Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

# Жорданова нормальная форма

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

*Изд. 4-е, испр. и доп.*

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

# Постановка задачи

В теории линейных операторов в конечномерных линейных пространствах центральную роль играет теорема об изоморфизме алгебры линейных операторов и алгебры матриц. Однако, как известно, таких изоморфизмов существует много (во всяком случае, для линейных пространств над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), то есть одному и тому же оператору, как правило, можно поставить в соответствие много матриц, в зависимости от того, какой базис зафиксирован в линейном пространстве.

А именно, как **мы знаем...**

# Постановка задачи

Любые две матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$, соответствующие линейному оператору $\hat{A}$ в разных базисах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, **сопряжены** с помощью **матрицы перехода**, то есть

# Постановка задачи

Любые две матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$, соответствующие линейному оператору $\hat{A}$ в разных базисах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, **сопряжены** с помощью **матрицы перехода**, то есть

$$A_{\mathbf{Б}_2} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2} \cdot A_{\mathbf{Б}_1} \cdot T_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2}.$$

# Постановка задачи

Любые две матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$, соответствующие линейному оператору $\hat{A}$ в разных базисах $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{Б}_2$, **сопряжены** с помощью **матрицы перехода**, то есть

$$A_{\mathbf{Б}_2} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2} \cdot A_{\mathbf{Б}_1} \cdot T_{\mathbf{Б}_1 \to \mathbf{Б}_2}.$$

Значит, матрицы $A_{\mathbf{Б}_1}$ и $A_{\mathbf{Б}_2}$ подобны. Отношением подобия множество всех матриц разбивается на непересекающиеся классы подобных матриц. В связи с этим часто встает проблема выбора в каждом классе подобных матриц «стандартного представителя». Можно предложить несколько различных правил выбора таких «стандартных представителей». В данной работе мы рассмотрим один из важнейших типов таких представителей: нормальную жорданову форму матрицы.

# Определения и основные результаты

**Определение 1. Жордановой клеткой размерности $k$, отвечающей собственному значению $\mu$,** *называется квадратная матрица вида* $$J_k(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu \end{pmatrix},$$ *имеющая $k$ строк и столбцов.*

**Определение 2.** *Говорят, что матрица $M$ имеет* **нормальную жорданову форму**, *если $M$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$M = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\mu_1) & \mathbf{0}_{k_1 \times k_2} & \mathbf{0}_{k_1 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_1 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_2 \times k_1} & J_{k_2}(\mu_2) & \mathbf{0}_{k_2 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_2 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_3 \times k_1} & \mathbf{0}_{k_3 \times k_2} & J_{k_3}(\mu_3) & \dots & \mathbf{0}_{k_3 \times k_p} \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0}_{k_p \times k_1} & \mathbf{0}_{k_p \times k_2} & \mathbf{0}_{k_p \times k_3} & \dots & J_{k_p}(\mu_p) \end{pmatrix}$$

*где $J_{k_i}(\mu_i)$ —* ***жорданова клетка*** *размерности $k_i$, отвечающая собственному значению $\mu_i$,*

$\mathbf{0}_{k_i \times k_j}$ — *нулевая матрица размерности $k_i \times k_j$.*

**Определение 2.** *Говорят, что матрица $M$ имеет* **нормальную жорданову форму**, *если $M$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$M = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\mu_1) & \mathbf{0}_{k_1 \times k_2} & \mathbf{0}_{k_1 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_1 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_2 \times k_1} & J_{k_2}(\mu_2) & \mathbf{0}_{k_2 \times k_3} & \dots & \mathbf{0}_{k_2 \times k_p} \\ \mathbf{0}_{k_3 \times k_1} & \mathbf{0}_{k_3 \times k_2} & J_{k_3}(\mu_3) & \dots & \mathbf{0}_{k_3 \times k_p} \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0}_{k_p \times k_1} & \mathbf{0}_{k_p \times k_2} & \mathbf{0}_{k_p \times k_3} & \dots & J_{k_p}(\mu_p) \end{pmatrix}$$

*где $J_{k_i}(\mu_i)$ —* ***жорданова клетка*** *размерности $k_i$, отвечающая собственному значению $\mu_i$, $\mathbf{0}_{k_i \times k_j}$ — нулевая матрица размерности $k_i \times k_j$.*

В этом определении **не предполагается**, что **все** $\mu_i$ различны.

# Пример нормальной жордановой формы матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет нормальную жорданову форму.

# Пример нормальной жордановой формы матрицы

$$\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет нормальную жорданову форму.

**Теорема 1 (о жордановой форме).** *Если* $U$ *— линейное пространство над полем* $K$, $\hat{A}$ *— линейный оператор пространства* $U$ *и характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *вполне приводим над полем* $K$, *то есть имеет вид* $(\lambda-\mu_1)^{k_1}(\lambda-\mu_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\mu_m)^{k_m}$, *то существует такой базис* $\mathbf{Б}$ *пространства* $U$, *в котором матрица* $A_{\mathbf{Б}}$ *оператора* $\hat{A}$ *имеет нормальную жорданову форму. Эта жорданова нормальная форма определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

**Теорема 1 (о жордановой форме).** *Если $U$ — линейное пространство над полем $K$, $\hat{A}$ — линейный оператор пространства $U$ и характеристический полином оператора $\hat{A}$ вполне приводим над полем $K$, то есть имеет вид $(\lambda-\mu_1)^{k_1}(\lambda-\mu_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\mu_m)^{k_m}$, то существует такой базис* **Б** *пространства $U$, в котором матрица $A_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{A}$ имеет нормальную жорданову форму. Эта жорданова нормальная форма определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

**Замечание.** Базис, в котором матрица оператора $\hat{A}$ из теоремы 1 имеет нормальную жорданову форму, называется **каноническим базисом**.

