Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Линейные операторы

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***);*

$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

$\hat{P}_4$ *проецирования параллельно* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***б)***).*

$\hat{P}_5$, *сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, *симметричный относительно оси с направляющим вектором* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

$\hat{P}_6$, *сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, *симметричный относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

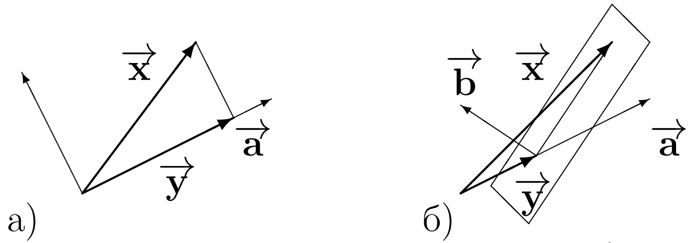


Рис. 1. а) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — ортогональная проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;
б) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно плоскости с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

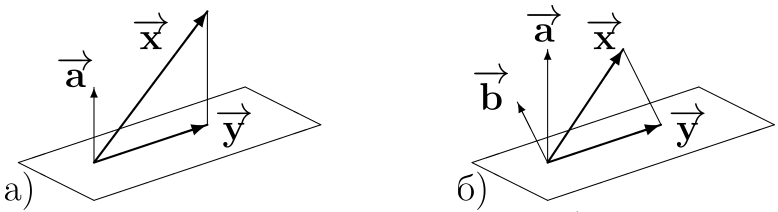


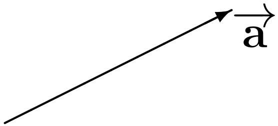
Рис. 2. а) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — ортогональная проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ на плоскость с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}}$;
б) $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ — проекция вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ на плоскость с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***);*

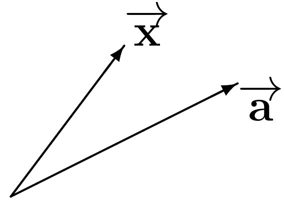
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***));*

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



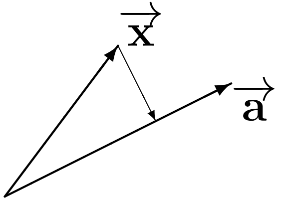
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*));*

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



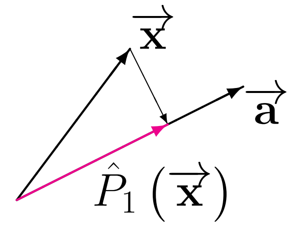
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а***)*;

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a)***);*

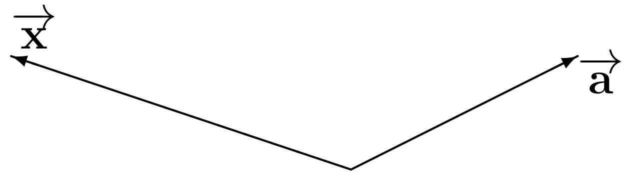
Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

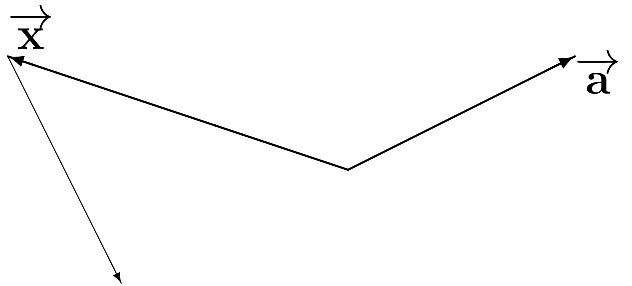
Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

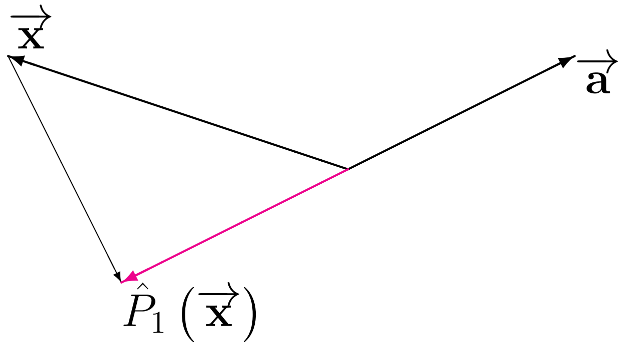
Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

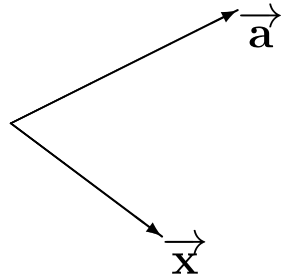
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*))*;

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



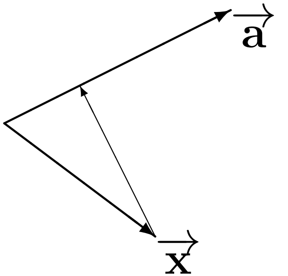
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*))*;

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



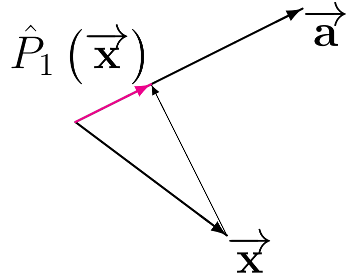
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а***)*;

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***)*;

Решение. Сначала попытаемся понять действие оператора индуктивным способом: рассмотрим образы нескольких векторов.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***);*

Решение. Для получения искомой формулы мы, разумеется, воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

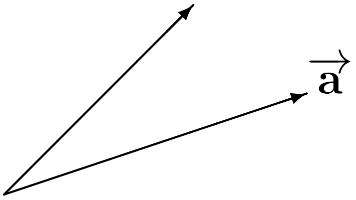
Решение. *Что надо найти?*

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***);*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

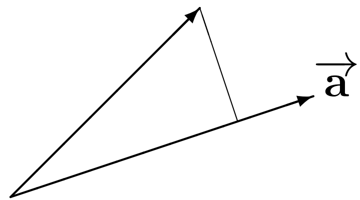
Решение. *Что надо найти?* Вектор.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

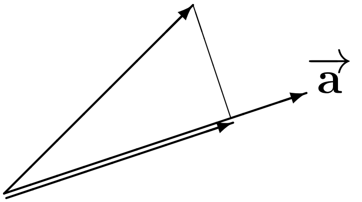
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***);*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***);*

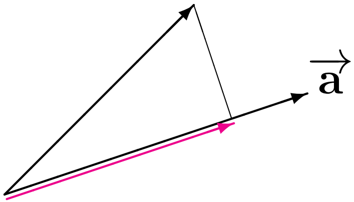
Решение. *Что надо найти?* Вектор.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*));*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

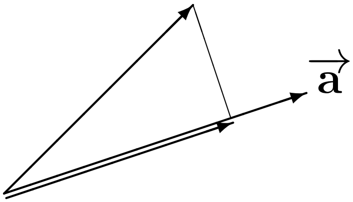


Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*))*;

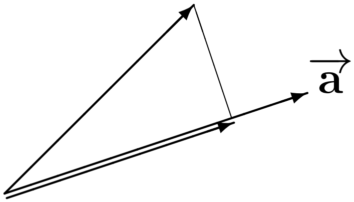
Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*));*

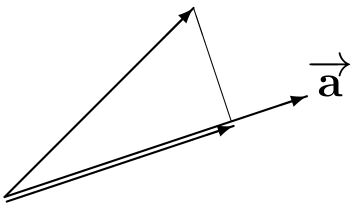
Решение. *Что надо найти?* Вектор.



В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

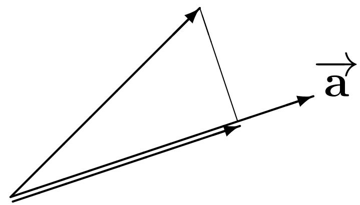


В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а***)*;

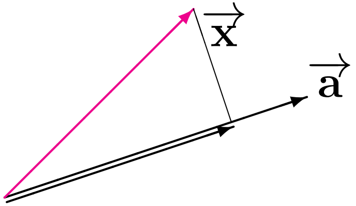
Решение. *Что надо найти?* Вектор.



В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

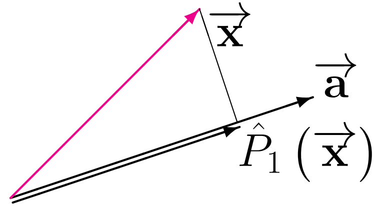


Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*))*;

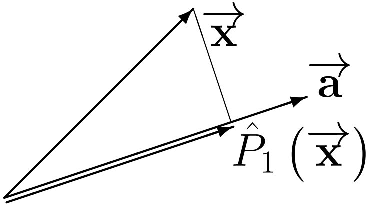
Решение. *Что надо найти?* Вектор.



В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а***)*;

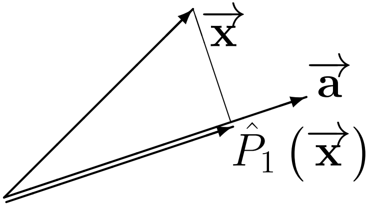


Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?

Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***))*;



Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

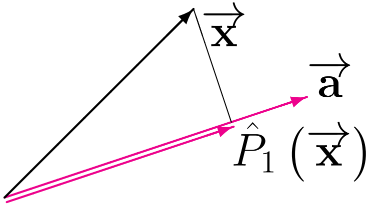
Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.

Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.

Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?

Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.

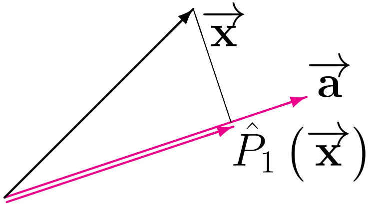
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а***))*;



Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?
Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.

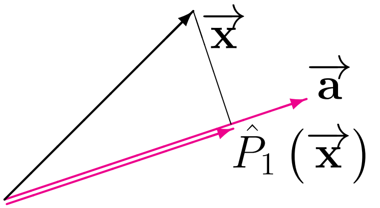
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;



Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?
Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$. По **критерию коллинеарности векторов**

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1**a**));*



Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

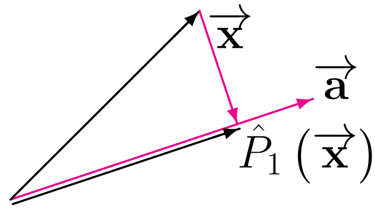
Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?
Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \parallel \hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}})$. По **критерию коллинеарности векторов**
$\hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***)*;

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.



Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.

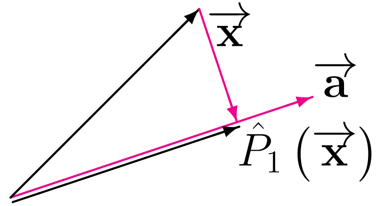
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.

Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?

Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.

$\hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}$.

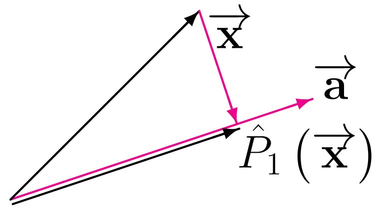
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***)*;



Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?
Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.
$\hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}$.
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \left(\hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

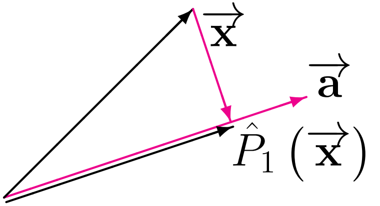
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***)*;



Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?
Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.
$\hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \left(\hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$. По **критерию ортогональности векторов**

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*));*

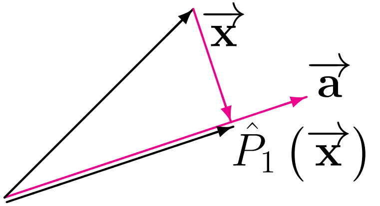


Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ? Выражением, содержащим обозначение исходного вектора, его образа, и вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Сведем к нахождению значений величин и введем переменные.
Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_1$.
Составим уравнение. Какое значение вычислим двумя способами?
Ищем ортогональные и коллинеарные векторы.
$\hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.
$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \left(\hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$. По **критерию ортогональности векторов**
$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0.$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a***)*);

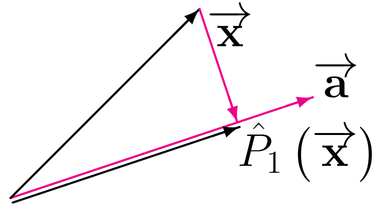
Решение. $\begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***a)***);*

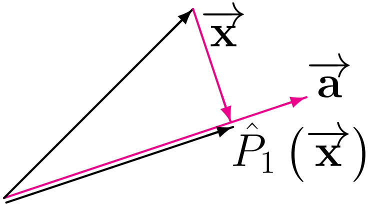
Решение. $\begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1*$\mathbf{a}$*))*;

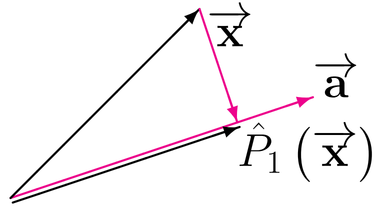
Решение. $\begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)} \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_1$ *ортогонального проецирования на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.1***а)***)*;

Решение. $\begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \hat{P}_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$



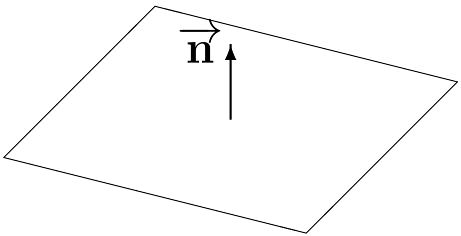
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{P}_1\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}.}$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*

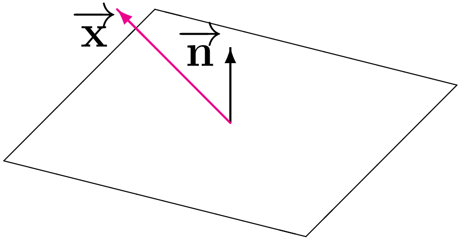
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***).*

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



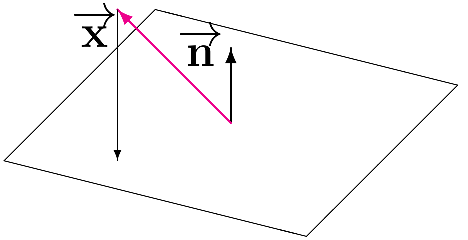
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



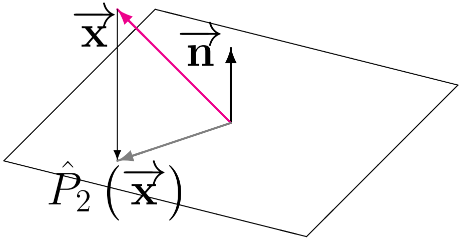
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***)*.

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



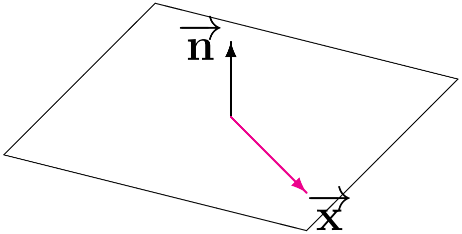
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



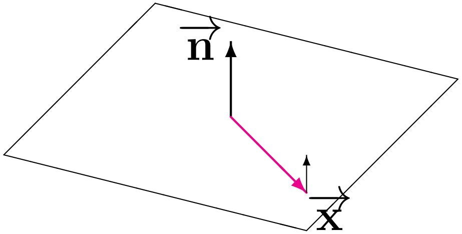
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



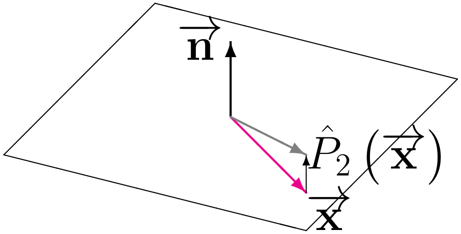
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2*$\mathbf{a)}$*).*

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



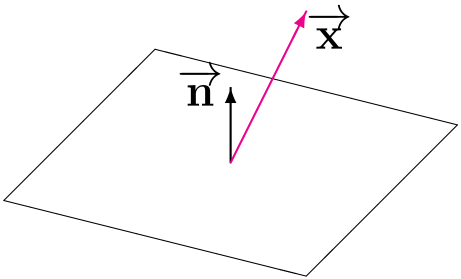
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2*$\mathbf{a)}$*)*.

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



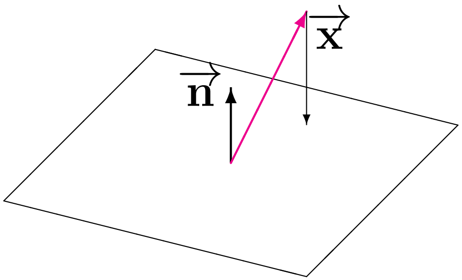
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***)*.

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



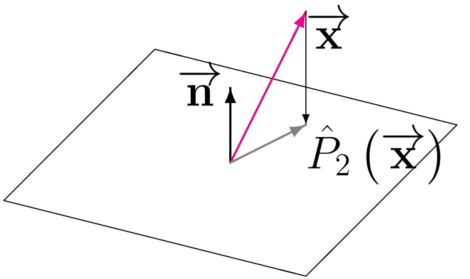
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



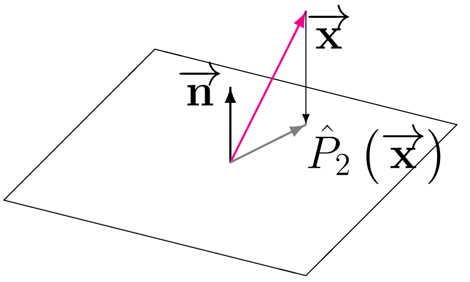
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***).*

Решение. Сначала для того, чтобы уяснить действие оператора, посмотрим образы нескольких векторов.



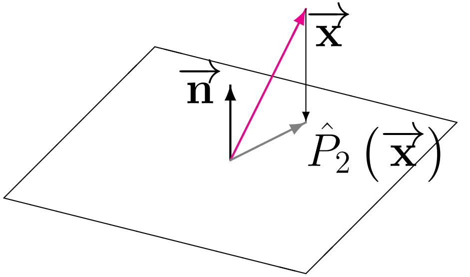
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2* **а)***)*.

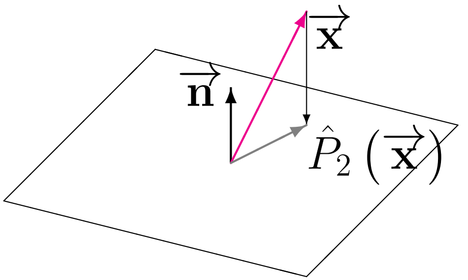
Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



Что надо найти?

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



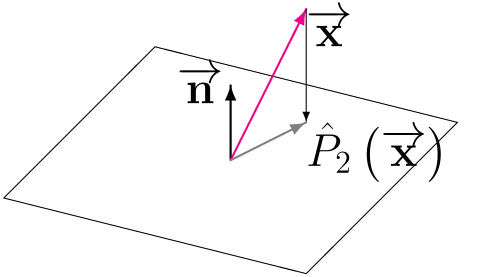
Что надо найти? Формулу.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

Что надо найти? Формулу.

В каком виде представим ответ?

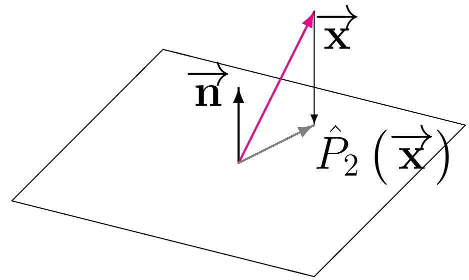


Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

Что надо найти? Формулу.

В каком виде представим ответ? Равенством.

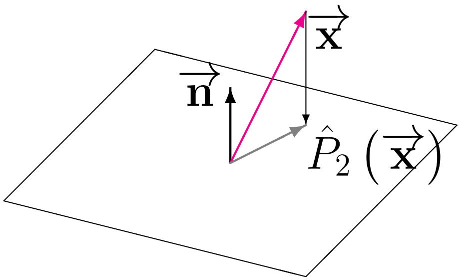


Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

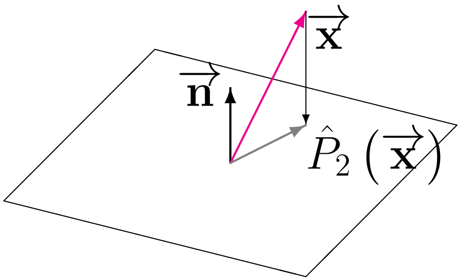
Что надо найти? Формулу.

В каком виде представим ответ? Равенством.



Сведём к числовым параметрам и введём переменные.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***)*.



Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

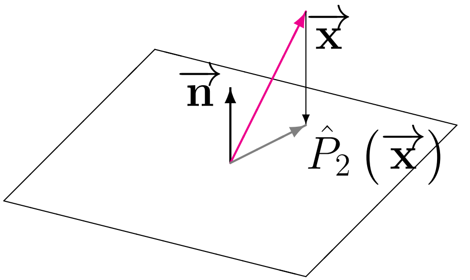
Что надо найти? Формулу.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Обозначим исходный вектор через $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и его образ — через $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2**a**)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



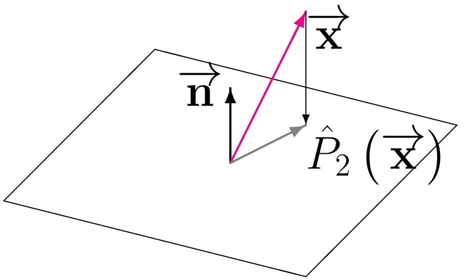
Что надо найти? Формулу.

В каком виде представим ответ? Равенством.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Обозначим исходный вектор через $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и его образ — через $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***)*.



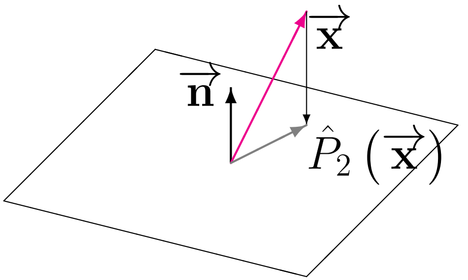
Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.
Что надо найти? Формулу.
В каком виде представим ответ? Равенством.
Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Обозначим исходный вектор через $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и его образ — через $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Коллинеарность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и проецирующего вектора $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на языке равенств означает

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



Что надо найти? Формулу.

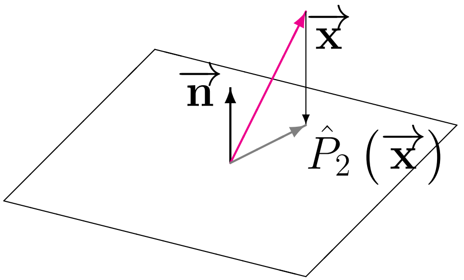
В каком виде представим ответ? Равенством.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Обозначим исходный вектор через $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и его образ — через $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$.

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Коллинеарность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и проецирующего вектора $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на языке равенств означает $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

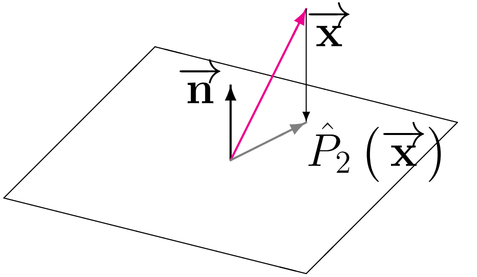


Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.
$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow$

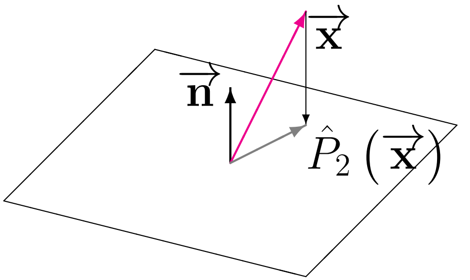
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*



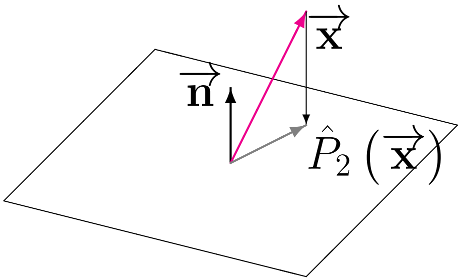
Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

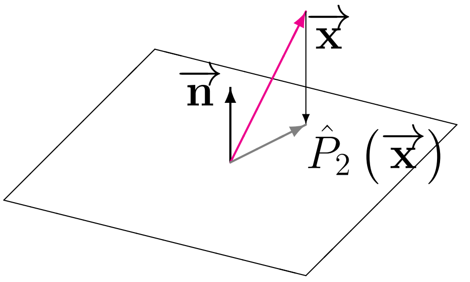


$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)-\overrightarrow{\mathbf{x}}=\lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=\overrightarrow{\mathbf{x}}+\lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2*$\mathbf{a}$*)).*



Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

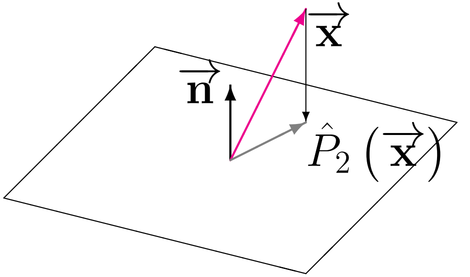
$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*



Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

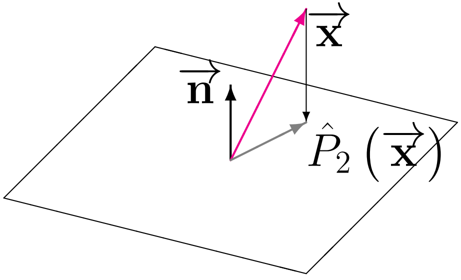
Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

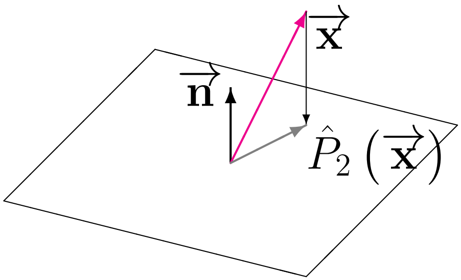


В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***)*.

