Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Булевы и логические функции

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Логические и булевы функции

Мы будем рассматривать **высказывания**,

I. Логические и булевы функции

Мы будем рассматривать **высказывания**, рассматриваемые в «фиксированной» ситуации, в которой высказывание принимает однозначно определенное значение истинности (не зависящее от параметров).

I. Логические и булевы функции

Мы будем рассматривать **высказывания**, рассматриваемые в «фиксированной» ситуации, в которой высказывание принимает однозначно определенное значение истинности (не зависящее от параметров).

Логическая функция сопоставляет упорядоченному набору **высказываний** некоторое **высказывание**.

I. Логические и булевы функции

Мы будем рассматривать **высказывания**, рассматриваемые в «фиксированной» ситуации, в которой высказывание принимает однозначно определенное значение истинности (не зависящее от параметров).

Логическая функция сопоставляет упорядоченному набору **высказываний** некоторое **высказывание**.

Соответствующая *булева функция* сопоставляет упорядоченному набору значений истинности некоторое значение истинности.

II. Булевы функции

Если предположить, что истинность **высказывания** $F(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ определяется только истинностью или ложностью высказываний $U_1, U_2, \ldots, U_n$ (именно это и определяет F, как «логическую структуру»), то каждой логической функции естественным образом соответствует **булева функция**.

II. Булевы функции

Иными словами мы будем считать, что истинность **высказывания** $F(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ определяется не *смыслом* высказываний $U_1, U_2, \ldots, U_n$, не их взаимосвязями и т.п., а только набором значений истинности высказываний $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Иными словами, если например, $F(U_1, U_2)$ истинна при истинных U_1, U_2, то $F(U_1, U_2)$ останется истинной и в случае, если мы заменим **высказывания** U_1 и U_2 любыми другими истинными высказываниями.

II. Булевы функции

Условимся о следующих правилах для обозначений: **высказывания** мы, как правило, будем в дальнейшем обозначать заглавными буквами или заглавными буквами с индексами, например A, B, U_4, и т.д., а соответствующими строчными буквами и строчными буквами с индексами будем обозначать значение истинности этого **высказывания**. Например, если W_7 — некоторое высказывание, то $w_7 = 1$, когда W_7 истинно, и $w_7 = 0$, когда W_7 ложно. Далее, логической функции $F(U_1, U_2)$ соответствует **булева функция** $f(u_1, u_2)$, где $f(u_1, u_2) = 0$, если $F(U_1, U_2)$ ложно, и $f(u_1, u_2) = 1$, если $F(U_1, U_2)$ — истинно.

II. Булевы функции

Напомним, что мы отождествляем все логически эквивалентные **высказывания**, то есть такие **высказывания** которые могут быть только либо одновременно истинными, либо одновременно ложными. Иными словами, если **высказывания** A и B эквивалентны, то в любой ситуации либо и A, и B — истинны, либо и A, и B — ложны. Например, фразы «в равнобедренном треугольнике одна из медиан совпадает с высотой», «если треугольник равнобедренный, то одна из его медиан совпадает с высотой» и «одна из медиан треугольника совпадает с высотой при условии, что этот треугольник равнобедренный» логически эквивалентны, то есть мы их будем считать одним высказыванием.

II. Булевы функции

Определение 1. Булевой *n-арной (n-местной)* ***функцией*** *называется функция* ***с областью определения*** $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n \text{ раз}}$, *и* ***областью значений***, *включающейся в* $\{0,1\}$.

II. Булевы функции

Определение 1. Булевой *n-арной (n-местной)* ***функцией*** *называется функция* ***с областью определения*** $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n \text{ раз}}$, *и* ***областью значений***, *включающейся в* $\{0,1\}$.

В дальнейшем логическое значение 0 мы будем интерпретировать, как «ложь» (в некоторых учебниках и алгоритмических языках вместо 0 пишут false), а 1 — как «истина» (true). Можно считать, что значение булевой функции $f(x, y, \ldots, z)$ — значение истинности **высказывания** $F(X, Y, \ldots, Z)$ при соответствующих значениях истинности $x, y, \ldots, z$ высказываний $X, Y, \ldots, Z$.