**Теорема 1** (**о жордановой форме**). *Если* $U$ *— линейное пространство над полем* $K$, $\hat{A}$ *— линейный оператор пространства* $U$ *и характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *вполне приводим над полем* $K$, *то есть имеет вид* $(\lambda-\mu_1)^{k_1}(\lambda-\mu_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\mu_m)^{k_m}$, *то существует такой базис* **Б** *пространства* $U$, *в котором матрица* $A_{\mathbf{Б}}$ *оператора* $\hat{A}$ *имеет нормальную жорданову форму. Эта жорданова нормальная форма определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

**Доказательство** этой теоремы предваряется рядом лемм.

**Лемма 1 (о корневом подпространстве).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U$, $\mu$ *— собственное значение этого оператора. Тогда множество* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ *является подпространством пространства* $U$ *(точнее, носителем подпространства).*

**Доказательство.**

**Лемма 1 (о корневом подпространстве).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U$, $\mu$ *— собственное значение этого оператора. Тогда множество* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A} - \mu\hat{E})^n$ *является подпространством пространства* $U$ *(точнее, носителем подпространства).*

**Доказательство.** Это очевидное следствие **критерия подпространства** и того факта, что $\operatorname{Ker}(\hat{A} - \mu\hat{E})^n \subseteq \operatorname{Ker}(\hat{A} - \mu\hat{E})^{n+1}$.

**Лемма 1 (о корневом подпространстве).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U$, $\mu$ *— собственное значение этого оператора. Тогда множество* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ *является подпространством пространства* $U$ *(точнее, носителем подпространства).*

**Доказательство.** Это очевидное следствие **критерия подпространства** и того факта, что $\operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n \subseteq \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^{n+1}$.

**Определение 3.** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U$, $\mu$ *— собственное значение этого оператора. Тогда множество* $U(\hat{A},\mu) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\hat{A}-\mu\hat{E})^n$ *называется* **корневым подпространством, соответствующим собственному значению** $\mu$.

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A} - \mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda) = f(\lambda + \mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A}) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

**Доказательство.**

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=$$

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A} - \mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda) = f(\lambda + \mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A}) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A = A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B} = \hat{A} - \mu\hat{E}$, $B = B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda) = |B - \lambda E| =$$

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ *—* ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{Б}$ — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=$$

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$, *то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}-\mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. *В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\dots,\nu_s-\mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=$$

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A} - \mu\hat{E}$ равен $g(\lambda) = f(\lambda + \mu)$. В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A}) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A = A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B} = \hat{A} - \mu\hat{E}$, $B = B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda) = |B - \lambda E| = |A - \mu E - \lambda E| = |A - (\lambda + \mu)E| = f(\lambda + \mu).$$

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Если* $f(\lambda)$ — ***характеристический полином оператора*** $\hat{A}$*, то характеристический полином* $g(\lambda)$ *оператора* $\hat{A} - \mu\hat{E}$ *равен* $g(\lambda) = f(\lambda + \mu)$*. В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A}) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$*, то* $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$*.*

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A = A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B} = \hat{A} - \mu\hat{E}$, $B = B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda) = |B - \lambda E| = |A - \mu E - \lambda E| = |A - (\lambda + \mu)E| = f(\lambda + \mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

**Лемма 2** (**о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$**). *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A}-\mu\hat{E}$ равен $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. В частности, если $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, то $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.*

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$. Это утверждение о равенстве множеств. По определению равенства множеств надо проверить, что левая часть равенства является подмножеством правой части и наоборот.

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A}-\mu\hat{E}$ равен $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

Если $\theta\in\operatorname{spec}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$, то есть $\theta$ — корень многочлена $g(\lambda)$, то $0=g(\theta)=f(\theta+\mu)$. Значит, $\theta+\mu=\nu_i$ для некоторого номера $i$. Следовательно, $\theta=$

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A} - \mu\hat{E}$ равен $g(\lambda) = f(\lambda + \mu)$. В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A}) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A = A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B} = \hat{A} - \mu\hat{E}$, $B = B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda) = |B - \lambda E| = |A - \mu E - \lambda E| = |A - (\lambda + \mu)E| = f(\lambda + \mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) = \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

Если $\theta \in \operatorname{spec}\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$, то есть $\theta$ — корень многочлена $g(\lambda)$, то $0 = g(\theta) = f(\theta + \mu)$. Значит, $\theta + \mu = \nu_i$ для некоторого номера $i$. Следовательно, $\theta = \nu_i - \mu$,
то есть $\operatorname{spec}(\hat{A} - \mu\hat{E}) \subseteq \{\nu_1 - \mu, \nu_2 - \mu, \ldots, \nu_s - \mu\}$.

**Лемма 2 (о полиномах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Если $f(\lambda)$ — **характеристический полином оператора** $\hat{A}$, то характеристический полином $g(\lambda)$ оператора $\hat{A}-\mu\hat{E}$ равен $g(\lambda)=f(\lambda+\mu)$. В частности, если* $\operatorname{spec}(\hat{A})=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$, *то* $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$.

**Доказательство.** Пусть **Б** — базис линейного пространства $U$, $A=A_{\mathbf{Б}}$, $\hat{B}=\hat{A}-\mu\hat{E}$, $B=B_{\mathbf{Б}}$. Тогда

$$g(\lambda)=|B-\lambda E|=|A-\mu E-\lambda E|=|A-(\lambda+\mu)E|=f(\lambda+\mu).$$

Осталось доказать, что $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})=\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$. Это утверждение о равенстве множеств. По определению равенства множеств надо проверить, что левая часть равенства является подмножеством правой части и наоборот.

Обратное включение $\operatorname{spec}(\hat{A}-\mu\hat{E})\supseteq\{\nu_1-\mu,\nu_2-\mu,\ldots,\nu_s-\mu\}$ очевидно. Лемма доказана.

**Лемма 3** (**об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$**). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.**

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство* $V \leq U$ *является* $\hat{A}$*-инвариантным если, и только если* $V$ *является* $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$*-инвариантным. Если при этом* $\mu$ *— собственное значение линейного оператора* $\hat{A}$*, то* $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ *для любого* $\lambda$*.*

**Доказательство.** Это следствие из определений.

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $\mathbf{x}$ из $V$.