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



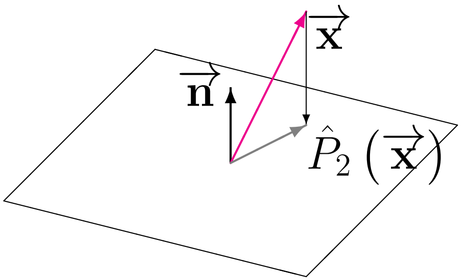
$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2**а**)).*



Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

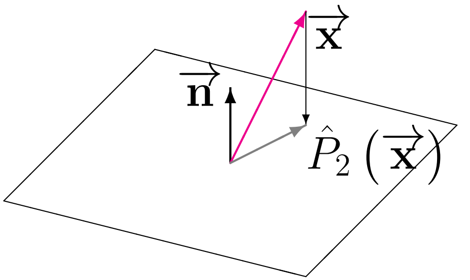
$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2**а**)).*



Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.

$$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

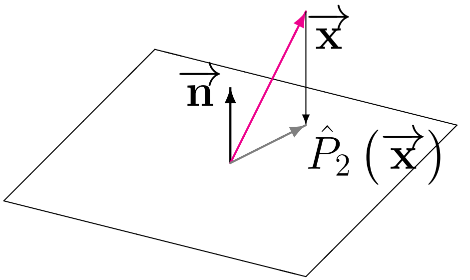
В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\; \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}},\; \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\; \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\; \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***а)***).*

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



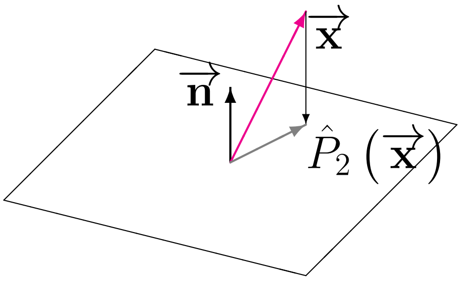
$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \Rightarrow \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \Rightarrow$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***).*

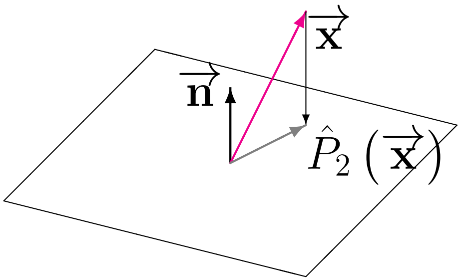


Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.
$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)-\overrightarrow{\mathbf{x}}=\lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=\overrightarrow{\mathbf{x}}+\lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}$.
Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?
В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)=0 \;\Rightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)+\lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)=0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \lambda=-\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)} \;\Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_2$ *ортогонального проецирования на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***a)***).*



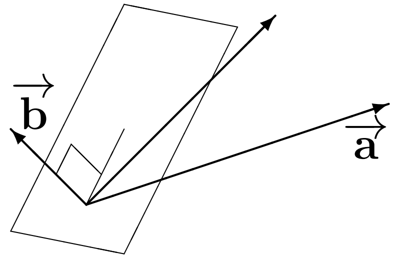
Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.
$\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{n}}.$
Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?
В чертеже ищем коллинеарные и ортогональные векторы.

Ортогональность векторов $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ и $\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ на язык равенств переводится как $\left(\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right) = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \lambda = -\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)} \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{P}_2\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.}$$

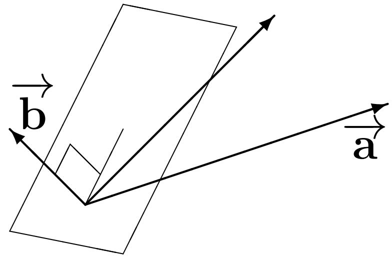
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***)*.

Решение.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

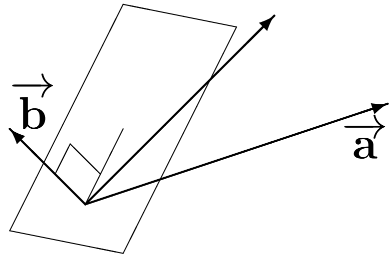
Решение. Линейность докажите самостоятельно. Теперь найдем нужную формулу.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*

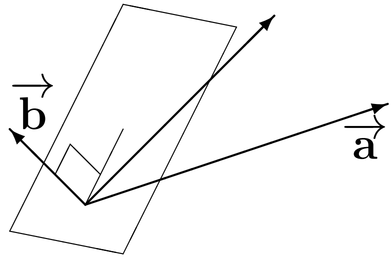
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. Воспользуемся **типовым планом составления уравнений**.



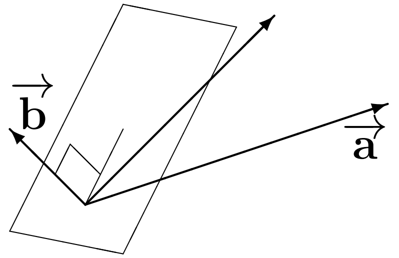
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?*



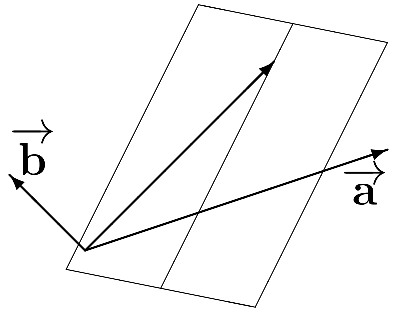
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.



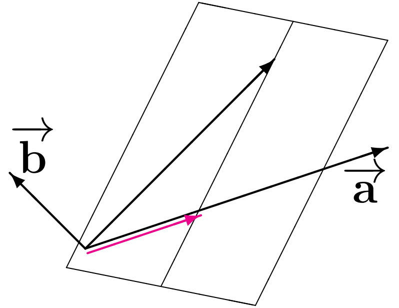
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1*б)*)*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.



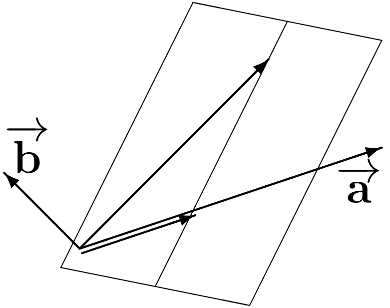
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ?

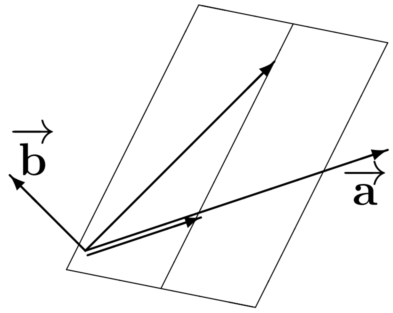


Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.



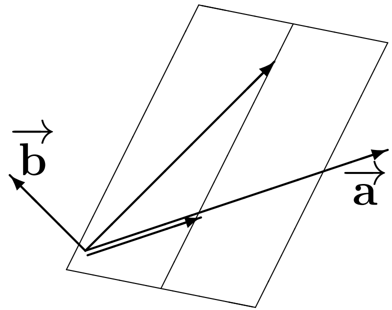
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные.



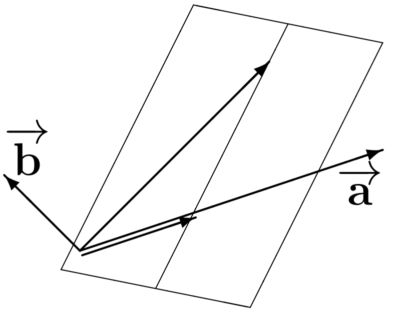
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***)*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



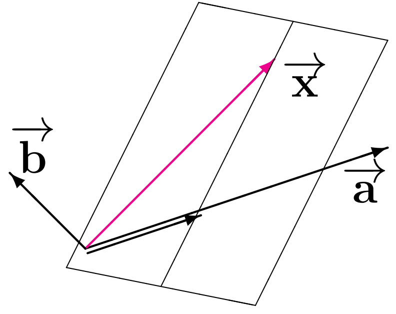
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



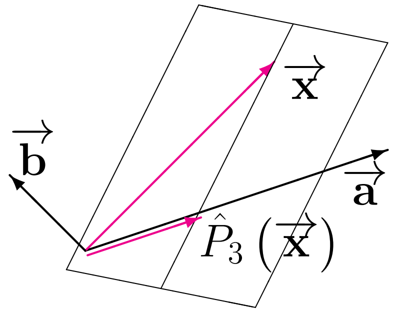
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***)*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

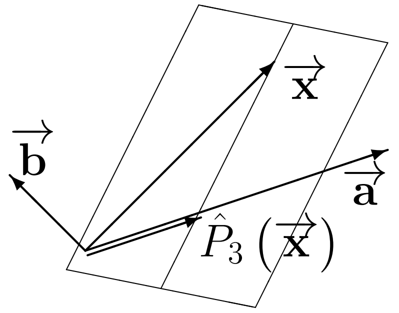
Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1б))*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.



В каком виде представим ответ?

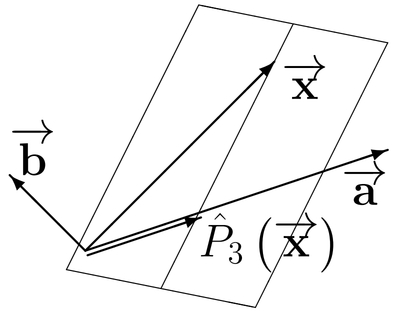
Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.

Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.
В каком виде представим ответ?
Формулой.
Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?
Обращаем внимание на коллинеарные и ортогональные векторы.

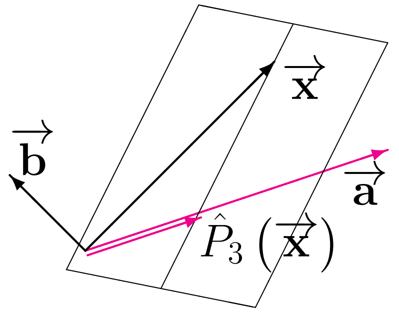
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***)*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?

Обращаем внимание на коллинеарные и ортогональные векторы.

$\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \mid\mid \overrightarrow{\mathbf{a}} \ \Rightarrow$

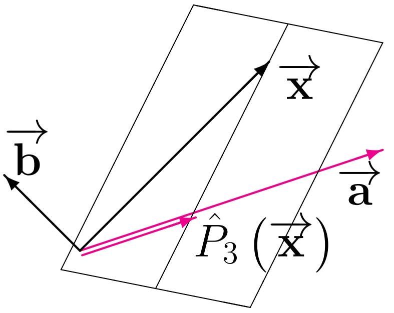
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?

Обращаем внимание на коллинеарные и ортогональные векторы.

$\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \parallel \overrightarrow{\mathbf{a}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}$.

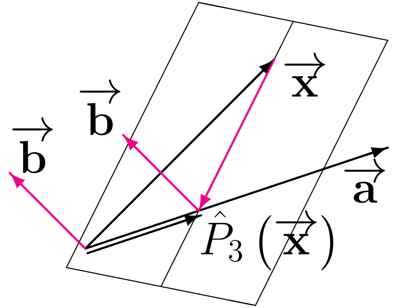
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***)*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?

Обращаем внимание на коллинеарные и ортогональные векторы.

$\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \parallel \overrightarrow{\mathbf{a}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

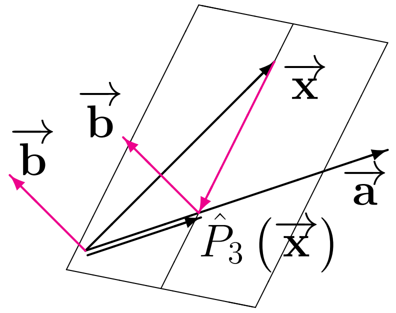
Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1*$\mathbf{б)}$*).*

Решение. *Что надо найти?* Вектор.

В каком виде представим ответ?

Формулой.

Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.



Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?

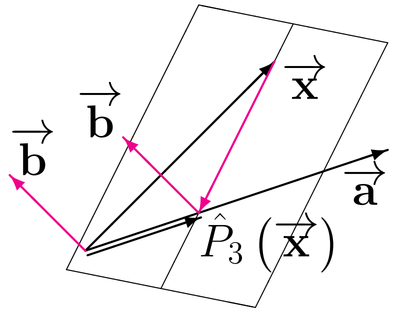
Обращаем внимание на коллинеарные и ортогональные векторы.

$\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \mid\mid \overrightarrow{\mathbf{a}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}.$

$\left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Rightarrow$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***)*.

Решение. *Что надо найти?* Вектор.



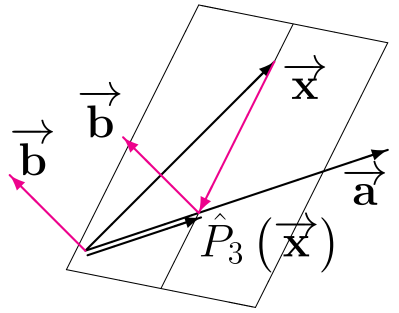
В каком виде представим ответ?
Формулой.
Введем переменные. Обозначим через x аргумент оператора $\hat{P}_3$.

Составим уравнение. Что вычислим двумя способами?
Обращаем внимание на коллинеарные и ортогональные векторы.
$\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \parallel \overrightarrow{\mathbf{a}} \;\Rightarrow\; \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}.$
$\left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Rightarrow\; \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0.$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1б)).*

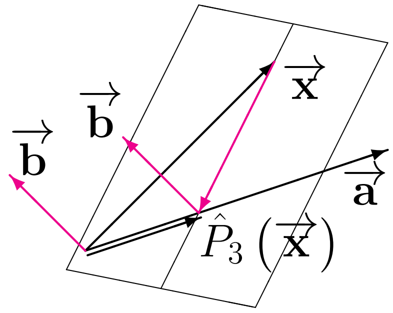
Решение.

$$\begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение.

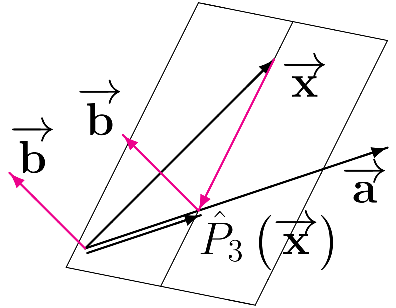


$$\begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}),\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение.



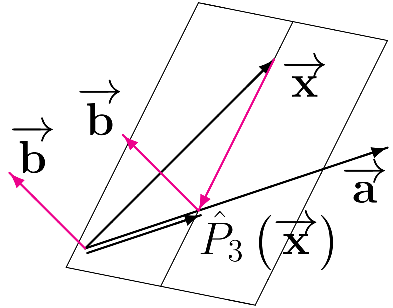
$$\begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б***)).*

Решение.

$$\begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

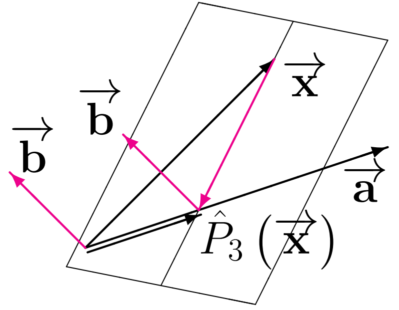


$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)} \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_3$ *проецирования пространства на ось вектора* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *(см. рис.1***б)***).*

Решение.

$$\begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \left(\hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) - \overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{a}}, \\ \lambda = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)} \end{cases} \Rightarrow \hat{P}_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)} \overrightarrow{\mathbf{a}}.$$

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_4$ *проецирования параллельно* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***б)***)*.

Ответ.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_4$ *проецирования параллельно* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *на плоскость, содержащую начало координат, перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *(рис.2***б)***)*.

Ответ. $\hat{P}_4\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_5$, *сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, *симметричный относительно оси с направляющим вектором* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Ответ.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_5$, *сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, *симметричный относительно оси с направляющим вектором* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Ответ. $\hat{P}_5\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 2\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{x}}$.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_6$, *сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, *симметричный относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Ответ.

Пример 1. *Задать формулой операторы:*
$\hat{P}_6$, *сопоставляющий каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *вектор* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, *симметричный относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной вектору* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Ответ. $\hat{P}_6\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - 2\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Вернёмся к лекции по линейным операторам?

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) =$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h \quad u \quad +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h\ \ _s u\ \ +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h\ \ _s u_1 +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 +$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов** 1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{\ s}u\ \ +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 +$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{\ s}u\ \ =$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов***   *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$;   *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$;   *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 =$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h\quad u$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$1)\ \hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum_{t=1}^{3} h\ _s u$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов** 1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$1)\ \hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum_{t=1}^{3} h_{\ s}u_t$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов** 1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$*.*

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

$$2)\ \begin{cases} \hat{L}(p) = L\quad p + L\quad q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов** 1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L\ _1p + L\ _1q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

$$2)\ \begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{\ \,1}q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L\ {}_1 q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$ $\quad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$*.*

Решение.

1) $\hat{H}\left(u_s\right) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = \end{cases}$ $\qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов* *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L\quad p + L\quad q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \quad \\ L_{21} & \quad \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $$\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$$

2) $$\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L_{\ 2}p + L_{\ 2}q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \phantom{L_{12}} \\ L_{21} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L_{12}p + L_{22}q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & \qquad \\ L_{21} & \qquad \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

1) $\hat{H}\,(u_s) = h_{1s}u_1 + h_{2s}u_2 + h_{3s}u_3 = \sum\limits_{t=1}^{3} h_{ts}u_t;$

2) $\begin{cases} \hat{L}(p) = L_{11}p + L_{21}q, \\ \hat{L}(q) = L_{12}p + L_{22}q; \end{cases} \qquad L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q\quad X + q\quad Y + q\quad Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{\ 1}X + q_{\ 1}Y + q_{\ 1}Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$*.*

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q\quad X + q\quad Y + q\quad Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & \quad & \quad \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{\ 2}X + q_{\ 2}Y + q_{\ 2}Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & & \\ q_{21} & & \\ q_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \\ q_{21} & q_{22} & \\ q_{31} & q_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q\quad X + q\quad Y + q\quad Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \\ q_{21} & q_{22} & \\ q_{31} & q_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов** 1) $\hat{H}$ в базисе $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; 2) $\hat{L}$ в базисе $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; 3) $\hat{Q}$ в базисе $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; 4) $\hat{G}$ в базисе $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.*

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{\ 3}X + q_{\ 3}Y + q_{\ 3}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \\ q_{21} & q_{22} & \\ q_{31} & q_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \\ q_{21} & q_{22} & \\ q_{31} & q_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*; 2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*; 3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*; 4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{\Pi} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$*.*

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g\quad L_1 + g\quad L_2 + g\quad L_3, \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g\ {}_1L_1 + g\ {}_1L_2 + g\ {}_1L_3, \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите **уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов** 1) $\hat{H}$ в базисе $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; 2) $\hat{L}$ в базисе $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; 3) $\hat{Q}$ в базисе $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; 4) $\hat{G}$ в базисе $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.*

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{\ 1}L_2 + g_{\ 1}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов 1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{\ 1}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \quad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$*;* *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$*;* *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$*;* *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$*.*

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases} \qquad G_{\mathbf{П}} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & & \\ g_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases} \qquad G_{\mathbf{П}} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & & \\ g_{31} & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(L_3) = \end{cases} \qquad G_{\mathbf{П}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1) $\hat{H}$ в базисе $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; 2) $\hat{L}$ в базисе $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; 3) $\hat{Q}$ в базисе $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; 4) $\hat{G}$ в базисе $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.*

Решение.

$$3)\ \begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(L_3) = g_{13}L_1 + g_{23}L_2 + g_{33}L_3. \end{cases} \qquad G_{\mathbf{П}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & \end{pmatrix}$$

Пример 2. *Запишите* ***уравнение для коэффициентов матрицы линейных операторов*** *1)* $\hat{H}$ *в базисе* $\boldsymbol{Б} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$; *2)* $\hat{L}$ *в базисе* $\boldsymbol{B} = \{p,\ q\}$; *3)* $\hat{Q}$ *в базисе* $\boldsymbol{S} = \{X,\ Y,\ Z\}$; *4)* $\hat{G}$ *в базисе* $\mathbf{П} = \{L_1,\ L_2,\ L_3\}$.

Решение.

3) $$\begin{cases} \hat{Q}(X) = q_{11}X + q_{21}Y + q_{31}Z, \\ \hat{Q}(Y) = q_{12}X + q_{22}Y + q_{32}Z, \\ \hat{Q}(Z) = q_{13}X + q_{23}Y + q_{33}Z; \end{cases} \qquad Q_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

4) $$\begin{cases} \hat{G}(L_1) = g_{11}L_1 + g_{21}L_2 + g_{31}L_3, \\ \hat{G}(L_2) = g_{12}L_1 + g_{22}L_2 + g_{32}L_3, \\ \hat{G}(L_3) = g_{13}L_1 + g_{23}L_2 + g_{33}L_3. \end{cases} \qquad G_{\mathbf{П}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим другой пример?

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение.

Пример 3. *На **линейном пространстве** U **многочленов** степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор $\hat{L}$ задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

*Доказать, что этот оператор линейный и найти **матрицу оператора** $\hat{L}$ в каком-нибудь базисе линейного пространства U.*

Решение. Линейность оператора следует из определения: если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены из U и λ, μ — вещественные числа, то, по свойству дифференцирования, $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(\lambda f(x) + \mu g(x)) - 2(x+1)\frac{d}{dx}(\lambda f(x) + \mu g(x)) + 2(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** U ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор* $\hat{L}$ *задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** $\hat{L}$ *в каком-нибудь базисе линейного пространства* U.

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(\lambda f(x) + \mu g(x)) - 2(x+1)\frac{d}{dx}(\lambda f(x) + \mu g(x)) + 2(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$$

$$= (x+1)^2 (\lambda f''(x) + \mu g''(x)) - 2(x+1)(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) + 2(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** *U* ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор $\hat{L}$ задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** *$\hat{L}$ в каком-нибудь базисе линейного пространства U.*

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= \lambda \Big((x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x) \Big) +$$

$$+\mu \Big((x+1)^2 g''(x) - 2(x+1) g'(x) + 2g(x) \Big) =$$

$$= \lambda \hat{L}(f(x)) + \mu \hat{L}(g(x)).$$

Пример 3. *На* ***линейном пространстве*** *U* ***многочленов*** *степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор $\hat{L}$ задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Доказать, что этот оператор линейный и найти ***матрицу оператора*** *$\hat{L}$ в каком-нибудь базисе линейного пространства U.*

Решение. $\hat{L}(\lambda f(x) + \mu g(x)) =$

$$= \lambda \hat{L}(f(x)) + \mu \hat{L}(g(x)).$$

Линейность оператора $\hat{L}$ доказана. Теперь найдем его матрицу.

Пример 3. *На **линейном пространстве** U **многочленов** степени не выше 2 с вещественными коэффициентами оператор $\hat{L}$ задан формулой:*

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

*Доказать, что этот оператор линейный и найти **матрицу оператора** $\hat{L}$ в каком-нибудь базисе линейного пространства U.*

Решение. Удобный базис этого пространства мы уже находили при решении **примера на поиск ортонормированного базиса**: $\mathbf{Б} = \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Решение. $\textbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = \qquad\qquad - \qquad\qquad +2\cdot x^0 =$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = \qquad -2(x+1)\cdot 0 + 2\cdot x^0 =$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Решение. Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 =$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. Б $= \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Решение. $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. Б $= \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \ \Rightarrow \ \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \qquad (1)$$

Решение. $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы нашли первый столбец матрицы $\hat{L}_{\text{Б}}$. Для второго и третьего базисных векторов получаем

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Решение. Б $= \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}(x) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}(x)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}(f(x)) = (x+1)^2 f''(x) - 2(x+1) f'(x) + 2f(x). \tag{1}$$

Решение. Б $= \{x^0, x, x^2\}$.

