания «объектов». Трудно представить себе нетривиальную формулу, которую можно с одинаковым успехом применять и к матрицам, и к многочленам и т.п.

I.3. Предварительные выводы

Поэтому мы весь вычислительный аппарат будем развивать только для одного типа пространств: для так называемого **арифметического линейного пространства** $\mathbb{R}^n$, то есть пространства матриц-столбцов (матриц размерности $n \times 1$). При этом мы разработаем «механизм», с помощью которого задачу для произвольного линейного пространства можно будет «переадресовать» в арифметическое пространство, там мы ее решим с помощью созданного нами вычислительного аппарата, а потом результат с помощью некой стандартной процедуры «переведем» обратно «на историческую родину», на язык исходного линейного пространства. «Механизм», обеспечивающие перевод с языка исходного линейного пространства на язык арифметических линейных пространств и обратно, базируется на понятии изоморфизма, которым мы займемся существенно позднее.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Теорема 1. **[критерий нулевого вектора]** $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Теорема 2. **[об умножении на нуль]** $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

Теорема 3. **[критерий обратного вектора]** $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Теорема 4. **[об умножении на -1]** $(-1) \cdot x = -x$.

Теорема 5. **[об умножении на $(-\lambda)$]** $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Необходимость утверждается в **аксиоме 3**.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Необходимость утверждается в **аксиоме 3**.

Остается доказать достаточность.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Докажем достаточность. Пусть

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$**.**

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$**.**

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$**.**

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

$$= (-x) + (x + y) = (-x) + x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

$$= ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

$$= \mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

$$y = \mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий нулевого вектора: $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\exists x \quad x + y = x)$.

Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

$$y = \mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + x = \mathbf{0}.$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на нуль: $\quad 0 \cdot x = \mathbf{0}$.

$$x + 0 \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на нуль: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на нуль: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на нуль: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на нуль: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на нуль: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

По **критерию нулевого вектора** получаем $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}.$

Достаточность.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}.$

Достаточность. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$(-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$(-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} = (-x).$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} = (-x).$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$\mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} = (-x).$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Необходимость. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$y = \mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} = (-x).$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$**.**

Необходимость. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$y = \mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} = (-x).$$

Таким образом $y = -x$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Критерий обратного вектора: $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$**.**

Необходимость. Пусть $x + y = \mathbf{0}$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$.

$$y = \mathbf{0} + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + \mathbf{0} = (-x).$$

Таким образом $y = -x$.

Достаточность следует из **аксиомы 4**.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на (-1): $\quad (-1)\cdot x = -x$**.**

$$(-1)\cdot x + x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на (-1): $(-1) \cdot x = -x$.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на (-1): $\quad (-1)\cdot x = -x$**.**

$$(-1)\cdot x + x = (-1)\cdot x + 1\cdot x = (-1+1)\cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на (-1): $(-1) \cdot x = -x$.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1+1) \cdot x = 0 \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на (-1): $(-1) \cdot x = -x$**.**

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1+1) \cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0},$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на (-1): $\quad (-1)\cdot x = -x$.

$$(-1)\cdot x + x = (-1)\cdot x + 1\cdot x = (-1+1)\cdot x = 0\cdot x = \mathbf{0},$$

и по **критерию обратного элемента** получаем $(-1)\cdot x = -x$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x).$

Первое доказательство:

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(-x)$.

Первое доказательство: по **аксиоме 7** и **теореме об умножении на** (-1) получаем:

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(-x)$.

Первое доказательство: по **аксиоме 7** и **теореме об умножении на (-1)** получаем:

$$(-\lambda)\cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Первое доказательство: по **аксиоме 7** и **теореме об умножении на** (-1) получаем:

$$(-\lambda) \cdot x = ((-1) \cdot \lambda) \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $(-\lambda)\cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Первое доказательство: по **аксиоме 7** и **теореме об умножении на** (-1) получаем:

$$(-\lambda)\cdot x = ((-1)\cdot\lambda)\cdot x = (-1)\cdot(\lambda\cdot x) =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Первое доказательство: по **аксиоме 7** и **теореме об умножении на** (-1) получаем:

$$(-\lambda)\cdot x = ((-1)\cdot\lambda)\cdot x = (-1)\cdot(\lambda\cdot x) = -(\lambda\cdot x).$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Другое доказательство.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Другое доказательство.

$$(-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(-x)$.

Другое доказательство.

$$(-\lambda)\cdot x + \lambda\cdot x = (-\lambda+\lambda)\cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(-x)$.

Другое доказательство.

$$(-\lambda)\cdot x + \lambda\cdot x = (-\lambda+\lambda)\cdot x = 0\cdot x =$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Другое доказательство.

$$(-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x = (-\lambda + \lambda) \cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0},$$

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Доказательства.

Об умножении на $(-\lambda)$: $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(-x)$.

Другое доказательство.

$$(-\lambda)\cdot x + \lambda\cdot x = (-\lambda+\lambda)\cdot x = 0\cdot x = \mathbf{0},$$

и по **критерию обратного элемента** получаем $-(\lambda\cdot x) = (-\lambda)\cdot x$.

I.4. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Замечание 1. *Весьма вероятно, что вы не оценили в достаточной мере значение критерия нулевого вектора и критерия обратного вектора. На самом деле однозначность выбора каждого из этих векторов означает, что мы можем рассматривать в линейном пространстве еще две «вторичных» операции: нульместную операцию (константу) «нулевой вектор» и одноместную операцию «взятие обратного вектора».*

I.5. Выберем направления исследований линейных пространств

Понятие линейного пространства является результатом абстрагирования и обобщения, дальнейшее движение по этому пути в данный момент будет весьма затруднительным. Изучение особенностей отдельных векторов линейного пространства и дальнейшее изучение свойств операций также затруднено в связи с тем, что у нас слишком мало информации об этих объектах: неизвестна их природа (мы от нее абстрагировались), конкретный способ задания операции.

I.5. Выберем направления исследований линейных пространств

Изучение объекта означает построение его модели. Следовательно, нам необходимо сопоставить линейному пространству некоторое множество. Одним из очевидных вариантов является сопоставление линейному пространству множества векторов, но, видимо, будет затруднительно получить что-либо существенное, кроме рассмотренных выше элементарных теорем теории линейных пространств. В качестве еще одного варианта построения модели можно рассмотреть некоторые подмножества носителя линейного пространства.

I.5. Выберем направления исследований линейных пространств

На рассматриваемом нами этапе развития теории весьма эффективными оказались стратегии «поиска аналогии» и «перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов».

I.5. Выберем направления исследований линейных пространств

В качестве аналогии рассмотрим структуру армейского подразделения. С одной стороны, подразделение состоит из военнослужащих. Однако, с тех пор как подразделения стали достаточно крупными, их стали разделять на более мелкие части, похожие по структуре на исходные: полк подразделяется на батальоны и некоторые другие части, каждый батальон — на роты и т.д. Другой вариант состоит, например, в выделении групп военнослужащих в соответствии с их воинскими специальностями, или выделение рядового, младшего командного состава и др. В соответствии с этой аналогией один из вариантов продолжения исследования состоит в том, чтобы выбрать подмножества, позволяющие построить объекты, похожие на исходное линейное пространство — этот вариант рассмотрен ниже (алгебра подпространств).

I.5. Выберем направления исследований линейных пространств

Однако рассмотренная аналогия с воинским подразделением в данный момент не является наиболее перспективной. Более естественной является идея обратиться за идеями к рассмотренным примерам линейных пространств. Одним из наиболее эффективных методов решения задач по векторной алгебре является метод координат. Задание вектора строкой его координат в некотором базисе является одним из стандартных способов задания вектора. Такая форма представления вектора позволила применить мощный и эффективный аппарат матричной алгебры, что в немалой степени обусловило успешность координатного метода. Мы попытаемся перенести соответствующие конструкции на случай произвольного линейного пространства.

I.5. Выберем направления исследований линейных пространств

В основе этого аппарата лежит следующая идея: в линейном пространстве мы находим некоторые «элементарные кирпичики», из которых с помощью «стандартных процедур» строятся интересующие нас «объекты». В качестве «элементарных кирпичиков» естественно взять некоторые векторы линейного пространства (в векторной алгебре в этом качестве нередко выступают базисные орты $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$). «Соединительным материалом» для «элементарных кирпичиков» будут, разумеется, операции линейного пространства. Начнем мы с того, что корректно сформулируем общее определение линейной комбинации элементов и линейной функции.

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов u_1, u_2, u_3.

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов $u_1,\ u_2,\ u_3$ из U. Как с их помощью можно «состряпать» произвольный вектор из U?

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов $u_1,\ u_2,\ u_3$ из U. Как с их помощью можно «состряпать» произвольный вектор из U?

Из **определения линейного пространства** следует, что для этого мы можем воспользоваться только операциями $+$, $\lambda\cdot$, процедурой нахождения обратного вектора и нулевым вектором.

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов u_1, u_2, u_3 из U. Как с их помощью можно «состряпать» произвольный вектор из U?

Из **определения линейного пространства** следует, что для этого мы можем воспользоваться только операциями $+$, $\lambda\cdot$, процедурой нахождения обратного вектора и нулевым вектором.

Согласно **теореме об умножении на** (-1) процедура нахождения обратного вектора сводится к умножению на (-1).

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов u_1, u_2, u_3 из U. Как с их помощью можно «состряпать» произвольный вектор из U?

Из **определения линейного пространства** следует, что для этого мы можем воспользоваться только операциями $+$, $\lambda\cdot$, процедурой нахождения обратного вектора и нулевым вектором.

Согласно **теореме об умножении на (-1)** процедура нахождения обратного вектора сводится к умножению на (-1).

В силу **теоремы об умножении на нуль** получение нулевого вектора также сводится к умножению на скаляр (в данном случае, на 0).

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов $u_1,\ u_2,\ u_3$ из U. Мы показали, что для построения с их помощью произвольного вектора из U достаточно использовать только операциями $+$ и $\lambda\cdot$.

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов $u_1,\ u_2,\ u_3$ из U. Мы показали, что для построения с их помощью произвольного вектора из U достаточно использовать только операциями $+$ и $\lambda\cdot$.

Допустим, мы представили некоторый вектор v из U в виде

$$v = (-2)\left(3u_1 - 4u_3\right) + 3\left(u_2 - 5\left(u_3 - u_1\right)\right).$$

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов u_1, u_2, u_3 из U. Мы показали, что для построения с их помощью произвольного вектора из U достаточно использовать только операциями $+$ и $\lambda\cdot$.

Допустим, мы представили некоторый вектор v из U в виде

$$v = (-2)\left(3u_1 - 4u_3\right) + 3\left(u_2 - 5\left(u_3 - u_1\right)\right).$$

Выражение в правой части этого равенства в силу **аксиом линейного пространства** можно упростить:

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов u_1, u_2, u_3 из U. Мы показали, что для построения с их помощью произвольного вектора из U достаточно использовать только операциями $+$ и $\lambda\cdot$.

Допустим, мы представили некоторый вектор v из U в виде

$$v = (-2)\,(3u_1 - 4u_3) + 3\,(u_2 - 5\,(u_3 - u_1))\,.$$

Выражение в правой части этого равенства в силу **аксиом линейного пространства** можно упростить:

$$v = -6u_1 + 8u_3 + 3u_2 - 15u_3 + 15u_1 \quad \Rightarrow$$

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов $u_1,\ u_2,\ u_3$ из U. Мы показали, что для построения с их помощью произвольного вектора из U достаточно использовать только операциями $+$ и $\lambda\cdot$.

Допустим, мы представили некоторый вектор v из U в виде

$$v = (-2)\,(3u_1 - 4u_3) + 3\,(u_2 - 5\,(u_3 - u_1))\,.$$

Выражение в правой части этого равенства в силу **аксиом линейного пространства** можно упростить:

$$v = -6u_1 + 8u_3 + 3u_2 - 15u_3 + 15u_1 \quad \Rightarrow \quad v = 9u_1 + 3u_2 - 7u_3.$$

II. Линейная комбинация векторов

Для создания правил выбора «элементарных кирпичиков», применим **стратегию предвкушения**.

Допустим, что мы уже выбрали набор «элементарных кирпичиков», например, систему векторов u_1, u_2, u_3 из U. Мы показали, что для построения с их помощью произвольного вектора из U достаточно использовать только операциями $+$ и $\lambda\cdot$.