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $\mathbf{x}$ из $V$. Тогда, по определению сложения операторов и умножения оператора на скаляр,

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $\mathbf{x}$ из $V$. Тогда, по определению сложения операторов и умножения оператора на скаляр,

$$\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)(\mathbf{x}) = \hat{A}(\mathbf{x}) - \mu\hat{E}(\mathbf{x}) = \hat{A}(\mathbf{x}) - \mu\mathbf{x} \in V,$$

так как $V$ — подпространство и $\hat{A}(\mathbf{x}) \in V$, $-\mu\mathbf{x} \in V$.

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \le U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$.

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$. Мы доказываем *равенство множеств*. Надо показать, что

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$. Мы доказываем *равенство множеств*. Надо показать, что

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu) \Rightarrow \mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda), \\ \end{cases}$$

**Лемма 3** (**об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$**). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Осталось доказать равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$. Мы доказываем *равенство множеств*. Надо показать, что

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu) \Rightarrow \mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda), \\ \mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda) \Rightarrow \mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu). \end{cases}$$

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \le U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \le U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A},\mu)$. Тогда

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu)$. Тогда для некоторого $k$ имеем

$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k =$

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \le U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu)=U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A},\mu)$. Тогда для некоторого $k$ имеем

$$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}+\lambda\hat{E}-\mu\hat{E}\right)^k =$$

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu)=U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A},\mu)$. Тогда для некоторого $k$ имеем

$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)^k =$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}+\lambda\hat{E}-\mu\hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}-(\mu-\lambda)\hat{E}\right)^k,$$

следовательно,

**Лемма 3 (об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}-\mu\hat{E}$).** *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A},\mu) = U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A},\mu)$. Тогда для некоторого $k$ имеем

$$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\mu\hat{E}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}+\lambda\hat{E}-\mu\hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}-(\mu-\lambda)\hat{E}\right)^k,$$

следовательно, $\mathbf{x} \in U(\hat{A}-\lambda\hat{E},\mu-\lambda)$.

**Лемма 3** (**об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$**). *Подпространство $V \leq U$ является $\hat{A}$-инвариантным если, и только если $V$ является $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$-инвариантным. Если при этом $\mu$ — собственное значение линейного оператора $\hat{A}$, то $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$ для любого $\lambda$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $V$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство.

Итак, пусть $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu)$. Тогда для некоторого $k$ имеем

$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k =$

$$= \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \lambda\hat{E} + \lambda\hat{E} - \mu\hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \lambda\hat{E} - (\mu - \lambda)\hat{E}\right)^k,$$

следовательно, $\mathbf{x} \in U(\hat{A} - \lambda\hat{E}, \mu - \lambda)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ — *линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ — $\hat{A}$-*инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ — *характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.**

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ — *линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ — $\hat{A}$*-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ — *характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** Как известно, **характеристический полином линейного оператора равен характеристическому полиному его матрицы в любом базисе** (коэффициенты полинома являются инвариантами линейного оператора, поэтому полином $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda \mathbf{E}\right|$ не зависит от выбора базиса $\mathbf{Б}$).

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ *—* $\hat{A}$*-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ *— характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{Б}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис линейного пространства $U$ и $\mathbf{Б}_2 = \{\mathbf{e}_{m+1}, \mathbf{e}_{m+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $V$, причем $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на $U$ в базисе $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на $V$ в базисе $\mathbf{Б}_2$.

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$*, где* $U$ *и* $V$ *—* $\hat{A}$*-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ *— характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$*, то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{Б}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис линейного пространства $U$ и $\mathbf{Б}_2 = \{\mathbf{e}_{m+1}, \mathbf{e}_{m+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $V$, причем $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на $U$ в базисе $\mathbf{Б}_1$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на $V$ в базисе $\mathbf{Б}_2$.

Тогда, очевидно, система векторов $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ является базисом линейного пространства $U \oplus V$.

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ *—* $\hat{A}$*-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ *— характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на $U$ и, соответственно, на $V$.

Согласно **критерию полураспавшейся матрицы**, матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$.

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ *—* $\hat{A}$*-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ *— характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** $\text{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\text{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\text{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на $U$ и, соответственно, на $V$.

$$\mathbf{A}_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\text{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\text{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе **Б**.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ *— $\hat{A}$-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ *— характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на $U$ и, соответственно, на $V$.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda \mathbf{E}_{n\times n}\right| =$$

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ — *линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ — $\hat{A}$-*инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ — *характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на $U$ и, соответственно, на $V$.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе **Б**.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}_{n\times n}\right| = \left|\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} - \lambda\mathbf{E}_{m\times m}\right| \cdot \left|\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} - \lambda\mathbf{E}_{(n-m)\times(n-m)}\right| =$$

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ — *линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ — $\hat{A}$-*инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ — *характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на $U$ и, соответственно, на $V$.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе **Б**.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}_{n\times n}\right| = \left|\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} - \lambda\mathbf{E}_{m\times m}\right| \cdot \left|\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} - \lambda\mathbf{E}_{(n-m)\times(n-m)}\right| = g(\lambda) \cdot h(\lambda),$$

**Лемма 4 (о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств).** *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* $U \oplus V$, *где* $U$ *и* $V$ *—* $\hat{A}$*-инвариантные подпространства. Если* $g(\lambda)$ *и* $h(\lambda)$ *— характеристические полиномы ограничения оператора* $\hat{A}$ *на* $U$ *и, соответственно, на* $V$, *то характеристический полином оператора* $\hat{A}$ *равен* $g(\lambda) \cdot h(\lambda)$.