Столбцами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов. Поэтому найдем образы базисных векторов относительно действия оператора $\hat{L}$ с помощью формулы (1):

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}(x) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow \left[\hat{L}(x)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left(x^2\right) = (x+1)^2 \cdot 2 - 2(x+1) \cdot 2x + 2x^2 = 2 = 2x^0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow \left[\hat{L}\left(x^2\right)\right]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2\cdot 0 - 2\,(x+1)\cdot 0 + 2\cdot x^0 = 2x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(x\right) = (x+1)^2\cdot 0 - 2(x+1)\cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left(x^2\right) = (x+1)^2\cdot 2 - 2(x+1)\cdot 2x + 2x^2 = 2 = 2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$\hat{L}\left(x^0\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2\,(x+1) \cdot 0 + 2 \cdot x^0 = 2x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{L}\left(x\right) = (x+1)^2 \cdot 0 - 2(x+1) \cdot 1 + 2x = -2 = -2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\left(x^2\right) = (x+1)^2 \cdot 2 - 2(x+1) \cdot 2x + 2x^2 = 2 = 2x^0 + 0x + 0x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{L}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$ имеет вид

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из примера 3,* V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$*;* $\hat{A}(x^2-1)$*; б)* ***матрицу этого линейного оператора****; в) векторы* $\hat{A}(x-1)$*;* $\hat{A}(x^2-1)$*, используя* ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение.

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из* *примера 3*, V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$\hat{A}(x-1) =$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 1 \\ (-1-1) & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из примера 3,* V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 1 \\ (-1-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть* U — *линейное пространство из* *примера 3*, V — *линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A}: U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 1 \\ (-1-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) =$$

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из* *примера 3*, V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 1 \\ (-1-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) = \begin{pmatrix} \left(1^2-1\right) & (2\cdot 1) \\ \left((-1)^2-1\right) & (2\cdot(-1)) \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из* *примера 3*, V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите а) $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$;

Решение.

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} (1-1) & 1 \\ (-1-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) = \begin{pmatrix} \left(1^2-1\right) & (2 \cdot 1) \\ \left((-1)^2-1\right) & (2 \cdot (-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Отметим некорректность поставленной задачи: нельзя говорить о матрице оператора, не указывая соответствующие базисы.

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из примера 3*, V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V:

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из примера 3,* V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$,

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V:

$$\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}, \quad \mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Возьмем базисы пространств U и, соответственно, V: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$, $\mathbf{В} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. В соответствии с **определением матрицы линейного оператора** надо найти координаты образов базисных векторов.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Получаем, согласно определению оператора $\hat{A}$,

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Получаем, согласно определению оператора $\hat{A}$,

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому первый столбец матрицы $A_{\mathbf{Б},\mathbf{B}}$ равен $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Аналогично для второго и третьего столбцов получаем

$$\hat{A}\,(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите б) ***матрицу этого линейного оператора****;*

Решение. Аналогично для второго и третьего столбцов получаем

$$\hat{A}\,(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\,(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\left(x\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\left(x\right)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right)=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A_{\mathbf{Б},\mathbf{В}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&-1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}.$

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из примера 3*, V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, *используя* ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1) \right]_{\mathbf{B}} \; \left[\hat{A}(x^2-1) \right]_{\mathbf{B}} \right) =$

$=$

Пример 4. *Пусть* U *— линейное пространство из примера 3,* V *— линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, *используя* ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \; \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 4. *Пусть* U — *линейное пространство из примера 3*, V — *линейное пространство матриц размерности* 2×2 *с вещественными коэффициентами, линейный оператор* $\hat{A} : U \mapsto V$ *задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, *используя* ***теорему о координатах образа вектора***.

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1) \right]_{\mathbf{B}} \; \left[\hat{A}(x^2-1) \right]_{\mathbf{B}} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A}: U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \ \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\hat{A}(x-1) =$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \; \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя ***теорему о координатах образа вектора****.*

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \; \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) =$$

Пример 4. *Пусть U — линейное пространство из примера 3, V — линейное пространство матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами, линейный оператор $\hat{A} : U \mapsto V$ задан формулой*

$$\hat{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ f(-1) & f'(-1) \end{pmatrix}.$$

*Найдите в) векторы $\hat{A}(x-1)$; $\hat{A}(x^2-1)$, используя **теорему о координатах образа вектора**.*

Решение. $\left(\left[\hat{A}(x-1)\right]_{\mathbf{B}} \; \left[\hat{A}(x^2-1)\right]_{\mathbf{B}} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(x^2-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Это совпадает с **полученным ранее ответом**.

Вернёмся к лекции?

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. Решая пример 3, мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Применим стратегию составления уравнений.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из* *примера 3*.

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Что надо найти?

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти? **Ядро** оператора.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ?

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3*.

Решение. В базисе Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ? **Ядро** оператора — это подпространство, зададим его системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ? **Ядро** оператора — это подпространство, зададим его системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Что надо найти? **Ядро** оператора.

В каком виде представим ответ? **Ядро** оператора — это подпространство, зададим его системой уравнений и как линейную оболочку базиса.

Введем переменные. Всякое множество определяется только своими элементами, поэтому надо сначала взять произвольный элемент $f(x) \in \operatorname{Ker} \hat{L}$. Разложим этот элемент по базису **Б**, и *обозначим координаты буквами:* $f(x) = ax^0 + bx + cx^2$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Составим систему уравнений. По определению ядра, образ многочлена $f(x)$ — нулевой. По **теореме о координатах образа вектора** получаем, с одной стороны,

$$\left[\hat{L}(f(x))\right]_{\mathbf{Б}} = L_{\mathbf{Б}}\,[f(x)]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

Пример 5. *Найдите **ядро** оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Составим систему уравнений. По определению ядра, образ многочлена $f(x)$ — нулевой. **По теореме о координатах образа вектора** получаем, с одной стороны,

$$\left[\hat{L}(f(x))\right]_{\mathbf{Б}} = L_{\mathbf{Б}}\,[f(x)]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

с другой стороны (второй способ вычисления образа, по определению ядра),

$$\left[\hat{L}(f(x))\right]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, получили матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе из одного уравнения $a - b + c = 0$.

Пример 5. *Найдите **ядро** оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, получили матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе из одного уравнения $a - b + c = 0$.

Фундаментальная система решений этой системы линейных уравнений находится буквально «в уме»: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \left\{x^0, x, x^2\right\}$ имеем $L_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Одна из фундаментальных систем решений системы линейных уравнений, задающей образ ядра оператора $\hat{L}$, имеет вид: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Значит, **ядро** оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $\quad L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ядро оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Задача решена, но мы еще выполним проверку. А именно, проверим, что векторы $1 + x$ и $x + x^2$ действительно содержатся в ядре оператора $\hat{L}$.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ядро оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} \hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Задача решена, но мы еще выполним проверку. А именно, проверим, что векторы $1 + x$ и $x + x^2$ действительно содержатся в ядре оператора $\hat{L}$.

Для вектора $1 + x$ имеем

$$\hat{L}\,(1 + x) = (x+1)^2 \cdot (1 + x)'' - 2(x+1) \cdot (1 + x)' + 2 \cdot (1 + x) = 0 - 2(x+1) + 2(1+$$

то есть $\hat{L}\,(1 + x) = \mathbf{0}$, откуда следует по определению ядра оператора, что $1 + x$ — вектор из ядра.

Пример 5. *Найдите* ***ядро*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$ имеем $L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ядро оператора $\hat{L}$ имеет вид

$$\operatorname{Ker}\hat{L} = \left\{ ax^0 + bx + cx^2 \,\middle|\, a - b + c = 0 \right\} = \langle 1 + x,\ x + x^2 \rangle.$$

Задача решена, но мы еще выполним проверку. А именно, проверим, что векторы $1 + x$ и $x + x^2$ действительно содержатся в ядре оператора $\hat{L}$.

$$\hat{L}\left(x + x^2\right) = (x+1)^2 \cdot \left(x + x^2\right)'' - 2(x+1) \cdot \left(x + x^2\right)' + 2 \cdot \left(x + x^2\right) =$$
$$= 2(x+1)^2 - 2(x+1)(1+2x) + 2(1+x)\left(x + x^2\right) \equiv 0.$$

Таким образом, $\hat{L}\left(x + x^2\right) = \mathbf{0}$, что означает $x + x^2 \in \operatorname{Ker}\hat{L}$.

Вернёмся к лекции?

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Все **ненулевые** векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, являются собственными, отвечающие собственному значению

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ *.*

Решение. Все **ненулевые** векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, являются собственными, отвечающие собственному значению 0.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Все **ненулевые** векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, являются собственными, отвечающие собственному значению 0.
Все **ненулевые** векторы, ортогональные вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, т.е. все **ненулевые** векторы из Π, являются собственными векторами линейного оператора $\hat{P}$, отвечающими собственному значению

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Все **ненулевые** векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, являются собственными, отвечающие собственному значению 0.
Все **ненулевые** векторы, ортогональные вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, т.е. все **ненулевые** векторы из Π, являются собственными векторами линейного оператора $\hat{P}$, отвечающими собственному значению 1.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Можно было воспользоваться формулой для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Можно было воспользоваться формулой для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Если $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является собственным для оператора $\hat{P}$, отвечающий собственному значению λ, то

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Можно было воспользоваться формулой для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Если $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является собственным для оператора $\hat{P}$, отвечающий собственному значению λ, то

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Можно было воспользоваться формулой для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Если $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является собственным для оператора $\hat{P}$, отвечающий собственному значению λ, то

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}} \ \Rightarrow$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Можно было воспользоваться формулой для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Если $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является собственным для оператора $\hat{P}$, отвечающий собственному значению λ, то

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}} \ \Rightarrow\ (1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Итак, для собственного вектора $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, отвечающего собственному значению λ,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Следовательно, либо левая и правая часть последнего равенства — нулевые, либо векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Если $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$,

то

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Если $(1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$,

то $\lambda = 1$ и

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Если $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$,
то $\lambda = 1$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}} \perp \overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

$$(1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{(\alpha\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

$$(1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\alpha\,(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

$$(1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\alpha\,(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

$$(1-\lambda)\,\alpha\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{(\alpha\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)\,\alpha\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\alpha\,(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\lambda\alpha\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad\Rightarrow\quad \lambda = 0.$$

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

$$(1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\alpha\,(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\lambda\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad\Rightarrow\quad \lambda = 0.$$

Значит, любой ненулевой вектор $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$ отвечает собственному значению 0.

Пример 6. *Найти все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

Решение. Имеем $(1-\lambda)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathbf{v}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}}$. Пусть векторы $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$.

$$(1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\,\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \frac{\alpha\,(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}},\ \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Значит, любой ненулевой вектор $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{n}}$ отвечает собственному значению 0. Вернёмся к лекции?

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение.

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) =$$

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \left(\qquad \right)$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \left(\quad \right)$$

$$=$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{2^2 + (-3)^2 + 6^2}\left(2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\}} =$$

$$= \left(\qquad \right)$$

Пример 7. *Найти с использованием **матрицы оператора** все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{2}{49}\left(2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) =$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}{(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{49}\left(45\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 12\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \left(\qquad \right)$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = \overrightarrow{\mathbf{i}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{49}\left(45\overrightarrow{\mathbf{i}} + 6\overrightarrow{\mathbf{j}} - 12\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & & \\ 6 & & \\ -12 & & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{j}}) = \overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & & \\ 6 & & \\ -12 & & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{j}}) = \overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}})}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{49}\left(6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 40\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 18\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & & \\ 6 & & \\ -12 & & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{j}}) = \overrightarrow{\mathbf{j}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{49}\left(6\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 40\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 18\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & \\ 6 & 40 & \\ -12 & 18 & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{k}}) = \overrightarrow{\mathbf{k}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & \\ 6 & 40 & \\ -12 & 18 & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{k}}) = \overrightarrow{\mathbf{k}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{49}\left(-12\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 18\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 13\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & \\ 6 & 40 & \\ -12 & 18 & \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. По определению **матрицы оператора** нам надо найти образы векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$.

По формуле для **оператора ортогонального проецирования на плоскость**:

$$\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{k}}) = \overrightarrow{\mathbf{k}} - \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}{\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}}\right)}\overrightarrow{\mathbf{n}} =$$

$$= \frac{1}{49}\left(-12\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 18\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 13\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right).$$

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием **матрицы оператора** все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$. Можно эту матрицу иначе, как в **задаче III.6.**

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$. Можно эту матрицу иначе, как в **задаче III.6.**

Нетрудно найти векторы в плоскости Π, например, $3\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $2\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$. Тогда по **теореме о координатах образа вектора**

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \quad \\ -3 & \\ 6 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \quad \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$. Можно эту матрицу иначе, как в **задаче III.6.**

Нетрудно найти векторы в плоскости Π, например, $3\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $2\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$. Тогда по **теореме о координатах образа вектора**

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$. Можно эту матрицу иначе, как в **задаче III.6.**

Нетрудно найти векторы в плоскости Π, например, $3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$. Тогда по **теореме о координатах образа вектора**

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$. Значит, матрицу $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}}$ можно было найти из уравнения

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}.$

Найдем собственные векторы по этой матрице.

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$.

Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$\left| \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$.

Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$\left| \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$\left| \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *Найти с использованием **матрицы оператора** все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 2 & -4 \\ 3 & 20 & 9 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 2 & -4 \\ 3 & 20 & 9 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & -98 & -49 \\ 0 & 98 & 49 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & -4 \\ 3 & 20 & 9 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & -98 & -49 \\ 0 & 98 & 49 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *Найти с использованием **матрицы оператора** все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & -98 & -49 \\ 0 & 98 & 49 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2/3} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2/3} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 20 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2/3} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Итак, вектор $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ отвечает собственному значению 0.

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 0$ получили собственный вектор

$$-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} - 2\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = -\frac{1}{3}\left(2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{n}}$$

— нормальный вектор плоскости Π.

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\left(\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$, $\quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\left(\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 6 & -9 & 18 \\ -12 & 18 & -36 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$, $\quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 6 & -9 & 18 \\ -12 & 18 & -36 \end{pmatrix} \sim$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 6 & -9 & 18 \\ -12 & 18 & -36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием **матрицы оператора** все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 6 & -9 & 18 \\ -12 & 18 & -36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3/2} & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3/2} & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{3/2} \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -3/2 & \mathbf{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -3/2 & \mathbf{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{P}$ проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость Π с нормальным вектором $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.*

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Для $\lambda = 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, векторы $\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, $\left(-3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)$ отвечают собственному значению 1.

Пример 7. *Найти с использованием* ***матрицы оператора*** *все собственные векторы и собственные значения оператора* $\hat{P}$ *проецирования трехмерного пространства геометрических векторов на плоскость* Π *с нормальным вектором* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = 2\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\overrightarrow{\mathbf{j}} + 6\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Решение. $P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}},\overrightarrow{\mathbf{k}}\}} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 6 & -12 \\ 6 & 40 & 18 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}, \quad -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$

Итак, векторы $\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, $\left(-3\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)$ отвечают собственному значению 1.

Очевидно, что оба эти вектора ортогональны вектору $\overrightarrow{\mathbf{n}}$, т.е. являются направляющими векторами плоскости Π.

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример**?

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение.

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Его корни являются собственными значениями этого оператора, поэтому **спектр** оператора $\hat{L}$ равен $\operatorname{spec} \hat{L} = \{0_2, 2_1\}$ (на месте индекса указана кратность соответствующего корня).

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из* *примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda).$$

Заметим, что

множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению 0 отличается от ядра оператора только на нулевой вектор.

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим **уравнение для нахождения собственных значений**:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (2-\lambda)\,.$$

Ядро оператора $\hat{L}$ мы нашли, решая пример 5, поэтому всякий **собственный вектор** оператора $\hat{L}$, отвечающий собственному значению 0, является ненулевой линейной комбинацией векторов $1+x$ и $x+x^2$.

Пример 8. *Найдите все **собственные векторы** оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $\text{Б} = \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем все **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2.

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе $Б = \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем все **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2. Для этого запишем **уравнение для нахождения собственного вектора** для данного случая:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. В процессе решения примера 3 мы нашли матрицу этого оператора в базисе Б $= \{x^0, x, x^2\}$: $\quad L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем все **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2. Для этого запишем **уравнение для нахождения собственного вектора** для данного случая:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно решить буквально «в уме», получаем фундаментальную систему решений

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из* *примера 3.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно решить буквально «в уме», получаем фундаментальную систему решений $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из примера 3.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно решить буквально «в уме», получаем фундаментальную систему решений $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Следовательно, **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 2, имеют вид Cx^0, где C — произвольное ненулевое вещественное число.

Пример 8. *Найдите все **собственные векторы** оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

Решение. Кстати, можно было сразу увидеть, что x^0 является собственным вектором, отвечающим собственному значению 2. Действительно, при вычислении матрицы оператора $\hat{L}$ при решении примера 3, мы находили образ вектора x^0, и получили $\hat{L}(x^0) = 2x^0$, то есть x^0 отвечает собственному значению 2.

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора* $\hat{L}$ *из* *примера 3*.

Задача решена, но мы сейчас сделаем еще кое-что. А именно, найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе из собственных векторов **Б'** $= \{1 + x,\ x + x^2,\ x^0\}$. Для этого надо найти образы базисных векторов. Имеем

$$\hat{L}(1+x) = (x+1)^2 \cdot 0 - (x+1) \cdot 1 + 2(1+x) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x + x^2) + 0 \cdot x^0.$$

$$\hat{L}(x+x^2) = (x+1)^2 \cdot 2 - (x+1)(1+2x) + 2(x+x^2) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0,$$

$$\hat{L}(x^0) = 2x^0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 2 \cdot x^0.$$

Пример 8. *Найдите все* ***собственные векторы*** *оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

$$\hat{L}(1+x) = (x+1)^2 \cdot 0 - (x+1) \cdot 1 + 2(1+x) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0.$$

$$\hat{L}(x+x^2) = (x+1)^2 \cdot 2 - (x+1)(1+2x) + 2(x+x^2) = 0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot x^0,$$

$$\hat{L}(x^0) = 2x^0 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 2 \cdot x^0.$$

Следовательно, получили $L_{\text{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Пример 8. *Найдите все **собственные векторы** оператора $\hat{L}$ из примера 3.*

$$\hat{L}(1+x) = (x+1)^2\cdot 0 - (x+1)\cdot 1 + 2(1+x) = 0 = 0\cdot(1+x) + 0\cdot(x+x^2) + 0\cdot x^0.$$

$$\hat{L}(x+x^2) = (x+1)^2\cdot 2 - (x+1)\,(1+2x) + 2(x+x^2) = 0 = 0\cdot(1+x) + 0\cdot(x+x^2) + 0\cdot x^0,$$

$$\hat{L}(x^0) = 2x^0 = 0\cdot(1+x) + 0\cdot(x+x^2) + 2\cdot x^0.$$

Следовательно, получили $L_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Обратите внимание на то, что эта матрица — диагональная. Случайно ли это? Мы обсудим это в следующем разделе.

Вернёмся к лекции?

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Ясно, что X — матрица размерности 2×2.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица определяется своими коэффициентами. Поэтому положим $X =$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица определяется своими коэффициентами. Поэтому положим $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица определяется своими коэффициентами. Поэтому положим $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица определяется своими коэффициентами. Поэтому положим $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица определяется своими коэффициентами. Поэтому положим $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Rightarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3ab+2c-3bc}{ad-bc} = 1, \\ \dfrac{-3bd-3b^2+2d^2-6ad+6bc}{ad-bc} = 6, \\ \dfrac{3ac+3a^2-2c^2-ad+bc}{ad-bc} = 1, \\ \dfrac{3ab-2cd+3bc}{ad-bc} = 4. \end{cases}$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3ab+2c-3bc}{ad-bc} = 1, \\ \dfrac{-3bd-3b^2+2d^2-6ad+6bc}{ad-bc} = 6, \\ \dfrac{3ac+3a^2-2c^2-ad+bc}{ad-bc} = 1, \\ \dfrac{3ab-2cd+3bc}{ad-bc} = 4. \end{cases}$$

Да-а-а, система из четырех нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными...

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$

Решение.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3ab+2c-3bc}{ad-bc}=1,\\ \dfrac{-3bd-3b^2+2d^2-6ad+6bc}{ad-bc}=6,\\ \dfrac{3ac+3a^2-2c^2-ad+bc}{ad-bc}=1,\\ \dfrac{3ab-2cd+3bc}{ad-bc}=4. \end{cases}$$

Да-а-а, система из четырех нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными...
Спасибо родной партии за наше счастливое детство...

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3ab+2c-3bc}{ad-bc} = 1, \\ \dfrac{-3bd-3b^2+2d^2-6ad+6bc}{ad-bc} = 6, \\ \dfrac{3ac+3a^2-2c^2-ad+bc}{ad-bc} = 1, \\ \dfrac{3ab-2cd+3bc}{ad-bc} = 4. \end{cases}$$

Нужна другая идея.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Можно попытаться свести исходную задачу к линейным уравнениям, линейным функциям, задачам линейной алгебры. Для этого обычно применяются следующие методы:

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. Можно попытаться свести исходную задачу к линейным уравнениям, линейным функциям, задачам линейной алгебры. Для этого обычно применяются следующие методы:
во-первых, «расщепление» переменных (сведение задачи о квадратичных формах к билинейным формам, метод Бернулли решения линейного уравнения);

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Можно попытаться свести исходную задачу к линейным уравнениям, линейным функциям, задачам линейной алгебры. Для этого обычно применяются следующие методы:
во-первых, «расщепление» переменных (сведение задачи о квадратичных формах к билинейным формам, метод Бернулли решения линейного уравнения);
во-вторых, смена ролей и приоритетов (изменение ролей параметров и неизвестных, замена константы на переменную, тождественные преобразования выражений или равносильные преобразования уравнений, введение дополнительных функций).

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. Например, для того, чтобы получить линейные выражения от матрицы X, умножим обе части исходного уравнения слева на матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Например, для того, чтобы получить линейные выражения от матрицы X, умножим обе части исходного уравнения слева на матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В данном случае мы получаем систему линейных уравнений относительтно коэффициентов матрицы X:

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. Например, для того, чтобы получить линейные выражения от матрицы X, умножим обе части исходного уравнения слева на матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Например, для того, чтобы получить линейные выражения от матрицы X, умножим обе части исходного уравнения слева на матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = a + b, \\ b + 2d = 6a + 4b, \\ 3a + 4c = c + d, \\ 3b + 4d = 6c + 4d. \end{cases}$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Например, для того, чтобы получить линейные выражения от матрицы X, умножим обе части исходного уравнения слева на матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = a + b, \\ b + 2d = 6a + 4b, \\ 3a + 4c = c + d, \\ 3b + 4d = 6c + 4d. \end{cases}$$

Получили систему линейных уравнений.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. Например, для того, чтобы получить линейные выражения от матрицы X, умножим обе части исходного уравнения слева на матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = a + b, \\ b + 2d = 6a + 4b, \\ 3a + 4c = c + d, \\ 3b + 4d = 6c + 4d. \end{cases}$$

Но мы рассмотрим другой вариант решения.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Как правило, при решений уравнений основная цель состоит в сведении исходного уравнения к виду, для которого имеется типовой способ решения:

— к системе линейных уравнений (решение **методом Гаусса** или с помощью **формул Крамера**);

— к уравнению вида $\varphi(x) = C$, где φ — одна из основных элементарных функций (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая, обратная тригонометрическая),

типовое дифференциальное уравнение (уравнение с разделяющимися переменными, линейное и т.д.),

— к матричному уравнению $AXB = C$ и др.