II. Булевы функции

Рассмотрим, например, **булеву функцию** «отрицание». Этой булевой функции соотвествует одноименная логическая фукнция «отрицание», сопоставляющая **высказыванию** X высказывание «неверно, что X», «не X», обозначаемое через $\overline{X}$ или $\neg X$.

II. Булевы функции

Рассмотрим, например, **булеву функцию** «отрицание». Этой булевой функции соотвествует одноименная логическая функция «отрицание», сопоставляющая **высказыванию** X высказывание «неверно, что X», «не X», обозначаемое через $\overline{X}$ или $\neg X$.

Нетрудно понять, что значение истинности функции $\overline{x}$, обозначаемой также через $\neg x$, **высказывания** $\overline{X} = \neg X$ определяется формулой $\overline{x} = \neg x = 1 - x$, где x — значение истинности **высказывания** X, то есть $x = 1$, если X верно, и $x = 0$ при неверном X.

II. Булевы функции

Рассмотрим, например, **булеву функцию** «отрицание». Этой булевой функции соотвествует одноименная логическая функция «отрицание», сопоставляющая **высказыванию** X высказывание «неверно, что X», «не X», обозначаемое через $\overline{X}$ или $\neg X$.

Нетрудно понять, что значение истинности функции $\overline{x}$, обозначаемой также через $\neg x$, **высказывания** $\overline{X} = \neg X$ определяется формулой $\overline{x} = \neg x = 1 - x$, где x — значение истинности **высказывания** X, то есть $x = 1$, если X верно, и $x = 0$ при неверном X.

В самом деле, возьмем, например, в качестве X высказывание: «Число k делится нацело на 4». Тогда отрицание $\overline{X}$ к этому высказыванию имеет вид: «Неверно, что число k делится на 4», или «число k не делится на 4».

II. Булевы функции

Рассмотрим, например, **булеву функцию** «отрицание». Этой булевой функции соотвествует одноименная логическая функция «отрицание», сопоставляющая **высказыванию** X высказывание «неверно, что X», «не X», обозначаемое через $\overline{X}$ или $\neg X$.

Нетрудно понять, что значение истинности функции $\overline{x}$, обозначаемой также через $\neg x$, **высказывания** $\overline{X} = \neg X$ определяется формулой $\overline{x} = \neg x = 1 - x$, где x — значение истинности **высказывания** X, то есть $x = 1$, если X верно, и $x = 0$ при неверном X.

В самом деле, возьмем, например, в качестве X высказывание: «Число k делится нацело на 4». Тогда отрицание $\overline{X}$ к этому высказыванию имеет вид: «Неверно, что число k делится на 4», или «число k не делится на 4».

Например, если $k = 8$, то $x = 1$, так как «число 8 делится на 4» — верное утверждение. При этом $\overline{x} = 0$, то есть $\overline{x} = 0 = 1 - 1 = 1 - x$.

II. Булевы функции

Рассмотрим, например, **булеву функцию** «отрицание». Этой булевой функции соотвествует одноименная логическая фукнция «отрицание», сопоставляющая **высказыванию** X высказывание «неверно, что X», «не X», обозначаемое через $\overline{X}$ или $\neg X$.

Нетрудно понять, что значение истинности функции $\overline{x}$, обозначаемой также через $\neg x$, **высказывания** $\overline{X} = \neg X$ определяется формулой $\overline{x} = \neg x = 1 - x$, где x — значение истинности **высказывания** X, то есть $x = 1$, если X верно, и $x = 0$ при неверном X.

В самом деле, возьмем, например, в качестве X высказывание: «Число k делится нацело на 4». Тогда отрицание $\overline{X}$ к этому высказыванию имеет вид: «Неверно, что число k делится на 4», или «число k не делится на 4».