**Доказательство.** $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис для $U \oplus V$, $\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1}$ и $\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2}$ — матрицы ограничений оператора $\hat{A}$ на $U$ и, соответственно, на $V$.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} \end{pmatrix}$$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

По свойству **детерминанта полураспавшейся матрицы**

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda\mathbf{E}_{n\times n}\right| = \left|\mathbf{A}^U_{\mathbf{Б}_1} - \lambda\mathbf{E}_{m\times m}\right| \cdot \left|\mathbf{A}^V_{\mathbf{Б}_2} - \lambda\mathbf{E}_{(n-m)\times(n-m)}\right| = g(\lambda)\cdot h(\lambda),$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях **теоремы 1** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, где $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.*

**Доказательство.** Индукция по размерности пространства. База индукции

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.** Индукция по размерности пространства. База индукции — $\dim U = 1$ — очевидна.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.** Пусть $\dim U = n > 1$ и для любого линейного пространства меньшей размерности утверждение леммы верно.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.** Пусть $\dim U = n > 1$ и для любого линейного пространства меньшей размерности утверждение леммы верно. Пусть $\mu_1$ — собственное значение оператора $\hat{A}$, $U(\hat{A}, \mu_1)$ — **корневое** подпространство линейного оператора $\hat{A}$, соответствующее числу $\mu_1$. Тогда

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях **теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.** Пусть $\dim U = n > 1$ и для любого линейного пространства меньшей размерности утверждение леммы верно. Пусть $\mu_1$ — собственное значение оператора $\hat{A}$, $U(\hat{A}, \mu_1)$ — **корневое** подпространство линейного оператора $\hat{A}$, соответствующее числу $\mu_1$. Тогда

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле,

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

**Лемма 5** (**о сумме корневых подпространств**). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Тогда с помощью индукции по $s \geq 1$ получаем, что

$$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \ldots = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+s}.$$

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Тогда с помощью индукции по $s \geq 1$ получаем, что

$$\operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \ldots = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+s}.$$

Так как до $k$-го шага включительно размерности подпространств $\operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^i$ увеличивались, но размерность подпространства $\operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k$ не больше $n = \dim U$, то

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях теоремы 1* $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

В самом деле, пусть

$$\{\mathbf{0}\} < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right) < \ldots < \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+1}.$$

Тогда с помощью индукции по $s \geq 1$ получаем, что

$$\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k = \ldots = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{k+s}.$$

Так как до $k$-го шага включительно размерности подпространств $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^i$ увеличивались, но размерность подпространства $\operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^k$ не больше $n = \dim U$, то $k \leq n$.

Равенства (1) доказаны.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$.
Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$.
Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях теоремы 1* $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$. Так как $\mathbf{x} \in W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$, то найдется такой вектор $\mathbf{y}$, что $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях **теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$. Так как $\mathbf{x} \in W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$, $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$. Согласно равенствам (1), имеем

$$\mathbf{0} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{x}) = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n} (\mathbf{y}).$$

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$. Так как $\mathbf{x} \in W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$, $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$. Согласно равенствам (1), имеем

$$\mathbf{0} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{x}) = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n} (\mathbf{y}).$$

Таким образом, $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}$.

**Лемма 5** (**о сумме корневых подпространств**). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \tag{1}$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Докажем, что $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus W$. Для этого, в силу **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора**, достаточно проверить, что $U(\hat{A}, \mu_1) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем $\mathbf{x} \in U(\hat{A}, \mu_1) \cap W$, $\quad \mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y})$.

Итак, $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}$. Из равенств (1) получаем $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n$. Следовательно, $\mathbf{x} = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Итак $\operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \cap \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = \{\mathbf{0}\}$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях **теоремы 1** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, где $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.*

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Мы доказали что

$\operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \cap \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = \{\mathbf{0}\}$.

Как отмечалось выше, из **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора** следует, что

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}. \qquad (1)$$

Положим $W = \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Мы доказали что $\operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \cap \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = \{\mathbf{0}\}$.

Как отмечалось выше, из **теоремы о сумме ранга и дефекта линейного оператора** следует, что

$$U = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \qquad (2)$$

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

В силу условия доказываемой леммы и леммы о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств характеристический полином ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ является вполне приводимым.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

В силу условия доказываемой леммы и леммы о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств характеристический полином ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ является вполне приводимым.

По предположению индукции подпространство $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$.

**Лемма 5 (о сумме корневых подпространств).** *В условиях теоремы 1* $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \tag{1}$$

$$U = \operatorname{Ker} \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \tag{2}$$

По предположению индукции подпространство $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$.

**Лемма 5** (**о сумме корневых подпространств**). *В условиях* ***теоремы 1*** $U = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \ldots \oplus U(\hat{A}, \mu_m)$, *где* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \operatorname{spec} \hat{A}$.

**Доказательство.**

$$U(\hat{A}, \mu_1) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^{2n}, \qquad (1)$$

$$U = \operatorname{Ker}\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U) = U(\hat{A}, \mu_1) \oplus \left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U). \qquad (2)$$

По предположению индукции подпространство $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств ограничения оператора $\hat{A}$ на $\left(\hat{A} - \mu_1 \hat{E}\right)^n (U)$. Эти подпространства являются корневыми и для оператора $\hat{A}$. Таким образом, получаем требуемое разложение пространства $U$ в прямую сумму корневых подпространств.

Лемма доказана.

**Следствие 1 (о размерности корневого подпространства).** *Если характеристический полином* $f(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}$ *вполне разложим, то есть представим в виде* $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, *то для любого* $i$ *с условием* $1 \leq i \leq m$ *имеет место равенство* $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. *Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению* $\mu_i$, *равна кратности корня* $\mu_i$ *многочлена* $f(\lambda)$.

**Доказательство.** Это очевидное следствие из **леммы о сумме корневых подпространств** и из **леммы о прямой сумме $\hat{A}$-инвариантных подпространств**.