Допустим, мы представили некоторый вектор v из U в виде

$$v = (-2)\,(3u_1 - 4u_3) + 3\,(u_2 - 5\,(u_3 - u_1))\,.$$

Выражение в правой части этого равенства в силу **аксиом линейного пространства** можно упростить:

$$v = -6u_1 + 8u_3 + 3u_2 - 15u_3 + 15u_1 \quad \Rightarrow \quad v = 9u_1 + 3u_2 - 7u_3.$$

Таким образом, наиболее интересны выражения вида $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$.

II. Линейная комбинация векторов

Определение 2. *Пусть* U *— линейное пространство над* ***полем*** K. **Линейной комбинацией** *элементов* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *линейного пространства* U *с коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *из* K *называется выражение*

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m.$$

II.1. Однозначность разложения

Тот факт, что разложение вектора v является однозначным, означает, что

II.1. Однозначность разложения

Тот факт, что разложение вектора v является однозначным, означает, что

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow$$

II.1. Однозначность разложения

Тот факт, что разложение вектора v является однозначным, означает, что

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

II.1. Однозначность разложения

Тот факт, что разложение вектора v является однозначным, означает, что

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом, однозначность разложения вектора v означает, что

II.1. Однозначность разложения

Тот факт, что разложение вектора v является однозначным, означает, что

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом, однозначность разложения вектора v означает, что

$$\underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{\lambda_1} \cdot u_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_m - \beta_m)}_{\lambda_m} \cdot u_m = \mathbf{0} \;\Rightarrow$$

II.1. Однозначность разложения

Тот факт, что разложение вектора v является однозначным, означает, что

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом, однозначность разложения вектора v означает, что

$$\underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{\lambda_1} \cdot u_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_m - \beta_m)}_{\lambda_m} \cdot u_m = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 - \beta_1}_{\lambda_1} = 0; \\ \ldots \\ \underbrace{\alpha_m - \beta_m}_{\lambda_m} = 0. \end{cases}$$

II.1. Однозначность разложения

Значит, формулировка однозначности разложения

$$\underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{\lambda_1} \cdot u_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_m - \beta_m)}_{\lambda_m} \cdot u_m = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 - \beta_1}_{\lambda_1} = 0; \\ \ldots \\ \underbrace{\alpha_m - \beta_m}_{\lambda_m} = 0. \end{cases}$$

приводит к формуле

II.1. Однозначность разложения

Значит, формулировка однозначности разложения

$$\underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{\lambda_1} \cdot u_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_m - \beta_m)}_{\lambda_m} \cdot u_m = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 - \beta_1}_{\lambda_1} = 0; \\ \ldots \\ \underbrace{\alpha_m - \beta_m}_{\lambda_m} = 0. \end{cases}$$

приводит к формуле

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m = \mathbf{0} \;\Rightarrow$$

II.1. Однозначность разложения

Значит, формулировка однозначности разложения

$$\underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{\lambda_1} \cdot u_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_m - \beta_m)}_{\lambda_m} \cdot u_m = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 - \beta_1}_{\lambda_1} = 0; \\ \ldots \\ \underbrace{\alpha_m - \beta_m}_{\lambda_m} = 0. \end{cases}$$

приводит к формуле

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 0; \\ \ldots \\ \lambda_m = 0. \end{cases} \tag{2}$$

II.1. Однозначность разложения

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0; \\ \ldots \\ \lambda_m = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Как мы увидим, если хотя бы для одного вектора v разложение не является однозначным, то неоднозначным будет и разложение всех векторов линейного пространства.

II.1. Однозначность разложения

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0; \\ \ldots \\ \lambda_m = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Как мы увидим, если хотя бы для одного вектора v разложение не является однозначным, то неоднозначным будет и разложение всех векторов линейного пространства.

Поэтому мы в основу создаваемого понятийного аппарата положим **формулу (2),** на основании которой мы сформулируем определение *линейно независимой системы векторов.*

II.1. Однозначность разложения

$$\begin{cases} v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_m \cdot u_m; \\ v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_m \cdot u_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1; \\ \alpha_2 = \beta_2; \\ \ldots \\ \alpha_m = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0; \\ \ldots \\ \lambda_m = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В дальнейшем, как это принято в теории линейных пространств, мы будем использовать вместо словосочетания *подмножество векторов* термин **система векторов**. В некоторых источниках в этом же смысле используется слово «семейство».

II.2. Линейная зависимость II.2. Линейная зависимость

Определение 3. *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно независимой** *(сокращенно* **ЛНС***) тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

т.е. справедлива ***формула (2)****.*

Мы считаем, что при задании множества списком элементов все элементы списка попарно различны, то есть

$$\begin{cases} \{p, q\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\} \\ p \neq q \end{cases} \Rightarrow a_p \neq a_q.$$

II.2. Линейная зависимость

Определение 3. *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно независимой** *(сокращенно* **ЛНС***) тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

т.е. справедлива ***формула (2)***.

В противном случае система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ называется **линейно зависимой**.

II.2. Линейная зависимость

Определение 3. *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно независимой** *(сокращенно* **ЛНС***) тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

т.е. справедлива ***формула (2)***.

В противном случае система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ называется **линейно зависимой**. Это определение носит «негативный характер» (если не ..., тогда ...). Мы дадим «позитивное» определение линейно независимой системы векторов:

II.2. Линейная зависимость

Определение 4. *Система векторов*[1] $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно зависимой** *тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *поля* $\mathbf{K}$, *не все равные 0, что имеет место равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

Рассмотреть пример?

[1] Все a_k попарно различны.

II.2. Линейная зависимость

Определение 4. *Система векторов*[1] $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно зависимой** *тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *поля* $\mathbf{K}$*, не все равные 0, что имеет место равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

Во многих областях науки, использующих аппарат линейной алгебры, определяется понятие линейно независимой системы векторов для бесконечных систем векторов (например, в функциональном анализе, теории рядов Фурье).

[1] Все a_k попарно различны.

II.2. Линейная зависимость

Определение 4. *Система векторов*[1] $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно зависимой** *тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *поля* $\mathbf{K}$, *не все равные 0, что имеет место равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

Во многих областях науки, использующих аппарат линейной алгебры, определяется понятие линейно независимой системы векторов для бесконечных систем векторов (например, в функциональном анализе, теории рядов Фурье). Обычно в этом случае определяется понятие *суммы бесконечного числа векторов*.

[1] Все a_k попарно различны.

II.2. Линейная зависимость

Определение 4. *Система векторов*[1] $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* U *над* ***полем*** $\mathbf{K}$ *называется* **линейно зависимой** *тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *поля* $\mathbf{K}$, *не все равные 0, что имеет место равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

Во многих областях науки, использующих аппарат линейной алгебры, определяется понятие линейно независимой системы векторов для бесконечных систем векторов (например, в функциональном анализе, теории рядов Фурье). Обычно в этом случае определяется понятие *суммы бесконечного числа векторов*. Корректное введение такого понятия требует владения аппаратом топологии, поэтому мы не будем в рамках этой главы углубляться в данную тему.

[1] Все a_k попарно различны.

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство.

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.*

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является **линейно зависимой** тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является **линейной комбинацией** остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима.

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима. Надо доказать, что ?????

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима. Надо доказать, что один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является **линейно зависимой** тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является **линейной комбинацией** остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима. Надо доказать, что один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. По определению линейной зависимости получаем, что

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима. Надо доказать, что один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. По определению линейной зависимости получаем, что для некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ имеет место равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0},$$

причем

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима. Надо доказать, что один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. По определению линейной зависимости получаем, что для некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ имеет место равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0},$$

причем один из коэффициентов λ_s отличен от нуля.

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_s \neq 0.$$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_s \neq 0.$$

Тогда

$$a_s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_s} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_s} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s} a_{s-1} - \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} a_{s+1} - \ldots - \frac{\lambda_i}{\lambda_k} a_k,$$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_s \neq 0.$$

Тогда

$$a_s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_s} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_s} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s} a_{s-1} - \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} a_{s+1} - \ldots - \frac{\lambda_i}{\lambda_k} a_k,$$

т.е., полагая $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_s}$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_s \neq 0.$$

Тогда

$$a_s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_s} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_s} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s} a_{s-1} - \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} a_{s+1} - \ldots - \frac{\lambda_i}{\lambda_k} a_k,$$

т.е., полагая $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_s}$

$$a_s = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_{s-1} a_{s-1} + \mu_{s+1} a_{s+1} + \ldots + \mu_k a_k.$$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.*

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если
$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \lambda_{t+2} a_{t+2} +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \lambda_{t+2} a_{t+2} + \lambda_{t+3} a_{t+3} +$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если

$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k,$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если
$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k$,
то (перенося a_t в правую часть)

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + (-1) \cdot a_t + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если
$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k$,
то (перенося a_t в правую часть)

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot a_t + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

В этом разложении коэффициент перед вектором a_t отличен от 0, поэтому

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является* ***линейно зависимой*** *тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является* ***линейной комбинацией*** *остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если
$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k$,
то (перенося a_t в правую часть)

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot a_t + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

В этом разложении коэффициент перед вектором a_t отличен от 0, поэтому система $\{a_1, \ldots, a_k\}$ линейно зависима,

II.3. Критерий линейной зависимости

Теорема 6. *Система векторов является **линейно зависимой** тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является **линейной комбинацией** остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если
$a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k,$
то (перенося a_t в правую часть)

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot a_t + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

В этом разложении коэффициент перед вектором a_t отличен от 0, поэтому система $\{a_1, \ldots, a_k\}$ линейно зависима, что и требовалось доказать.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.1: о линейной зависимости системы с нулем. Система векторов, содержащая нулевой вектор, **линейно зависима**.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.1: о линейной зависимости системы с нулем. Система векторов, содержащая нулевой вектор, **линейно зависима**.

Св.2 о независимости подсистемы. Если система векторов является **линейно независимой**, то любая ее подсистема также линейно независима.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.1: о линейной зависимости системы с нулем. Система векторов, содержащая нулевой вектор, **линейно зависима**.

Св.2 о независимости подсистемы. Если система векторов является **линейно независимой**, то любая ее подсистема также линейно независима.

Св.3 о зависимости надсистемы. Если подсистема векторов $\mathcal{B}$ системы векторов $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, то и $\mathcal{A}$ — линейно зависимая система векторов.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.1: о линейной зависимости системы с нулем. Система векторов, содержащая нулевой вектор, **линейно зависима**.

Св.2 о независимости подсистемы. Если система векторов является **линейно независимой**, то любая ее подсистема также линейно независима.

Св.3 о зависимости надсистемы. Если подсистема векторов $\mathcal{B}$ системы векторов $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, то и $\mathcal{A}$ — линейно зависимая система векторов.

Св.4 об однозначности разложения по ЛНС. Если $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов** и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где $u_k \in \mathcal{A}$, — разложение вектора x в линейную комбинацию **попарно различных векторов** из $\mathcal{A}$, то коэффициенты λ_k **определяются однозначно**.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св1: о линейной зависимости системы с нулем. *Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{\mathbf{0}, a, b, \ldots, c\}$. Тогда в линейной комбинации векторов $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot a + 0 \cdot b + \ldots + 0 \cdot c = \mathbf{0}$ не все коэффициенты нулевые (перед $\mathbf{0}$ стоит коэффициент 1).

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св2: о независимости подсистемы. *Если система векторов является **линейно независимой**, то любая ее подсистема также **линейно независима**.*

Св.3: о зависимости надсистемы. *Если подсистема векторов $\mathcal{B}$ системы векторов $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, то и $\mathcal{A}$ — линейно зависимая система векторов.*

Доказательство.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св2: о независимости подсистемы. *Если система векторов является **линейно независимой**, то любая ее подсистема также **линейно независима**.*

Св.3: о зависимости надсистемы. *Если подсистема векторов $\mathcal{B}$ системы векторов $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, то и $\mathcal{A}$ — линейно зависимая система векторов.*

Доказательство. Доказываем от противного, «продолжаем» комбинацию, дающую $\mathbf{0}$, умножая векторы надсистемы на 0. И все!!!