В ситуации $k = 9$ имеем $x = 0$ и $\overline{x} = 1$. Поэтому и в этой ситуации $\overline{x} = 1 = 1 - 0 = 1 - x$.

III. Что делать дальше?

III. Что делать дальше?

Изучить свойства булевых функций.

III. Что делать дальше?

Изучить свойства булевых функций.

Но сейчас мы даже не сможем их толком записать, у нас беден понятийный аппарат.

III. Что делать дальше?

Изучить свойства булевых функций.

Нужны стандартные способы задания объектов, в данном случае — булевых и логических функций.

III. Что делать дальше?

Изучить свойства булевых функций.

Нужны стандартные способы задания объектов, в данном случае — булевых и логических функций.

Необходим набор базовых функций, с помощью которых мы можем смоделирвать все интересующие нас булевы и логические функции.

И т.д.

IV. Способы задания булевой функции

Стандартными способами задания функций являются:

IV. Способы задания булевой функции

Стандартными способами задания функций являются:

1) формула;

2) таблица;

3) график.

IV. Способы задания булевой функции

Для **булевых функций** применяются следующие типовые способы:

IV. Способы задания булевой функции

Для **булевых функций** применяются следующие типовые способы:

1) **формулой** (динамическая модель) — суперпозицией других булевых функций;

IV. Способы задания булевой функции

Для **булевых функций** применяются следующие типовые способы:

1) **формулой** (динамическая модель) — суперпозицией других булевых функций;

Для этого нужны элементарные булевы функции, некоторые из которых мы рассмотрим ниже.

IV. Способы задания булевой функции

Для **булевых функций** применяются следующие типовые способы:

1) **формулой** (динамическая модель) — суперпозицией других булевых функций;

2) **таблицей истинности** (статическая модель);

IV. Способы задания булевой функции

Для **булевых функций** применяются следующие типовые способы:

1) **формулой** (динамическая модель) — суперпозицией других булевых функций. Для этого нужны элементарные булевы функции, некоторые из которых мы рассмотрим ниже;

2) **таблицей истинности** (статическая модель);

3) **сокращенной таблицей истинности**.

IV.1. Таблица истинности

Булеву функцию от небольшого числа аргументов удобно задавать в виде **таблицы истинности**. В строках этой таблицы перечислены все возможные сочетания значений аргументов, и, в последнем столбце — соответствующие каждому сочетанию значение функции. Порядок перечисления строк обычно такой, что если прочитать сочетание аргументов, как двоичное число, то получим номер строки минус 1. Примеры таблиц истинности приведены ниже, при задании элементарных булевых функций.

IV.2. Сокращенная таблица истинности

В **сокращенной таблице истинности**, в отличие от обычной таблицы истинности, выписывают только те строчки, в которых эта **булева функция** равна 1 (реже — только те строчки, в которых она равна 0). Например, для функции $f(x, y)$ с таблицей истинности

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

сокращенная таблица истинности имеет вид

x	y	$f(x, y)$
0	1	1
1	0	1

.

IV.3. Задание булевых функций формулой

Для задания булевой функции формулой необходимо определить набор элементарных булевых функций. Мы приведем сначала описание этих элементарных булевых функций, а после этого - таблицы истинности. С одной мы уже знакомы:

IV.3.1. Элементарные булевы функции: отрицание $\overline{x}$.

Напомним, что в алгебре высказываний этой булевой функции соответствует высказывание, полученное из исходного **высказывания** с помощью применения слов «не», «неверно, что». Таблица истинности, очевидно, имеет вид:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Заметим, что, считая 0 и 1 обычными числами, отрицание можно задать с помощью формулы $\overline{x} = 1 - x$.

IV.3.2. Элементарные булевы функции: конъюнкция

$x\&y = x \wedge y$.

Этой булевой функции соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «X и Y», «X, но Y», «X, а Y».