Пример 9. *Решите матричное уравнение* $X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для этого применяются следующие методы:

— равносильные преобразования уравнений;

— сведение к уравнению $\alpha(x)\beta(x) = 0$;

— доказательство того, что в полученном уравнении $\gamma(x) = C$ число C является экстремальным значением функции γ.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В данном случае напрашивается выполнить преобразование:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}.$

Решение.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}.$$

В данном случае напрашивается выполнить преобразование:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В данном случае напрашивается выполнить преобразование:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение в левой части последнего равенства является линейной функцией.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

можно интерпретировать как утверждение о том, что матрица X принадлежит **ядру линейного оператора**

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Равенство
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
можно интерпретировать как утверждение о том, что матрица X принадлежит **ядру линейного оператора** $\hat{L}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения мы свели к задаче отыскания **ядра линейного оператора**
$$\hat{L}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
в конечномерном линейном пространстве.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим типовой план отыскания ядра оператора $\hat{L}$:
1) ввести **базис** **Б** исходного линейного пространства;

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим типовой план отыскания ядра оператора $\hat{L}$:
1) ввести **базис** $\mathbf{Б}$ исходного линейного пространства;
2) найти в этом базисе **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$;

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим типовой план отыскания ядра оператора $\hat{L}$:
1) ввести **базис** **Б** исходного линейного пространства;
2) найти в этом базисе **матрицу** $L_{\mathbf{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$;
3) используя **теорему о координатах образа вектора**, свести отыскание вектора X из ядра оператора $\hat{L}$ к решению матричного уравнения $L_{\mathbf{Б}}\,[X]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}}$;

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим типовой план отыскания ядра оператора $\hat{L}$:
1) ввести **базис** $\mathbf{Б}$ исходного линейного пространства;
2) найти в этом базисе **матрицу** $L_{\mathbf{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$;
3) используя **теорему о координатах образа вектора**, свести отыскание вектора X из ядра оператора $\hat{L}$ к решению матричного уравнения $L_{\mathbf{Б}}\,[X]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}}$;
4) найти базис пространства решений последней системы, то есть ее **фундаментальную систему решений**;

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}.$$

Решение. Применим типовой план отыскания ядра оператора $\hat{L}$:
1) ввести **базис** $\mathbf{Б}$ исходного линейного пространства;
2) найти в этом базисе **матрицу** $L_{\mathbf{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$;
3) используя **теорему о координатах образа вектора**, свести отыскание вектора X из ядра оператора $\hat{L}$ к решению матричного уравнения $L_{\mathbf{Б}}\,[X]_{\mathbf{Б}}=[\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}}$;
4) найти базис пространства решений последней системы, то есть ее **фундаментальную систему решений**;
5) найти **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений;

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим типовой план отыскания ядра оператора $\hat{L}$:
1) ввести **базис** $\mathbf{Б}$ исходного линейного пространства;
2) найти в этом базисе **матрицу** $L_{\mathbf{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$;
3) используя **теорему о координатах образа вектора**, свести отыскание вектора X из ядра оператора $\hat{L}$ к решению матричного уравнения $L_{\mathbf{Б}}\,[X]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}}$;
4) найти базис пространства решений последней системы, то есть ее **фундаментальную систему решений**;
5) найти **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений;
6) **записать** множество решений исходного уравнения.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Введем **базис** линейного пространства матриц размерности 2×2:

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{Б}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{Б}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{Б}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\mathbf{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\mathbf{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид
$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+(-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид
$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{6} & & & \\ \mathbf{-3} & & & \\ \mathbf{0} & & & \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+(-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид
$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 6 & & & \\ -3 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + $$
$$+0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & & \\ 6 & \mathbf{3} & & \\ -3 & \mathbf{0} & & \\ 0 & \mathbf{-3} & & \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ +0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 6 & 3 & & \\ -3 & 0 & & \\ 0 & -3 & & \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу $L_{\text{Б}}$ оператора** $\hat{L}$:
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица $L_{\text{Б}}$ оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид
$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{-2} & \\ 6 & 3 & \mathbf{0} & \\ -3 & 0 & \mathbf{-3} & \\ 0 & -3 & \mathbf{6} & \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+(-3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$L_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & \\ 6 & 3 & 0 & \\ -3 & 0 & -3 & \\ 0 & -3 & 6 & \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}.$$

Решение. 2) Найдём в **базисе Б** **матрицу** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$:

$$\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\-3&0\end{pmatrix},\quad \hat{L}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&-3\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\-3&6\end{pmatrix},\quad \hat{L}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}.$$

Значит, **матрица** $L_{\text{Б}}$ **оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б** имеет вид

$$L_{\text{Б}}=\begin{pmatrix}0&1&-2&\mathbf{0}\\6&3&0&\mathbf{-2}\\-3&0&-3&\mathbf{1}\\0&-3&6&\mathbf{0}\end{pmatrix}.\quad \begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. 3) Используя **теорему о координатах образа вектора**, сведем отыскание вектора X из ядра оператора $\hat{L}$ к решению матричного уравнения $L_{\mathbf{Б}}\,[X]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} [X]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & -2 & 0 \\ \mathbf{-3} & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & -2 & 0 \\ \mathbf{-3} & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{-2} & 0 \\ -3 & 0 & \mathbf{-3} & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{-2} & 0 \\ -3 & 0 & \mathbf{-3} & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{2} \\ 1 \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

4) Найдём **фундаментальную систему решений**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto [X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}.$$

Решение. 5) Найдём **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений: $[X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}1&0&0&3\end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ X_1 =$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 5) Найдём **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений: $[X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ X_1 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 5) Найдём **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений: $[X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_1 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 5) Найдём **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений: $[X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ X_1 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ X_2 =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 5) Найдём **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений: $[X_1]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_1 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$[X_2]_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_2 = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. 5) Найдём **прообразы** $X_1, X_2, \ldots, X_k$ векторов из фундаментальной системы решений: $[X_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_1 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$[X_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{t}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_2 = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&6\\1&4\end{pmatrix}.$$

Решение. 6) **Запишем** множество решений исходного уравнения. Мы получили, что $X=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&2\beta\\\beta&3\alpha+3\beta\end{pmatrix}.$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 6) **Запишем** множество решений исходного уравнения. Мы получили, что $X = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$.

По условию матрица X обратима, значит, согласно **критерию обратимости матрицы**

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 6) **Запишем** множество решений исходного уравнения. Мы получили, что $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$.

По условию матрица X обратима, значит, согласно **критерию обратимости матрицы**

$$\det X \neq 0 \;\Rightarrow$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. 6) **Запишем** множество решений исходного уравнения. Мы получили, что $X = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$.

По условию матрица X обратима, значит, согласно **критерию обратимости матрицы**

$$\det X \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{vmatrix} = \qquad\qquad\qquad\qquad \neq 0,$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. 6) **Запишем** множество решений исходного уравнения. Мы получили, что $X = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha+3\beta \end{pmatrix}$.

По условию матрица X обратима, значит, согласно **критерию обратимости матрицы**

$$\det X \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha+3\beta \end{vmatrix} = 3\alpha^2 + 3\alpha\beta - 2\beta^2 \neq 0,$$

Пример 9. *Решите матричное уравнение*
$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. 6) **Запишем** множество решений исходного уравнения. Мы получили, что $X = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$.

По условию матрица X обратима, значит, согласно **критерию обратимости матрицы**

$$\det X \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{vmatrix} = 3\alpha^2 + 3\alpha\beta - 2\beta^2 \neq 0,$$

откуда $\alpha \neq \left(-\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{11}{12}}\right)\beta$.

Пример 9. *Решите матричное уравнение*

$$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & 3\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{11}{12}}\right)\beta$.

Вернёмся к лекции?

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости*[1] U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Решение.

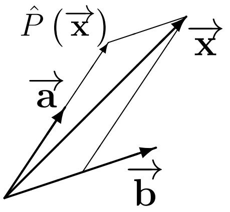


Рис. 3.

[1] т.е. двумерного линейного пространства геометрических векторов.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Решение. Можно предложить, как минимум, два способа решения: во-первых, решение геометрическое и, во-вторых, стандартное решение, с помощью перехода в «пространство координат», в линейное пространство $\mathbb{R}^2$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. Главный недостаток этого решения состоит в том, что оно основано на значительно менее «стандартизованном» математическом аппарате, в частности, не очень понятно даже, *как* «геометрически» задать искомый оператор $\hat{P}^*$ (что вызывает трудности с использованием **стратегии составления уравнений**). Поэтому это решение будет «эвристическим», что выражается, в частности, в обильном использовании фразы «заметим, что».

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение. Итак, сначала *заметим, что* оператор $\hat{P}^*$ не нулевой и не тождественный, так как

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) \neq 0,$$

то есть $\hat{P}^* \neq \hat{0}$ и

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0 \neq \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right),$$

откуда $\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \neq \overrightarrow{\mathbf{b}}$, то есть $\hat{P}^*$ действует на U не тождественно.

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

Геометрическое решение. *Заметим, что* $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, поэтому для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеем, согласно определению сопряженного оператора,

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогонален к $\hat{P}^*(U)$.

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

Геометрическое решение. *Заметим, что* $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, поэтому для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеем, согласно определению сопряженного оператора,

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

следовательно, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогонален к $\hat{P}^*(U)$. Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ какой-либо ненулевой вектор из $\hat{P}^*(U)$. Заметим, что $\hat{P}^*\left(U\right) = \langle\overrightarrow{\mathbf{c}}\rangle$, то есть $\langle\overrightarrow{\mathbf{c}}\rangle$ является $\hat{P}^*$-инвариантным подпространством. Следовательно,

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \tag{2}$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3).*

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{c}}. \qquad (2)$$

Заметим, что по определению оператора $\hat{P}$ имеем $\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{a}}$. Следовательно, для любого вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеем, согласно определению сопряженного оператора,

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right).$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{c}}. \tag{2}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right).$$

Получили равенство

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \tag{3}$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \qquad (2)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \qquad (3)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right) \Leftrightarrow 0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

Положим в последнем равенстве $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{c}}$. Получаем, в силу равенства (2), что

$$0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, (\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}}\right).$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** *$\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

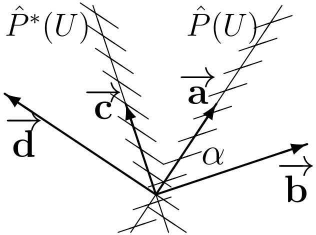


Рис. 4.

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \qquad (2)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \qquad (3)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0, \quad \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, (\lambda - 1)\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0.$$

$\overrightarrow{\mathbf{c}}$ ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, поэтому он не ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (иначе $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогональны к $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, но $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ не коллинеарны, см. **рис.4**).

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

$$0 = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right),$$

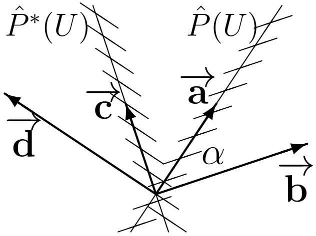


Рис. 4.

$$\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{c}}. \tag{2}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right). \tag{3}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = 0, \quad \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, (\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = 0.$$

$\overrightarrow{\mathbf{c}}$ ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, поэтому он не ортогонален к $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (иначе $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ ортогональны к $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, но $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ не коллинеарны, см. **рис.4**).

Значит, $(\lambda - 1)\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то есть $\lambda = 1$.

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

Геометрическое решение. Итак, вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}} \in \hat{P}^*(U)$ является собственным для оператора $\hat{P}^*$, отвечающим собственному значению 1. Согласно **критериям вырожденности оператора**, в силу

$$1 = \dim\left(\hat{P}^*(U)\right) = \mathrm{Rg}\left(\hat{P}^*\right) < \dim(U) = 2,$$

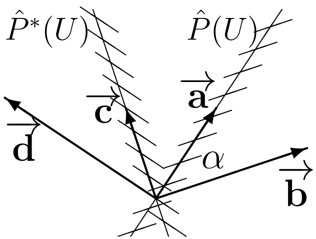


Рис. 4.

имеем, что **ядро** оператора $\hat{P}^*$ ненулевое. Значит, $\hat{P}^*$ — оператор проецирования на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{c}}$. Осталось понять, параллельно какому вектору осуществляется проецирование.

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору* $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

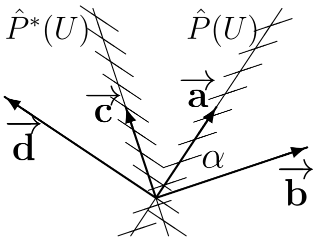


Рис. 4.

И опять «заметим, что». Оказывается, что проецирование осуществляется параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{d}}$, ортогональному вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. В самом деле, $\hat{P}^*(U) = \langle \overrightarrow{\mathbf{c}} \rangle$, поэтому $\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \mu \overrightarrow{\mathbf{d}}$. Следовательно,

$$0 = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right), \overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}\right)\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \mu \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) = \mu\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right).$$

Поскольку $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) \neq 0$, то $\mu = 0$, то есть $\hat{P}^*\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, что и требовалось доказать.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

Геометрическое решение.

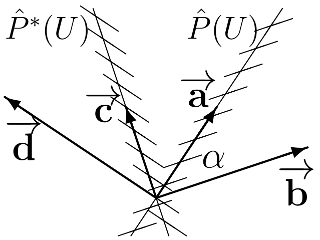


Рис. 4.

Итак, $\hat{P}^*$ — оператор проецирования на ось вектора $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{d}}$, где $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти?

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

В каком виде представим ответ?

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

В каком виде представим ответ? Укажем **матрицу оператора**[2] в некотором базисе.

[2]Обратите внимание, ответ будет бессмысленным, если мы укажем матрицу *без указания базиса!*

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. В этом случае все рассуждения стандартные, используем **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Оператор, сопряженный линейному оператору $\hat{P}$.

В каком виде представим ответ? Укажем **матрицу оператора** в некотором базисе.

Введем переменные или найдем матрицу конструктивно.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. *Введем переменные или найдем матрицу конструктивно.* Разумеется, сначала **надо ввести базис**. Например, положим $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} \right\}$. Этот базис плох тем, что он не ортонормированный. С другой стороны, можно рассчитывать на то, что в этом базисе нам будет сравнительно легко находить координаты интересующих нас векторов.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Мы хотим воспользоваться **формулой для матрицы сопряженного оператора**. Для этого надо найти **матрицу оператора** $\hat{P}$ и **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$. Последнее не составляет труда, так как согласно определению **скалярного произведения для геометрических векторов**, имеем

$$\begin{cases} \gamma_{11} = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha, \\ \gamma_{22} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2. \end{cases}$$

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение.

$$\begin{cases} \gamma_{11} = (\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha, \\ \gamma_{22} = \left(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2. \end{cases}$$

то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Итак,

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0<\alpha<\pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cdot\cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cdot\cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cdot\cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cdot\cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

При транспонировании эта матрица не изменится, поэтому эта матрица является присоединенной к $\Gamma_{\mathbf{Б}}$.

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения детерминанта матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ можно вычислить диагональные элементы произведения полученной матрицы на $\Gamma_{\mathbf{Б}}$, но здесь это проще сделать «по честному».

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}$ найдем с помощью присоединенной матрицы. Матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\left|\Gamma_{\mathbf{Б}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \left(1 - \cos^2\alpha\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\Gamma_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_{\text{Б}}^{-1} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) =$$

следовательно, $\mathbf{P_{Б}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} =$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \left(\quad \right).$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

следовательно, $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

следовательно, $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} =$$

следовательно, $\mathbf{P_{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto$$

следовательно, $\mathbf{P_Б} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Осталось найти **матрицу оператора** $\hat{P}$, что тоже делается без труда:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь с помощью **соответствующей формулы** находим матрицу сопряженного оператора:

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathrm{P}^*_{\text{Б}} =$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathrm{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathrm{P}^*_{\text{Б}} = \Gamma^{-1}_{\text{Б}} P_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} =$

$$= \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. $\mathrm{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. $\mathrm{P}^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. $\mathbf{P}^{*}_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} =$

$$= \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \sin^2\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 & \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^3 \cdot \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^3 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha & -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Как этот результат согласуется с **геометрическим описанием** действия оператора $\hat{P}^*$?

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ матрица оператора $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные векторы и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и 1, поскольку

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны **0** и 1, поскольку $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — вектор из ядра, т.е.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны **0** и 1, поскольку $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — вектор из ядра, т.е. $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} =$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны **0** и 1, поскольку $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ — вектор из ядра, т.е. $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и **1**, поскольку
$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} =$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и **1**, поскольку $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}} = 1\overrightarrow{\mathbf{a}}$.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Таким образом, в базисе $\left\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{P}^*$ имеет вид

$$\hat{P}^*_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем **собственные векторы** и собственные значения этого оператора. Мы знаем, что они должны быть равны 0 и 1.

Проверим...

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору* $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\lambda - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} = 0.$$

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору* $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\lambda - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \sin^2\alpha} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin^2\alpha} = 0.$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \lambda & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\lambda - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \sin^2\alpha} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sin^2\alpha} = 0.$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 0:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 0:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix}.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\text{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha =$$

Пример 10. *Найти **сопряженный к оператору** $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами $\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}}$, для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\alpha = 0.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 0 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\mathbf{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0,$$

т.е. **собственный вектор** $\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$, отвечающий собственному значению 0, ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Это согласуется с результатом, полученным **геометрическим способом**.

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \end{pmatrix},$$

Пример 10. *Найти сопряженный к оператору $\hat{P}$, осуществляющему проецирование плоскости U на вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ параллельно вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, образующему с $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ угол α, где $0 < \alpha < \pi$ (см.рис.3).*

«Координатное» решение. Найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 & \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\sin^2\alpha} \\ -\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha}{\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\sin^2\alpha} & -\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad u\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 =$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$*, осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$*, образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α*, где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Согласно результату, полученному **геометрическим способом**, **собственный вектор** $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, отвечающий собственному значению 1, должен быть ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\alpha - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\alpha \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 = 0.$$

Пример 10. *Найти* ***сопряженный к оператору*** $\hat{P}$, *осуществляющему проецирование плоскости* U *на вектор* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, *образующему с* $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *угол* α, *где* $0 < \alpha < \pi$ *(см.рис.3)*.

«Координатное» решение. Собственному значению 1 соответствует, в частности, вектор с координатами

$$\begin{pmatrix} \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \\ -\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \end{pmatrix} = \left[\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]_{\text{Б}},$$ для которого

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}};\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0,$$

т.е. **собственный вектор** $\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} - \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$, отвечающий собственному значению 1, ортогонален вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$. Это согласуется с результатом, полученным **геометрическим способом**.

Вернёмся к лекции?

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\text{Б}}$
Подпространство V	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\text{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\text{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \dots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n \times n}$ в базисе **Б**

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n \times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n\times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	$(x, y) = [x]_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n\times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$
Линейный оператор $\hat{P}$	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n\times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$
Линейный оператор $\hat{P}$	Матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}}$ оператора

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n\times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}$
Линейный оператор $\hat{P}$	Матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}}$ оператора
$\hat{P}(x)$	

I. Упражнения: стандартные способы представления в $\mathbb{R}^n$

Объект в линейном пространстве U с базисом Б	**Типовой образ в $\mathbb{R}^n$**
Вектор x	Столбец координат $[x]_{\mathbf{Б}}$
Подпространство V	1) ОСЛУ, т.е. утверждение о *координатах вектора из* V; 2) $V = \langle v_1, \ldots \rangle$
Скалярное произведение	Матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \big((e_i, e_j)\big)_{n\times n}$ в базисе **Б**
(x, y)	$(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}$
Линейный оператор $\hat{P}$	Матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{Б}}$ оператора
$\hat{P}(x)$	$\left[\hat{P}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = \mathbf{P}_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}$

Задача II.1. (Ответ приведен на стр.498.) Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.509.) Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.525.) Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Задача III.4. (Ответ приведен на стр.554.) На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.603.) На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.632.) Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\left(1-x^2\right)=1+2x+x^2$, $\hat{S}\left(1-x\right)=x^2-1$, $\hat{S}\left(1+x\right)=2x$.

Задача IV.7. (Ответ приведен на стр.653.) На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Задача IV.8. (Ответ приведен на стр.669.) На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\,(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X$, $\quad \hat{B}\,(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Задача V.9. (Ответ приведен на стр.685.) На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Задача V.10. (Ответ приведен на стр.739.) Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Задача VI.11. (Ответ приведен на стр.745.) На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz,$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Задача VI.12. (Ответ приведен на стр.767.) Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача VII.13. (Ответ приведен на стр.774.) Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1 - x). \tag{5}$$

Задача VII.14. (Ответ приведен на стр.797.) На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y;x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0$, $y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Задача VIII.15. (Ответ приведен на стр.806.) Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \left\{x^0,\ x,\ x^2\right\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Задача IX.16. (Ответ приведен на стр.878.) Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Задача IX.17. (Ответ приведен на стр.906.) На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Задача IX.18. (Ответ приведен на стр.937.) Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Задача IX.19. (Ответ приведен на стр.967.) Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Задача IX.20. (Ответ приведен на стр.996.) Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Задача IX.21. (Ответ приведен на стр.1015.) Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество
$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x).$$

Задача IX.22. (Ответ приведен на стр.1035.) Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Задача IX.23. (Ответ приведен на стр.1048.) Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Задача IX.24. (Ответ приведен на стр.1066.) Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. а) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Задача IX.25. (Ответ приведен на стр.1081.) Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Задача IX.26. (Ответ приведен на стр.1102.) Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

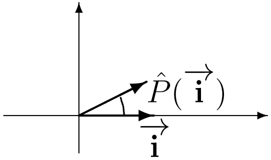
Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.

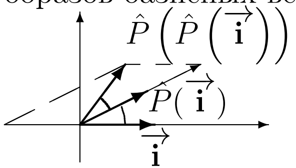
Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



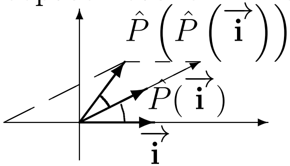
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) =$$

Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



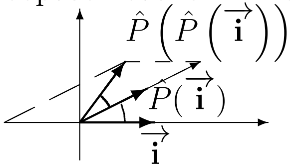
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$$

Задача 1. Найдите матрицу оператора $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению матрицы линейного оператора нам следует найти координаты образов базисных векторов.



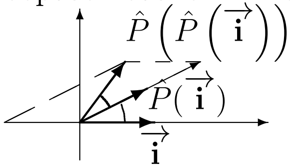
$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} 0 & \quad \\ 1 & \quad \end{pmatrix}$$

Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$$

Задача 1. Найдите матрицу оператора $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению матрицы линейного оператора нам следует найти координаты образов базисных векторов.



Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right)$:

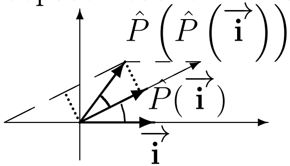
$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} 0 & \quad \\ 1 & \quad \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$$

$$\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right) = \underline{\qquad} \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \underline{\qquad\quad} \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right).$$

Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} 0 & \qquad\qquad\qquad\qquad \\ 1 & \end{pmatrix}$$

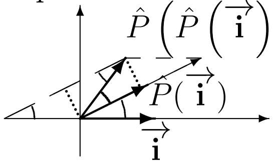
Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right)$:

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$$

$$\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right) = \underline{\qquad\quad} \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \underline{\qquad\qquad} \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right).$$

Задача 1. Найдите **матрицу оператора** $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right)$:

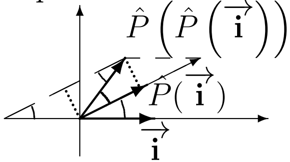
$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$

$\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right) = \underline{\qquad} \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \underline{\qquad\quad} \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right).$

Задача 1. Найдите матрицу оператора $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению матрицы линейного оператора нам следует найти координаты образов базисных векторов.



Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right)$:

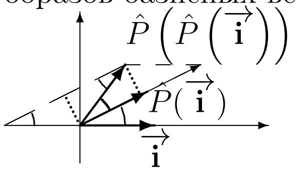
$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$$

$$\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right) = (-1) \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\cos\alpha \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right).$$

Задача 1. Найдите матрицу оператора $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$.

Ответ. По определению матрицы линейного оператора нам следует найти координаты образов базисных векторов.



Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \hat{P}(\overrightarrow{\mathbf{i}})\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right),$$

$$\hat{P}\left(\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)\right) = (-1) \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\cos\alpha \cdot \hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right).$$

Решение задачи 2.

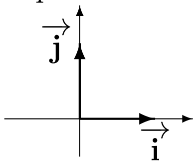
Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.

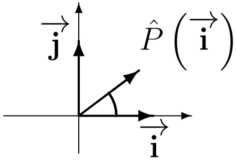
Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



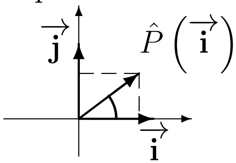
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \left(\qquad\qquad \right)$$

????

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.

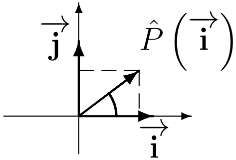


Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}} = \left(\qquad \right)$$

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



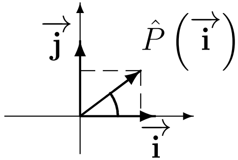
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \left(\qquad\qquad\qquad \right)$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \_\_\_\_\_ \overrightarrow{\mathbf{i}} + \_\_\_\_\_ \overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



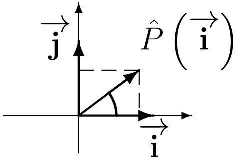
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \underline{\qquad}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



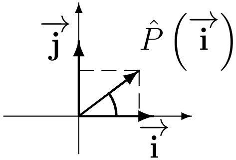
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



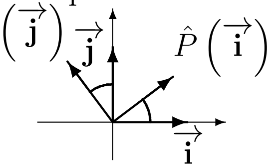
Найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \\ \sin\alpha & \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.