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.4.: об однозначности разложения по ЛНС. *Если $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов** и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где $u_k \in \mathcal{A}$, — разложение вектора x в линейную комбинацию попарно различных векторов из $\mathcal{A}$, то коэффициенты λ_k определяются однозначно.*

Доказательство. Мы опустим «генерацию доказательства», приведем только результат — оформленное доказательство. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \ \Rightarrow$$

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.4.: об однозначности разложения по ЛНС. *Если $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов** и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где $u_k \in \mathcal{A}$, — разложение вектора x в линейную комбинацию попарно различных векторов из $\mathcal{A}$, то коэффициенты λ_k определяются однозначно.*

Доказательство. Мы опустим «генерацию доказательства», приведем только результат — оформленное доказательство. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, u_k = \mathbf{0}.$$

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.4.: об однозначности разложения по ЛНС. *Если* $\mathcal{A}$ *—* ***линейно независимая система векторов*** *и* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, *где* $u_k \in \mathcal{A}$, *— разложение вектора* x *в линейную комбинацию попарно различных векторов из* $\mathcal{A}$, *то коэффициенты* λ_k *определяются однозначно.*

Доказательство. Мы опустим «генерацию доказательства», приведем только результат — оформленное доказательство. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, u_k = \mathbf{0}.$$

Так как $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов**, то все коэффициенты в этом разложении равны 0.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.4.: об однозначности разложения по ЛНС. *Если* $\mathcal{A}$ — ***линейно независимая система векторов*** *и* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, *где* $u_k \in \mathcal{A}$, — *разложение вектора* x *в линейную комбинацию попарно различных векторов из* $\mathcal{A}$, *то коэффициенты* λ_k *определяются однозначно.*

Доказательство. Мы опустим «генерацию доказательства», приведем только результат — оформленное доказательство. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, u_k = \mathbf{0}.$$

Так как $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов**, то все коэффициенты в этом разложении равны 0.

Следовательно, $\lambda_k - \mu_k = 0$, т.е.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.4.: об однозначности разложения по ЛНС. *Если* $\mathcal{A}$ *—* ***линейно независимая система векторов*** *и* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$*, где* $u_k \in \mathcal{A}$*, — разложение вектора* x *в линейную комбинацию попарно различных векторов из* $\mathcal{A}$*, то коэффициенты* λ_k *определяются однозначно.*

Доказательство. Мы опустим «генерацию доказательства», приведем только результат — оформленное доказательство. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, u_k = \mathbf{0}.$$

Так как $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов**, то все коэффициенты в этом разложении равны 0.

Следовательно, $\lambda_k - \mu_k = 0$, т.е. $\lambda_k = \mu_k$.

II.4. Свойства ЛЗ и НЛЗ векторов

Св.4.: об однозначности разложения по ЛНС. *Если $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов** и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где $u_k \in \mathcal{A}$, — разложение вектора x в линейную комбинацию попарно различных векторов из $\mathcal{A}$, то коэффициенты λ_k определяются однозначно.*

Доказательство. Мы опустим «генерацию доказательства», приведем только результат — оформленное доказательство. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, u_k = \mathbf{0}.$$

Так как $\mathcal{A}$ — **линейно независимая система векторов**, то все коэффициенты в этом разложении равны 0.

Следовательно, $\lambda_k - \mu_k = 0$, т.е. $\lambda_k = \mu_k$. Свойство доказано.

III. Базис

Цель данного раздела — поиск такой системы векторов, с помощью которой можно было бы **однозначно** представлять все остальные вектора пространства. Образно говоря, мы найдем «набор базисных элементов», из которых все остальные элементы (вектора) линейного пространства можно будет получать с помощью какой-либо стандартной процедуры. В качестве такой процедуры естественно взять линейную комбинацию «базисных элементов». Осталось определить, какой набор векторов можно взять в качестве «набора базисных элементов», изучить их свойства, в частности, выяснить, сколько таких «наборов базисных элементов».

III. Базис

Обычно при определении базиса пользуются одним из двух подходов. С одной стороны, можно за основу взять требование, чтобы любой вектор линейного пространства представлялся в виде линейной комбинации базисных векторов (подход, основанный на определенном ниже понятии «система порождающих элементов»). Тогда в качестве «набора базисных векторов» можно взять *минимальную* систему порождающих элементов. Оказывается, что для минимальности такой системы требуется только ее линейная независимость.

III. Базис

С другой стороны, можно основываться на требовании *однозначности* разложения вектора по базисным векторам, тогда в качестве «набора базисных векторов» следует брать *максимальные* **линейно независимые системы векторов** линейного пространства. Один из основных результатов состоит в том, что оба эти подхода приводят к одному и тому же результату. «Бог хитер, но не зловреден».

III. Базис

Определение 5. *Система векторов* B ***линейного пространства*** U *называется* **системой порождающих векторов** *или* **системой порождающих** ***линейного пространства*** U, *если всякий вектор из* U *является* ***линейной комбинацией*** *векторов из* B.

Рассмотрим пример?

III. Базис

Определение 5. *Система векторов* B ***линейного пространства*** U *называется* **системой порождающих векторов** *или* **системой порождающих** ***линейного пространства*** U, *если всякий вектор из* U *является* ***линейной комбинацией*** *векторов из* B.

Определение 6. *Максимальная* ***линейно независимая система векторов*** *линейного пространства* U, *если такая существует, называется* **базой** *линейного пространства* U.

III. Базис

Определение 5. *Система векторов* B ***линейного пространства*** U *называется* **системой порождающих векторов** *или* **системой порождающих** ***линейного пространства*** U, *если всякий вектор из* U *является* ***линейной комбинацией*** *векторов из* B.

Определение 6. *Максимальная* ***линейно независимая система векторов*** *линейного пространства* U, *если такая существует, называется* **базой** *линейного пространства* U.

Иными словами, система векторов $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ линейного пространства U называется **базой**, если, во-первых, система **Б** **линейно независима** и, во-вторых, при добавлении в эту систему хотя бы одного вектора линейного пространства U, не принадлежащего системе **Б**, полученная система становится линейно зависимой.

III. Базис

Отметим, что часто наряду с термином *база* в этом же смысле используется термин *базис*. Мы, однако, обычно будем использовать термин «базис» в несколько другом смысле, а именно, в смысле *упорядоченной* системы векторов.

III. Базис

Определение 7. *Упорядоченная* ***база векторов линейного пространства*** U *называется* **базисом** *линейного пространства* U.

III. Базис

Определение 7. *Упорядоченная* ***база векторов линейного пространства*** U *называется* **базисом** *линейного пространства* U.

В дальнейшем мы будем базис и базу записывать одинаковым образом: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, при этом в случае, когда речь идет о базисе, будем предполагать, что порядок следования векторов существенен (в нарушение обычного правила задания множества списком элементов). Кроме того, мы будем всегда предполагать (кроме специально оговоренных случаев), что в таком списке все элементы ***попарно различны***.

III. Базис

Определение 7. *Упорядоченная* ***база векторов линейного пространства*** *U называется* **базисом** *линейного пространства U.*

В дальнейшем мы будем базис и базу записывать одинаковым образом: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, при этом в случае, когда речь идет о базисе, будем предполагать, что порядок следования векторов существенен (в нарушение обычного правила задания множества списком элементов). Кроме того, мы будем всегда предполагать (кроме специально оговоренных случаев), что в таком списке все элементы ***попарно различны***[2].

Посмотреть примеры?

[2]то есть $\begin{cases} \{p, q\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ p \neq q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e_p \neq e_q.$

III. Базис

Определение 7. *Упорядоченная* ***база векторов линейного пространства*** *U называется* **базисом** *линейного пространства U.*

Оказывается, как мы сейчас увидим, если база существует, то базу и базис (если порядок «перечисления» векторов существенен) можно взять в качестве набора основных «кирпичиков», из которых «строится» (притом однозначным образом!) любой вектор этого линейного пространства. Основой для такого утверждения являются следующие две теоремы.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* Б *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. Б — ***линейно независимая система***;
2. Б *является* ***системой порождающих*** *для* U, *то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* Б.

Доказательство.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства U является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** *—* ***линейно независимая система****;*

2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для U, то есть всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б***.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Необходимость.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** – ***линейно независимая система***;
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для* U, *то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
Необходимость. Возьмем произвольный вектор x из U.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** — ***линейно независимая система****;*
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для* U*, то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б***.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Необходимость. Возьмем произвольный вектор x из U. Тогда $\{e_1, \ldots, e_n, x\}$ — линейно зависимая система векторов (в силу максимальности **Б**).

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** — ***линейно независимая система****;*

2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для* U*, то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б***.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Необходимость. Возьмем произвольный вектор x из U. Тогда $\{e_1, \ldots, e_n, x\}$ — линейно зависимая система векторов (в силу максимальности **Б**). Поэтому для подходящих элементов поля $\mathbf{K}$ имеем $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \mu x = \mathbf{0}$, и не все коэффициенты равны 0.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** — ***линейно независимая система***;
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для* U, *то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Необходимость. Если бы в выражении $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \mu x = \mathbf{0}$ было бы $\mu = 0$, то **Б** было бы линейно зависимой системой, следовательно, $\mu \neq 0$.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства U является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** — ***линейно независимая система***;
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для U, то есть всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Необходимость. Если бы в выражении $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \mu x = \mathbf{0}$ было бы $\mu = 0$, то **Б** было бы линейно зависимой системой, следовательно, $\mu \neq 0$. Значит, x является линейной комбинацией векторов из **Б**:

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** *—* ***линейно независимая система****;*
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для* U*, то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б***.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Необходимость. Если бы в выражении $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \mu x = \mathbf{0}$ было бы $\mu = 0$, то **Б** было бы линейно зависимой системой, следовательно, $\mu \neq 0$. Значит, x является линейной комбинацией векторов из **Б**: $x = \left(-\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right) e_1 + \ldots + \left(-\dfrac{\lambda_n}{\mu}\right) e_n$

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства* U *является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** – ***линейно независимая система***;
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для* U, *то есть всякий вектор пространства* U *представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. Пусть **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Достаточность.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства U является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** — ***линейно независимая система***;
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для U, то есть всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Достаточность. Тот факт, что **Б** — максимальная **линейно независимая система** — очевиден, поскольку всякий другой вектор выражается через векторы из **Б**.

III.1. Теорема о линейных комбинациях базисных векторов

Теорема 7. *Конечная упорядоченная система* **Б** *векторов пространства U является* ***базисом*** *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. **Б** — ***линейно независимая система***;
2. **Б** *является* ***системой порождающих*** *для U, то есть всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Достаточность. Тот факт, что **Б** — максимальная **линейно независимая система** — очевиден, поскольку всякий другой вектор выражается через векторы из **Б**.

Теорема доказана.

III.2. Полная система векторов

Определение 8. *Пусть* V *— подмножество носителя линейного пространства* $\langle U, \mathcal{F} \rangle$*, то есть* $V \subseteq U$*. Тогда говорят, что система* W *векторов из* V *является* **полной в** V *тогда и только тогда, когда любой вектор из* V *является линейной комбинацией векторов системы* W*. Если* $V = U$*, то говорят, что система* W *полна (не уточняя, что во всем* U*).*

В частности, **теорема о линейных комбинациях базисных векторов** говорит о том, что система векторов является базисом тогда и только тогда, когда она **линейно независима** и полна.

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно****.*

Доказательство.

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Это следствие из свойства Св.4. Воспроизведем доказательство для данного случая.

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Это следствие из свойства Св.4. Воспроизведем доказательство для данного случая.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, и $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$.
Надо доказать, что

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Это следствие из свойства Св.4. Воспроизведем доказательство для данного случая.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, и $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$.
Надо доказать, что $\lambda_n = \mu_n$.

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Это следствие из свойства Св.4. Воспроизведем доказательство для данного случая.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, и $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$.
Надо доказать, что $\lambda_n = \mu_n$. Но

$$\mathbf{0} = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n - (\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n) = (\lambda_1 - \mu_1) e_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) e_n.$$

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно***.

Доказательство. Это следствие из свойства Св.4. Воспроизведем доказательство для данного случая.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, и $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$.
Надо доказать, что $\lambda_n = \mu_n$. Но

$$\mathbf{0} = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n - (\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n) = (\lambda_1 - \mu_1) e_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) e_n.$$

Так как **Б** – базис, то это **линейно независимая система векторов**, следовательно все коэффициенты в последнем выражении нулевые: $\lambda_1 - \mu_1 = \ldots = \lambda - \mu_n = 0$.

III.3. Теорема о единственности разложения по базису

Теорема 8. *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются* ***однозначно****.*

Доказательство. Это следствие из свойства Св.4. Воспроизведем доказательство для данного случая.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U, и $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$.
Надо доказать, что $\lambda_n = \mu_n$. Но

$$\mathbf{0} = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n - (\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n) = (\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)e_n.$$

Так как **Б** – базис, то это **линейно независимая система векторов**, следовательно все коэффициенты в последнем выражении нулевые: $\lambda_1 - \mu_1 = \ldots = \lambda - \mu_n = 0$. Таким образом $\lambda_i = \mu_i$, что и требовалось доказать.