Считая 0 и 1 обычными числами, конъюнкцию можно задать с помощью формул $x\&y = \min\{x, y\} = x \cdot y$.

IV.3.3. Элементарные булевы функции: дизъюнкция

$x \vee y$.

Булевой функции «дизъюнкция» соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «X или Y».

Считая 0 и 1 обычными числами, конъюнкцию можно задать с помощью формулы $x \vee y = \max\{x, y\}$, то есть дизъюнкция ставит в соответствие паре (x, y) максимальное из этих чисел (напомним, что x и y принимают только значения 0 или 1).

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y.$

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

Верна ли теорема Пифагора для равностороннего треугольника?

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

Верна ли теорема Пифагора для равностороннего треугольника?

Если не верна, то

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

Верна ли теорема Пифагора для равностороннего треугольника?

Если не верна, то равносторонний треугольник опровергает теорему Пифагора?

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

Верна ли теорема Пифагора для равностороннего треугольника?

Если не верна, то равносторонний треугольник опровергает теорему Пифагора?

Нельзя путать значение истинности импликации $X \Rightarrow Y$ и ее заключения Y!

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

Итак, если посылка неверна, то импликация в целом истинна, независимо от истинности заключения!

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Каково значение истинности высказывания $X \Rightarrow Y$ при неверном X?

Итак, если посылка неверна, то импликация в целом истинна, независимо от истинности заключения!

«Из лжи следует все, что угодно».

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Отметим формулы: $x \to y =$

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \rightarrow y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Отметим формулы: $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y =$

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Отметим формулы: $x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x \& \overline{y}}$ и

IV.3.4. Элементарные булевы функции: импликация

$x \to y$.

В алгебре высказываний импликации соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание «$X \Rightarrow Y$», равносильное «X влечет Y», «если X, то Y», «из X следует Y».

Отметим формулы: $x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x \& \overline{y}}$ и $\overline{x \to y} = x \& \overline{y}$.

IV.3.5. Элементарные булевы функции: эквиваленция

$x \leftrightarrow y$.

В алгебре высказываний эквиваленции соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание $X \Leftrightarrow Y$, высказывание типа «X тогда и только тогда, когда Y», «X эквивалентно Y», «для выполнения X необходимо и достаточно Y».

IV.3.5. Элементарные булевы функции: эквиваленция

$x \leftrightarrow y$.

В алгебре высказываний эквиваленции соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание $X \Leftrightarrow Y$, высказывание типа «X тогда и только тогда, когда Y», «X эквивалентно Y», «для выполнения X необходимо и достаточно Y».

Отметим две важные формулы:

$$x \leftrightarrow y =$$

IV.3.5. Элементарные булевы функции: эквиваленция

$x \leftrightarrow y$.

В алгебре высказываний эквиваленции соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание $X \Leftrightarrow Y$, высказывание типа «X тогда и только тогда, когда Y», «X эквивалентно Y», «для выполнения X необходимо и достаточно Y».

Отметим две важные формулы:

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) =$$

IV.3.5. Элементарные булевы функции: эквиваленция

$x \leftrightarrow y$.

В алгебре высказываний эквиваленции соответствует одноименная логическая функция, сопоставляющая исходным высказываниям X и Y высказывание $X \Leftrightarrow Y$, высказывание типа «X тогда и только тогда, когда Y», «X эквивалентно Y», «для выполнения X необходимо и достаточно Y».

Отметим две важные формулы:

$$x \leftrightarrow y = (x \to y)\&(y \to x) = (x\&y) \vee (\overline{x}\&\overline{y}).$$

IV.3.6. Элементарные булевы функции: исключающее «или»

Исключающее «или» (либо..., либо...) $x \oplus y$. В алгебре высказываний этой булевой функции соответствует высказывание, полученное из исходных высказываний X и Y с помощью конструкции типа «либо X, либо Y». Справедливы формулы:

$$x \oplus y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = \overline{\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}}.$$

IV.4. Таблицы истинности элементарных булевых функций

x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Рассмотреть пример?