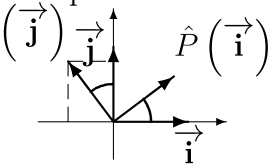


Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \\ \sin\alpha & \end{pmatrix}$$

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.

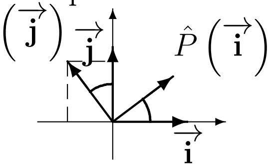


Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \\ \sin\alpha & \end{pmatrix}$$

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



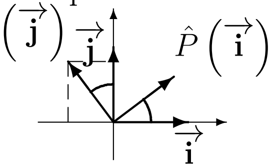
Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \quad\quad\quad\quad \\ \sin\alpha & \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = \underline{\qquad\quad}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \underline{\qquad\quad}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



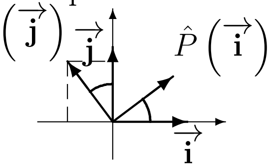
Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \qquad\qquad \\ \sin\alpha & \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -\sin\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \underline{\qquad}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.



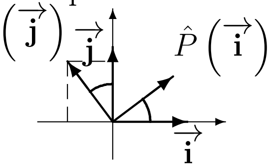
Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$:

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \\ \sin\alpha & \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -\sin\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$.

Ответ. По определению **матрицы линейного оператора** нам следует найти координаты образов базисных векторов.

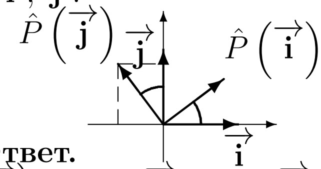


Теперь найдем координаты вектора $\hat{P}\left(\vec{\mathbf{j}}\right)$:

$$P_{\{\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

из прямоугольного треугольника получаем, что $\hat{P}\left(\vec{\mathbf{j}}\right) = -\sin\alpha\,\vec{\mathbf{i}} + \cos\alpha\,\vec{\mathbf{j}}$.

Задача 2. Найдите **матрицу оператора** поворота плоскости на угол α в базисе из векторов $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$.



Ответ.

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}\right) = \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\hat{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = -\sin\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$P_{\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{j}}\}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. Условие задачи некорректно, поскольку не указан базис, в котором надо найти матрицу оператора.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. Условие задачи некорректно, поскольку не указан базис, в котором надо найти матрицу оператора.

Выберем естественный базис «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. Б $=\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3};\ \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$.

Естественно, применим, **стратегию составления уравнений**.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. **Б** $=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?*

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. **Б** $=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?* Матрицу оператора.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. **Б** $=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?* Матрицу оператора. *В каком виде представим ответ?*

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4) = -24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4) = -24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4) = 48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4) = 48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. Б $=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?* Матрицу оператора. *В каком виде представим ответ?* Таблицей.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. Б $=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?* Матрицу оператора.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial^3}{\partial x^3};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \dfrac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?* Матрицу оператора.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты матрицы:

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34}\\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44}\end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4) = -24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4) = -24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4) = 48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4) = 48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. **Б** $=\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3};\ \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y};\ \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2};\ \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right\}$. *Что надо найти?* Матрицу оператора.
В каком виде представим ответ? Таблицей.
Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты матрицы:

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34}\\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44}\end{pmatrix}.$$

Составим уравнения.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial yrp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right).$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=\dots$$

$$\boxed{\frac{\partial^3}{\partial x^3}x^4y^4=\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=\dots$$

$$\boxed{\frac{\partial^3}{\partial x^3}x^4y^4=\frac{\partial^2}{\partial x^2}4x^3y^4=\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\left(\qquad\qquad\qquad\right).$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial yrr^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=\ldots$$

$$\boxed{\frac{\partial^3}{\partial x^3}x^4y^4=\frac{\partial^2}{\partial x^2}4x^3y^4=\frac{\partial}{\partial x}4\cdot 3x^2y^4=}$$

$$L_{\text{Б}}=\left(\qquad\qquad\right).$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=\ldots$$

$$\boxed{\frac{\partial^3}{\partial x^3}x^4y^4=\frac{\partial^2}{\partial x^2}4x^3y^4=\frac{\partial}{\partial x}4\cdot 3x^2y^4=4\cdot 3\cdot 2xy^4.}$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right).$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$=L_{11}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{21}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{31}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{41}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\left(\quad\quad\quad\quad\right).$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{21}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{31}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{41}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$=L_{11}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{21}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{31}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{41}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4=$
$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{32}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{42}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$L_{\text{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{32}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{42}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$
$$=L_{12}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{22}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{32}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{42}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{32}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{42}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$=L_{12}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{22}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{32}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{42}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{13}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{23}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{33}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{43}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{13}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{23}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{33}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{43}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$=L_{13}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{23}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{33}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{43}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{13}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{23}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{33}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{43}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$

$$=L_{13}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{23}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{33}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{43}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \\ 1 & 2 & -1 & \\ 1 & 1 & -2 & \\ -1 & -1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{14}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{34}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{44}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$
$$=L_{14}\cdot 4\cdot 3\cdot 2xy^4+L_{24}\cdot 4\cdot 3\cdot 4x^2y^3+L_{34}\cdot 4\cdot 4\cdot 3x^3y^2+L_{44}\cdot 4\cdot 3\cdot 2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \\ 1 & 2 & -1 & \\ 1 & 1 & -2 & \\ -1 & -1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство операторов вида $\alpha\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}+\beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\delta\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}$. Найдите **матрицу линейного оператора** $\hat{L}$, если известно, что

$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+48x^2y^3+24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right)\right)(x^4y^4)=-24x^4y+48x^3y^2+96x^2y^3+48xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4,$$
$$\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial ypp^3}\right)\right)(x^4y^4)=48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4.$$

Ответ. $48x^4y-96x^3y^2-48x^2y^3-24xy^4=$

$$=\left(\hat{L}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right)\right)(x^4y^4)=\left(L_{14}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+L_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+L_{34}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+L_{44}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)(x^4y^4)=$$
$$=L_{14}\cdot4\cdot3\cdot2xy^4+L_{24}\cdot4\cdot3\cdot4x^2y^3+L_{34}\cdot4\cdot4\cdot3x^3y^2+L_{44}\cdot4\cdot3\cdot2x^4y.$$

$$L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\1&2&-1&-1\\1&1&-2&-2\\-1&-1&2&2\end{pmatrix}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\quad \hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t)=Ae^t+Be^{-2t}+C+Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D}=\dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t=e^t$, $\hat{D}e^{-2t}=-2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)=5e^t+2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)=e^t-2e^{-2t}+1$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Задача 4. На линейном пространстве функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = \left[e^t\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = [e^t]_{\mathbf{Б}} = [1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = [e^t]_{\mathbf{Б}} = [1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} = \left[e^t\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot t\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}1\right]_{\mathbf{Б}} = [0]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t)=Ae^t+Be^{-2t}+C+Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D}=\dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t=e^t$, $\hat{D}e^{-2t}=-2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)=5e^t+2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)=e^t-2e^{-2t}+1$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)=e^t+1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б}=\{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&0&\\0&-2&0&\\0&0&0&\\0&0&0&\end{pmatrix}$

$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}}=[1]_{\mathbf{Б}}=$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$,
$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{D}t\right]_{\mathbf{Б}} = [1]_{\mathbf{Б}} = [0 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$=$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t)=Ae^t+Be^{-2t}+C+Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D}=\dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t=e^t$, $\hat{D}e^{-2t}=-2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)=5e^t+2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)=e^t-2e^{-2t}+1$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)=e^t+1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б}=\{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t+t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5&1&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&5&1&1\\0&-2&2&-2&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t=1\cdot e^t+0\cdot e^{-2t}+0\cdot 1+0\cdot t=$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{e}^{\mathbf{t}} = \mathbf{e}^{\mathbf{t}}$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{e}^{\mathbf{t}} = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{e}^{\mathbf{t}}$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t)=Ae^t+Be^{-2t}+C+Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D}=\dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t=e^t$, $\mathbf{\hat{D}e^{-2t}=-2e^{-2t}}$, $\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)=5e^t+2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)=e^t-2e^{-2t}+1$, $\hat{D}\left(e^t+t\right)=e^t+1$.
б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б}=\{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t-e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t+e^{-2t}+t-2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t+t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5&1&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&5&1&1\\0&-2&2&-2&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t=1\cdot e^t+0\cdot e^{-2t}+0\cdot 1+0\cdot t=e^t$, $\mathbf{\hat{D}e^{-2t}}=0\cdot e^t+(-2)\cdot e^{-2t}+0\cdot 1+0\cdot t=\mathbf{-2e^{-2t}}$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{\mathbf{D}}\left(\mathbf{5e^t - e^{-2t}}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\mathbf{\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\mathbf{\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)} = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{5e^t + 2e^{-2t}}$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,

$\boldsymbol{\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)} = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\mathbf{\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1}$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,

$\mathbf{\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)} = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{5e^t - 2e^{-2t} + 1}$,

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t - 2e^{-2t} + 1$,

$\hat{\mathbf{D}}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{t}} + \mathbf{t}\right) = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t =$

Задача 4. На **линейном пространстве** функций вида $f(t) = Ae^t + Be^{-2t} + C + Dt$ задан оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найдите: а) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$; б) матрицу оператора $\hat{D}$; в) векторы $\hat{D}e^t$, $\hat{D}e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)$, $\hat{D}\left(e^t + t\right)$ с помощью **теоремы о координатах образа вектора**.

Ответ. а) $\hat{D}e^t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = -2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5e^t + 2e^{-2t}$, $\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = e^t - 2e^{-2t} + 1$, $\mathbf{\hat{D}\left(e^t + t\right) = e^t + 1}$.

б) базис выберем «протаскиванием единички через параметры»: $\mathbf{Б} = \{e^t;\ e^{-2t};\ 1;\ t\}$.

Найдем **матрицу оператора** $\hat{D}$ в базисе **Б**: $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **теоремой о координатах образа вектора**:

$$\left(\left[\hat{D}e^t\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}e^{-2t}\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right)\right]_{\mathbf{Б}}\ \left[\hat{D}\left(e^t + t\right)\right]_{\mathbf{Б}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{D}e^t = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = e^t$, $\hat{D}e^{-2t} = 0 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = -2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(5e^t - e^{-2t}\right) = 5 \cdot e^t + 2 \cdot e^{-2t} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t + 2e^{-2t}$,

$\hat{D}\left(e^t + e^{-2t} + t - 2\right) = 1 \cdot e^t + (-2) \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = 5e^t - 2e^{-2t} + 1$,

$\mathbf{\hat{D}\left(e^t + t\right)} = 1 \cdot e^t + 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = \mathbf{e^t + 1}$.

Решение задачи 5.

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \Bigg($

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right.$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \left(\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \right.$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}} \right.$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X)=X^t-X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}}=\left(\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right.$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^t-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$

$$\left[\hat{L} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

По определению **матрицы оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X)=X^t-X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны,

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. С другой стороны,

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$,

т.е. по **определению координат вектора**

$\hat{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ С другой стороны,

$$\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. На линейном пространстве **матриц** размерности 2×2 **линейный оператор** $\hat{L}$ задан формулой:

$$\hat{L}(X) = X^t - X.$$

Найдите **матрицу оператора** $\hat{L}$ и проверьте выполнение **теоремы о координатах образа вектора** с помощью вычисления векторов $\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. Возьмем базис $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Итак, $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. По **теореме о координатах образа вектора** имеем

$$\left(\left[\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} \left[\hat{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{Б}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\left(1-x^2\right) = 1 + 2x + x^2$, $\hat{S}\left(1-x\right) = x^2 - 1$, $\hat{S}\left(1+x\right) = 2x$.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2)=1+2x+x^2,\quad \hat{S}\,(1-x)=x^2-1,\quad \hat{S}\,(1+x)=2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти?

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1 + 2x + x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2 - 1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ?

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\quad \hat{S}\,(1-x^2) = 1 + 2x + x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2 - 1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\quad \{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1 - x^2) = 1 + 2x + x^2, \quad \hat{S}\,(1 - x) = x^2 - 1, \quad \hat{S}\,(1 + x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2$, $\hat{S}\,(1-x) = x^2-1$, $\hat{S}\,(1+x) = 2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.*

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2$, $\hat{S}\,(1-x) = x^2-1$, $\hat{S}\,(1+x) = 2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2$ следует, что

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2)=1+2x+x^2$, $\hat{S}\,(1-x)=x^2-1$, $\hat{S}\,(1+x)=2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1-x^2)=1+2x+x^2$ следует, что

$$S\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1-x) = x^2-1$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix},$$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1-x) = x^2-1$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x) = 2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x) = 2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2)=1+2x+x^2$, $\hat{S}\,(1-x)=x^2-1$, $\hat{S}\,(1+x)=2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x)=2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Используя **умножение матриц «на макроуровне»** можно эти три равенства представить в виде одного матричного уравнения: $S\begin{pmatrix}\mathbf{1} & & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{-1} & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & & \\ \mathbf{2} & & \\ \mathbf{1} & & \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2,\quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1,\quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x) = 2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя **умножение матриц «на макроуровне»** можно эти три равенства представить в виде одного матричного уравнения: $S\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & \\ 0 & \mathbf{-1} & \\ -1 & \mathbf{0} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-1} & \\ 2 & \mathbf{0} & \\ 1 & \mathbf{1} & \end{pmatrix}.$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2)=1+2x+x^2$, $\hat{S}\,(1-x)=x^2-1$, $\hat{S}\,(1+x)=2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x)=2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

Используя **умножение матриц «на макроуровне»** можно эти три равенства представить в виде одного матричного уравнения: $S\begin{pmatrix}1&1&\mathbf{1}\\0&-1&\mathbf{1}\\-1&0&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&\mathbf{0}\\2&0&\mathbf{2}\\1&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}.$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2$, $\hat{S}\,(1-x) = x^2-1$, $\hat{S}\,(1+x) = 2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x) = 2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя **умножение матриц «на макроуровне»** можно эти три равенства представить в виде одного матричного уравнения: $S\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решая полученное уравнение, получаем:

$S =$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1 + 2x + x^2$, $\hat{S}\,(1-x) = x^2 - 1$, $\hat{S}\,(1+x) = 2x$.

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x) = 2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя **умножение матриц «на макроуровне»** можно эти три равенства представить в виде одного матричного уравнения: $S\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решая полученное уравнение, получаем:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Задача 6. Найдите матрицу оператора $\hat{S}$ линейного пространства многочленов степени не выше 2, если известно, что $\hat{S}\,(1-x^2) = 1+2x+x^2, \quad \hat{S}\,(1-x) = x^2-1, \quad \hat{S}\,(1+x) = 2x.$

Ответ. Возьмём базис линейного пространства многочленов степени не выше 2: $\{x^0,\ x,\ x^2\}$. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Матрицу.

В каком виде представим ответ? Таблицей.

Введем переменные. Обозначим искомую матрицу буквой, например, S. *Составим уравнение.* Согласно **теореме о координатах образа вектора** из равенства $\hat{S}\,(1+x) = 2x$ следует, что

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя **умножение матриц «на макроуровне»** можно эти три равенства представить в виде одного матричного уравнения: $S\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 7.

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис.

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) =$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x\right) = (2-x) = 2\cdot x^0 + (-1)\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x\right) = (2-x) = 2\cdot x^0 + (-1)\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = (2-x)^2 = 4\cdot x^0 + (-4)\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(2 - x\right), \quad \hat{B}\left(f\left(x\right)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2 - x)^0 = 1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x\right) = (2 - x) = 2 \cdot x^0 + (-1) \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = (2 - x)^2 = 4 \cdot x^0 + (-4) \cdot x + 1 \cdot x^2 \Rightarrow \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $A_{\mathbf{Б}} =$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Возьмем естественный базис: $\mathbf{Б} = \{x^0, x, x^2\}$. Найдем **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$. Напомним, что в теории многочленов принимается по определению, что $x^0 = 1$.

$$\hat{A}\left(x^0\right) = (2-x)^0 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x\right) = (2-x) = 2\cdot x^0 + (-1)\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\left(x^2\right) = (2-x)^2 = 4\cdot x^0 + (-4)\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \Rightarrow \left[\hat{B}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x), \quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right), \quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \ \Rightarrow\ \left[\hat{B}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \ \Rightarrow\ \left[\hat{B}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \ \Rightarrow\ \left[\hat{B}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} + B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Задача 7. На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(f(x)\right) = f(2-x)$, $\quad \hat{B}\left(f(x)\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ.

$$\hat{B}\left(x^0\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^0 = x^2 = 0\cdot x^0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}\left(x^2\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 = 1\cdot x^0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \;\Rightarrow\; \left[\hat{B}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}}\cdot B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Решение задачи 8.

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(X\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot X,\quad \hat{B}\left(X\right)=X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A},\ \hat{B},\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right),\quad \left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X$, $\quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X$, $\quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(X\right)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot X,\quad \hat{B}\left(X\right)=X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=$$

$$=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\hat{A}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&&&\\2&&&\\0&&&\end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot X$, $\quad \hat{B}(X)=X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=$$

$$=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left[\hat{A}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&&&\\2&&&\\0&&&\end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(X\right)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot X,\quad \hat{B}\left(X\right)=X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=$$

$$=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\hat{A}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&&\\0&1&&\\2&0&&\\0&2&&\end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot X,\quad \hat{B}(X)=X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\hat{A}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\\0\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&&\\0&1&&\\2&0&&\\0&2&&\end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(X\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot X$, $\quad\hat{B}\left(X\right)=X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\quad\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\left[\hat{A}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 4\\ 0\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(X\right)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot X,\quad \hat{B}\left(X\right)=X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}=$$

$$=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\hat{A}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\4\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&2&\\0&1&0&\\2&0&4&\\0&2&0&\end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}\left(X\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot X,\quad \hat{B}\left(X\right)=X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad\left(\hat{A}+\hat{B}\right),\quad\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad\mathbf{Б}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{A}$.

$$\hat{A}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left[\hat{A}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\\ 4\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X$, $\hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Аналогично можно найти **матрицу оператора** $\hat{B}$:

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X$, $\hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Аналогично можно найти **матрицу оператора** $\hat{B}$:

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A + B)_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A+B)_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} + B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X, \quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A \cdot B)_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 8. На **линейном пространстве** матриц размерности 2×2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены формулами: $\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X$, $\quad \hat{B}(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите **матрицы операторов** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\quad \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, $\quad \left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)$.

Ответ. Разумеется, постановка задачи некорректна, так как не указан соответствующий базис. Выберем естественный базис: $\quad \mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Поэтому

$$(A \cdot B)_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} \cdot B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \\ 4 & 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 9.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[(3x)^0-8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[1\cdot x^0+0\cdot x-8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-8\end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[(3x)^1-8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot x^0 - 13 \cdot x + 0 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot x^0 - 13 \cdot x + 0 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot x^0 - 13 \cdot x + 0 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1\cdot x^0 + 0\cdot x - 8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0\cdot x^0 - 13\cdot x + 0\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^2 - 8\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[(3x)^0-8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[1\cdot x^0+0\cdot x-8\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-8\end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[(3x)^1-8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[0\cdot x^0-13\cdot x+0\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\-13\\0\end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[(3x)^2-8\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\left[-16\cdot x^0+0\cdot x+9\cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}}=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\textbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\textbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\textbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \left[0 \cdot x^0 - 13 \cdot x + 0 \cdot x^2\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \left[(3x)^2 - 8\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \left[-16 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 9 \cdot x^2\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Возьмем базис пространства многочленов, например, $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора**:

$$\left[\hat{A}\left(x^0\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^0 - 8\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[1 \cdot x^0 + 0 \cdot x - 8 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^1 - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[0 \cdot x^0 - 13 \cdot x + 0 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\hat{A}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(3x)^2 - 8\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[-16 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 9 \cdot x^2\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda + 13\right)\left(\lambda + 7\right)\left(\lambda - 17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda + 13\right)\left(\lambda + 7\right)\left(\lambda - 17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению (-7), имеет вид $\left\{C\left(\qquad\right)\middle| C \neq 0\right\}$.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-7):

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению (-7), имеет вид $\left\{C\left(2+x^2\right) \middle| C \neq 0\right\}$.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Теперь найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 17:

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & -16 \\ 0 & -30 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Теперь найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 17:

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & -16 \\ 0 & -30 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Теперь найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 17:

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & -16 \\ 0 & -30 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению 17, имеет вид $\left\{D\left(\qquad \right) \middle| D \neq 0\right\}$.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Теперь найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 17:

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & -16 \\ 0 & -30 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению 17, имеет вид $\left\{D\left(1-x^2\right) \,\middle|\, D \neq 0\right\}$.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Наконец, найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-13):

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Наконец, найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-13):

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой
$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$
Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:
$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-16\\0&-13-\lambda&0\\-8&0&9-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$
Наконец, найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-13):
$$\begin{pmatrix}14&0&-16\\0&0&0\\-8&0&22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению (-13), имеет вид

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Поэтому **матрица оператора** имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & -13-\lambda & 0 \\ -8 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right).$$

Наконец, найдем **собственные векторы**, отвечающие собственному значению (-13):

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, множество собственных векторов, отвечающих собственному значению (-13), имеет вид $\left\{Fx \middle| F \neq 0\right\}$.

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda + 13\right)\left(\lambda + 7\right)\left(\lambda - 17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2 + x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1 - x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\textbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,
а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе **Б** $=\{x^{0};\ x;\ x^{2}\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^{2}\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^{2}\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^{2}\right)=\left(2+(3x)^{2}\right)-8\left(2+\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=2+9x^{2}-8\left(2x^{2}+2\right)=-14-7x^{2}=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе **Б** $=\{x^{0};\ x;\ x^{2}\}$ имеет вид

$$P_{\text{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^{2}\right)$ отвечает собственному значению $\left(-7\right)$, многочлен $\left(1-x^{2}\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению $\left(-13\right)$.

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^{2}\right)=\left(2+\left(3x\right)^{2}\right)-8\left(2+\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=2+9x^{2}-8\left(2x^{2}+2\right)=-14-7x^{2}=-7\left(2+x^{2}\right).$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}(f(x)) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)(x^2).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}(2+x^2) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)(x^2) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

На матричном языке, с использованием **теоремы о координатах образа вектора**:

$$\left[\hat{P}\left(2+x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению $\left(-7\right)$, многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению $\left(-13\right)$.

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right)=\left(2+\left(3x\right)^2\right)-8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=2+9x^2-8\left(2x^2+2\right)=-14-7x^2=-7\left(2+x^2\right).$$

На матричном языке, с использованием **теоремы о координатах образа вектора**:

$$\left[\hat{P}\left(2+x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}(f(x)) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)(x^2).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}(2+x^2) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)(x^2) = 2+9x^2-8(2x^2+2) = -14-7x^2 = -7(2+x^2).$$

На матричном языке, с использованием **теоремы о координатах образа вектора**:

$$\left[\hat{P}(2+x^2)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,
а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).
Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

На матричном языке, с использованием **теоремы о координатах образа вектора**:

$$\left[\hat{P}\left(2+x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = (-7)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^{2}\right)$ отвечает собственному значению $\left(-7\right)$, многочлен $\left(1-x^{2}\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению $\left(-13\right)$.