III.4. Координаты вектора

Определение 9. *Если* **Б** $= \{e_1, \dots, e_n\}$ *— базис линейного пространства* U, *то для любого вектора* x *из* U *коэффициенты* λ_i *разложения вектора* x *по базису* **Б** *называются* **координатами** *вектора* x *в базисе* **Б**. *При этом* *столбец координат* *вектора* x *в базисе* **Б** *будем обозначать через* $[x]_{\text{Б}}$.

III.4. Координаты вектора

Определение 9. *Если* $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *— базис линейного пространства* U*, то для любого вектора* x *из* U *коэффициенты* λ_i *разложения вектора* x *по базису* $\mathbf{Б}$ *называются* **координатами** *вектора* x *в базисе* $\mathbf{Б}$*. При этом* <u>*столбец координат*</u> *вектора* x *в базисе* $\mathbf{Б}$ *будем обозначать через* $[x]_{\mathbf{Б}}$*.*

Внимание! Это важно!

Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$ вектора x в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$ определяется следующим образом:

III.4. Координаты вектора

Определение 9. *Если* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис линейного пространства* U*, то для любого вектора* x *из* U *коэффициенты* λ_i *разложения вектора* x *по базису* $\mathbf{Б}$ *называются* **координатами** *вектора* x *в базисе* $\mathbf{Б}$*. При этом столбец координат вектора* x *в базисе* $\mathbf{Б}$ *будем обозначать через* $[x]_{\mathbf{Б}}$*.*

Внимание! Это важно!

Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$ вектора x в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ определяется следующим образом:

$$[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n. \tag{3}$$

Посмотреть примеры?

III.5. Размерность

Определение 10. *Говорят, что система векторов* $\mathcal{A}$ **линейно выражается**[3] *через систему векторов* $\mathcal{B}$*, если всякий вектор из* $\mathcal{A}$ *представим в виде линейной комбинации векторов из* $\mathcal{B}$*. Символически это записывается так:* $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$.

Рассмотрим пример?

[3] По поводу линейной алгебры выражайтесь, пожалуйста, линейно!

III.5. Размерность

Определение 10. *Говорят, что система векторов* $\mathcal{A}$ **линейно выражается**[4] *через систему векторов* $\mathcal{B}$*, если всякий вектор из* $\mathcal{A}$ *представим в виде линейной комбинации векторов из* $\mathcal{B}$*. Символически это записывается так:* $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$*.*

Лемма 1. [о транзитивности отношения $\dashv$] *Если система* $\mathcal{A}$ *линейно выражается через* $\mathcal{B}$*, которая, в свою очередь, линейно выражается через* $\mathcal{C}$*, то система* $\mathcal{A}$ *линейно выражается через* $\mathcal{C}$*. Иными словами, из* $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$ *и* $\mathcal{B} \dashv \mathcal{C}$ *следует, что* $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$*.*

Доказательство.

[4] По поводу линейной алгебры выражайтесь, пожалуйста, линейно!

III.5. Размерность

Лемма 1. [о транзитивности отношения $\dashv$] *Если система $\mathcal{A}$ линейно выражается через $\mathcal{B}$, которая, в свою очередь, линейно выражается через $\mathcal{C}$, то система $\mathcal{A}$ линейно выражается через $\mathcal{C}$. Иными словами, из $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \dashv \mathcal{C}$ следует, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}$. По условию найдутся такие векторы $b_1, \ldots b_p$ из $\mathcal{B}$ и такие элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ поля K, что

$$a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_p b_p.$$

III.5. Размерность

Лемма 1. [о транзитивности отношения $\dashv$] *Если система $\mathcal{A}$ линейно выражается через $\mathcal{B}$, которая, в свою очередь, линейно выражается через $\mathcal{C}$, то система $\mathcal{A}$ линейно выражается через $\mathcal{C}$. Иными словами, из $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \dashv \mathcal{C}$ следует, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}$. По условию найдутся такие векторы $b_1, \ldots b_p$ из $\mathcal{B}$ и такие элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ поля K, что

$$a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_p b_p.$$

Далее, так как $\mathcal{B} \dashv \mathcal{C}$, то найдутся такие векторы

$$c_{11}, \ldots, c_{1q_1}, c_{21}, \ldots, c_{2q_2}, \ldots, c_{p1}, \ldots, c_{pq_p},$$

III.5. Размерность

Доказательство.

$$a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_p b_p.$$

Так как $\mathcal{B} \dashv \mathcal{C}$, то найдутся такие векторы

$$c_{11}, \ldots, c_{1q_1}, c_{21}, \ldots, c_{2q_2}, \ldots, c_{p1}, \ldots, c_{pq_p},$$

что

$$\begin{cases} b_1 = \mu_{11} c_{11} + \ldots + \mu_{1q_1} c_{1q_1} = \sum\limits_{k=1}^{q_1} \mu_{1k} c_{1k} \\ b_2 = \mu_{21} c_{21} + \ldots + \mu_{2q_1} c_{2q_2} = \sum\limits_{k=1}^{q_2} \mu_{2k} c_{2k} \\ \ldots \\ b_p = \mu_{p1} c_{p1} + \ldots + \mu_{pq_1} c_{pq_p} = \sum\limits_{k=1}^{q_p} \mu_{pk} c_{pk} \end{cases}$$

III.5. Размерность

Доказательство.

$$a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_p b_p.$$

$$\begin{cases} b_1 = \mu_{11}c_{11} + \ldots + \mu_{1q_1}c_{1q_1} = \sum\limits_{k=1}^{q_1} \mu_{1k}c_{1k} \\ b_2 = \mu_{21}c_{21} + \ldots + \mu_{2q_1}c_{2q_2} = \sum\limits_{k=1}^{q_2} \mu_{2k}c_{2k} \\ \ldots \\ b_p = \mu_{p1}c_{p1} + \ldots + \mu_{pq_1}c_{pq_p} = \sum\limits_{k=1}^{q_p} \mu_{pk}c_{pk} \end{cases}$$

Следовательно,

$$a = \lambda_1 \sum_{k=1}^{q_1} \mu_{1k}c_{1k} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{q_2} \mu_{2k}c_{2k} + \ldots + \lambda_p \sum_{k=1}^{q_p} \mu_{pk}c_{pk}.$$

III.5. Размерность

Доказательство.

$$a = \lambda_1 \sum_{k=1}^{q_1} \mu_{1k} c_{1k} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{q_2} \mu_{2k} c_{2k} + \ldots + \lambda_p \sum_{k=1}^{q_p} \mu_{pk} c_{pk}.$$

Таким образом, любой вектор из $\mathcal{A}$ является линейной комбинацией векторов из $\mathcal{C}$. Таким образом, по определению, $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$, что и требовалось доказать.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Доказательство. Мы приведем два доказательства этой теоремы. Первое, в нашем случае, является более строгим, а второе опирается на результат, «почти доказанный» нами.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$*, то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Заметим, что не все λ_k равны 0, поскольку иначе получили бы, что $x = \sum_{k=0}^{m} 0 \cdot b_k = \mathbf{0}$, что противоречит линейной независимости системы$\mathcal{A}$ и свойству Св.1.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0, причем найдется p такой, что $\begin{cases} \lambda_p \neq 0, \\ b_p \notin \mathcal{A}. \end{cases}$

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\begin{cases} \lambda_p \neq 0, \\ b_p \notin \mathcal{A}. \end{cases}$

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\begin{cases} \lambda_p \neq 0, \\ b_p \notin \mathcal{A}. \end{cases}$ Обозначим через $\mathcal{C}$ систему векторов, полученную из $\mathcal{D}$ заменой вектора b_p на x.

III.6. Теорема Штейница

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\lambda_p \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{C}$ систему векторов, полученную из $\mathcal{D}$ заменой вектора b_p на x.

Нетрудно проверить, что во-первых, $\mathcal{C}$ состоит из m штук векторов,

III.6. Теорема Штейница

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\lambda_p \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{C}$ систему векторов, полученную из $\mathcal{D}$ заменой вектора b_p на x.

Нетрудно проверить, что во-первых, $\mathcal{C}$ состоит из m штук векторов, во-вторых, $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$,

III.6. Теорема Штейница

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\lambda_p \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{C}$ систему векторов, полученную из $\mathcal{D}$ заменой вектора b_p на x.

Нетрудно проверить, что во-первых, $\mathcal{C}$ состоит из m штук векторов, во-вторых, $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$, в-третьих, система $\mathcal{C}$ **линейно независима**,

III.6. Теорема Штейница

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\lambda_p \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{C}$ систему векторов, полученную из $\mathcal{D}$ заменой вектора b_p на x.

Нетрудно проверить, что во-первых, $\mathcal{C}$ состоит из m штук векторов, во-вторых, $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$, в-третьих, система $\mathcal{C}$ **линейно независима**, в-четвертых, число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ больше, чем во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$.

III.6. Теорема Штейница

Первое доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ такую **линейно независимую систему** из m векторов, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{D}$ и число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ — максимальное из возможных. Пусть при этом $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$. Возьмем вектор $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащий $\mathcal{D}$. По условию $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k b_k$. Итак, не все λ_k равны 0. Следовательно, для некоторого номера p имеем $\lambda_p \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{C}$ систему векторов, полученную из $\mathcal{D}$ заменой вектора b_p на x.

Нетрудно проверить, что во-первых, $\mathcal{C}$ состоит из m штук векторов, во-вторых, $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$, в-третьих, система $\mathcal{C}$ **линейно независима**, в-четвертых, число векторов во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ больше, чем во множестве $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$. Но последнее требование противоречит выбору $\mathcal{D}$. Значит, наше предположение $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{D}$ было неверным, то есть $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$. В частности, $n \leq m$, что и требовалось доказать.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если **линейно независимая система векторов** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ линейно выражается через **линейно независимую систему** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, то $n \leq m$.*

Второе доказательство. По условию система $\mathcal{A}$ **линейно независима**, то есть равенство $\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p a_p = \mathbf{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, *то* $n \leq m$.

Второе доказательство. По условию система $\mathcal{A}$ **линейно независима**, то есть равенство $\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p a_p = \mathbf{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Так как $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$, то, по определению отношения $\dashv$, найдутся такие $\alpha_{ij} \in K$, что $a_p = \sum\limits_{q=1}^{m} \alpha_{qp} b_q$.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если **линейно независимая система векторов** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ линейно выражается через **линейно независимую систему** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, то $n \leq m$.*

Второе доказательство. По условию система $\mathcal{A}$ **линейно независима**, то есть равенство $\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p a_p = \mathbf{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Так как $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$, то, по определению отношения $\dashv$, найдутся такие $\alpha_{ij} \in K$, что $a_p = \sum\limits_{q=1}^{m} \alpha_{qp} b_q$. Следовательно, только при нулевых λ_p истинно

$$\mathbf{0} = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \sum_{q=1}^{m} \alpha_{qp} b_q = \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_{qp} \lambda_p \right) b_q.$$

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если **линейно независимая система векторов** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ линейно выражается через **линейно независимую систему** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, то $n \leq m$.*

Второе доказательство. Но $\mathcal{B}$ является **линейно независимой системой**, поэтому

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{n} \alpha_{1p}\lambda_p = 0 \\ \sum\limits_{p=1}^{n} \alpha_{2p}\lambda_p = 0 \\ \ldots \\ \sum\limits_{p=1}^{n} \alpha_{mp}\lambda_p = 0 \end{cases}$$

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если **линейно независимая система векторов** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ линейно выражается через **линейно независимую систему** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, то $n \leq m$.*

Если бы $n > m$, то число неизвестных в этой системе линейных уравнений больше числа уравнений. Пользуясь методом Гаусса, можно показать, что в этом случае такая система уравнений имеет бесконечно много решений.

III.6. Теорема Штейница

Теорема 9. *Если* ***линейно независимая система векторов*** $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *линейно выражается через* ***линейно независимую систему*** $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$*, то* $n \leq m$*.*

Если бы $n > m$, то число неизвестных в этой системе линейных уравнений больше числа уравнений. Пользуясь методом Гаусса, можно показать, что в этом случае такая система уравнений имеет бесконечно много решений. Но из линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}$ следует, что это решение должно быть единственным — нулевым. Полученное (точнее, «почти полученное») противоречие показывает, что наше предположение было неверным, то есть $n \leq m$, что и требовалось доказать.