V. Алгебраические соотношения для булевых функций

Выпишем несколько важнейших алгебраических соотношений.

1. $\overline{(\overline{x})} = x$;
2. $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; законы
3. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$; двойственности (законы де-Моргана)
4. $x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x \& \overline{y}}$;
5. $\overline{x \to y} = x \& \overline{y}$;
6. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \& (y \to x) = (x \& y) \vee (\overline{x} \& \overline{y})$;
7. $x \& 1 = x, \quad x \& 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \vee 0 = x$;
8. $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z); \quad x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Доказательство верности выписанных соотношений мы осуществим **ниже**. Сейчас мы рассмотрим их с точки зрения алгебры высказываний.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 1 и 7 с позиций алгебры высказываний очевидны. Разберем соотношение 2. Что значит «неверно, что и X, и Y»? Это эквивалентно тому, что неверно *хотя бы* одно из этих высказываний: неверно X или неверно Y. Но это и означает, что **высказывания** $\overline{X \& Y}$ и $\overline{X} \vee \overline{Y}$ эквивалентны, то есть их значения истинности в каждой ситуации совпадают: $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. Соотношение 3 разберите самостоятельно.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной. **Первый аргумент**: предположение об истинности $X \Rightarrow Y$ при ложном X ничему не противоречит.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной. **Первый аргумент**: предположение об истинности $X \Rightarrow Y$ при ложном X ничему не противоречит.

В самом деле, утверждения об истинности или ложности Y из истинности $X \Rightarrow Y$ при ложном X получить нельзя: истинность Y «гарантируется» только при верном X, про случай «неправильного» X в высказывании $X \Rightarrow Y$ ничего не говорится! «Что-то утверждается» об Y только в случае, когда X верно.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной. **Первый аргумент**: предположение об истинности $X \Rightarrow Y$ при ложном X ничему не противоречит.

В самом деле, утверждения об истинности или ложности Y из истинности $X \Rightarrow Y$ при ложном X получить нельзя.

Например, пусть $X \Rightarrow Y$ — это высказывание «если треугольник и квадрат равновелики, то периметр квадрата меньше, чем периметр треугольника». Нужное соотношение периметров этих фигур «гарантируется» только для равновеликих фигур! О «маленьком» треугольнике и «большом» квадрате в этом утверждении *ничего* не говорится! Значит, предположение об истинности $X \Rightarrow Y$ в случае ложного X ничему не противоречит.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной.

Второй аргумент. Пусть $X \Rightarrow Y$ неверно.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной.

Второй аргумент. Пусть $X \Rightarrow Y$ неверно.

«Неверно, что если X, то Y» означает, что в некоторой ситуации X верно, а Y — не верно, то есть $X\&\overline{Y}$ — верно. Значит: $\overline{x \to y} = x\&\overline{y}$ (при этом обосновали соотношение 5).

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной.

Второй аргумент. Пусть $X \Rightarrow Y$ неверно.

«Неверно, что если X, то Y» означает, что в некоторой ситуации X верно, а Y — не верно, то есть $X\&\overline{Y}$ — верно. Значит: $\overline{x \to y} = x\&\overline{y}$ (при этом обосновали соотношение 5).

Поэтому ситуация, в которой X неверен, не может быть контрпримером к утверждению $X \Rightarrow Y$. Таким образом, в случае ложного X *отрицание* к высказыванию $X \Rightarrow Y$ — ложно, поэтому импликацию $X \Rightarrow Y$ следует считать истинной!

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Соотношения 4 и 5. Сначала разберемся, почему при ложной посылке импликацию в целом следует считать истинной.

Второй аргумент. Пусть $X \Rightarrow Y$ неверно.

«Неверно, что если X, то Y» означает, что в некоторой ситуации X верно, а Y — не верно, то есть $X \& \overline{Y}$ — верно. Значит: $\overline{x \to y} = x \& \overline{y}$ (при этом обосновали соотношение 5).