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^{2}\right)=\left(2+\left(3x\right)^{2}\right)-8\left(2+\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=2+9x^{2}-8\left(2x^{2}+2\right)=-14-7x^{2}=-7\left(2+x^{2}\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^{2}\right)=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right) = \left(1-(3x)^2\right) - 8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б}=\{x^{0};\ x;\ x^{2}\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^{2}\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^{2}\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^{2}\right)=\left(2+(3x)^{2}\right)-8\left(2+\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=2+9x^{2}-8\left(2x^{2}+2\right)=-14-7x^{2}=-7\left(2+x^{2}\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^{2}\right)=\left(1-(3x)^{2}\right)-8\left(1-\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=1-9x^{2}-8\left(x^{2}-2\right)=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right)=\left(2+(3x)^2\right)-8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=2+9x^2-8\left(2x^2+2\right)=-14-7x^2=-7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right)=\left(1-(3x)^2\right)-8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=1-9x^2-8\left(x^2-2\right)=17-17x^2=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\text{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right) = \left(1-(3x)^2\right) - 8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 1-9x^2-8\left(x^2-2\right) = 17-17x^2 = 17\left(1-x^2\right).$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+\left(3x\right)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right) = \left(1-\left(3x\right)^2\right) - 8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 1-9x^2-8\left(x^2-2\right) = 17-17x^2 = 17\left(1-x^2\right).$$

$$\left[\hat{P}\left(2+x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\textbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda + 13\right)\left(\lambda + 7\right)\left(\lambda - 17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2 + x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1 - x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2 + x^2\right) = \left(2 + (3x)^2\right) - 8\left(2 + \frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2 + 9x^2 - 8\left(2x^2 + 2\right) = -14 - 7x^2 = -7\left(2 + x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1 - x^2\right) = \left(1 - (3x)^2\right) - 8\left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 1 - 9x^2 - 8\left(x^2 - 2\right) = 17 - 17x^2 = 17\left(1 - x^2\right).$$

$$\left[\hat{P}\left(2 + x^2\right)\right]_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(3x) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,
а **характеристический полином** $-(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).
Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right) = \left(1-(3x)^2\right) - 8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 1-9x^2-8\left(x^2-2\right) = 17-17x^2 = 17\left(1-x^2\right).$$

$$\left[\hat{P}\left(2+x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f(x)\right)=f(3x)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе **Б** $=\{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** — $(\lambda+13)(\lambda+7)(\lambda-17)$. Мы вычислили, что многочлен $(2+x^2)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $(1-x^2)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right)=\left(2+(3x)^2\right)-8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=2+9x^2-8\left(2x^2+2\right)=-14-7x^2=-7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right)=\left(1-(3x)^2\right)-8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=1-9x^2-8\left(x^2-2\right)=17-17x^2=17\left(1-x^2\right).$$

$$\left[\hat{P}\left(2+x^2\right)\right]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\0\\-17\end{pmatrix}=17\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\textbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид
$P_{\textbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,
а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).
Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right)=\left(2+(3x)^2\right)-8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=2+9x^2-8\left(2x^2+2\right)=-14-7x^2=-7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right)=\left(1-(3x)^2\right)-8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right)=1-9x^2-8\left(x^2-2\right)=17-17x^2=17\left(1-x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(x\right)=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид

$$P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right) = \left(1-(3x)^2\right) - 8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 1-9x^2-8\left(x^2-2\right) = 17-17x^2 = 17\left(1-x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(x\right) = 3x - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right) =$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б}=\{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^{2}\right)=\left(2+\left(3x\right)^{2}\right)-8\left(2+\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=2+9x^{2}-8\left(2x^{2}+2\right)=-14-7x^{2}=-7\left(2+x^{2}\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^{2}\right)=\left(1-\left(3x\right)^{2}\right)-8\left(1-\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=1-9x^{2}-8\left(x^{2}-2\right)=17-17x^{2}=17\left(1-x^{2}\right).$$

$$\hat{P}\left(x\right)=3x-8\frac{d}{dx}\left(x^{2}\right)=3x-8\left(2x\right)=$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right)=f\left(3x\right)-8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^{2}\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б}=\{x^{0};\ x;\ x^{2}\}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}1&0&-16\\0&-13&0\\-8&0&9\end{pmatrix}$,
а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^{2}\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^{2}\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).
Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^{2}\right)=\left(2+(3x)^{2}\right)-8\left(2+\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=2+9x^{2}-8\left(2x^{2}+2\right)=-14-7x^{2}=-7\left(2+x^{2}\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^{2}\right)=\left(1-(3x)^{2}\right)-8\left(1-\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)\left(x^{2}\right)=1-9x^{2}-8\left(x^{2}-2\right)=17-17x^{2}=17\left(1-x^{2}\right).$$

$$\hat{P}\left(x\right)=3x-8\frac{d}{dx}\left(x^{2}\right)=3x-8\left(2x\right)=-13x.$$

Задача 9. На пространстве многочленов степени не выше 2 линейный оператор $\hat{P}$ задан формулой

$$\hat{P}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(3x\right) - 8\left(f\left(\frac{d}{dx}\right)\right)\left(x^2\right).$$

Найдите его **собственные векторы** и собственные значения и, если возможно, базис из собственных векторов.

Ответ. Итак, **матрица оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$ имеет вид

$$P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -13 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

а **характеристический полином** $-\left(\lambda+13\right)\left(\lambda+7\right)\left(\lambda-17\right)$. Мы вычислили, что многочлен $\left(2+x^2\right)$ отвечает собственному значению (-7), многочлен $\left(1-x^2\right)$ — собственному значению 17, многочлен x — собственному значению (-13).

Проверим результат по **определению собственного вектора**:

$$\hat{P}\left(2+x^2\right) = \left(2+(3x)^2\right) - 8\left(2+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 2+9x^2-8\left(2x^2+2\right) = -14-7x^2 = -7\left(2+x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(1-x^2\right) = \left(1-(3x)^2\right) - 8\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(x^2\right) = 1-9x^2-8\left(x^2-2\right) = 17-17x^2 = 17\left(1-x^2\right).$$

$$\hat{P}\left(x\right) = 3x - 8\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 3x - 8\left(2x\right) = -13x.$$

Все ожидания оправдались!

Решение задачи 10.

Задача 10. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Задача 10. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид

Задача 10. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы таковы: собственному значению 1 соответствуют векторы, пропорциональные многочлену

Задача 10. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Собственные векторы таковы: собственному значению 1 соответствуют векторы, пропорциональные многочлену x^0. Собственному значению (-1) соответствуют векторы, пропорциональные многочлену

Задача 10. Найдите **собственные векторы** линейного оператора $\hat{P}$, заданного на **линейном пространстве** многочленов степени не выше 1 формулой $\hat{P}(f(x)) = f(2-x)$.

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Собственные векторы таковы: собственному значению 1 соответствуют векторы, пропорциональные многочлену x^0. Собственному значению (-1) соответствуют векторы, пропорциональные многочлену $(x - x^0)$.

Решение задачи 11.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис:

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz,$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти?

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?*

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.*

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}. *Составим уравнение. Значение какой величину вычислим разными способами?*

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}. *Составим уравнение. Значение какой величину вычислим разными способами?* Вычисляя двумя способами $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)$, получаем

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем матрицу оператора $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Что надо найти? Матрицу. *В каком виде запишем ответ?* Таблицей чисел. *Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.* Обозначим коэффициенты искомой матрицы через h_{ij}. *Составим уравнение. Значение какой величину вычислим разными способами?* Вычисляя двумя способами $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)$, получаем

$$\left[h_{11}\frac{\partial}{\partial x}+h_{21}\frac{\partial}{\partial y}+h_{31}\frac{\partial}{\partial z}\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz\ \Rightarrow$$

$$h_{11}yz+h_{21}xz+h_{31}xy=-8xy+4xz-5yz\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}h_{11}&=-5,\\ h_{21}&=4,\\ h_{31}&=-8.\end{aligned}\right.$$

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем матрицу оператора $\hat{H}$ в базисе **Б**.

Вычисляя двумя способами $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)$, получаем

$$\left[h_{11}\frac{\partial}{\partial x} + h_{21}\frac{\partial}{\partial y} + h_{31}\frac{\partial}{\partial z}\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz \ \Rightarrow$$

$$h_{11}yz + h_{21}xz + h_{31}xy = -8xy + 4xz - 5yz \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h_{11} = -5, \\ h_{21} = 4, \\ h_{31} = -8. \end{array}\right.$$

Аналогично находим остальные коэффициенты матрицы $H_{\mathbf{Б}}$ (вычисляя двумя способами сначала $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)$ и затем $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)$).

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем **характеристический полином**:

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем **матрицу оператора** $\hat{H}$ в базисе **Б**.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем **характеристический полином**:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 & 2 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ -8 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б}=\left\{\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем матрицу оператора $\hat{H}$ в базисе **Б**.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}-5&-2&2\\4&1&-2\\-8&-4&3\end{pmatrix}$. Характеристический полином $-(\lambda-1)(\lambda+1)^2$.

Находим собственные векторы для $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}-6&-2&2\\4&0&-2\\-8&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6&-2&2\\4&0&-2\\-8&-4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\\bullet\\\bullet\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial z}\right]_{\mathbf{Б}}.$$

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Искомый базис состоит из собственных векторов оператора $\hat{H}$. Выберем естественный базис: $\mathbf{Б} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\ \dfrac{\partial}{\partial y};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$. Найдем матрицу оператора $\hat{H}$ в базисе **Б**.

В итоге получаем $H_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Находим собственные векторы для $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\left[\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial z}\right]_{\mathbf{Б}} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right]_{\mathbf{Б}}\right)$$

Задача 11. На **линейном пространстве** дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Проверку проведем только для первого базисного вектора. В координатной форме получаем $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\right]_{\mathbf{Б}}=$

$$=\begin{pmatrix}-5&-2&2\\4&1&-2\\-8&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)=-8xy+4xz-5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)=-4xy+xz-2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=3xy-2xz+2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial x}+2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ **матрица оператора** $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Другой способ проверки: с одной стороны, вычисляя с использованием характеристического свойства оператора $\hat{H}$, получаем $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=$

$$=\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz)-\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz)+2\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz)=$$

$$=-8xy+4xz-5yz-(-4xy+xz-2yz)+2(3xy-2xz+2yz)=$$

$$=2xy-xz+yz.$$

Задача 11. На линейном пространстве дифференциальных операторов вида $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}$ задан линейный оператор $\hat{H}$ такой, что $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right](xyz) = -8xy + 4xz - 5yz$,

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](xyz) = -4xy + xz - 2yz,$$

$$\left[\hat{H}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 3xy - 2xz + 2yz.$$

Если возможно, найдите базис, в котором матрица этого оператора диагональна и укажите вид матрицы в этом базисе.

Ответ. Ответ. В базисе $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y} + 2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial x} + 2\dfrac{\partial}{\partial z};\ \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ матрица оператора $\hat{H}$ диагональна и имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Другой способ проверки: с одной стороны, вычисляя с использованием характеристического свойства оператора $\hat{H}$, получаем $\left[\hat{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y} + 2\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\right](xyz) = 2xy - xz + yz.$

С другой стороны,

$$1 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}\right](xyz) = yz - xz + 2xy.$$

Очевидно, что из совпадения рассматриваемых операторов на xyz следует их совпадение. Проверка «как бы закончена» (мы не проверили вторым способом правильность нахождения второго и третьего базисных векторов).

Решение задачи 12.

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** равен

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$)

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.
Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Собственному значению $\lambda = 9$ соответствуют ненулевые векторы, пропорциональные вектору

Задача 12. Найти базис, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ имеет диагональный вид, если на множестве **симметричных** матриц размерности 2×2 он задан формулой

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. В базисе $\mathbf{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** равен $\lambda^3 - 9\lambda^2$.

Собственному значению 0 соответствуют, например, векторы (базис ядра оператора $\hat{A}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Собственному значению $\lambda = 9$ соответствуют ненулевые векторы, пропорциональные вектору $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 13.

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1 - x). \tag{5}$$

Ответ. Мы приведем 2 решения: решение, полностью основанное на алгебре многочленов, и стандартное решение, связанное с переходом «в пространство координат».

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\left(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\right) = \left(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\right)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\left(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\right) = \left(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\right)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_0^1 f(1-x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\left(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\right) = \left(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\right)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_0^1 f(1-x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $t = 1 - x$, получим

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\left(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\right) = \left(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\right)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_0^1 f(1-x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $t = 1-x$, получим

$$\int\limits_1^0 f(t)\, g(1-t)\, (-1)dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\left(g(x)\right)\, dx.$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\left(\hat{P}\left(f(x)\right); g(x)\right) = \left(f(x); \hat{P}^*\left(g(x)\right)\right)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_1^0 f(t)\, g(1-t)\,(-1)dt = \int\limits_0^1 f(x)\,\hat{P}^*\left(g(x)\right)\,dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt = \int\limits_0^1 f(x)\,\hat{P}^*\left(g(x)\right)\,dx.$$

В левой части последнего равенства переменную интегрирования t заменим на x, получим

$$\int\limits_0^1 f(x)\, g(1-x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\,\hat{P}^*\left(g(x)\right)\,dx,$$

то есть можно положить $\hat{P}^*\left(g(x)\right) = g(1-x)$. Следовательно, $\hat{P}^* = \hat{P}$, то есть оператор $\hat{P}$ — самосопряженный.

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Первое решение. В определении сопряженного оператора $\left(\hat{P}\,(f(x))\,; g(x)\right) = \left(f(x); \hat{P}^*\,(g(x))\right)$ воспользуемся формулами (4) и (5):

$$\int\limits_1^0 f(t)\, g(1-t)\,(-1)dt = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\,(g(x))\; dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^1 f(x)\, g(1-x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, \hat{P}^*\,(g(x))\; dx,$$

то есть можно положить $\hat{P}^*\,(g(x)) = g(1-x)$. Следовательно, $\hat{P}^* = \hat{P}$, то есть оператор $\hat{P}$ — самосопряженный.

Этот метод дал ответ быстро, но это достигнуто за счет некоторой нестандартности решения, его «эвристичности». Далеко не всегда можно за разумное время получить «хорошую» формулу для сопряженного оператора, точнее, для нахождения образа вектора. Поэтому мы продемонстрируем второй, стандартный, способ.

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

$$\left[\hat{P}\,(x(x-1))\right]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)(1-x-1)]_{\mathbf{Б}} = [x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \left[1 \cdot x(x-1) + 0 \cdot x^2(x-1)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

$$\Big[\hat{P}\,(x(x-1))\Big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)(1-x-1)]_{\mathbf{Б}} = [x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1 \cdot x(x-1) + 0 \cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Big[\hat{P}\,\big(x^2(x-1)\big)\Big]_{\mathbf{Б}} = \big[(1-x)^2(1-x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \big[1 \cdot x(x-1) - 1 \cdot x^2(x-1)\big]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поэтому

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \qquad (4)$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \qquad (5)$$

Ответ. **Второе решение.** Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. Найдем в этом базисе **матрицу оператора** $\hat{P}$:

$$\left[\hat{P}\,(x(x-1))\right]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)(1-x-1)]_{\mathbf{Б}} = [x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \left[1\cdot x(x-1) + 0\cdot x^2(x-1)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\hat{P}\,\big(x^2(x-1)\big)\right]_{\mathbf{Б}} = \left[(1-x)^2(1-x-1)\right]_{\mathbf{Б}} = [(1-x)x(x-1)]_{\mathbf{Б}} =$$

$$= \left[1\cdot x(x-1) - 1\cdot x^2(x-1)\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поэтому $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \Big(x(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^2\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \Big(x(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^2\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \Big(x^2(x-1); x(x-1)\Big) = \int\limits_0^1 x^3\,(x-1)^2\ dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{60},$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. **Второе решение.** Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \big(x(x-1); x(x-1)\big) = \int_0^1 x^2\,(x-1)^2\, dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30},$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \big(x^2(x-1); x(x-1)\big) = \int_0^1 x^3\,(x-1)^2\, dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{60},$$

$$\gamma_{22} = \big(x^2(x-1); x^2(x-1)\big) = \int_0^1 x^4\,(x-1)^2\, dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{105},$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. **Второе решение.** Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим **матрицу Грама**:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{30}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{60}, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{105},$$

то есть $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$.

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. **Второе решение.** Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\left(f(x)\right) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. **Второе решение.** Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{105} - \left(\frac{1}{60}\right)^2} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & -1/140 \end{pmatrix} =$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. **Второе решение.** Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2-x;\ x^3-x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{30}\cdot\dfrac{1}{105} - \left(\dfrac{1}{60}\right)^2} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & -1/140 \end{pmatrix} =$$

$$= 30\cdot 15\cdot 7\cdot 8 \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/140 \end{pmatrix} =$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\left(f(x); g(x)\right) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,(f(x)) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\mathbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} P^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{105} - \left(\frac{1}{60}\right)^2} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/60 \\ -1/60 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & -1/140 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathbf{Б}}.$$

Задача 13. Пусть U — линейное пространство таких многочленов степени не выше 3, что числа 0 и 1 являются корнями каждого из них. Скалярное произведение введено формулой

$$\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4}$$

Найдите **сопряженный к оператору**

$$\hat{P}\,\big(f(x)\big) = f(1-x). \tag{5}$$

Ответ. Второе решение. Выберем какой-либо базис пространства U, например, $\textbf{Б} = \{x(x-1);\ x^2(x-1)\} = \{x^2 - x;\ x^3 - x^2\}$. В этом базисе **матрица оператора** $\hat{P}$ имеет вид $P_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы вычислили **матрицу Грама**: $\Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица сопряженного оператора равна

$$P^*_{\textbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\textbf{Б}} P^t_{\textbf{Б}} \Gamma_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/30 & 1/60 \\ 1/60 & 1/105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_{\textbf{Б}}.$$

На первый взгляд, сравнение с первым решением не в пользу второго решения. Но бóльшая часть трудностей связана с переходом в «пространство координат» (пространство $\mathbb{R}^2$), зато после этого оператор можно задавать стандартным образом — с помощью матрицы — и вычисление матрицы сопряженного оператора представлет собой рутинную процедуру.

Решение задачи 14.

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $\left(f(x;y),\ g(x;y)\right) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0.$

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $\left(f(x;y),\ g(x;y)\right) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0.$

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0.$

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0.$

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 14. На линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0,\quad y \geq 0,\quad x+y \leq 0.$

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ матрица оператора имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, обратная к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$L^* =$$

Задача 14. На **линейном пространстве** квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0$.

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ **матрица оператора** имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, **обратная** к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$L^* = \frac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot 18 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} =$$

Задача 14. На линейном пространстве квадратичных форм от переменных x, y линейный оператор $\hat{L}$ задан формулой $\hat{L}(f(x;y)) = f(x-y; x+y)$. Найдите сопряженный оператор, если скалярное произведение задано формулой $(f(x;y),\ g(x;y)) = \iint\limits_G f(x;y)g(x;y)\,dx\,dy$, где G — треугольник $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 0.$

Ответ. В базисе **Б**$= \{x^2,\ xy,\ y^2\}$ матрица оператора имеет вид $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица Грама в базисе **Б** равна $\Gamma = \dfrac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$, обратная к ней матрица имеет вид $\Gamma^{-1} = 18\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$L^* = \frac{1}{360}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot 18 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -6 & 28 & -6 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 13 \\ 14 & -9 & -56 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 15.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Значит, **спектр** оператора $\hat{L}$ имеет вид

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Значит, **спектр** оператора $\hat{L}$ имеет вид $\mathrm{Spec}\hat{L} = \{0_1;\ 1_2\}$.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x);g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**, ортогонален к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x);g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.
Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**, ортогонален к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для того, чтобы найти вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1), воспользуемся **формулой для вычисления скалярного произведения**.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что векторы $(x-1)$ и (x^2-1) «остаются неподвижными» означает, что это **собственные векторы**, отвечающие собственному значению 1. Так как оператор $\hat{L}$ вырожденный, то **спектр** этого оператора включает в себя 0.

Собственный вектор, отвечающий собственному значению 0, согласно **свойствам нормального оператора**, ортогонален к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Для того, чтобы найти вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1), воспользуемся **формулой для вычисления скалярного произведения**.

Для этого надо найти **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$ (у нас пока нет другого).

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^0\big) =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^0\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x^0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x^0) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^0\, dx = 1$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{?} & \\ \mathbf{?} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{?} & \\ \mathbf{?} & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x\, dx =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{?} & \\ \mathbf{?} & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (x^0; x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x\, dx = 1$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{?} \\ 1 & & \\ \mathbf{?} & & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{?} \\ 1 & & \\ \mathbf{?} & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{?} \\ 1 & & \\ \mathbf{?} & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \big(x^0; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^0\, x^2\, dx = 2$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{?} & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad (x; x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \\ 2 & & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x\, dx = 2$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad (x; x^2) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{?} \\ 2 & \mathbf{?} & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \end{pmatrix} \qquad \big(x; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x \cdot x^2\, dx = 6$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \big(x^2; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \mathbf{?} \end{pmatrix} \qquad \big(x^2; x^2\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

$$\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \qquad \big(x^2; x^2\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^2 \cdot x^2\, dx = 24$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).

Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.

Что надо найти?

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ?

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные. Обозначим координаты ненулевого вектора из ядра через α, β, γ.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные. Обозначим координаты ненулевого вектора из ядра через α, β, γ.
Получим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Теперь найдем ненулевой вектор из ядра, т.е. в данном случае, вектор, ортогональный к векторам $(x-1)$ и (x^2-1).
Для этого, естественно, применим **план составления уравнений**.
Что надо найти? Вектор.
В каком виде представим ответ? Разложением по базису **Б**.
Сведем задачу к значениям величин и введем переменные. Обозначим координаты ненулевого вектора из ядра через α, β, γ.
Получим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно, скалярные произведения с векторами $(x-1)$ и (x^2-1).

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = (0\quad).$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0).$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0).$$

$$\begin{cases} \beta + 4\gamma = 0, \\ \alpha + 5\beta + 22\gamma = 0. \end{cases}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем двумя способами скалярное произведение вектора $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью **соответствующей формулы** и **умножения матриц «на макроуровне»**.

$$(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0).$$

$$\begin{cases} \beta + 4\gamma = 0, \\ \alpha + 5\beta + 22\gamma = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, получаем, что $-2 - 4x + x^2$ — ненулевой вектор из ядра.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$:

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. $-2-4x+x^2$ — ненулевой вектор из ядра. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**:

$$L_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20} \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 14 & -17 & 3 \\ -17 & 21 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 26 \\ 6 & 26 & 116 \end{pmatrix}} =$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем **матрицу сопряженного оператора с помощью соответствующей формулы:**

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Итак матрица сопряженного оператора равна:

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = L_{\mathbf{Б}}.$$

Значит,

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Нашли **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе **Б**: $L_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Итак матрица сопряженного оператора равна:

$$L^*_{\mathbf{Б}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = L_{\mathbf{Б}}.$$

Значит, согласно **теореме об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц** $\hat{L}^* = \hat{L}$, т.е. оператор $\hat{L}$ — самосопряженный.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид .

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

А матрица Грама в базисе $\mathbf{B}$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\textbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

А матрица Грама в базисе $\mathbf{B}$ — единичная. Значит, **матрица оператора** $\hat{L}^*$ равна

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x);g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx.$ Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\textbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Тот факт, что оператор $\hat{L}$ — самосопряженный, можно было увидеть из других соображений. Мы доказали, что что существует ортонормированный базис $\mathbf{B} = \{p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x)\}$ из собственных векторов оператора $\hat{L}$. Можно считать, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отвечают собственному значению 1, а $p_3(x)$ — собственному значению 0 (т.е. $p_3(x)$ — ненулевой вектор из ядра).

Тогда **матрица оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B}$ имеет вид $L_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

А матрица Грама в базисе $\mathbf{B}$ — единичная. Значит, **матрица оператора** $\hat{L}^*$ равна
$L^*_{\mathbf{B}} = L^t_{\mathbf{B}} = L_{\mathbf{B}}.$

Задача 15. Пусть в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой: $\big(f(x); g(x)\big) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, dx$. Векторы $(x-1)$ и (x^2-1) остаются неподвижными при действии вырожденного нормального линейного оператора $\hat{L}$. Найти **спектр** оператора $\hat{L}$, матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0,\ x,\ x^2\}$, **собственные векторы** и собственные значения оператора $\hat{L}$. Найдите оператор, сопряженный к оператору $\hat{L}$.

Ответ. Задача решена.

Решение задачи 16.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Это задача из олимпиады УГТУ-УПИ по математике, проведенной в 1997 году. Задача предложена доцентом Г. Л. Ходаком.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Посмотрим на матрицу A как на матрицу некоторого линейного оператора. Пусть L – линейное пространство размерности 9 и $\{e_1, ..., e_9\}$ – его базис (можно в качестве L взять, например, $\mathbf{R}^9$ и стандартный базис в нем).

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Посмотрим на матрицу A как на матрицу некоторого линейного оператора. Пусть L – линейное пространство размерности 9 и $\{e_1, ..., e_9\}$ – его базис (можно в качестве L взять, например, $\mathbf{R}^9$ и стандартный базис в нем).

Тогда **оператор задается** матричным умножением $Y = A \cdot X$. Матрица A описывает преобразование базисных векторов (например, e_1 переходит в e_6, e_2 – в e_5 и т.д.).