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* Б_1 *и* Б_2 *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* Б_1 *— конечное множество. Тогда* Б_2 *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* Б_1 *равно количеству векторов в базисе* Б_2*.*

Доказательство. Мы не будем полностью приводить рассуждения этапа «генерации доказательства», а приведем лишь «оформленное доказательство».

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{Б}_1$ *и* $\mathbf{Б}_2$ *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $\mathbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\mathbf{Б}_2$ *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* $\mathbf{Б}_1$ *равно количеству векторов в базисе* $\mathbf{Б}_2$*.*

Доказательство. Мы не будем полностью приводить рассуждения этапа «генерации доказательства», а приведем лишь «оформленное доказательство».

Отметим лишь, что нам надо доказать *равенство* числа векторов в системах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, и мы воспользуемся «информацией о методах доказательства равенства», а именно, докажем, что число векторов в $\mathbf{Б}_1$ не превосходит числа векторов в $\mathbf{Б}_2$, и наоборот.

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{Б}_1$ *и* $\mathbf{Б}_2$ *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $\mathbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\mathbf{Б}_2$ *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* $\mathbf{Б}_1$ *равно количеству векторов в базисе* $\mathbf{Б}_2$*.*

Доказательство. По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** любой вектор из U является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_1$. В частности, любой вектор из $\mathbf{Б}_2$ является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_1$, т.е. $\mathbf{Б}_2 \dashv \mathbf{Б}_1$.

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{Б}_1$ *и* $\mathbf{Б}_2$ *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U, *причем* $\mathbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\mathbf{Б}_2$ *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* $\mathbf{Б}_1$ *равно количеству векторов в базисе* $\mathbf{Б}_2$.

Доказательство. По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** любой вектор из U является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_1$. В частности, любой вектор из $\mathbf{Б}_2$ является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_1$, т.е. $\mathbf{Б}_2 \dashv \mathbf{Б}_1$.

По **теореме Штейница** число векторов в системе $\mathbf{Б}_1$ не меньше, чем в системе $\mathbf{Б}_2$.

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{Б}_1$ *и* $\mathbf{Б}_2$ *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $\mathbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\mathbf{Б}_2$ *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* $\mathbf{Б}_1$ *равно количеству векторов в базисе* $\mathbf{Б}_2$*.*

Доказательство. По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** любой вектор из U является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_1$. В частности, любой вектор из $\mathbf{Б}_2$ является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_1$, т.е. $\mathbf{Б}_2 \dashv \mathbf{Б}_1$.

По **теореме Штейница** число векторов в системе $\mathbf{Б}_1$ не меньше, чем в системе $\mathbf{Б}_2$. Аналогично можно показать, что имеет место обратное (нестрогое) неравенство, откуда следует, что в $\mathbf{Б}_1$ и в $\mathbf{Б}_2$ одинаковое количество векторов, что и требовалось доказать.

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* Б_1 *и* Б_2 *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U, *причем* Б_1 *— конечное множество. Тогда* Б_2 *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* Б_1 *равно количеству векторов в базисе* Б_2.

Не противоречит ли эта теорема **соответствующей задаче?**

III.7. Теорема о количестве базисных векторов

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{Б}_1$ *и* $\mathbf{Б}_2$ *— два* ***базиса*** *линейного пространства* U*, причем* $\mathbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\mathbf{Б}_2$ *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* $\mathbf{Б}_1$ *равно количеству векторов в базисе* $\mathbf{Б}_2$*.*

Не противоречит ли эта теорема **соответствующей задаче?**

В этой задаче системы **Б** и **Б'** являются базисами линейного пространства всех матриц размерности 2×2, а упорядоченная система **В** — базисом другого пространства — линейного пространства **симметричных** матриц размерности 2×2.

III.8. Определение размерности пространства

Определение 11. *Если количество векторов в базисе линейного пространства* U *конечно, то это количество векторов называется* **размерностью** *линейного пространства* U. *В противном случае говорят, что* U *—* **бесконечномерное линейное пространство**.

III.9. Теорема о дополняемости до базиса

Теорема 11. *Любую* ***линейно независимую систему векторов*** $\mathbf{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *конечномерного линейного пространства* U *можно дополнить до базиса* $\mathbf{B}' = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ *линейного пространства* U.

Доказательство.

III.9. Теорема о дополняемости до базиса

Теорема 11. *Любую* ***линейно независимую систему векторов*** $\mathbf{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *конечномерного линейного пространства* U *можно дополнить до базиса* $\mathbf{B}' = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ *линейного пространства* U.

Доказательство. Эта теорема является существенной и нетривиальной в случае, когда базис определяется, как минимальная система порождающих векторов линейного пространства U. При принятом нами определении базиса теорема очевидна.

III.9. Теорема о дополняемости до базиса

Теорема 11. *Любую* ***линейно независимую систему векторов*** $\mathbf{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ *конечномерного линейного пространства* U *можно дополнить до базиса* $\mathbf{B}' = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ *линейного пространства* U.

Доказательство. Эта теорема является существенной и нетривиальной в случае, когда базис определяется, как минимальная система порождающих векторов линейного пространства U. При принятом нами определении базиса теорема очевидна. Действительно, дополним систему $\mathbf{B}$ до максимальной **линейно независимой системы** $\mathbf{B}'$ векторов линейного пространства U. Но тогда $\mathbf{B}'$ является базисом линейного пространства U.

III.10. Приоритетная цель исследований в линейной алгебре

Понятие базиса позволяет переводить вопросы относительно исходной линейного пространства на язык матричной алгебры, что позволяет, с одной стороны, использовать мощный аппарат матричной алгебры для решения проблем, возникающих в теории линейных пространств и, с другой стороны, обогащать аппарат матричной алгебры с помощью конструкций, результатов и методов линейной алгебры. Отсюда следует, что в процессе изучения линейных пространств приоритетной является следующая цель.

III.10. Приоритетная цель исследований в линейной алгебре

Понятие базиса позволяет переводить вопросы относительно исходной линейного пространства на язык матричной алгебры, что позволяет, с одной стороны, использовать мощный аппарат матричной алгебры для решения проблем, возникающих в теории линейных пространств и, с другой стороны, обогащать аппарат матричной алгебры с помощью конструкций, результатов и методов линейной алгебры. Отсюда следует, что в процессе изучения линейных пространств приоритетной является следующая цель.

Цель 1. *При введении новых конструкций в линейной алгебре одной из приоритетных целей является получение ответа на вопрос «как эта конструкция может быть выражена средствами матричной алгебры». Это позволяет в терминах матричной алгебры формулировать вопросы, возникающие в теории линейных пространств.*

IV. Основные результаты IV. Основные результаты

Основные определения:

— определение **линейного пространства**;

— **линейно независимая** и **линейно зависимая** системы векторов;

— **система порождающих** линейного пространства;

— **базис**;

— **столбец координат** вектора линейного пространства.

Основные результаты:

— **элементарные теоремы** теории линейных пространств;

— свойство II.4 **однозначности разложения** по линейно зависимой системе векторов;

— **критерий линейной зависимости**;

— теорема **о линейных комбинациях базисных векторов**.

V. Подпространство

В соответствии с логикой развития математической теории мы постепенно переходим от изучения отдельного объекта (в данном случае — линейного пространства) к изучению систем таких объектов. Наиболее естественный путь состоит в том, чтобы сначала рассмотреть некоторые линейные пространства, которые можно получить, используя в качестве «строительного материала» исходное линейное пространство.

V. Подпространство

В соответствии с логикой развития математической теории мы постепенно переходим от изучения отдельного объекта (в данном случае — линейного пространства) к изучению систем таких объектов. Наиболее естественный путь состоит в том, чтобы сначала рассмотреть некоторые линейные пространства, которые можно получить, используя в качестве «строительного материала» исходное линейное пространство.

Определение 12. *Подмножество V* ***линейного пространства*** *U называется* **подпространством** *линейного пространства U, если V является линейным пространством относительно тех же операций. Тот факт, что V — подпространство, обозначается как $V \leq U$.*

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12. *Подмножество V линейного пространства U над полем $\mathbf{K}$ является подпространством тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V$ вектор $x + y$ принадлежит V, и для любого элемента λ поля $\mathbf{K}$ и любого вектора x из V вектор λx принадлежит V.*

Слишком много слов...

Определение 12. *Подмножество V **линейного пространства** U называется* **подпространством** *линейного пространства U, если V является линейным пространством относительно тех же операций. Тот факт, что V — подпространство, обозначается как $V \leq U$.*

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\left\{\begin{array}{l} x \in V, \\ y \in V \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{array}\right.\right)\right) \tag{4}$$

Можно предложить эквивалентную формулировку последней теоремы:

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \le U \ \Leftrightarrow \ \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{cases} \right) \right) \tag{4}$$

Теорема 13. *Подмножество V линейного пространства U над полем $\mathbf{K}$ является подпространством тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V$ и любых элементов $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ вектор $\lambda x + \mu y$ принадлежит V.*

Опять много слов...

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \le U \Leftrightarrow \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{cases}\right)\right) \tag{4}$$

Теорема 13.

$$V \le U \Leftrightarrow \left(\forall x, y \quad \forall \lambda, \mu \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in V.\right)\right) \tag{5}$$

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{cases}\right)\right) \tag{4}$$

Теорема 13.

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \quad \forall \lambda, \mu \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \; \lambda x + \mu y \in V.\right)\right) \tag{5}$$

Доказательство. Надо проверить выполнение аксиом линейного пространства для V. Но эта проверка тривиальна, так как, например, равенство $x + y = y + x$ верно *для любых* векторов $x, y \in U$, оно, конечно, останется верным и в случае, когда x, y будут выбираться не из «всего U», только «из его части», из V.

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \leq U \Leftrightarrow \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{cases}\right)\right) \tag{4}$$

Теорема 13.

$$V \leq U \Leftrightarrow \left(\forall x, y \quad \forall \lambda, \mu \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in V.\right)\right) \tag{5}$$

Доказательство. Проверить надо лишь, что ограничения операций $+, \lambda\cdot$ на подмножество V являются операциями на V:

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{cases}\right)\right) \tag{4}$$

Теорема 13.

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \quad \forall \lambda, \mu \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in V.\right)\right) \tag{5}$$

Доказательство. Проверить надо лишь, что ограничения операций $+, \lambda\cdot$ на подмножество V являются операциями на V:
1) операция $+$ отображает пары элементов из V в элемент из V;
2) для любого λ из $\mathbf{K}$ операция $\lambda\cdot$ отображает элементы из V в элементы из V.

V.1. Критерий подпространства

Теорема 12.

$$V \leq U \Leftrightarrow \left(\forall x, y \quad \forall \lambda \quad \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \in V, \\ x + y \in V. \end{cases}\right)\right) \tag{4}$$

Теорема 13.

$$V \leq U \Leftrightarrow \left(\forall x, y \quad \forall \lambda, \mu \left(\begin{cases} x \in V, \\ y \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in V.\right)\right) \tag{5}$$

Доказательство. Но выполнение этих условий:
1) операция $+$ отображает пары элементов из V в элемент из V;
2) для любого λ из $\mathbf{K}$ операция $\lambda\cdot$ отображает элементы из V в элементы из V
и является содержанием доказываемой теоремы (и в той, и в другой формулировке).

V.2. Теорема о размерности подпространства

Теорема 14. *Пусть V — подпространство линейного пространства U. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\dim(V) \leq \dim(U)$*;*
2. $\dim(V) < \dim(U)$ *тогда и только тогда, когда* $V < U$, *то есть* $V \neq U$.

V.2. Теорема о размерности подпространства

Теорема 14. *Пусть V — подпространство линейного пространства U. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\dim(V) \leq \dim(U)$;
2. $\dim(V) < \dim(U)$ *тогда и только тогда, когда* $V < U$, *то есть* $V \neq U$.

Доказательство.

V.2. Теорема о размерности подпространства

Теорема 14. *Пусть V — подпространство линейного пространства U. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\dim(V) \leq \dim(U)$;
2. $\dim(V) < \dim(U)$ *тогда и только тогда, когда* $V < U$, *то есть* $V \neq U$.

Доказательство. Это следствие из **теоремы Штейница** или **теоремы11 о дополняемости до базиса**.

V.3. Линейная оболочка

Определение 13. Линейная оболочка $L(A)$ *или* $\langle A\rangle$ *системы векторов* A *— это минимальное (по включению) такое подпространство пространства* V*, которое содержит все векторы из* A*.*

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Определение 13. Линейная оболочка $L(A)$ *или* $\langle A \rangle$ *системы векторов* A *— это минимальное (по включению) такое подпространство пространства* V, *которое содержит все векторы из* A.

