e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Функция Эйлера

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

Екатеринбург
2012

I. Функция Эйлера

Определение 1. *Функция Эйлера φ определяется формулой: для натурального числа n число $\varphi(n)$ равно количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.*

Рассмотреть пример?

I. Функция Эйлера

Определение 1. *Функция Эйлера φ определяется формулой: для натурального числа n число $\varphi(n)$ равно количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.*

Задача нахождения значения функции Эйлера возникает, например, при определении количества **первообразных комплексных корней степени n из 1**, см. **критерий первообразности корня**.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \qquad (1)$$

Доказательство.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{aligned}\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n, через A_0.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{gathered}\varphi\left(n\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n, через A_0. Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0, которые делятся на p_1. Количество элементов во множестве B_1 равно

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$*, где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n, через A_0. Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0, которые делятся на p_1. Количество элементов во множестве B_1 равно $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{aligned} \varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n, через A_0. Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0, которые делятся на p_1. Количество элементов во множестве B_1 равно $p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Значит во множестве A_1 всех чисел из A_0, не делящихся на p_1, количество элементов равно

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n, через A_0. Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0, которые делятся на p_1. Количество элементов во множестве B_1 равно $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Значит во множестве A_1 всех чисел из A_0, не делящихся на p_1, количество элементов равно

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то*

$$\begin{aligned} \varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство.

Доказательство. Итак, количество всех чисел из A_0, делящихся на p_1, равно $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, а количество всех чисел из A_0, не делящихся на p_1, равно

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Напрашивается провести доказательство методом индукции.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{aligned} \varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Итак, количество всех чисел из A_0, делящихся на p_1, равно $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, а количество всех чисел из A_0, не делящихся на p_1, равно

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Напрашивается провести доказательство методом индукции. База индукции доказана.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{aligned} \varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\frac{\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}{p_{m+1}} =$$

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \le m < k$ и для любого $1 \le s \le m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\frac{\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}{p_{m+1}} =$$

$$= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \backslash B_{m+1} = A_0 \backslash \left((A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}\right)$ равно

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \backslash B_{m+1} = A_0 \backslash \left((A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}\right)$ равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} -$$

$$- \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} =$$

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \backslash B_{m+1} = A_0 \backslash \left((A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}\right)$ равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} -$$

$$- \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} =$$

$$= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot \left(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} - p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1}\right) \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0, делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Допустим, что $1 \le m < k$ и для любого $1 \le s \le m$ количество всех чисел из $A_0 \backslash B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \backslash B_{m+1} = A_0 \backslash \left((A_0 \backslash B_m) \cap B_{m+1}\right)$ равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} -$$

$$- \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} =$$

$$= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot \left(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} - p_{m+1}^{\alpha_{m+1} - 1}\right) \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Шаг индукции доказан.

II. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 1. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *где* p_i *— различные простые числа, то*

$$\begin{aligned}\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Итак, мы доказали, что для любого $1 \leq m \leq n$ количество элементов во множестве всех чисел, не превосходящих n и не делящихся на $p_1, p_2, \ldots, p_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m - 1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

При $k = m$ получаем **формулу (1)**.

III. Следствие о $\varphi\left(p^{\alpha}\right)$

Следствие 1. *Если p — простое число, то*

$$\varphi\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}, \qquad \varphi(p)=p-1. \tag{2}$$

Доказательство.

III. Следствие о $\varphi\left(p^{\alpha}\right)$

Следствие 1. *Если* p *— простое число, то*

$$\varphi\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}, \qquad \varphi\left(p\right)=p-1. \tag{2}$$

Доказательство. Это очевидное следствие **формулы (1)**.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?