Например, в рассмотренном выше утверждении о равновеликих треугольнике и квадрате для опровержения этой теоремы надо привести пример таких *равновеликих* квадрата и треугольника (то есть X должно быть верно), что периметр квадрата не меньше периметра треугольника (то есть Y неверно).

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Пусть, действительно, утверждение X влечет утверждение Y, то есть $X \Rightarrow Y$ справедливо.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Пусть, действительно, утверждение X влечет утверждение Y, то есть $X \Rightarrow Y$ справедливо.

Это означает, что если X верно, то Y также верно. Тогда, либо X — неверно, поэтому $\overline{X}$ верно, либо, в противном случае, X справедливо, и, в силу $X \Rightarrow Y$, Y истинно.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Пусть, действительно, утверждение X влечет утверждение Y, то есть $X \Rightarrow Y$ справедливо.

Это означает, что если X верно, то Y также верно. Тогда, либо X — неверно, поэтому $\overline{X}$ верно, либо, в противном случае, X справедливо, и, в силу $X \Rightarrow Y$, Y истинно.

Таким образом, в этом случае истинно $\overline{X} \vee Y$. Это означает, что из истинности $X \Rightarrow Y$ следует истинность $\overline{X} \vee Y$.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Обратно, пусть верно утверждение $\overline{X} \vee Y$.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Обратно, пусть верно утверждение $\overline{X} \vee Y$.

Если X ложно, то $\overline{x} \vee y = \overline{0} \vee y = 1$ при любом y.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Обратно, пусть верно утверждение $\overline{X} \vee Y$.

Если X ложно, то $\overline{x} \vee y = \overline{0} \vee y = 1$ при любом y.

Если X — истинно, то $\overline{X}$ — ложно, то есть $\overline{x} = 0$. Но мы предположили, что $\overline{x} \vee y = 1$, поэтому $1 = 0 \vee y = y$.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Обратно, пусть верно утверждение $\overline{X} \vee Y$.

Если X ложно, то $\overline{x} \vee y = \overline{0} \vee y = 1$ при любом y.

Если X — истинно, то $\overline{X}$ — ложно, то есть $\overline{x} = 0$. Но мы предположили, что $\overline{x} \vee y = 1$, поэтому $1 = 0 \vee y = y$.

Таким образом, при истинном X из истинности утверждения $\overline{X} \vee Y$ следует истинность Y, а при ложном X, независимо от истинности Y, $\overline{X} \vee Y$ истинно.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вернемся к соотношениям 4. Обратно, пусть верно утверждение $\overline{X} \vee Y$.

Если X ложно, то $\overline{x} \vee y = \overline{0} \vee y = 1$ при любом y.

Если X — истинно, то $\overline{X}$ — ложно, то есть $\overline{x} = 0$. Но мы предположили, что $\overline{x} \vee y = 1$, поэтому $1 = 0 \vee y = y$.

Таким образом, при истинном X из истинности утверждения $\overline{X} \vee Y$ следует истинность Y, а при ложном X, независимо от истинности Y, $\overline{X} \vee Y$ истинно.

Но это и означает, что X влечет Y!

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Вторая часть соотношения 4 следует из **обоснованного выше** соотношения 5.

V.1. Соотношения для булевых функций с позиций алгебры высказываний

Относительно соотношения 6 отметим лишь, что представление $X \Leftrightarrow Y$ в виде $(X \Rightarrow Y)\&(Y \Rightarrow X)$ применяется чаще всего при *доказательстве* эквивалентности утверждений X и Y. А представление $X \Leftrightarrow Y$ в виде $(X\&Y) \vee (\overline{X}\&\overline{Y})$ обычно используется в ситуации, когда мы хотим *воспользоваться* эквивалентностью утверждений X и Y.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

В этом разделе, пользуясь **«схемой поиска доказательства»** мы докажем некоторые из **алгебраических соотношений**.

