Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Гамма-функция

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция

В этом разделе мы рассмотрим важный для многих применений пример приложения несобственных интегралов, зависящих от параметра. Особое внимание мы уделим так называемой гамма-функции, продолжающей функцию натурального аргумента $f(n) = n!$ «почти на все» множество всех действительных чисел.

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция

Определение 1. Эйлеровым интегралом первого рода *называется функция* $\mathbf{B}(p,q)$*, заданной формулой*

$$\mathbf{B}(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

где $Re(p)>0 \quad$ *и* $\quad Re(q)>0.$

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция

Определение 1. Эйлеровым интегралом первого рода *называется функция* $\mathbf{B}(p,q)$, *заданной формулой*

$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

где $Re(p) > 0 \quad$ *и* $\quad Re(q) > 0$.

Определение 2. Гамма-функцией (Эйлеровым интегралом второго рода) *называется функция* $\Gamma(y)$ *заданная для положительных значений переменной* y *формулой* $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{y-1}e^{-x}\,dx$.

Значения гамма-функции для отрицательных нецелых значений переменной y *определяются с помощью рекуррентного соотношения* $\Gamma(y) = \dfrac{\Gamma(y+1)}{y}$, *справедливость которого для положительных значений переменной* y *доказана ниже.*

График гамма-функции приведен **на рис.1.**

Определение 2. Гамма-функцией (Эйлеровым интегралом второго рода) *называется функция* $\Gamma(y)$ *заданная для положительных значений переменной* y *формулой* $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{y-1}e^{-x}\,dx.$ *Значения гамма-функции для отрицательных нецелых значений переменной* y *определяются с помощью рекуррентного соотношения* $\Gamma(y) = \dfrac{\Gamma(y+1)}{y}.$

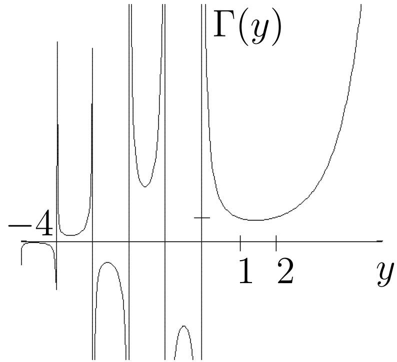

Рис. 1. График гамма-функции.

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2,$

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2,$

Связь с факториалом: $\Gamma(n+1) = n!$ Таким образом, гамма-функция является продолжением факториала на все действительные значения аргумента, кроме $\{0, -1, -2, \ldots\}$.

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2,$

Связь с факториалом: $\Gamma(n+1) = n!$ Таким образом, гамма-функция является продолжением факториала на все действительные значения аргумента, кроме $\{0, -1, -2, \ldots\}$.

Формулы приведения: если $p = n + \alpha$, где n — целое число и $0 < \alpha < 1$, то

$$\Gamma(n+\alpha) = (n+\alpha-1) \cdot (n+\alpha-2) \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Эту формулу записывают и так:

$$\Gamma(p) = (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-n) \cdot \Gamma(p-n), \qquad \text{если} \quad p - n > 0.$$

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2,$

Связь с факториалом: $\Gamma(n+1) = n!$ Таким образом, гамма-функция является продолжением факториала на все действительные значения аргумента, кроме $\{0, -1, -2, \ldots\}$.

Формулы приведения: если $p = n + \alpha$, где n — целое число и $0 < \alpha < 1$, то

$$\Gamma(n+\alpha) = (n+\alpha-1) \cdot (n+\alpha-2) \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Эту формулу записывают и так:

$$\Gamma(p) = (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-n) \cdot \Gamma(p-n), \quad \text{если} \quad p - n > 0.$$

Асимптотическое представление: $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\Gamma(y+1)}{y^{y+0.5} e^{-y}} = \sqrt{2\pi}.$

II. Свойства интегралов Эйлера

Функциональные уравнения: 1. $\Gamma(p)\Gamma(-p) = -\frac{\pi}{p\sin \pi p}$;

2. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$;

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) = \frac{\pi}{\cos \pi p}$;

4. $\Gamma(np) = \sqrt{\frac{n^{2np-1}}{(2\pi)^{n-1}}} \cdot \Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(p+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)$

(теорема умножения **Гаусса**).

связь с $\mathbf{B}(p,q)$: $\mathbf{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

сведение к единичному квадрату: $\mathbf{B}(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\mathbf{B}(p,q)$;

$\mathbf{B}(p,q+1) = \frac{q}{p+q}\mathbf{B}(p,q)$.

II. Свойства интегралов Эйлера

Доказательство. Сначала докажем рекуррентные соотношения. Для отрицательных нецелых значений переменной p эти соотношения принимаются по определению, поэтому осталось рассмотреть случай $p > 0$. Имеем

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^p & du = p \cdot x^{p-1} \\ dv = e^{-x}\,dx & v = -e^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x^p \cdot \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}}_{=0 \text{ т.к. } p>0} - \int\limits_0^\infty p \cdot x^{p-1} \cdot \left(-e^{-x}\right)\,dx = p \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx = p \cdot \Gamma(p).$$

Теперь докажем связь с факториалом. Формула $\Gamma(n+1) = n!$ доказывается индукцией по n. В самом деле, при $n = 0$ получаем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} x^0 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

Пусть $n > 0$ и для любого положительного целого числа, меньшего n, формула верна. Тогда, в силу доказанных рекуррентных соотношений и гипотезы индукции

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

Формулы приведения выводятся аналогично.

Доказательство формулы для асимптотического представления, функциональных уравнений и формул, использующих $B(p,q)$, мы приводить не будем.

III. Некоторые применения гамма-функции

Интеграл Пуассона (см.раздел **??**, стр.**??**). Как известно, первообразная функции e^{-x^2} не является элементарной функцией. Однако, вычислить ее значения в отдельных точках (точнее, предел при $x \to +\infty$), можно. А именно, проводя замену переменной $x^2 = t$, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = 0.5\cdot\Gamma(0.5).$$

Согласно приведенной в пункте «функциональные уравнения» формуле 2, стр.11, получаем

$$\Gamma(0.5)\cdot\Gamma(1-0.5) = \Gamma(0.5)^2 = \frac{\pi}{\sin 0.5\pi} = \pi, \quad \text{поэтому} \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вычисление интегралов J_{2n} вида $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,dx$. Положим $x = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\alpha}}$.

$$J_{2n} = \frac{1}{2\alpha^{n+0.5}}\int_0^{+\infty} t^{n-0.5}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2\alpha^{n+0.5}}\Gamma(n+0.5).$$

Например,

$$J_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}, \quad J_2 = \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha^{3/2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2\alpha^{3/2}}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?