**Следствие 1 (о размерности корневого подпространства).** *Если характеристический полином $f(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ вполне разложим, то есть представим в виде $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то для любого $i$ с условием $1 \leq i \leq m$ имеет место равенство $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению $\mu_i$, равна кратности корня $\mu_i$ многочлена $f(\lambda)$.*

**Доказательство.** Дело в том, что если $\hat{B}$ — ограничение оператора $\hat{A}$ на **корневое** подпространство $U(\hat{A}, \mu_i)$ оператора $\hat{A}$, то характеристический полином оператора $\hat{B}$ не имеет других корней, кроме $\mu$.

**Следствие 1 (о размерности корневого подпространства).** *Если характеристический полином* $f(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}$ *вполне разложим, то есть представим в виде* $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2}\dots(\lambda - \mu_m)^{k_m}$, *то для любого* $i$ *с условием* $1 \le i \le m$ *имеет место равенство* $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. *Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению* $\mu_i$, *равна кратности корня* $\mu_i$ *многочлена* $f(\lambda)$.

**Доказательство.** Если бы нашелся корень $\theta \neq \mu$ характеристического полинома оператора $\hat{B}$, то для него в этом корневом подпространстве нашелся бы собственный вектор $\mathbf{x}$. Однако индукция дает $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k(\mathbf{x}) = (\theta - \mu)^k\mathbf{x}$, что ни при каком натуральном $k$ не равно нулевому вектору. Это противоречит тому, что

**Следствие 1** (**о размерности корневого подпространства**). *Если характеристический полином $f(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ вполне разложим, то есть представим в виде $f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{k_1}(\lambda - \mu_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \mu_m)^{k_m}$, то для любого $i$ с условием $1 \le i \le m$ имеет место равенство $\dim U(\hat{A}, \mu_i) = k_i$. Иными словами, размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению $\mu_i$, равна кратности корня $\mu_i$ многочлена $f(\lambda)$.*

**Доказательство.** Если бы нашелся корень $\theta \neq \mu$ характеристического полинома оператора $\hat{B}$, то для него в этом корневом подпространстве нашелся бы собственный вектор $\mathbf{x}$. Однако индукция дает $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k(\mathbf{x}) = (\theta - \mu)^k\mathbf{x}$, что ни при каком натуральном $k$ не равно нулевому вектору. Это противоречит тому, что $\mathbf{x}$ принадлежит корневому подпространству оператора $\hat{A}$ (и, значит, корневому подпространству оператора $\hat{B}$), отвечающему собственному значению $\mu$.

**Определение нильпотентного оператора**

**Лемма об инвариантных подпространствах операторов** $\hat{A}$ и $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$ и **лемма о сумме корневых подпространств** сводит задачу построения канонического базиса к ситуации, когда все пространство — **корневое**.

## Определение нильпотентного оператора

**Лемма об инвариантных подпространствах операторов $\hat{A}$** и $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$ и **лемма о сумме корневых подпространств** сводит задачу построения канонического базиса к ситуации, когда все пространство — **корневое**.

**Определение 4.** *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства $U$ называется* **нильпотентным** *тогда и только тогда, когда $U$ является корневым подпространством оператора $\hat{A}$, отвечающим собственному значению $0$.*

**Определение нильпотентного оператора**

**Лемма об инвариантных подпространствах операторов** $\hat{A}$ и $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)$ и **лемма о сумме корневых подпространств** сводит задачу построения канонического базиса к ситуации, когда все пространство — **корневое**.

**Определение 4.** *Линейный оператор* $\hat{A}$ *линейного пространства* $U$ *называется* **нильпотентным** *тогда и только тогда, когда* $U$ *является корневым подпространством оператора* $\hat{A}$*, отвечающим собственному значению* $0$*.*

Итак, линейный оператор $\hat{A}$ является нильпотентным если и только если для некоторого натурального числа $k$ имеет место равенство $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.**

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $k$ — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $k$ — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $k$ — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U,$ поэтому $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $k$ — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$
$\leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $k$ — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \leq \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U,$ поэтому $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$
$\leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq \ldots \leq \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}(U) \leq$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $k$ — наименьшее такое натуральное число, что $\hat{A}^k(U) = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}\}$ для $\hat{A}^{k-1}(U) \le \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)$. Имеем $\{\mathbf{0}\} = \hat{A}^k(U) < \hat{A}^{k-1}(U) < \ldots < \hat{A}(U) < U$, поэтому $\{\mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \le \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \le$
$\le \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \le \ldots \le \operatorname{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}(U) \le \operatorname{Ker}(\hat{A})$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** $\{\mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^k(U) \leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-1}(U) \leq$ $\leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-2}(U) \leq \ldots \leq \mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}(U) \leq \mathrm{Ker}(\hat{A})$.
Поэтому можно выбрать такой базис пространства $\mathrm{Ker}\,\hat{A}$

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-2}+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\},$$

что для каждого $p$ векторы $\mathbf{e}_{m_p+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{p+1},1}$ дополняют базис

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{p-1}+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_p,1}\right\}$$

линейного пространства $\mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-p}(U)$ до базиса

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_p+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{p+1},1}\right\}$$

линейного пространства $\mathrm{Ker}(\hat{A}) \cap \hat{A}^{k-p-1}(U)$.

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Положим $m_0 = 0$. Для каждых $i, j$ с условиями $\begin{cases} 1 \leq i \leq k-1 \\ 1 \leq j \leq m_i - m_{i-1} \end{cases}$ обозначим через $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}$ некоторые фиксированные прообразы векторов $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$ относительно действия $\hat{A}^{k-i-1}$. Таким образом, $\hat{A}^{k-i-1}(\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}) = \mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$.

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Положим $m_0 = 0$. Для каждых $i, j$ с условиями $\begin{cases} 1 \le i \le k-1 \\ 1 \le j \le m_i - m_{i-1} \end{cases}$ обозначим через $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}$ некоторые фиксированные прообразы векторов $\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$ относительно действия $\hat{A}^{k-i-1}$. Таким образом, $\hat{A}^{k-i-1}(\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}) = \mathbf{e}_{m_{i-1}+j,1}$.