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Разобьем базис на три группы : первая – $\{e_1, e_2, e_3\}$, вторая – $\{e_4, e_5, e_6\}$ и третья – $\{e_7, e_8, e_9\}$. Из блочного вида матрицы A видно, что при преобразовании номера групп циклически переставляются: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как период этой смены этих групп равен 3 и $2000 = 3 \cdot 666 + 2$, то 2000 преобразований изменят номера этих групп так же, как и 2 преобразования:

$1 \to$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Разобьем базис на три группы : первая – $\{e_1, e_2, e_3\}$, вторая – $\{e_4, e_5, e_6\}$ и третья – $\{e_7, e_8, e_9\}$. Из блочного вида матрицы A видно, что при преобразовании номера групп циклически переставляются: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как период этой смены этих групп равен 3 и $2000 = 3 \cdot 666 + 2$, то 2000 преобразований изменят номера этих групп так же, как и 2 преобразования:

$1 \to 3 \to$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A=\begin{pmatrix} \theta & \theta & B\\ B & \theta & \theta\\ \theta & B & \theta \end{pmatrix},\ \text{где}\ \theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Разобьем базис на три группы : первая – $\{e_1, e_2, e_3\}$, вторая – $\{e_4, e_5, e_6\}$ и третья – $\{e_7, e_8, e_9\}$. Из блочного вида матрицы A видно, что при преобразовании номера групп циклически переставляются: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как период этой смены этих групп равен 3 и $2000 = 3\cdot 666 + 2$, то 2000 преобразований изменят номера этих групп так же, как и 2 преобразования:

$1 \to 3 \to 2 \to$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Разобьем базис на три группы : первая – $\{e_1, e_2, e_3\}$, вторая – $\{e_4, e_5, e_6\}$ и третья – $\{e_7, e_8, e_9\}$. Из блочного вида матрицы A видно, что при преобразовании номера групп циклически переставляются: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как период этой смены этих групп равен 3 и $2000 = 3 \cdot 666 + 2$, то 2000 преобразований изменят номера этих групп так же, как и 2 преобразования:
$1 \to 3 \to 2 \to 1$.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Разобьем базис на три группы : первая – $\{e_1, e_2, e_3\}$, вторая – $\{e_4, e_5, e_6\}$ и третья – $\{e_7, e_8, e_9\}$. Из блочного вида матрицы A видно, что при преобразовании номера групп циклически переставляются: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как период этой смены этих групп равен 3 и $2000 = 3 \cdot 666 + 2$, то 2000 преобразований изменят номера этих групп так же, как и 2 преобразования:

$1 \to 3 \to 2 \to 1$.

Внутри каждой группы порядок векторов при преобразовании инвертируется (меняется на противоположный, например $1 \to 3 \to 1$ и $2 \to 2$).

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Разобьем базис на три группы : первая – $\{e_1, e_2, e_3\}$, вторая – $\{e_4, e_5, e_6\}$ и третья – $\{e_7, e_8, e_9\}$. Из блочного вида матрицы A видно, что при преобразовании номера групп циклически переставляются: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как период этой смены этих групп равен 3 и $2000 = 3 \cdot 666 + 2$, то 2000 преобразований изменят номера этих групп так же, как и 2 преобразования:

$1 \to 3 \to 2 \to 1$.

Внутри каждой группы порядок векторов при преобразовании инвертируется (меняется на противоположный, например $1 \to 3 \to 1$ и $2 \to 2$).

Так как число 2000 четное, то после 2000 преобразований порядок следования векторов в группах не изменится.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. Поэтому $A^{2000} = A^2 = \begin{pmatrix} \theta & I_3 & \theta \\ \theta & \theta & I_3 \\ I_3 & \theta & \theta \end{pmatrix}$, где I_3 – единичная матрица размером 3×3.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*

Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*

Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A=\begin{pmatrix}\theta & \theta & B\\ B & \theta & \theta\\ \theta & B & \theta\end{pmatrix},\ \text{где } \theta=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*

Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1\to e_6\to e_7\to e_3\to e_4\to e_9\to e_1,\qquad e_2\to e_5\to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to \qquad\qquad\qquad, \qquad e_6 \to \qquad\qquad\qquad, \qquad e_2 \to \qquad\qquad\qquad,$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to e_7 \to \qquad\qquad, \qquad e_6 \to e_3 \to \qquad\qquad, \qquad e_2 \to e_8 \to \qquad\qquad,$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to e_7 \to e_4 \to \quad , \qquad e_6 \to e_3 \to e_5 \to \quad , \qquad e_2 \to e_8 \to e_5 \to \quad ,$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to e_7 \to e_4 \to e_1, \qquad e_6 \to e_3 \to e_5 \to e_6, \qquad e_2 \to e_8 \to e_5 \to e_2,$$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to e_7 \to e_4 \to e_1, \qquad e_6 \to e_3 \to e_5 \to e_6, \qquad e_2 \to e_8 \to e_5 \to e_2,$$

а A^6 есть тождественное преобразование.

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to e_7 \to e_4 \to e_1, \qquad e_6 \to e_3 \to e_5 \to e_6, \qquad e_2 \to e_8 \to e_5 \to e_2,$$

а A^6 есть тождественное преобразование.

Поэтому $A^{2000} = (A^6)^{333} \cdot A^2 = A^2$, то есть $A^{2000} =$

Задача 16. Матрица A размером 9×9 составлена из девяти матриц размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & \theta & B \\ B & \theta & \theta \\ \theta & B & \theta \end{pmatrix}, \text{ где } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{2000}.

Ответ. ***Другое решение*** *(предложено проф. А. Р. Данилиным)*
Рассмотрим подробнее преобразование базисных векторов, определяемое линейным оператором с матрицей A :

$$e_1 \to e_6 \to e_7 \to e_3 \to e_4 \to e_9 \to e_1, \qquad e_2 \to e_5 \to e_8 \to e_2.$$

Таким образом A^2 дает следующие цепочки преобразований

$$e_1 \to e_7 \to e_4 \to e_1, \qquad e_6 \to e_3 \to e_5 \to e_6, \qquad e_2 \to e_8 \to e_5 \to e_2,$$

а A^6 есть тождественное преобразование.

Поэтому $A^{2000} = (A^6)^{333} \cdot A^2 = A^2$, то есть $A^{2000} = \begin{pmatrix} \theta & I_3 & \theta \\ \theta & \theta & I_3 \\ I_3 & \theta & \theta \end{pmatrix}.$

Решение задачи 17.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Это задача из олимпиады УГТУ-УПИ по математике, проведенной в 1997 году. Задача предложена Ю. Б. Мельниковым.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен

.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) =$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2,$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2, \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) =$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2, \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2.$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$= \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$4^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$4^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$4^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$4^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= 3^2 - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + 5^2,$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$4^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= 3^2 - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + 5^2,$$

откуда $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) =$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Для вычисления скалярного произведения найдем **матрицу Грама** в базисе **Б**.

Имеем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = 5^2$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = 3^2$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Имеем

$$4^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= 3^2 - 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + 5^2,$$

откуда $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = 9$.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{\mathbf{v}}, \hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе $\mathbf{Б}$: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\vec{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{\mathbf{v}}, \hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right|^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 25x^2 + 18xy + 9y^2,$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2$,

$\left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \qquad\qquad \end{pmatrix} =$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{\mathbf{v}}, \hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\vec{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{\mathbf{v}}, \hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2,$$

$$\left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|^2 = \left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2$,

$$\left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = \left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 18x + 9y & -25x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18x + 9y \\ -25x \end{pmatrix} =$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2,$

$\left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = \left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 18x + 9y & -25x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18x + 9y \\ -25x \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 25x + 25y & -7x + 9y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18x + 9y \\ -25x \end{pmatrix} =$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{\mathbf{v}}, \hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\vec{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{\mathbf{v}}, \hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2,$$

$$\left|\hat{P}\vec{\mathbf{v}}\right|^2 = \left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 18x + 9y & -25x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18x + 9y \\ -25x \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 25x + 25y & -7x + 9y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18x + 9y \\ -25x \end{pmatrix} =$$

$$= 9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2).$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$= \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 25 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{25x^2 + 18xy + 9y^2} \cdot \sqrt{9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2)}} =$$

$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2$, $\quad \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2)$.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$= \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 25 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{25x^2 + 18xy + 9y^2} \cdot \sqrt{9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2)}} = \frac{25x^2 + 18xy + 9y^2}{3 \cdot 5 \cdot \left(25x^2 + 18xy + 9y^2\right)} =$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2, \quad \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2).$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} =$$

$$= \frac{(x\ y)\begin{pmatrix} 25 & 25 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{25x^2 + 18xy + 9y^2} \cdot \sqrt{9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2)}} = \frac{25x^2 + 18xy + 9y^2}{3 \cdot 5 \cdot \left(25x^2 + 18xy + 9y^2\right)} = \frac{1}{15}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 25x^2 + 18xy + 9y^2, \quad \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|^2 = 9 \cdot 25 \cdot (25x^2 + 18xy + 9y^2).$$

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{1}{15}.$$

Итак, любой вектор плоскости поворачивается на один и тот же угол.

Задача 17. На плоскости дан $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Линейный оператор $\hat{P}$ имеет в базисе $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ матрицу $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите ненулевые векторы плоскости, который оператор $\hat{P}$ поворачивачивает на максимальный угол и на минимальный угол.

Ответ. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла поворота равен $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}$. Нашли **матрицу Грама** в базисе **Б**: $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ — ненулевой вектор плоскости. Тогда по **теореме о вычислении скалярного произведения** и **теореме о координатах образа вектора**

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\hat{P}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|} = \frac{1}{15}.$$

Итак, любой вектор плоскости поворачивается на один и тот же угол.

Следовательно, $\hat{P}$ является оператором поворота плоскости на угол $\arccos\dfrac{3}{5}$ (с равномерным растяжением плоскости). Таким образом, искомыми векторами являются все ненулевые вектора плоскости.

Решение задачи 18.

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 1997 году. Задача предложена Ю. Б. Мельниковым.

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Рассмотрим линейный оператор $\hat{L}$ линейного пространства симметричных матриц размерности 2×2, заданный формулой

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Рассмотрим линейный оператор $\hat{L}$ линейного пространства симметричных матриц размерности 2×2, заданный формулой

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S$.

Ответ. Рассмотрим линейный оператор $\hat{L}$ линейного пространства симметричных матриц размерности 2×2, заданный формулой

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задачу можно переформулировать так:

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S$.

Ответ. Рассмотрим линейный оператор $\hat{L}$ линейного пространства симметричных матриц размерности 2×2, заданный формулой

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задачу можно переформулировать так:
надо найти **собственные векторы** и **собственные значения** этого оператора.

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ -4 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ -4 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ -4 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ -4 & & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -3 & \\ -4 & -12 & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &=
\end{aligned}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -3 & \\ -4 & -12 & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -3 & \\ -4 & -12 & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -3 & \\ -4 & -12 & \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\hat{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= -\lambda^3 - 10\lambda^2 + 75\lambda =$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= -\lambda^3 - 10\lambda^2 + 75\lambda = -\lambda\,(\lambda - 5)\,(\lambda + 15)\,.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 + 75\lambda = -\lambda\left(\lambda - 5\right)\left(\lambda + 15\right).$$

Как обычно, собственные векторы находятся как решения матричных уравнений

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 + 75\lambda = -\lambda\left(\lambda - 5\right)\left(\lambda + 15\right).$$

Как обычно, собственные векторы находятся как решения матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 + 75\lambda = -\lambda\,(\lambda - 5)\,(\lambda + 15)\,.$$

Как обычно, собственные векторы находятся как решения матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & -6 \\ -4 & -12 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получили **матрицу оператора** $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. **Характеристический полином** оператора $\hat{L}$ равен

$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 + 75\lambda = -\lambda\left(\lambda - 5\right)\left(\lambda + 15\right).$$

Как обычно, собственные векторы находятся как решения матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & -6 \\ -4 & -12 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & -4 \\ 0 & 12 & -6 \\ -4 & -12 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. Получили координаты собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомые матрицы S имеют вид:

- для $\tau = 0$ получаем $S = C \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, где C — произвольное действительное число;

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. Получили координаты собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомые матрицы S имеют вид:

- для $\tau = 5$ получаем $S = C \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, где C — произвольное действительное число;

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$. Получили координаты собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомые матрицы S имеют вид:

- для $\tau = -15$ получаем $S = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, где C — произвольное действительное число.

Задача 18. Найдите все симметричные матрицы S с вещественными коэффициентами и такие, что для некоторого действительного числа τ имеет место равенство $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \tau S.$

Ответ. Мы свели задачу к нахождению **собственных векторов** и **собственных значений** оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S + S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **матрица оператора** $L_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$

Таким образом, искомые матрицы S имеют вид:

- для $\tau = 0$ получаем $S = C \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, где C — произвольное действительное число;
- для $\tau = 5$ получаем $S = C \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, где C — произвольное действительное число;
- для $\tau = -15$ получаем $S = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, где C — произвольное действительное число.

Решение задачи 19.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Это задача из олимпиады УГТУ-УПИ по математике, проведенной в 1999 году. Задача предложена профессором А. А. Махневым.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.
Тогда вектор $e_n = (1, 1, ..., 1)^t$ является собственным вектором A, отвечающим собственному значению $x + ny$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.
Тогда вектор $e_n = (1, 1, ..., 1)^t$ является собственным вектором A, отвечающим собственному значению $x + ny$.
Далее, для каждого вектора a, перпендикулярного вектору $(1, 1, \ldots, 1)^t$ имеем $Ja = (0, 0, \ldots, 0)^t$, поэтому $Aa = xa$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.
Тогда вектор $e_n = (1, 1, ..., 1)^t$ является собственным вектором A, отвечающим собственному значению $x + ny$.
Далее, для каждого вектора a, перпендикулярного вектору $(1, 1, \dots, 1)^t$ имеем $Ja = (0, 0, \dots, 0)^t$, поэтому $Aa = xa$.
Пусть $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис подпространства векторов, перпендикулярных вектору e_n. Тогда в этом базисе матрица рассматриваемого линейного оператора имеет вид

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.
Тогда вектор $e_n = (1, 1, ..., 1)^t$ является собственным вектором A, отвечающим собственному значению $x + ny$.
Далее, для каждого вектора a, перпендикулярного вектору $(1, 1, \ldots, 1)^t$ имеем $Ja = (0, 0, \ldots, 0)^t$, поэтому $Aa = xa$.
Пусть $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис подпространства векторов, перпендикулярных вектору e_n. Тогда в этом базисе матрица рассматриваемого линейного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x+ny \end{pmatrix}.$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.
Тогда вектор $e_n = (1, 1, ..., 1)^t$ является собственным вектором A, отвечающим собственному значению $x + ny$.
Далее, для каждого вектора a, перпендикулярного вектору $(1, 1, \ldots, 1)^t$ имеем $Ja = (0, 0, \ldots, 0)^t$, поэтому $Aa = xa$.
Пусть $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис подпространства векторов, перпендикулярных вектору e_n. Тогда в этом базисе матрица рассматриваемого линейного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x + ny \end{pmatrix}.$$

Определитель такой матрицы равен $(x + ny)x^{n-1}$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено профессором Махневым А.А.) Посмотрим на A как на линейный оператор, действующий на вещественных вектор-столбцах из $\mathbb{R}^n$.
Тогда вектор $e_n = (1, 1, ..., 1)^t$ является собственным вектором A, отвечающим собственному значению $x + ny$.
Далее, для каждого вектора a, перпендикулярного вектору $(1, 1, \dots, 1)^t$ имеем $Ja = (0, 0, \dots, 0)^t$, поэтому $Aa = xa$.
Пусть $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис подпространства векторов, перпендикулярных вектору e_n. Тогда в этом базисе матрица рассматриваемого линейного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+ny \end{pmatrix}.$$

Определитель такой матрицы равен $(x + ny)x^{n-1}$.
Поскольку определитель всех матриц данного линейного оператора один и тот же, то и определитель исходной матрицы A равен $(x + ny)x^{n-1}$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено доцентом Ходаком Г.Л.) По условию задачи требуется найти

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & y & y & \dots & y \\ y & x+y & y & \dots & y \\ y & y & x+y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x+y \end{vmatrix}.$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено доцентом Ходаком Г.Л.) По условию задачи требуется найти

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & y & y & \dots & y \\ y & x+y & y & \dots & y \\ y & y & x+y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x+y \end{vmatrix}.$$

Если $y = 0$, то $|A| = x^n$. Если $y \neq 0$, то, положив $z = x/y$, получим

$$|A| = y^n \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix}.$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. (Предложено доцентом Ходаком Г.Л.) По условию задачи требуется найти

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & y & y & \dots & y \\ y & x+y & y & \dots & y \\ y & y & x+y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x+y \end{vmatrix}.$$

Если $y = 0$, то $|A| = x^n$. Если $y \neq 0$, то, положив $z = x/y$, получим

$$|A| = y^n \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix}.$$

Последний определитель обозначим через $\triangle_n$. Тогда

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ.

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ.

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ.

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix} + z \cdot \triangle_{n-1} =$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ.

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ.

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 =$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$,

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 =$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.
Правильность предположения следует из того, что такое $\triangle_n$ удовлетворяет полученному рекуррентному соотношению

$$z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1} =$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.
Правильность предположения следует из того, что такое $\triangle_n$ удовлетворяет полученному рекуррентному соотношению

$$z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z((n-1)z^{n-2} + z^{n-1}) =$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.
Правильность предположения следует из того, что такое $\triangle_n$ удовлетворяет полученному рекуррентному соотношению

$$z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z((n-1)z^{n-2} + z^{n-1}) = nz^{n-1} + z^n =$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.
Правильность предположения следует из того, что такое $\triangle_n$ удовлетворяет полученному рекуррентному соотношению

$$z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z((n-1)z^{n-2} + z^{n-1}) = nz^{n-1} + z^n = \triangle_n$$

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.
Правильность предположения следует из того, что такое $\triangle_n$ удовлетворяет полученному рекуррентному соотношению

$$z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z((n-1)z^{n-2} + z^{n-1}) = nz^{n-1} + z^n = \triangle_n$$

и при $n = 1$ совпадает с уже найденным.

Задача 19. Пусть I – единичная матрица порядка n, а J — квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой равен 1. Найти определитель вещественной матрицы $A = xI + yJ$.

Ответ. Таким образом получено следующее рекуррентное соотношение

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+z \end{vmatrix} = z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1}.$$

Поскольку $\triangle_1 = 1 + z$, то $\triangle_2 = 2z + z^2$, а $\triangle_3 = 3z^2 + z^3$.
Естественно предположить, что $\triangle_n = nz^{n-1} + z^n$.
Правильность предположения следует из того, что такое $\triangle_n$ удовлетворяет полученному рекуррентному соотношению

$$z^{n-1} + z \cdot \triangle_{n-1} = z^{n-1} + z((n-1)z^{n-2} + z^{n-1}) = nz^{n-1} + z^n = \triangle_n$$

и при $n = 1$ совпадает с уже найденным.
Итак,

$$|A| = y^n(nz^{n-1} + z^n) = y^n\left(n\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{x^n}{y^n}\right) = (x + ny)x^{n-1}.$$

Отметим, что эта формула справедлива и при $y = 0$.

Решение задачи 20.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 1997 году. Задача предложена Ю. Б. Мельниковым.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Так как $\hat{P}+\hat{Q}$ — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис плоскости, состоящий из **собственных векторов**.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Так как $\hat{P}+\hat{Q}$ — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис плоскости, состоящий из **собственных векторов**.
Поэтому вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Так как $\hat{P}+\hat{Q}$ — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис плоскости, состоящий из **собственных векторов**.
Поэтому вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$.
Очевидно, что система векторов $\mathbf{Б}=\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Так как $\hat{P}+\hat{Q}$ — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис плоскости, состоящий из **собственных векторов**.
Поэтому вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$. Очевидно, что система векторов $\mathbf{Б}=\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.
По условию **ядро** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое. Но каждый вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из **ядра** является **собственным вектором** этого оператора, отвечающим **собственному значению** 0, так как $\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{x}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}=0\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Так как количество **собственных значений** линейного оператора не превосходит размерности пространства, то **собственными значениями** являются

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Так как $\hat{P}+\hat{Q}$ — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис плоскости, состоящий из **собственных векторов**.
Поэтому вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$. Очевидно, что система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

По условию **ядро** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое. Но каждый вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из **ядра** является **собственным вектором** этого оператора, отвечающим **собственному значению** 0, так как $\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$. Так как количество **собственных значений** линейного оператора не превосходит размерности пространства, то **собственными значениями** являются только 0 и 1.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Так как $\hat{P}+\hat{Q}$ — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис плоскости, состоящий из **собственных векторов**.
Поэтому вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$.
Очевидно, что система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

По условию **ядро** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое. Но каждый вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ из **ядра** является **собственным вектором** этого оператора, отвечающим **собственному значению** 0, так как $\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Так как количество **собственных значений** линейного оператора не превосходит размерности пространства, то **собственными значениями** являются только 0 и 1.
Поэтому $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\vec{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\vec{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\vec{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\vec{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\vec{\mathbf{u}} =$$
$$\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} =$$

$$\left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{cases} \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = \\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} = \end{cases} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{aligned} \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}} = \quad \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} + \quad \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}, \\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} &= \end{aligned} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** полученного **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{cases} \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}, \\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} = \end{cases} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{cases} \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}, \\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} = \end{cases} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \quad \\ 0 & \quad \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}},\\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} &= \overrightarrow{\mathbf{0}} = \quad\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + \quad\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}\end{aligned} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}},\\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} &= \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}\end{aligned} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** полученного **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}},\\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} &= \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}\end{aligned} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{gathered}\left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}},\\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}\end{gathered} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{matrix} \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}, \\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}} \end{matrix} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\left[\hat{P}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\left[\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$.

Задача 20. Кощей Бессмертный и Змей Горыныч проводят линейные преобразования $\hat{P}$ и, соответственно, $\hat{Q}$ бескрайней русской равнины — двумерного линейного пространства U. Если они соединяют свои усилия, то **ядро** получившегося **самосопряженного оператора** $\hat{P}+\hat{Q}$ ненулевое и, кроме того, на плоскости U имеется ненулевой неподвижный вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Если же Змей Горыныч пытается противостоять Кощею Бессмертному, то для получившегося самосопряженного оператора $\hat{P}-\hat{Q}$ число 1 является **собственным значением**, и вектор $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отвечает **собственному значению** 0. Найдите операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ и опишите действие операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ геометрически.

Ответ. Система векторов $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ является базисом плоскости.

Вектор $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, ортогональный к $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, является **собственным вектором** оператора $\hat{P}+\hat{Q}$, отвечающим **собственному значению** 0.

$$\begin{matrix} \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}, \\ \left(\hat{P}+\hat{Q}\right)\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}} + 0\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}} \end{matrix} \qquad \left[\hat{P}+\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \left[\hat{P}-\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\left[\hat{P}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\left[\hat{Q}\right]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, Кощей Бессмертный в коварстве своем сжимает русскую землю в два раза, а Змей Горыныч — переворачивает (выворачивает наизнанку!) равнину относительно вектора $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и после это, поганый, сжимает то. что получилось, в два раза.

Решение задачи 21.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 2000 году. Задача предложена Ю. Б. Мельниковым.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти?

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

В каком виде представим ответ?

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

В каком виде представим ответ? С помощью **матрицы оператора** в некотором базисе.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

В каком виде представим ответ? С помощью **матрицы оператора** в некотором базисе.

Сведем задачу к нахождению числовых параметров и введем переменные.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

В каком виде представим ответ? С помощью **матрицы оператора** в некотором базисе.

Сведем задачу к нахождению числовых параметров и введем переменные.

Для задания матрицы надо сначала выбрать базис, например,

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

В каком виде представим ответ? С помощью **матрицы оператора** в некотором базисе.

Сведем задачу к нахождению числовых параметров и введем переменные.

Для задания матрицы надо сначала выбрать базис, например, $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Линейный оператор.

В каком виде представим ответ? С помощью **матрицы оператора** в некотором базисе.

Сведем задачу к нахождению числовых параметров и введем переменные.

Для задания матрицы надо сначала выбрать базис, например, $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$.