Теорема 15. *Линейная оболочка* $\langle A \rangle$ *системы векторов* A *линейного пространства* V *над полем* $\mathbf{K}$ *состоит из всевозможных линейных комбинаций векторов системы* A *с коэффициентами из поля* $\mathbf{K}$*:*

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A\rangle = \left\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A\right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Обозначим множество в левой части доказываемого равенства через V, а множество в правой части — через W.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Включение $V \supseteq W$ очевидно, так как

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Включение $V \supseteq W$ очевидно, так как $a_i \in A \subseteq \langle A \rangle$, поэтому $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \in V$, поскольку подпространство содержит все линейные комбинации своих векторов.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Включение $V \supseteq W$ доказано.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A\rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Включение $V \supseteq W$ доказано.

Для доказательства включения $V \subseteq W$ достаточно проверить, что, во-первых, W — подпространство линейного пространства U, и, во-вторых, W содержит все вектора из A.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Для доказательства включения $V \subseteq W$ достаточно проверить, что, во-первых, W — подпространство линейного пространства U, и, во-вторых, W содержит все вектора из A. Дело в том, что $\langle A \rangle$ — наименьшее подпространство с этими свойствами, поэтому получим требуемое включение $V \subseteq W$.

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A\rangle = \left\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A\right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Надо доказать равенство множеств.

Для доказательства включения $V \subseteq W$ достаточно проверить, что, во-первых, W — подпространство линейного пространства U, и, во-вторых, W содержит все вектора из A. Утверждение, что W — подпространство линейного пространства U, следует из **критерия подпространства**:

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Утверждение, что W — подпространство линейного пространства U, следует из **критерия подпространства**:

$$\alpha \left(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k\right) + \beta \left(\mu_1 a'_1 + \ldots + \mu_m a'_m\right) =$$

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Утверждение, что W — подпространство линейного пространства U, следует из **критерия подпространства**:

$$\alpha \left(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k\right) + \beta \left(\mu_1 a_1' + \ldots + \mu_m a_m'\right) =$$

$$= \left(\alpha\lambda_1\right) a_1 + \ldots + \left(\alpha\lambda_k\right) a_k + \left(\beta\mu_1\right) a_1' + \ldots + \left(\beta\mu_m\right) a_m'$$

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \middle| k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Доказательство. Утверждение, что W — подпространство линейного пространства U, следует из **критерия подпространства**:

$$\alpha\left(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k\right) + \beta\left(\mu_1 a_1' + \ldots + \mu_m a_m'\right) =$$

$$= \left(\alpha\lambda_1\right) a_1 + \ldots + \left(\alpha\lambda_k\right) a_k + \left(\beta\mu_1\right) a_1' + \ldots + \left(\beta\mu_m\right) a_m' \in W.$$

V.4. Теорема о внутренней характеризации линейной оболочки

Теорема 15.

$$\langle A\rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A \right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Следствие 1. *Если* A *— система векторов и* B *— такая ее подсистема, что* $A \dashv B$, *то* $L(A) = L(B)$. *В частности, если* B *— максимальная линейно независимая подсистема системы* A, *то* $L(A) = L(B)$.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Надо доказать *равенство множеств.*

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Надо доказать *равенство множеств*. Согласно *определению* равенства множеств, для этого необходимо доказать включения $L(A) \subseteq L(B)$ и $L(A) \supseteq L(B)$.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Надо доказать *равенство множеств*. Согласно *определению* равенства множеств, для этого необходимо доказать включения $L(A) \subseteq L(B)$ и $L(A) \supseteq L(B)$. Второе включение следует непосредственно из определения линейной оболочки.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Надо доказать *равенство множеств*. Согласно *определению* равенства множеств, для этого необходимо доказать включения $L(A) \subseteq L(B)$ и $L(A) \supseteq L(B)$. Поэтому осталось доказать включение $L(A) \subseteq L(B)$.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если* A *— система векторов и* B *— такая ее подсистема, что* $A \dashv B$, *то* $L(A) = L(B)$. *В частности, если* B *— максимальная линейно независимая подсистема системы* A, *то* $L(A) = L(B)$.

Доказательство. Надо доказать *равенство множеств*. Согласно *определению* равенства множеств, для этого необходимо доказать включения $L(A) \subseteq L(B)$ и $L(A) \supseteq L(B)$. По *определению* включения для этого следует убедиться в истинности формулы

$$x \in L(A) \ \Rightarrow \ L(B).$$

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \;\Rightarrow\; L(B).$$

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \;\Rightarrow\; L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Тогда каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B:

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \;\Rightarrow\; L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Тогда каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B: это следует либо непосредственно из условия,

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \ \Rightarrow \ L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Тогда каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B: либо, если про B известно лишь, что это максимальная линейно независимая подсистема системы A, то из теоремы 6.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \;\Rightarrow\; L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Доказано, что каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B. Иными словами, $A \dashv B$.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \ \Rightarrow \ L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Доказано, что каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B. Иными словами, $A \dashv B$. По теореме о внутренней характеризации линейной оболочки $L(A) \dashv A$.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \ \Rightarrow \ L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Доказано, что каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B. Иными словами, $A \dashv B$. По теореме о внутренней характеризации линейной оболочки $L(A) \dashv A$.

Согласно лемме о транзитивности отношения $\dashv$, влечет $L(A) \dashv B$.

V.5. Следствие о линейной оболочке подсистемы

Следствие 1. *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

Доказательство. Итак, осталось доказать, что

$$x \in L(A) \ \Rightarrow \ L(B).$$

Пусть $x \in L(A)$.

Доказано, что каждый вектор из A является линейной комбинацией векторов из B. Иными словами, $A \dashv B$. По теореме о внутренней характеризации линейной оболочки $L(A) \dashv A$.
Согласно лемме о транзитивности отношения $\dashv$, влечет $L(A) \dashv B$.
По теореме о внутренней характеризации линейной оболочки получаем доказываемое включение $L(A) \subseteq L(B)$.

V.6. Стандартные способы задания подпространств

Обычно применяется один из двух способов задания подпространств:

- В виде линейной оболочки системы векторов, желательно — как линейную оболочку базиса:

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k \rangle \,. \tag{6}$$

- С помощью системы линейных уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства U:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in V \ \Leftrightarrow$$

V.6. Стандартные способы задания подпространств

Обычно применяется один из двух способов задания подпространств:

- В виде линейной оболочки системы векторов, желательно — как линейную оболочку базиса:

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k \rangle\,. \tag{6}$$

- С помощью системы линейных уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства U:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x_k} e_k \in V \ \Leftrightarrow$$

V.6. Стандартные способы задания подпространств

Обычно применяется один из двух способов задания подпространств:

- В виде линейной оболочки системы векторов, желательно — как линейную оболочку базиса:

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k \rangle \, . \tag{6}$$

- С помощью системы линейных уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства U:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x_k} e_k \in V \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a_{11}\mathbf{x_1} + a_{12}\mathbf{x_2} + \ldots + a_{1n}\mathbf{x_n} = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}\mathbf{x_1} + a_{m2}\mathbf{x_2} + \ldots + a_{mn}\mathbf{x_n} = 0. \end{cases}$$

V.6. Стандартные способы задания подпространств

Обычно применяется один из двух способов задания подпространств:

- В виде линейной оболочки системы векторов, желательно — как линейную оболочку базиса:

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\rangle\,. \tag{6}$$

- С помощью системы линейных уравнений в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства U:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in V \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Рассмотреть пример?

VI. Алгебра подпространств

В соответствии со **стратегией перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов** естественно рассмотреть

VI. Алгебра подпространств

В соответствии со **стратегией перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов** естественно рассмотреть
операции алгебры подпространств и отношения на множестве подпространств.

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16. *Пусть* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K*. Тогда пересечение* $V \cap W$ *подпространств* V *и* W *является подпространством.*

Слишком много букав...

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Вот теперь хорошо!

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Доказательство.

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Доказательство. Это очевидное следствие **критерия подпространства**.

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Доказательство. Пусть $x \in V \cap W$, $y \in V \cap W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Доказательство. Пусть $x \in V \cap W$, $y \in V \cap W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда $\lambda x + \mu y \in V$, так как $x, y \in V$, и $\lambda x + \mu y \in W$, так как $x, y \in W$.

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Доказательство. Пусть $x \in V \cap W$, $y \in V \cap W$, $\lambda, \mu \in K$.
Тогда $\lambda x + \mu y \in V$, так как $x, y \in V$, и $\lambda x + \mu y \in W$, так как $x, y \in W$.
Следовательно, $\lambda x + \mu y$ принадлежит и V, и W, поэтому, по определению пересечения множеств, $\lambda x + \mu y \in V \cap W$.

VI.1. Пересечение подпространств

Теорема 16.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow V \cap W \leq U.$$

Доказательство. Пусть $x \in V \cap W$, $y \in V \cap W$, $\lambda, \mu \in K$.
Тогда $\lambda x + \mu y \in V$, так как $x, y \in V$, и $\lambda x + \mu y \in W$, так как $x, y \in W$.
Следовательно, $\lambda x + \mu y$ принадлежит и V, и W, поэтому, по определению пересечения множеств, $\lambda x + \mu y \in V \cap W$.

Теорема доказана.

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K*.* **Суммой подпространств** V *и* W *называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство.

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Суммa подпространств является подпространством.*

Доказательство. Это очевидное следствие **критерия подпространства**.

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K*.* **Суммой подпространств** V *и* W *называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$.

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K*.* **Суммой подпространств** V *и* W *называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда

$\lambda \left(v_1 + w_1\right) + \mu \left(v_2 + w_2\right) =$

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда

$\lambda\left(v_1 + w_1\right) + \mu\left(v_2 + w_2\right) = \left(\lambda v_1 + \mu v_2\right) + \left(\lambda w_1 + \mu w_2\right)$

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда

$$\lambda\left(v_1 + w_1\right) + \mu\left(v_2 + w_2\right) = \underbrace{\left(\lambda v_1 + \mu v_2\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(\lambda w_1 + \mu w_2\right)}_{\in W}$$

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K. **Суммой подпространств** V *и* W *называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда

$$\lambda\left(v_1 + w_1\right) + \mu\left(v_2 + w_2\right) = \underbrace{\left(\lambda v_1 + \mu v_2\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(\lambda w_1 + \mu w_2\right)}_{\in W} \in V + W.$$

VI.2. Сумма подпространств

Определение 14. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{7}$$

Теорема 17. *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда

$$\lambda(v_1 + w_1) + \mu(v_2 + w_2) = \underbrace{(\lambda v_1 + \mu v_2)}_{\in V} + \underbrace{(\lambda w_1 + \mu w_2)}_{\in W} \in V + W.$$

Теорема доказана.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18. *Пусть V, W — подпространства конечномерного линейного пространства U над полем K. Тогда*

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Много букафф...