Для каждых $i, j, t$ с условиями $\begin{cases} 1 \le i \le k-1 \\ 1 \le j \le m_i - m_{i-1} \\ 1 \le t \le k-i \end{cases}$ положим

$$\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,t} = \hat{A}^{k-i-t}(\mathbf{e}_{m_{i-1}+j,k-i}) \tag{3}$$

(для $t = 1$ это равенство выполняется автоматически).

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Для наглядности проиллюстрируем ситуацию следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{e}_{1,k-1} & \dots & \mathbf{e}_{m_1,k-1} & & & & & & \\
\mathbf{e}_{1,k-2} & \dots & \mathbf{e}_{m_1,k-2} & \mathbf{e}_{m_1+1,k-2} & \dots & \mathbf{e}_{m_2,k-2} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\mathbf{e}_{1,1} & \dots & \mathbf{e}_{m_1,1} & \mathbf{e}_{m_1+1,1} & \dots & \mathbf{e}_{m_2,1} & \dots & \mathbf{e}_{m_{k-2},1} & \dots \;\; \mathbf{e}_{m_{k-1},1},
\end{array}$$

причем в этой «таблице» векторы, стоящие строкой ниже, являются образом, относительно $\hat{A}$, соответствующего вышестоящего вектора.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

## Доказательство.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathbf{e}_{1,1}\quad\dots\quad\mathbf{e}_{m_1,1}}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}^{k-1}(U)}\;\Big|\;\mathbf{e}_{m_1+1,1}\quad\dots\quad\mathbf{e}_{m_2,1}}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}^{k-2}(U)}\;\Big|\;\dots}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}^{k-i}(U)}\;\Big|\;\dots}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})\cap\hat{A}(U)}\;\Big|\;\mathbf{e}_{m_{k-2},1}\quad\dots\quad\mathbf{e}_{m_{k-1},1}}_{\mathrm{Ker}(\hat{A})}$$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Теперь осталось доказать, что

$$\text{Б} = \left\{\mathbf{e}_{1,k-1}, \mathbf{e}_{1,k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{2,k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}, \right\}$$

— искомый канонический базис. Нетривиальным здесь является только доказательство того факта, что **Б** — базис.

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Докажем сначала, что система

$$\text{Б} = \left\{\mathbf{e}_{1,k-1}, \mathbf{e}_{1,k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{2,k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}, \right\}$$

**линейно независима**.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты $\lambda_{ij}$ — ненулевые и $q$ — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого $i$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты $\lambda_{ij}$ — ненулевые и $q$ — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого $i$.

Подействуем на левую и правую части равенства оператором $\hat{A}^{q-1}$, получим

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1}\sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p}\sum\limits_{j=1}^{k-p}\lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j}=\mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты $\lambda_{ij}$ — ненулевые и $q$ — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq}\neq 0$ для некоторого $i$.

$$=\hat{A}^{q-1}(\mathbf{0})=\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p}\sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}}\lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j})=$$

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты $\lambda_{ij}$ — ненулевые и $q$ — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого $i$.

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij}\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты $\lambda_{ij}$ — ненулевые и $q$ — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого $i$.

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq}\hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,q}) =$$

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k-1} \sum\limits_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum\limits_{j=1}^{k-p} \lambda_{ij} \mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{0}$, причем некоторые коэффициенты $\lambda_{ij}$ — ненулевые и $q$ — наибольший такой номер, что $\lambda_{iq} \neq 0$ для некоторого $i$.

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{q-1}(\mathbf{0}) = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \sum_{j=1}^{\max\{q,k-p\}} \lambda_{ij} \hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,j}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq} \hat{A}^{q-1}(\mathbf{e}_{i,q}) = \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq} \mathbf{e}_{i,1}.$$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если $\hat{A}$ — нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства $U$, то имеется канонический базис линейного пространства $U$.*

**Доказательство.** Получили

$$\mathbf{0} = \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq} \mathbf{e}_{i,1}.$$

Но система векторов

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-2},1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\}$$

**линейно независима**, противоречие.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Получили

$$\mathbf{0} = \sum_{p=1}^{k-q} \sum_{i=m_{p-1}+1}^{m_p} \lambda_{iq}\mathbf{e}_{i,1}.$$

Но система векторов

$$\left\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \mathbf{e}_{m_1+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_2,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-2},1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\}$$

**линейно независима**, противоречие.

Значит, все $\lambda_{ij}$ равны 0, то есть система **Б** **линейно независима**.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Теперь осталось доказать, что

$$\text{Б} = \left\{\mathbf{e}_{1,k-1}, \mathbf{e}_{1,k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{2,k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m_{k-1},1}\right\}$$

— искомый канонический базис.

Теперь докажем, что система векторов **Б** полна, то есть любой вектор является линейной комбинацией векторов этой системы.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Пусть

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in U$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in U$. Имеем $\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-1}(U)$, то, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, найдутся такие коэффициенты $\lambda_{j,k-1}$, что

$$\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) = \lambda_{1,k-1}\mathbf{e}_{1,1} + \lambda_{2,k-1}\mathbf{e}_{2,1} + \ldots + \lambda_{m_1,k-1}\mathbf{e}_{m_1,1} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,1}.$$

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in U$. Имеем $\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-1}(U)$, то, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, найдутся такие коэффициенты $\lambda_{j,k-1}$, что

$$\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) = \lambda_{1,k-1}\mathbf{e}_{1,1} + \lambda_{2,k-1}\mathbf{e}_{2,1} + \ldots + \lambda_{m_1,k-1}\mathbf{e}_{m_1,1} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,1}.$$

Поэтому $\hat{A}^{k-2}\left(\mathbf{x} - \sum\limits_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-2}(U)$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in U$. Имеем $\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-1}(U)$, то, по **теореме о линейных комбинациях базисных векторов**, найдутся такие коэффициенты $\lambda_{j,k-1}$, что

$$\hat{A}^{k-1}(\mathbf{x}) = \lambda_{1,k-1}\mathbf{e}_{1,1} + \lambda_{2,k-1}\mathbf{e}_{2,1} + \ldots + \lambda_{m_1,k-1}\mathbf{e}_{m_1,1} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,1}.$$