Матрица определяется своими коэффициентами. Пусть матрица оператора $\hat{Q}$ в базисе **Б** имеет вид $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Для $f(x) = x^1$ имеем

$$q_{22}x^0 - \left(q_{12}x^0 + q_{22}x^1\right) = x^1.$$

Сравнивая координаты многочленов из левой и правой частей в каждом из этих равенств, получаем систему уравнений $\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответет. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Для $f(x) = x^1$ имеем

$$q_{22}x^0 - \left(q_{12}x^0 + q_{22}x^1\right) = x^1.$$

Сравнивая координаты многочленов из левой и правой частей в каждом из этих равенств, получаем систему уравнений $\begin{cases} q_{21} - q_{11} = 1, \\ \\ \\ \end{cases}$

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Для $f(x) = x^1$ имеем

$$q_{22}x^0 - \left(q_{12}x^0 + q_{22}x^1\right) = x^1.$$

Сравнивая координаты многочленов из левой и правой частей в каждом из этих равенств, получаем систему уравнений $\begin{cases} q_{21} - q_{11} = 1, \\ -q_{21} = 0, \\ \\ \\ \end{cases}$

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Для $f(x) = x^1$ имеем

$$q_{22}x^0 - \left(q_{12}x^0 + q_{22}x^1\right) = x^1.$$

Сравнивая координаты многочленов из левой и правой частей в каждом из этих равенств, получаем систему уравнений $\begin{cases} q_{21} - q_{11} = 1, \\ -q_{21} = 0, \\ q_{22} - q_{12} = 0, \\ \end{cases}$

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Для $f(x) = x^1$ имеем

$$q_{22}x^0 - \left(q_{12}x^0 + q_{22}x^1\right) = x^1.$$

Сравнивая координаты многочленов из левой и правой частей в каждом из этих равенств, получаем систему уравнений $\begin{cases} q_{21} - q_{11} = 1, \\ -q_{21} = 0, \\ q_{22} - q_{12} = 0, \\ -q_{22} = 1, \end{cases}$

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответет. Итак, пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x^1\}$ **матрица оператора** $\hat{Q}$ равна $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Подставим базисные векторы в тождество, данное в условии. По **определению матрицы оператора** $\begin{cases} \hat{Q}x^0 = q_{11}x^0 + q_{21}x^1, \\ \hat{Q}x^1 = q_{12}x^0 + q_{22}x^1, \end{cases}$ поэтому, подставляя первый базисный вектор $f(x) = x^0$ в уравнение

$$\frac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x), \tag{6}$$

получаем:

$$q_{21}x^0 - \left(q_{11}x^0 + q_{21}x^1\right) = x^0.$$

Для $f(x) = x^1$ имеем

$$q_{22}x^0 - \left(q_{12}x^0 + q_{22}x^1\right) = x^1.$$

Сравнивая координаты многочленов из левой и правой частей в каждом из этих равенств, получаем систему уравнений $\begin{cases} q_{21} - q_{11} = 1, \\ -q_{21} = 0, \\ q_{22} - q_{12} = 0, \\ -q_{22} = 1, \end{cases}$ откуда $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 21. Пусть $\mathcal{P}_1$ — множество всех многочленов степени не выше 1 с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Найдите все линейные операторы $\hat{Q}$ линейного пространства $\mathcal{P}_1$ такие, что для любого многочлена $f(x) \in \mathcal{P}_1$ выполняется тождество $\dfrac{d\left(\hat{Q}\left(f(x)\right)\right)}{dx} - \hat{Q}\left(f(x)\right) = f(x)$.

Ответ. Таким образом, существует единственный линейный оператор $\hat{Q}$ с данным свойством, этот линейный оператор имеет в базисе $\mathbf{Б} = \{x^0, x\}$ матрицу $Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что этот оператор можно задать такой формулой: для любого многочлена $f(x)$ из $\mathcal{P}_1$ имеем $\hat{Q}\left(f(x)\right) = -f(x) - f'(x)$.

Решение задачи 22.

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 1997 году. Задача предложена доцентом Г. Л. Ходаком.

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Обозначим линейный оператор из условия задачи через $\hat{L}$. Возьмем два произвольных ненулевых вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}} = \frac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}}.$$

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Обозначим линейный оператор из условия задачи через $\hat{L}$. Возьмем два произвольных ненулевых вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}} = \frac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}}.$$

Можно считать, что $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) \neq 0$, так как по условию

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Обозначим линейный оператор из условия задачи через $\hat{L}$. Возьмем два произвольных ненулевых вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}} = \frac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}}.$$

Можно считать, что $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) \neq 0$, так как по условию

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0 \;\Rightarrow\; (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0.$$

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Обозначим линейный оператор из условия задачи через $\hat{L}$. Возьмем два произвольных ненулевых вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}} = \frac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}}.$$

Можно считать, что $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) \neq 0$, так как по условию

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0 \;\Rightarrow\; (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0.$$

В доказываемом утверждении положим $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}}\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}}\overrightarrow{\mathbf{y}}$, тогда получим, что надо доказать равенство

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Обозначим линейный оператор из условия задачи через $\hat{L}$. Возьмем два произвольных ненулевых вектора $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{y}}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}} = \frac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}})}}.$$

Можно считать, что $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) \neq 0$, так как по условию

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0 \;\Rightarrow\; (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{x}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0.$$

В доказываемом утверждении положим $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})}}\overrightarrow{\mathbf{x}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})}}\overrightarrow{\mathbf{y}}$, тогда получим, что надо доказать равенство

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \frac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}.$$

где $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = 1$.

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Надо доказать, что: $\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}.$

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Надо доказать, что: $\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}.$

Очевидно, что $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. По условию отсюда следует, что $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}} + \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$, то есть $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Надо доказать, что: $\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1, \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}$,

Имеем $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$. Очевидно, что $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Так как $\hat{L}$ сохраняет прямые углы, и в силу линейности оператора $\hat{L}$ из последнего равенства следует, что $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Поэтому

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$$

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Надо доказать, что: $\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}$,

Имеем $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$. Очевидно, что $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Так как $\hat{L}$ сохраняет прямые углы, и в силу линейности оператора $\hat{L}$ из последнего равенства следует, что $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Поэтому

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \frac{1}{\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{7}$$

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Надо доказать, что: $\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}$,

Имеем $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$. Очевидно, что $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Так как $\hat{L}$ сохраняет прямые углы, и в силу линейности оператора $\hat{L}$ из последнего равенства следует, что $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Поэтому

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \frac{1}{\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)}\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{7}$$

Имеем $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \sqrt{\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) \cdot \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}$.

Из **равенства (7)** получаем $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) =$

Задача 22. Докажите, что если линейный оператор в **евклидовом пространстве** сохраняет прямые углы, то он сохраняет и любые углы, то есть угол между векторами равен углу между образами этих векторов.

Ответ. Надо доказать, что: $\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = 1, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}{\sqrt{(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}) \cdot (\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}})}}$,

Имеем $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$. Очевидно, что $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Так как $\hat{L}$ сохраняет прямые углы, и в силу линейности оператора $\hat{L}$ из последнего равенства следует, что $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \dfrac{1}{(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})}\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = 0$. Поэтому

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \frac{1}{\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)} \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right). \tag{7}$$

Имеем $\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \sqrt{\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) \cdot \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}$.

Из **равенства (7)** получаем $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}\right) \cdot \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)}} \left(\hat{L}\overrightarrow{\mathbf{a}}, \hat{L}\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$,

что, как мы отметили выше, и требовалось доказать.

Решение задачи 23.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 2000 году.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. Прежде всего отметим, что при невырожденном линейном преобразовании плоскости отношение площадей фигур не изменяется.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 1. Пусть E – эллипс, а $\triangle$ – треугольник, вписанный в этот эллипс, а $\hat{A}$ – линейное преобразование, переводящее E в круг K.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 1. Пусть E – эллипс, а $\triangle$ – треугольник, вписанный в этот эллипс, а $\hat{A}$ – линейное преобразование, переводящее E в круг K.

Тогда $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\hat{A}(\triangle))}$, причем треугольник $\hat{A}(\triangle)$ вписан в круг K. Здесь $S(F)$ – площадь фигуры F.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 1. Пусть E – эллипс, а $\triangle$ – треугольник, вписанный в этот эллипс, а $\hat{A}$ – линейное преобразование, переводящее E в круг K.
Тогда $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\hat{A}(\triangle))}$, причем треугольник $\hat{A}(\triangle)$ вписан в круг K. Здесь $S(F)$ – площадь фигуры F.
Среди всех треугольников, вписанных в круг K, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник $\triangle_m$.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 1. Пусть E – эллипс, а $\triangle$ – треугольник, вписанный в этот эллипс, а $\hat{A}$ – линейное преобразование, переводящее E в круг K.
Тогда $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\hat{A}(\triangle))}$, причем треугольник $\hat{A}(\triangle)$ вписан в круг K. Здесь $S(F)$ – площадь фигуры F.
Среди всех треугольников, вписанных в круг K, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник $\triangle_m$.
Поэтому $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} \geq \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)}$. Если R – радиус круга K, то сторона равностороннего треугольника $\triangle_m$ равна $R\sqrt{3}$, а площадь – $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 1. Пусть E – эллипс, а $\triangle$ – треугольник, вписанный в этот эллипс, а $\hat{A}$ – линейное преобразование, переводящее E в круг K.
Тогда $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\hat{A}(\triangle))}$, причем треугольник $\hat{A}(\triangle)$ вписан в круг K. Здесь $S(F)$ – площадь фигуры F.
Среди всех треугольников, вписанных в круг K, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник $\triangle_m$.
Поэтому $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} \geq \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)}$. Если R – радиус круга K, то сторона равностороннего треугольника $\triangle_m$ равна $R\sqrt{3}$, а площадь – $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.
Таким образом $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} \geq \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)} = \dfrac{4\pi R^2}{3R^2\sqrt{3}} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ и, следовательно, площадь минимального эллипса не может быть меньше

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 1. Пусть E – эллипс, а $\triangle$ – треугольник, вписанный в этот эллипс, а $\hat{A}$ – линейное преобразование, переводящее E в круг K.

Тогда $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\hat{A}(\triangle))}$, причем треугольник $\hat{A}(\triangle)$ вписан в круг K. Здесь $S(F)$ – площадь фигуры F.

Среди всех треугольников, вписанных в круг K, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник $\triangle_m$.

Поэтому $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} \geq \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)}$. Если R – радиус круга K, то сторона равностороннего треугольника $\triangle_m$ равна $R\sqrt{3}$, а площадь – $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Таким образом $\dfrac{S(E)}{S(\triangle)} \geq \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)} = \dfrac{4\pi R^2}{3R^2\sqrt{3}} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ и, следовательно, площадь минимального эллипса не может быть меньше $S(\triangle) \cdot \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 2. Пусть B – линейное преобразование, переводящее равносторонний треугольник $\triangle_m$ в заданный треугольник $\triangle$, а K – круг, в который вписан равносторонний треугольник $\triangle_m$. Тогда $B(K) = E_1$ – эллипс, причем $\dfrac{S(E_1)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)}$.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 2. Пусть B – линейное преобразование, переводящее равносторонний треугольник $\triangle_m$ в заданный треугольник $\triangle$, а K – круг, в который вписан равносторонний треугольник $\triangle_m$. Тогда $B(K) = E_1$ – эллипс, причем $\dfrac{S(E_1)}{S(\triangle)} = \dfrac{S(K)}{S(\triangle_m)}$.

Таким образом $S(E_1) = S(\triangle) \cdot \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ и эта площадь минимальна.

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен)

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен 4)

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен 4)

$$S(\triangle) =$$

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен 4)

$$S(\triangle) = \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} =$$

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен 4)

$$S(\triangle) = \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} = 2\sqrt{2}$$

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен 4)

$$S(\triangle) = \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} = 2\sqrt{2}$$

Итак, площадь минимального эллипса, описанного вокруг треугольника $\triangle$ равна

Задача 23. Рассмотрим множество всех эллипсов, описанных вокруг треугольника со сторонами 2, 3, 3. Найдите наименьшую из площадей этих эллипсов.

Ответ. 3. Осталось найти площадь исходного треугольника $\triangle$. По формуле Герона (полупериметр равен 4)

$$S(\triangle) = \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} = 2\sqrt{2}$$

Итак, площадь минимального эллипса, описанного вокруг треугольника $\triangle$ равна $\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Решение задачи 24.

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем коэффициентами минимальной и, соответственно, максимальной деформации величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между m^2M и mM^2.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 1998 году (задачи для студентов технических специальностей). Задача предложена доцентом Г. Л. Ходаком.

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем коэффициентами минимальной и, соответственно, максимальной деформации величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Ответ. Преобразуем формулы, задающие m и M:

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между m^2M и mM^2.

Ответ. Преобразуем формулы, задающие m и M:

$$m = \min_{X' \neq X''} \left| A \left(\frac{1}{|X' - X''|} (X' - X'') \right) \right| = \min_{|X|=1} |AX|,$$

где $X = \dfrac{1}{|X' - X''|} (X' - X'')$.

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между m^2M и mM^2.

Ответ. Преобразуем формулы, задающие m и M:

$$m = \min_{X' \neq X''} \left| A \left(\frac{1}{|X' - X''|} (X' - X'') \right) \right| = \min_{|X|=1} |AX|,$$

$$M = \max_{X' \neq X''} \left| A \left(\frac{1}{|X' - X''|} (X' - X'') \right) \right| = \max_{|X|=1} |AX|,$$

где $X = \dfrac{1}{|X' - X''|} (X' - X'')$.

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между m^2M и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|$, $M = \max\limits_{|X|=1} |AX|$, Если отождествить однокомпонентную матрицу с ее единственной компонентой, то можно записать, что $|Y|^2 = Y^tY$, где Y^t — матрица, транспонированная по отношению к Y. Поэтому

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между m^2M и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|$, $M = \max\limits_{|X|=1} |AX|$, Если отождествить однокомпонентную матрицу с ее единственной компонентой, то можно записать, что $|Y|^2 = Y^tY$, где Y^t — матрица, транспонированная по отношению к Y. Поэтому

$$|AX|^2 =$$

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем коэффициентами минимальной и, соответственно, максимальной деформации величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|$, $\quad M = \max\limits_{|X|=1} |AX|$, Если отождествить однокомпонентную матрицу с ее единственной компонентой, то можно записать, что $|Y|^2 = Y^t Y$, где Y^t — матрица, транспонированная по отношению к Y. Поэтому

$$|AX|^2 = (AX)^t AX =$$

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|$, $\quad M = \max\limits_{|X|=1} |AX|$, Если отождествить однокомпонентную матрицу с ее единственной компонентой, то можно записать, что $|Y|^2 = Y^t Y$, где Y^t — матрица, транспонированная по отношению к Y. Поэтому

$$|AX|^2 = (AX)^t AX = X^t A^t AX =$$

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между m^2M и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|\,, \quad M = \max\limits_{|X|=1} |AX|\,$, Если отождествить однокомпонентную матрицу с ее единственной компонентой, то можно записать, что $|Y|^2 = Y^tY$, где Y^t — матрица, транспонированная по отношению к Y. Поэтому

$$|AX|^2 = (AX)^t AX = X^t A^t AX = X^t \left(A^t A\right) X.$$

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем коэффициентами минимальной и, соответственно, максимальной деформации величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|\,, \quad M = \max\limits_{|X|=1} |AX|\,, \quad |AX|^2 = X^t\,(A^t A)\,X.$

Задача 24. Допустим, для деформации тела справедливо $Y = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — декартовы координаты, соответственно, исходной точки и ее образа, A — матрица размерности 3×3. Назовем <u>коэффициентами</u> <u>минимальной</u> и, соответственно, <u>максимальной</u> <u>деформации</u> величины $m = \min\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$ и $M = \max\limits_{X' \neq X''} \dfrac{|AX'' - AX'|}{|X'' - X'|}$, где $\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. a) Найдите m и M, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что модуль определителя матрицы A заключен между $m^2 M$ и mM^2.

Ответ. $m = \min\limits_{|X|=1} |AX|$, $M = \max\limits_{|X|=1} |AX|$, $|AX|^2 = X^t \left(A^t A\right) X$.

Это квадратичная форма с симметричной матрицей коэффициентов $A^t \cdot A$, определенная на евклидовом пространстве трехкомпонентных матриц-столбцов со стандартным скалярным произведением $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right) = xu + yv + zw$.

Задача 24.

Как известно из стандартного курса линейной алгебры, существует ортонормированный базис $\mathbf{B}$ из собственных векторов e_1, e_2, e_3 оператора с матрицей A^tA, в котором матрица квадратичной формы диагональна. В базисе $\mathbf{B}$ эта квадратичная форма задается выражением $\alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2 + \gamma\tilde{z}^2$, где $(\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})$ — строка координат матрицы-столбца $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{B}$, и α, β, γ — собственные числа матрицы A^tA. Переставив, при необходимости, вектора в базисе $\mathbf{B}$, можно считать, что $\alpha \le \beta \le \gamma$. Линейный оператор, переводящий ортонормированный базис, состоящий из векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, в базис $\mathbf{B}$, является ортогональным. Как известно из стандартного курса линейной алгебры, ортогональный оператор является изометрическим, то есть из того, что $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tilde{x}e_1 + \tilde{y}e_2 + \tilde{z}e_3$ следует равенство $x^2 + y^2 + z^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2$. Поэтому

$$m = \min_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=1} \sqrt{\alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2 + \gamma\tilde{z}^2} = \sqrt{\alpha},$$

$$m = \max_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=1} \sqrt{\alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2 + \gamma\tilde{z}^2} = \sqrt{\gamma}.$$

Так как α, β, γ — собственные числа матрицы A^tA, то

$$|A|^2 = \left|A^tA - \lambda E\right|\Big|_{\lambda=0} = (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)\Big|_{\lambda=0} = \alpha\beta\gamma.$$

Задача 24.

а) Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ получаем:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right),$$

откуда (корни упорядочены по возрастанию) $\alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно,

$$m = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad M = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Задача 24.

a) Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ получаем:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right),$$

откуда (корни упорядочены по возрастанию) $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно,

$$m = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad M = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

b) При нашем упорядочении корней $m = \sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\gamma}$. Тогда

$$m^2 M \leq m\sqrt{\beta} M = \sqrt{\alpha\beta\gamma} = |\det A| = m\sqrt{\beta} M \leq mM^2.$$

Решение задачи 25.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

сходится.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 2000 году. Задача предложена доцентами Ю. Б. Мельниковым и Г. Л. Ходаком.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Для ответа на поставленный вопрос желательно представить член ряда $\det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ в более компактной форме.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

сходится.

Ответ. Для ответа на поставленный вопрос желательно представить член ряда $\det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ в более компактной форме.

Ясно, что это нетрудно сделать в случае, если бы матрица $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ была столбцом координат собственного вектора оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$, отвечающего собственному значению λ.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Для ответа на поставленный вопрос желательно представить член ряда $\det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ в более компактной форме.

Ясно, что это нетрудно сделать в случае, если бы матрица $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ была столбцом координат собственного вектора оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$, отвечающего собственному значению λ.

Ситуация практически не осложнится, если мы представим матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. В данном примере несложно представить матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A: **характеристический полином** матрицы A имеет вид

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. В данном примере несложно представить матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A: **характеристический полином** матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & -15 \\ 5 & \frac{19}{2}-\lambda \end{vmatrix} =$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

сходится.

Ответ. В данном примере несложно представить матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A: **характеристический полином** матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & -15 \\ 5 & \frac{19}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 =$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. В данном примере несложно представить матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A: **характеристический полином** матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & -15 \\ 5 & \frac{19}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 = (\lambda - 2)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. В данном примере несложно представить матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A: **характеристический полином** матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & -15 \\ 5 & \frac{19}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 = (\lambda-2)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right),$$

поэтому собственные значения этой матрицы равны

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. В данном примере несложно представить матрицу $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A: **характеристический полином** матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & -15 \\ 5 & \frac{19}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 = (\lambda-2)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right),$$

поэтому собственные значения этой матрицы равны 2 и $-\frac{1}{2}$.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\frac{1}{2}$.
Пусть $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \mu U + \nu V$ для некоторых действительных чисел μ, ν, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot (\mu U + \nu V)\right) \tag{8}$$

сходится.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\dfrac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\dfrac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot (\mu U + \nu V) \right) =$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\dfrac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot (\mu U + \nu V) \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot U \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det \left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot V \right) =$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot (\mu U + \nu V)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot U\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot V\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det\left(Y \cdot 2^n \cdot U\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det\left(Y \cdot \frac{1}{(-2)^n} \cdot V\right) =$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot (\mu U + \nu V)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot U\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot V\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det\left(Y \cdot 2^n \cdot U\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det\left(Y \cdot \frac{1}{(-2)^n} \cdot V\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det\left(Y \cdot U\right) \cdot 2^n + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det\left(Y \cdot V\right) \frac{1}{(-2)^n}.$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot (\mu U + \nu V)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \det\left(Y \cdot U\right) \cdot 2^n + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \det\left(Y \cdot V\right) \frac{1}{(-2)^n}.$$

Таким образом, поскольку **ряды (8)** и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n}$ сходятся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, очевидно[3], расходится, то $\mu = 0$, так как можно положить $Y = U$ и тогда заведомо $\det(Y \cdot U) = \det(U \cdot U) \neq 0$ (матрица U — не нулевая, так как она является собственным вектором). Следовательно, $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \nu V$.

[3] Например, по признаку д'Аламбера.

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\dfrac{1}{2}$. Итак, мы доказали, что $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \nu V$. Поэтому $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $-\frac{1}{2}$. Таким образом,

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\frac{1}{2}$. Итак, мы доказали, что $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \nu V$. Поэтому $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $-\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\dfrac{1}{2}$. Итак, мы доказали, что $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \nu V$. Поэтому $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $-\dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -15 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Задача 25. Найдите все такие действительные числа x, что для любой матрицы Y размерности 1×2 с вещественными коэффициентами ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \det\left(Y \cdot \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

сходится.

Ответ. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ равны 2 и $-\frac{1}{2}$. Пусть собственный вектор U из $\mathbb{R}^2$ отвечает собственному значению 2, а V — собственному значению $-\dfrac{1}{2}$. Итак, мы доказали, что $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \nu V$. Поэтому $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $-\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -15 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $x = -2$.

Решение задачи 26.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Это задача из олимпиады вузов России по математике для студентов нематематических специальностей, проведенная в 2000 году. Задача предложена доцентами Ю. Б. Мельниковым и Г. Л. Ходаком.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$A^2X =$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$A^2X = A \cdot (A \cdot X) =$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$A^2X = A \cdot (A \cdot X) = A(\lambda X) =$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX =$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$A^2X = A \cdot (A \cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\&\dots\\&A^kX =\\&\dots\end{aligned}$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\dots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) =\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\dots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) =\\
&\dots
\end{aligned}$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X \\
&\dots \\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&A^2X = A \cdot (A \cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X \\
&\ldots \\
&A^kX = A \cdot \big((A^{k-1} \cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\ldots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Так как в каждой строке матрицы A содержится не более одной единицы, а остальные компоненты этой строки равны нулю, то любая компонента матрицы AX представляет собой либо 0, либо компоненту матрицы X.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\dots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X\\
&\dots
\end{aligned}$$

Так как в каждой строке матрицы A содержится не более одной единицы, а остальные компоненты этой строки равны нулю, то любая компонента матрицы AX представляет собой либо 0, либо компоненту матрицы X.
Следовательно, для любого натурального k любая компонента матрицы A^kX представляет собой либо 0, либо компоненту матрицы X.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\ldots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Так как в каждой строке матрицы A содержится не более одной единицы, а остальные компоненты этой строки равны нулю, то любая компонента матрицы AX представляет собой либо 0, либо компоненту матрицы X.
Следовательно, для любого натурального k любая компонента матрицы A^kX представляет собой либо 0, либо компоненту матрицы X.
Матриц-столбцов такого вида в $\mathbf{C}^n$ конечное число, значит для некоторых различных натуральных чисел p, q получим $A^pX = A^qX$, то есть $\lambda^pX = \lambda^qX$.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&A^2X = A \cdot (A \cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X \\
&\dots \\
&A^kX = A \cdot \big((A^{k-1} \cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Мы показали, что для некоторых различных натуральных чисел p, q получим $A^pX = A^qX$, то есть $\lambda^p X = \lambda^q X$.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\dots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Мы показали, что для некоторых различных натуральных чисел p, q получим $A^pX = A^qX$, то есть $\lambda^pX = \lambda^qX$.
Так как X является собственным вектором, то он ненулевой, поэтому из $(\lambda^p - \lambda^q)\,X = \mathbf{0} \in \mathbf{C}^n$ следует, что $\lambda^p - \lambda^q = 0$.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\ldots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Мы показали, что для некоторых различных натуральных чисел p, q получим $A^pX = A^qX$, то есть $\lambda^pX = \lambda^qX$.

Так как X является собственным вектором, то он ненулевой, поэтому из $(\lambda^p - \lambda^q)\,X = \mathbf{0} \in \mathbf{C}^n$ следует, что $\lambda^p - \lambda^q = 0$.

Следовательно, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda^{p-q} = 1$.

Задача 26. Элементами квадратной матрицы являются нули и единицы, причем в каждой строке содержится не более одной единицы. Докажите, что все собственные числа этой матрицы в области комплексных чисел по модулю равны 0 или 1.

Ответ. Пусть ненулевая матрица-столбец X из $\mathbf{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, то есть $AX = \lambda X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&A^2X = A\cdot(A\cdot X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X\\
&\dots\\
&A^kX = A\cdot\big((A^{k-1}\cdot X\big) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}AX = \lambda^k X\\
&\dots
\end{aligned}$$

Мы показали, что для некоторых различных натуральных чисел p, q получим $A^pX = A^qX$, то есть $\lambda^p X = \lambda^q X$.

Так как X является собственным вектором, то он ненулевой, поэтому из $(\lambda^p - \lambda^q)\,X = \mathbf{0} \in \mathbf{C}^n$ следует, что $\lambda^p - \lambda^q = 0$.

Следовательно, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda^{p-q} = 1$.

Из последнего равенства следует $1 = |\lambda^{p-q}| = |\lambda|^{p-q}$, откуда $|\lambda| = 1$. Итак, $|\lambda| \in \{0, 1\}$, что и требовалось доказать.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?