Ранее мы обосновывали «естественность» этих соотношений, с помощью алгебры высказываний, используя одну из семантических связей: с помощью булевой функции вычисляется истинность предиката-высказывания. Сейчас мы будем доказывать эти соотношения «по-честному».

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Итак, докажем соотношение 1: $\overline{(\overline{x})} = x$. «Генерация доказательства».

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Итак, докажем соотношение 1: $\overline{(\overline{x})} = x$. «Генерация доказательства».

Этап 2: доказываем *равенство*.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Итак, докажем соотношение 1: $\overline{(\overline{x})} = x$. «Генерация доказательства».

Этап 2: доказываем *равенство*.

Этап 3. Как **доказывается равенство**?

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Итак, докажем соотношение 1: $\overline{(\overline{x})} = x$. «Генерация доказательства».

Этап 2: доказываем *равенство*.

Этап 3. Как **доказывается равенство**?

Обычно применяется один из трех методов: метод алгебраических преобразований, сведение к двум неравенствам ($\leq$ и $\geq$), и метод «от противного».

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Итак, докажем соотношение 1: $\overline{(\overline{x})} = x$. «Генерация доказательства».

Этап 2: доказываем *равенство*.

Этап 3. Как **доказывается равенство**?

Обычно применяется один из трех методов: метод алгебраических преобразований, сведение к двум неравенствам ($\leq$ и $\geq$), и метод «от противного».

Здесь проще всего применить первый метод: можно просто вычислить выражение в левой части равенства и в правой части, и убедиться в том, что они совпадают. В данном случае можно просто сравнить таблицы истинности.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Итак, докажем соотношение 1: $\overline{(\overline{x})} = x$.

«Оформление». Сравнивая таблицы истинности, получаем,

x	$\overline{x}$	$\overline{(\overline{x})}$
0	1	0
1	0	1

, откуда следует доказываемое равенство.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Сравнением таблиц истинности можно доказать все соотношения 1-8. Такое доказательство носит чисто семантический характер. Но мы сейчас докажем соотношение 3, используя соотношения 1 и 2.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Докажем соотношение 3, используя соотношения 1 и 2.

«Генерация». Этап 2: доказываем *равенство* $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Докажем соотношение 3, используя соотношения 1 и 2.

«Генерация». Этап 2: доказываем *равенство* $\overline{x \vee y} = \overline{x}\&\overline{y}$.

Этап 3. «Эвристическое соображение»: это равенство напоминает соотношение 2: $\overline{x\&y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. Вычислим отрицание от левой и правой части, получим $x\&y = \overline{(\overline{x\&y})} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Докажем соотношение 3, используя соотношения 1 и 2.

«Генерация». Этап 2: доказываем *равенство* $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$.

Этап 3. «Эвристическое соображение»: это равенство напоминает соотношение 2: $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. Вычислим отрицание от левой и правой части, получим $x \& y = \overline{(\overline{x \& y})} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

Это с точностью до обозначений совпадает с доказываемым соотношением 3, достаточно заменить x на $\overline{x}$, y — на $\overline{y}$.

V.2. Доказательство алгебраических соотношений для булевых функций

Докажем соотношение 3, используя соотношения 1 и 2.

«Оформление». Положим $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$, тогда, в силу соотношений 1 и 2, получаем $\overline{x \vee y} = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}} = \overline{(\overline{a \& b})} = a \& b = \overline{x} \& \overline{y}$. что и требовалось доказать.

VI. Решение уравнений для булевых функций

Процесс решения уравнения, допустим, вида $f(x) = 0$, в некотором смысле является обратным к процессу вычисления значения функции $f(x)$.

VI. Решение уравнений для булевых функций

Процесс решения уравнения, допустим, вида $f(x) = 0$, в некотором смысле является обратным к процессу вычисления значения функции $f(x)$.

Например, пусть надо решить уравнение $\cos(2x + 3) = 1$.