Поэтому $\hat{A}^{k-2}\left(\mathbf{x} - \sum\limits_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right) \cap \hat{A}^{k-2}(U)$. Отсюда

$$\exists \lambda_{j,k-2} \quad \hat{A}^{k-2}\left(\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}\right) = \sum_{j=1}^{m_2} \lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,1}.$$

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Таким образом,

$$\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{m_1}\lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}-\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,k-2}\right)=$$

$$=\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}\right)\in\operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)\cap\hat{A}^{k-2}(U).$$

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Таким образом,

$$\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{m_1}\lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}-\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,k-2}\right)=$$

$$=\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}\right)\in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)\cap\hat{A}^{k-2}(U).$$

Продолжая этот процесс, в конце концов получим такой набор коэффициентов, что выполняется равенство $\mathbf{x}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}=\mathbf{0}$.

**Лемма 6 (о каноническом базисе корневого подпространства).** *Если* $\hat{A}$ — *нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$, *то имеется канонический базис линейного пространства* $U$.

**Доказательство.** Таким образом,

$$\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{m_1}\lambda_{j,k-1}\mathbf{e}_{j,k-1}-\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_{j,k-2}\mathbf{e}_{j,k-2}\right)=$$

$$=\hat{A}^{k-3}\left(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}\right)\in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}\right)\cap\hat{A}^{k-2}(U).$$

Из $\mathbf{x}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}=\mathbf{0}$ следует требуемое равенство $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}$.

**Лемма 6** (**о каноническом базисе корневого подпространства**). *Если* $\hat{A}$ *— нильпотентный линейный оператор ненулевого линейного пространства* $U$*, то имеется канонический базис линейного пространства* $U$*.*

**Доказательство.** Получили требуемое соотношение $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_{j,k-i}\mathbf{e}_{j,k-i}$.

Разумеется, последнее рассуждение следовало бы оформить с помощью математической индукции. Теорема доказана.

# Некоторые полезные факты

- Размерность корневого подпространства линейного оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению $\mu$, равна кратности корня $\mu$ характеристического многочлена оператора $\hat{A}$.

# Некоторые полезные факты

- Размерность корневого подпространства линейного оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению $\mu$, равна кратности корня $\mu$ характеристического многочлена оператора $\hat{A}$.
- В нормальной жордановой форме матрицы линейного оператора $\hat{A}$ количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению $\mu$, равно размерности ядра оператора $\hat{A} - \mu\hat{E}$.

# Некоторые полезные факты

- Размерность корневого подпространства линейного оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению $\mu$, равна кратности корня $\mu$ характеристического многочлена оператора $\hat{A}$.
- В нормальной жордановой форме матрицы линейного оператора $\hat{A}$ количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению $\mu$, равно размерности ядра оператора $\hat{A} - \mu\hat{E}$.
- Более того, для любого натурального числа $k$ в нормальной жордановой форме матрицы линейного оператора $\hat{A}$ количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению $\mu$ и имеющих *не менее* $k$ строк, равно размерности ядра оператора $\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^k$.

# Некоторые полезные факты

- Максимальный размер жордановой клетки, отвечающей $\mu$, равен минимальному такому $k \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{Rg}\left(\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^{k}\right) = \operatorname{Rg}\left(\left(\hat{A} - \mu\hat{E}\right)^{k+1}\right)$.

# Построение канонического базиса

В соответствии с логикой доказательства теоремы о жордановой форме, для нахождения канонического базиса корневого подпространства $U(\hat{A}, \mu)$, мы переходим к рассмотрению линейного оператора $\hat{B} = \hat{A} - \mu\hat{E}$, так как, согласно **лемме об инвариантных подпространствах операторов** $\hat{A}$ и $\hat{A} - \mu\hat{E}$, имеет место равенство $U(\hat{A}, \mu) = U(\hat{A} - \mu\hat{E}, 0) = U(\hat{B}, 0)$. Мы найдем канонический базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ корневого подпространства $U(\hat{B}, 0)$, в нем матрица ограничения оператора $\hat{B}$ на инвариантное подпространство $U(\hat{B}, 0)$ имеет вид $\begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ & \ldots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & J_s \end{pmatrix}$, где $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ — жорданова клетка.

# Построение канонического базиса

Тогда, согласно теореме об изоморфности линейного пространства линейных операторов и линейного пространства матриц, матрица ограничения оператора $\hat{A}$ на инвариантное подпространство $U(\hat{A}, \mu)$ имеет в этом базисе вид $\begin{pmatrix} J_1' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2' & \dots & \mathbf{0} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & J_s' \end{pmatrix}$, где

$$J_p' = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}.$$

# Построение канонического базиса

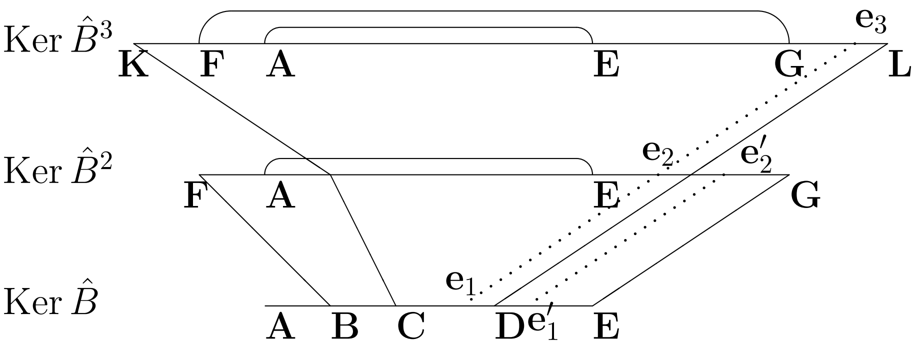


Рис. 2.