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

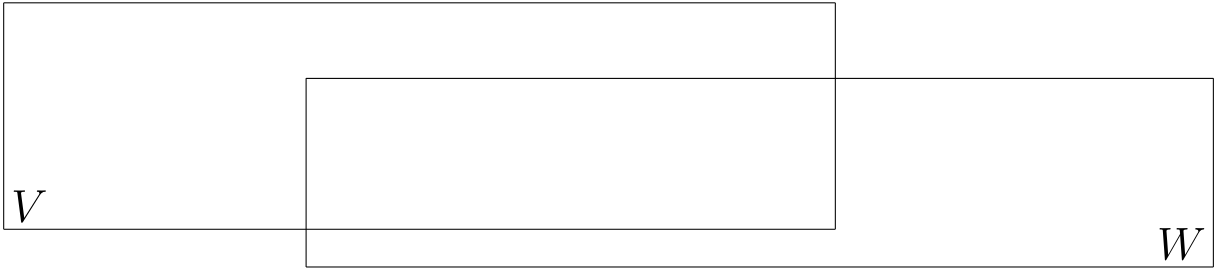
Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

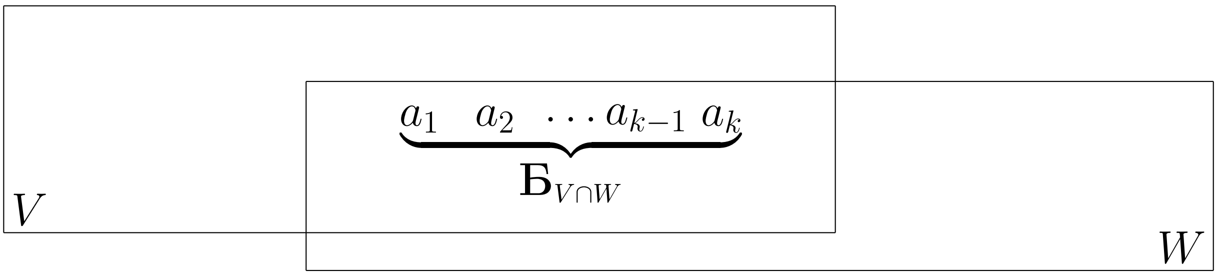


Доказательство.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

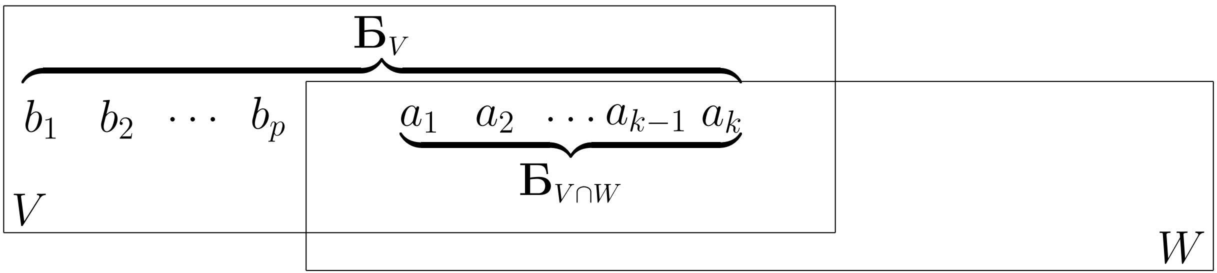


Доказательство. Пусть $\text{Б}_{V \cap W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — базис подпространства $V \cap W$.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

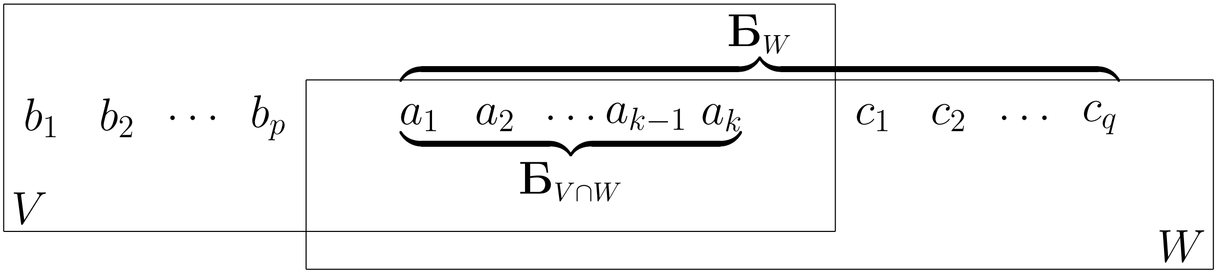


Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_{V\cap W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — базис подпространства $V \cap W$. Дополним его до базиса линейного пространства V, получим базис $\mathbf{Б}_V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_p\}$ (этот базис определяется, вообще говоря, не однозначно).

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

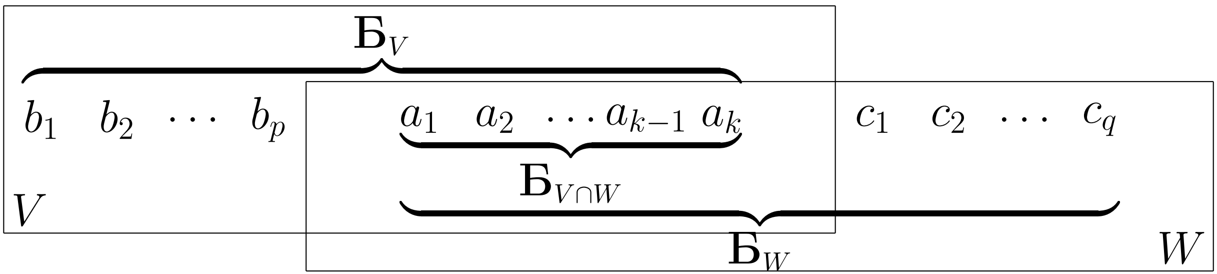


Доказательство. Пусть $\text{Б}_{V\cap W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — базис подпространства $V \cap W$. Дополним его до базиса линейного пространства V, получим базис $\text{Б}_V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_p\}$. Теперь дополним базис $\text{Б}_{V\cap W}$ до базиса линейного пространства W, получим базис $\text{Б}_W = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, c_2, \ldots, c_q\}$.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$



Доказательство. Осталось проверить, что система

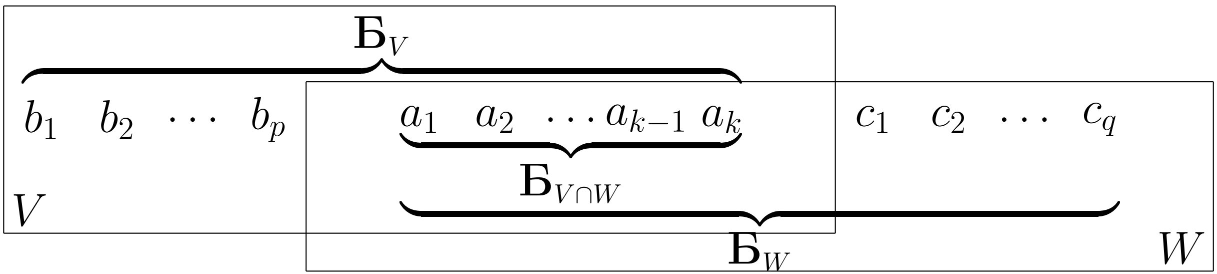
$$Б_{V+W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_1, c_2, \ldots, c_q\}$$

является базисом суммы $V+W$, т.к.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V\cap W)}^{k}.$$



Доказательство. Осталось проверить, что система

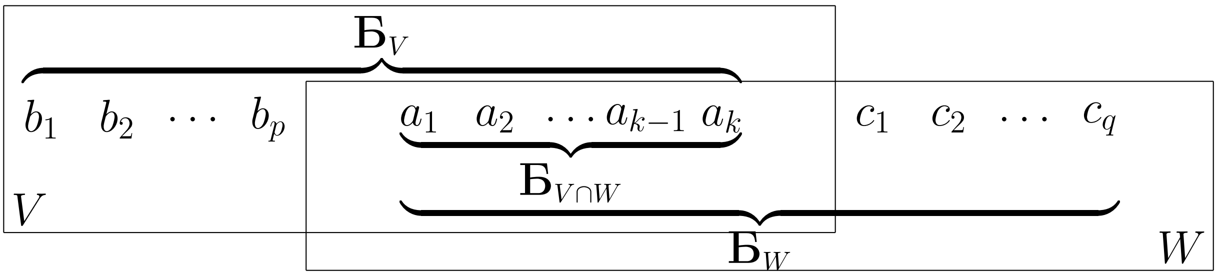
$$Б_{V+W} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_q\}$$

является базисом суммы $V+W$, т.к. (см. формулировку теоремы)

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$



Доказательство. Осталось проверить, что система

$$\text{Б}_{V+W} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_q\}$$

является базисом суммы $V+W$, т.к. (см. формулировку теоремы) $p+k+q = (p+k)+(k+q)-k$.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Проверим, что система $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Проверим, что система $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$. По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** (критерий базиса) для этого достаточно убедиться в том, что, во-первых, эта система векторов линейно независима, и, во-вторых, что всякий вектор из $V+W$ является линейной комбинацией векторов из Б_{V+W}.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V\cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Проверим, что система $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$. По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** (критерий базиса) для этого достаточно убедиться в том, что, во-первых, эта система векторов линейно независима, и, во-вторых, что всякий вектор из $V+W$ является линейной комбинацией векторов из Б_{V+W}.

Оба утверждения очевидны. Проверим?

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p}_{\in V} = \\ = \underbrace{-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q}_{\in W} \in \end{gathered} \tag{8}$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V + W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p}_{\in V} = \\ &= \underbrace{-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q}_{\in W} \in V \cap W. \end{aligned} \tag{8}$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p}_{\in V} = \\ = \underbrace{-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q}_{\in W} \in V \cap W. \quad (8)$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $Б_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

По **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p}_{\in V} =$$

$$= \underbrace{\theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_k a_k}_{V \cap W} = \underbrace{-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q}_{\in W} \in V \cap W. \quad (8)$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V\cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

Итак, $-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_k a_k$, откуда

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $Б_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

Итак, $-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_k a_k$, откуда

$$\theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V + W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

Итак, $-\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_q c_q = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_k a_k$, откуда

$$\theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0}.$$

Но система векторов Б_W **линейно независима**, поэтому, в частности, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_q = 0$.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p = \mathbf{0}.$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V\cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\text{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p = \mathbf{0}.$$

Но $\mathbf{Б} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p\}$ — базис, поэтому

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0.$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $Б_{V+W} = \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_p = 0.$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. $\mathbf{Б}_{V+W} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_q\}$ является базисом суммы $V+W$?

Проверим **линейную независимость**:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_q c_q = \mathbf{0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p = \mathbf{0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_p = 0.$$

Следовательно, система $\mathbf{Б}_{V+W}$ **линейно независима**.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Итак, система векторов $\mathbf{Б}_{V+W}$ линейно независима.

Осталось доказать, что система векторов $\mathbf{Б}_{V+W}$ полна, то есть, что любой вектор из $V+W$ является линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_{V+W}$.

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** и определению суммы подпространств, получаем, что любой вектор из $V+W$ можно представить в виде

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in W} =$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** и определению суммы подпространств, получаем, что любой вектор из $V+W$ можно представить в виде

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in W} = (\zeta_1 a_1 + \ldots + \zeta_k a_k + \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_p b_p) +$$

$$+ (\rho_1 a_1 + \ldots + \rho_k a_k + \tau_1 c_1 + \ldots + \tau_q c_q) =$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** и определению суммы подпространств, получаем, что любой вектор из $V + W$ можно представить в виде

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in W} = (\zeta_1 a_1 + \ldots + \zeta_k a_k + \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_p b_p) +$$

$$+ (\rho_1 a_1 + \ldots + \rho_k a_k + \tau_1 c_1 + \ldots + \tau_q c_q) =$$

$$= (\zeta_1 + \rho_1)\, a_1 + \ldots + (\zeta_k + \rho_k)\, a_k + \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_p b_p + \tau_1 c_1 + \ldots + \tau_q c_q.$$

VI.3. Теорема о размерности суммы подпространств

Теорема 18.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\dim(V+W)}^{p+k+q} = \overbrace{\dim(V)}^{p+k} + \overbrace{\dim(W)}^{k+q} - \overbrace{\dim(V \cap W)}^{k}.$$

Доказательство. Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** и определению суммы подпространств, получаем, что любой вектор из $V+W$ можно представить в виде

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in W} = (\zeta_1 a_1 + \ldots + \zeta_k a_k + \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_p b_p) +$$

$$+ (\rho_1 a_1 + \ldots + \rho_k a_k + \tau_1 c_1 + \ldots + \tau_q c_q) =$$

$$= (\zeta_1 + \rho_1)\, a_1 + \ldots + (\zeta_k + \rho_k)\, a_k + \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_p b_p + \tau_1 c_1 + \ldots + \tau_q c_q.$$

Теорема доказана.

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения п/п

Теорема 19. *Если* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ***базис*** *линейного* ***пространства*** U *и*

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \right\},$$

$$W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \;\middle|\; \begin{cases} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{cases} \right\},$$

— *подпространства линейного пространства* U, *то*

$$V + W = \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle, \tag{9}$$

$$V \cap W = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{cases} \right\}. \tag{10}$$

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \left\langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \right\rangle, \\ W = \left\langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \right\rangle \end{cases} \Rightarrow V + W = \left\langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \right\rangle. \tag{9}$$

Доказательство. Надо доказать...

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle, \\ W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle \end{cases} \Rightarrow V + W = \langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \rangle. \qquad (9)$$

Доказательство. Надо доказать *равенство множеств.*

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle, \\ W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle \end{cases} \Rightarrow V + W = \langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \rangle. \qquad (9)$$

Доказательство *равенства множеств* проведем по определению, то есть докажем, что

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle\,, \\ W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle \end{cases} \Rightarrow \; V + W = \langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \rangle\,. \tag{9}$$

Доказательство *равенства множеств* проведем по определению, то есть докажем, что

$V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$

и что

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle\,, \\ W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle \end{cases} \Rightarrow \; V + W = \langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \rangle\,. \qquad (9)$$

Доказательство *равенства множеств* проведем по определению, то есть докажем, что

$V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$

и что $V + W \supseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$.