На рис. 2 мы изобразили **корневое** подпространство $U(\hat{B}, 0)$. Здесь горизонтальными отрезками изображены ядра линейных операторов: отрезок $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$ — это $\operatorname{Ker} \hat{B}$, отрезок $[\mathbf{F}, \mathbf{G}]$ — это $\operatorname{Ker} \hat{B}^2$, отрезок $[\mathbf{K}, \mathbf{L}]$ — это $\operatorname{Ker} \hat{B}^3$. При этом отрезок $[\mathbf{B}, \mathbf{E}]$ изображает множество всех тех векторов из ядра, у которых есть прообразы относительно $\hat{B}$, то есть $[\mathbf{B}, \mathbf{E}]$ изображает множество $\hat{B}(\operatorname{Ker} \hat{B}^2)$. Отрезок $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ изображает множество $\hat{B}^2(\operatorname{Ker} \hat{B}^3)$.

# Построение канонического базиса

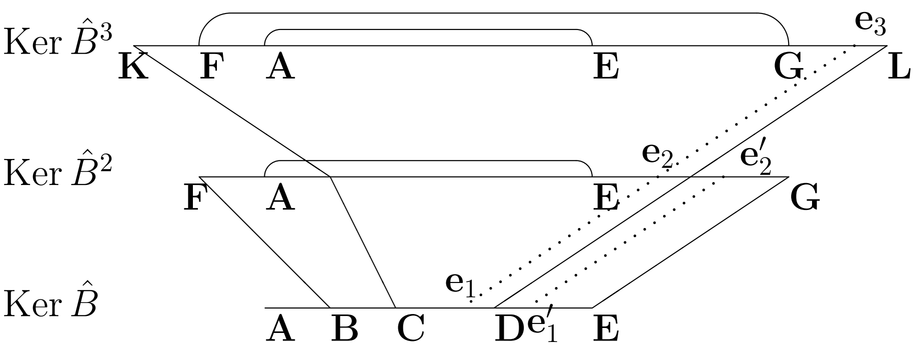


Рис. 2.

Образно говоря, у каждого элемента из $[\mathbf{B},\mathbf{E}]$ есть «папа» (прообраз относительно $\hat{B}$), причем у элементов из $[\mathbf{C},\mathbf{D}]$ — даже «дедушка» (прообраз относительно $\hat{B}^2$), а вот каждый элемент из $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ — «сирота».

## Построение канонического базиса

Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис жордановой клетки, то есть такой базис инвариантного подпространства, в котором матрица оператора $\hat{B}$ имеет вид жордановой клетки (строго говоря, речь надо вести не об операторе $\hat{B}$, а о его ограничении на это инвариантное подпространство), то $\hat{B}$ действует на базисные векторы так: $\hat{B}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k-1}, \ \ldots, \ \hat{B}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$. Значит, для нахождения базиса жордановой клетки достаточно выбрать вектор $\mathbf{e}_1$ из $\operatorname{Ker} \hat{B}$, взять в качестве $\mathbf{e}_2$ прообраз вектора $\mathbf{e}_1$ относительно $\hat{B}$ и продолжать в таком же духе «выращивать» этот базис до тех пор, пока у вектора $\mathbf{e}_k$ не окажется прообраза. Однако тут есть одна проблема. Дело вот в чем.

## Построение канонического базиса

Вообще говоря, не у каждого элемента из ядра есть «предок». Более того, если в $\operatorname{Ker}\hat{B}$ есть «сироты» (векторы, не имеющие прообраза относительно $\hat{B}$), то «почти каждый» элемент из $\operatorname{Ker}\hat{B}$ — «сирота». В самом деле, если, например, $\operatorname{Ker}\hat{B}$ — плоскость, в которой есть «сироты» (но у некоторых векторов есть «папы»), то множество векторов, у которых есть прообраз относительно $\hat{B}$, образуют одномерное подпространство — прямую, в то время как все остальные векторы этой плоскости — «сироты».

# Построение канонического базиса

Поэтому построение базисов «маленьких клеток» обычно не вызывает трудностей: как правило, наугад выбранный «сынок», то есть вектор из $\operatorname{Ker}\hat{B}$, либо вообще не имеет «предков», либо его «генеалогическое древо» является коротким. Следовательно, в ситуации, когда не у всех векторов из $\operatorname{Ker}\hat{B}$ «генеалогическое древо» одинаковой длины, при построении канонического базиса одна из важнейших задач состоит в том, чтобы найти в $\operatorname{Ker}\hat{B}$ «самые родовитые» векторы, у которых имеются как можно более «далекие предки».

# Построение канонического базиса

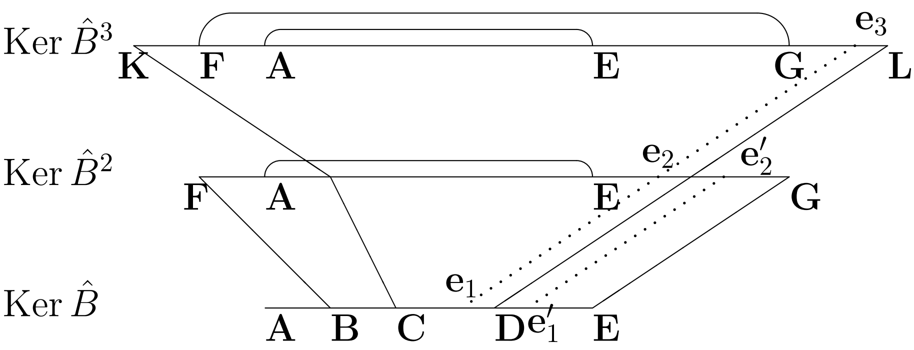


Рис. 2.

Например, таким является изображенный **на рисунке 2** вектор $\mathbf{e}_1$. Вектор $\mathbf{e}_1'$ имеет прообразы только относительно действия оператора $\hat{B}$, но относительно действия оператора $\hat{B}^2$ прообразов у него нет.

# Спасибо

# за

# внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?