Включение $V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$ следует из

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle\,, \\ W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle \end{cases} \Rightarrow \; V + W = \langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \rangle\,. \qquad (9)$$

Доказательство *равенства множеств* проведем по определению, то есть докажем, что

$V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$

и что $V + W \supseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$.

Включение $V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$ следует из **определения суммы подпространств**.

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \dots, v_k, \dots \rangle, \\ W = \langle w_1, \dots, w_m, \dots \rangle \end{cases} \Rightarrow V + W = \langle v_1, \dots, w_1, \dots \rangle. \qquad (9)$$

Доказательство *равенства множеств* проведем по определению, то есть докажем, что

$V + W \subseteq \langle v_1, \dots, v_n, \dots, w_1, \dots, w_m, \dots \rangle$

и что $V + W \supseteq \langle v_1, \dots, v_n, \dots, w_1, \dots, w_m, \dots \rangle$.

Включение $V + W \subseteq \langle v_1, \dots, v_n, \dots, w_1, \dots, w_m, \dots \rangle$ следует из **определения суммы подпространств**.

Обратное включение $V + W \supseteq \langle v_1, \dots, v_n, \dots, w_1, \dots, w_m, \dots \rangle$ вытекает из

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для суммы:*

$$\begin{cases} V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle\,, \\ W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle \end{cases} \Rightarrow \; V + W = \langle v_1, \ldots, w_1, \ldots \rangle\,. \qquad (9)$$

Доказательство *равенства множеств* проведем по определению, то есть докажем, что

$V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$

и что $V + W \supseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$.

Включение $V + W \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$ следует из **определения суммы подпространств**.

Обратное включение $V + W \supseteq \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle$ вытекает из **теоремы о внутренней характеризации линейной оболочки**.

VI.4. Теорема о вычислении суммы и пересечения подпространств

Теорема 19. *Для пересечения:*

$$V \cap W = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{cases} \right\}. \qquad (10)$$

Доказательство тоже проводится с помощью двух включений: левой части требуемого равенства в правую его часть и обратного включения.

Рассмотреть пример?

VI.5. Прямая сумма подпространств

Какие ситуации, наиболее интересные для изучения, можно выделить с помощью рассмотренных операций алгебры подпространств?

VI.5. Прямая сумма подпространств

Какие ситуации, наиболее интересные для изучения, можно выделить с помощью рассмотренных операций алгебры подпространств? Естественно выделить такие ситуации с помощью **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

VI.5. Прямая сумма подпространств

Какие ситуации, наиболее интересные для изучения, можно выделить с помощью рассмотренных операций алгебры подпространств? Естественно выделить такие ситуации с помощью **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Можно выделить ситуацию, когда **результат операции совпадает с одним из операндов**.

VI.5. Прямая сумма подпространств

Какие ситуации, наиболее интересные для изучения, можно выделить с помощью рассмотренных операций алгебры подпространств? Естественно выделить такие ситуации с помощью **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Можно выделить ситуацию, когда **результат операции совпадает с одним из операндов**.

Заслуживает рассмотрения случай, когда сумма подпространств совпадает со всем пространством. Примером такого результата является рассмотренная ниже **теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств**.

VI.5. Прямая сумма подпространств

Какие ситуации, наиболее интересные для изучения, можно выделить с помощью рассмотренных операций алгебры подпространств? Естественно выделить такие ситуации с помощью **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Можно выделить ситуацию, когда **результат операции совпадает с одним из операндов**.

Заслуживает рассмотрения случай, когда сумма подпространств совпадает со всем пространством. Примером такого результата является рассмотренная ниже **теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств**.

Важным примером «экстремальной ситуации» является **случай, когда слагаемые имеют минимальное пересечение**.

VI.5. Прямая сумма подпространств

Определение 15. *Если* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K *и* $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$*. Тогда сумма* $V + W$ *подпространств* V *и* W *называется* **прямой суммой***. Прямая сумма подпространств обозначается через* $V \bigoplus W$*.*

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20. *Пусть* V, W *— подпространства линейного пространства* U *над полем* K*. Тогда сумма* $V + W$ *является* ***прямой суммой*** *тогда и только тогда, когда всякий вектор из* $V + W$ ***однозначным образом*** *представляется в виде* $v + w$*, где* $v \in V$*,* $w \in W$*.*

Много букав...

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \in V + W \;\Rightarrow\; x = \underbrace{\overbrace{v}^{V} + \overbrace{w}^{W}}_{\textit{однозначно}} \right).$$

Что-то... как-то... «Не фонтан»...

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Вот теперь формулировка «на языке равенств, неравенств и теоретико-множественных включений»!

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Сначала докажем однозначность разложения вектора.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

«Соберем» все векторы из V в левой части равенства, а все векторы из W — в правой части.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

«Соберем» все векторы из V в левой части равенства, а все векторы из W — в правой части. Получаем

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} =$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

«Соберем» все векторы из V в левой части равенства, а все векторы из W — в правой части. Получаем

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

«Соберем» все векторы из V в левой части равенства, а все векторы из W — в правой части. Получаем

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in V \cap W =$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

«Соберем» все векторы из V в левой части равенства, а все векторы из W — в правой части. Получаем

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in V \cap W = \{\mathbf{0}\},$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V + W = V \oplus W$.

Пусть $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, где $\begin{cases} \{v_1,\ v_2\} \subseteq V, \\ \{w_1,\ w_2\} \subseteq W. \end{cases}$

«Соберем» все векторы из V в левой части равенства, а все векторы из W — в правой части. Получаем

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in V \cap W = \{\mathbf{0}\},$$

то есть $v_1 = v_2$, и $w_1 = w_2$. Необходимость доказана.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Достаточность.*

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Доказательство. *Достаточность.*

Мы приведем 2 доказательства.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\left\{\begin{array}{l} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v' = v'', \\ w' = w'' \end{array}\right. \right).$$

Первое доказательство достаточности. Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

Следовательно, $\underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \mathbf{0}$.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

Следовательно, $\underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \mathbf{0}$. Так как $\underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \mathbf{0}$, то

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

Следовательно, $\underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \mathbf{0}$. Так как $\underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \mathbf{0}$, то

$$x \in V \cap W \Rightarrow \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} \Rightarrow$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

Следовательно, $\underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \mathbf{0}$. Так как $\underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \mathbf{0}$, то

$$x \in V \cap W \Rightarrow \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} \Rightarrow$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

Следовательно, $\underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \mathbf{0}$. Так как $\underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \mathbf{0}$, то

$$x \in V \cap W \Rightarrow \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} \Rightarrow \begin{cases} x = \mathbf{0}, \\ -x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Первое доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Возьмем $x \in V \cap W$.

W — подпространство, поэтому $x \in W \Rightarrow (-x) \in W$.

Следовательно, $\underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \mathbf{0}$. Так как $\underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{x \in V \cap W} \Rightarrow \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{(-x)}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x = 0}, \\ -x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Ура!

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\left\{\begin{array}{l} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v' = v'', \\ w' = w'' \end{array}\right. \right).$$

Второе доказательство достаточности.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Второе доказательство достаточности. Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно.

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Второе доказательство достаточности.
Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Тогда

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Второе доказательство достаточности.
Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Тогда

$$x \in V \cap W \Rightarrow \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{0}_{\in W} = x = \underbrace{0}_{\in V} + \underbrace{x}_{\in W} \Rightarrow$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \leq U, \\ W \leq U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Второе доказательство достаточности.
Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Тогда

$$x \in V \cap W \;\Rightarrow\; \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{0}_{\in W} = x = \underbrace{0}_{\in V} + \underbrace{x}_{\in W} \;\Rightarrow$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Второе доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Тогда

$$x \in V \cap W \;\Rightarrow\; \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{0}_{\in W} = x = \underbrace{0}_{\in V} + \underbrace{x}_{\in W} \;\Rightarrow\; x = \mathbf{0}.$$

VI.6. Критерий прямой суммы подпространств

Теорема 20.

$$\begin{cases} V \le U, \\ W \le U, \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = v' + w' = v'' + w'', \\ \{v', v''\} \subseteq V, \\ \{w', w''\} \subseteq W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' = v'', \\ w' = w'' \end{cases} \right).$$

Второе доказательство достаточности.

Пусть каждый вектор из $V + W$ представляется в виде суммы вектора из V и W однозначно. Тогда

$$\mathbf{x} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{W} \Rightarrow \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{0}_{\in W} = x = \underbrace{0}_{\in V} + \underbrace{x}_{\in W} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.

VI.7. Прямая сумма нескольких подпространств

Понятие прямой суммы подпространств естественным образом обобщается на случай суммы трех и более подпространств.

VI.7. Прямая сумма нескольких подпространств

Понятие прямой суммы подпространств естественным образом обобщается на случай суммы трех и более подпространств.

Определение 16. *Сумма подпространств* $V_1, \ldots, V_k$ *называется* **прямой** *тогда и только тогда, когда пересечение любого из* V_i *с суммой остальных слагаемых является нулевым пространством:*

$$V_i \cap (V_1 + V_2 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Подпространство, являющееся прямой суммой подпространств $V_1, \ldots, V_k$*, записывают следующим образом:*

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k.$$

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. *Конечномерное линейное пространство раскладывается в прямую сумму одномерных подпространств.*

Много букафф...

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство.

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U.

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U.

Из **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов** и **определения суммы подпространств** имеем $U = \langle e_1 \rangle + \ldots + \langle e_n \rangle$.

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U.

Из **теоремы о линейных комбинациях базисных векторов** и **определения суммы подпространств** имеем $U = \langle e_1 \rangle + \ldots + \langle e_n \rangle$.

Осталось проверить, что эта сумма — прямая.

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Осталось проверить, что эта сумма — прямая. Пусть

$$x \in \langle e_k \rangle \cap \left(\langle e_1 \rangle + \ldots + \langle e_{k-1} \rangle + \langle e_{k+1} \rangle + \ldots + \langle e_n \rangle \right).$$

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Осталось проверить, что эта сумма — прямая. Пусть

$$x \in \langle e_k \rangle \cap \left(\langle e_1 \rangle + \ldots + \langle e_{k-1} \rangle + \langle e_{k+1} \rangle + \ldots + \langle e_n \rangle \right).$$

Тогда

$$\lambda_k e_k = x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n,$$

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Осталось проверить, что эта сумма — прямая.

$$\lambda_k e_k = x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n,$$

В силу линейной независимости базиса получаем, что все коэффициенты в сумме — нулевые.

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Осталось проверить, что эта сумма — прямая.

$$\lambda_k e_k = x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n,$$

В силу линейной независимости базиса получаем, что все коэффициенты в сумме — нулевые. В частности, $\lambda_k = 0$, откуда $x = 0 \cdot e_k = \mathbf{0}$.

VI.8. Теорема о разложении в прямую сумму одномерных подпространств

Теорема 21. $U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle$.

Доказательство. Осталось проверить, что эта сумма — прямая.

$$\lambda_k e_k = x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n,$$

В силу линейной независимости базиса получаем, что все коэффициенты в сумме — нулевые. В частности, $\lambda_k = 0$, откуда $x = 0 \cdot e_k = \mathbf{0}$. Таким образом, доказано, что сумма

$$\langle e_1 \rangle + \ldots + \langle e_n \rangle = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle$$

является **прямой суммой**. Теорема доказана.

В данном месте уместно было бы рассмотреть пример вычисления суммы и пересечения подпространств. Но решение примера затрудняется тем, что мы пока почти не владеем вычислительным аппаратом линейной алгебры. Как мы увидим из материала следующего раздела, в конечномерных линейных пространствах есть возможность эффективно применять аппарат *матричной алгебры*.

VII. Основные результаты

К списку **ранее описанных главных достижений** теории линейных пространств добавляются следующие результаты.

Основные определения:

— определение **подпространства**;

— определение **линейной оболочки** системы векторов;

— **стандарные способы задания подпространств**;

— смысл **задания подпространства системой уравнений**;

— определение **суммы подпространств** и **прямой суммы подпространств**.

VII. Основные результаты

Получены следующие теоремы:

— критерий **подпространства**;

— теорема о **внутренней характеризации линейной оболочки**;

— теорема о **размерности суммы подпространств**;

— теорема о **вычислении суммы и пересечения подпространств**;

— **критерий прямой суммы подпространств**.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?