VI. Решение уравнений для булевых функций

Процесс решения уравнения, допустим, вида $f(x) = 0$, в некотором смысле является обратным к процессу вычисления значения функции $f(x)$.

Например, пусть надо решить уравнение $\cos(2x+3) = 1$.

При *вычислении* выражения в левой части этого равенства сначала надо вычислить $2x$, потом прибавить к результату 3, и в конце концов вычислить $\cos$. Мы сравнили этот процесс с процессом одевания: сначала на x «надели» умножение на 2, потом — суммирование с 3, затем «надеваем» $\cos$. При *решении уравнения* поступаем наоборот: сначала «снимаем» $\cos$ (получаем $2x+3 = 2k\pi$), потом «снимаем» сложение с 3 (получаем $2x = 2k\pi - 3$), последним — умножение на 2 (обратная операция — деление: $x = k\pi - \frac{3}{2}$).

VI. Решение уравнений для булевых функций

Процесс решения уравнения, допустим, вида $f(x) = 0$, в некотором смысле является обратным к процессу вычисления значения функции $f(x)$.

Уравнение $f(x) = 0$ является некоторым высказыванием, предикатом относительно переменной x. В процессе решения уравнения мы переходим от этого уравнения к *логически эквивалентным* ему высказываниям, то есть (это *определение*!) к уравнениям и системам уравнений, множество решений которых совпадает с множеством решений исходного уравнения.

Рассмотреть пример?

VII. Полные системы булевых функций

Мы изучили набор элементарных булевых функций: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию. Возникает следующий естественный вопрос: можно ли ограничиться этим набором функций?

VII. Полные системы булевых функций

Мы изучили набор элементарных булевых функций: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию. Возникает следующий естественный вопрос: можно ли ограничиться этим набором функций?

Не может ли возникнуть ситуация, что некоторый предикат построен таким образом из «элементарных» предикатов, что выразить его с помощью известных нам пяти функций невозможно?

VII. Полные системы булевых функций

Мы изучили набор элементарных булевых функций: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию. Возникает следующий естественный вопрос: можно ли ограничиться этим набором функций?

Не может ли возникнуть ситуация, что некоторый предикат построен таким образом из «элементарных» предикатов, что выразить его с помощью известных нам пяти функций невозможно?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим новое для нас понятие.

VII. Полные системы булевых функций

Определение 2. *Система булевых функций* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *называется* **полной системой булевых функций**, *если любая булева функция может быть представлена формулой, содержащей только обозначения переменных, обозначения функций из списка* $\{f_1, \ldots, f_n\}$, *и скобки.*

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* 1) $\{\&, \vee, \overline{}, \to, \leftrightarrow\}$; 2) $\{\&, \vee, \overline{}\}$; 3) $\{\&, \overline{}\}$; 4) $\{\vee, \overline{}\}$.

Доказательство.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, {}^{-}, \to, \leftrightarrow\}$*;* *2)* $\{\&, \vee, {}^{-}\}$*;* *3)* $\{\&, {}^{-}\}$*;* *4)* $\{\vee, {}^{-}\}$.

Доказательство. 1) Для доказательства первого пункта этой теоремы мы применим метод *математической индукции*. Индукцию будем вести по количеству аргументов булевой функции f.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, ^{-}, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*;* *2)* $\{\&, \vee, ^{-}\}$*;* *3)* $\{\&, ^{-}\}$*;* *4)* $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. *База индукции.* Каково наименьшее возможное количество аргументов у функции f? Часто отвечают, что 1, но удобнее считать, что 0. То есть функция может совсем не зависеть от аргументов, это может быть функция-константа. Итак, надо выразить 0 и 1 (других значений у булевой функции быть не может) с помощью формулы, содержащей только символы $\&, \vee, ^{-}$ и обозначения переменных (быть может, введенных нами дополнительно). Это на самом деле просто: $0 = x\&\overline{x}, \quad 1 = x \vee \overline{x}$. База индукции доказана.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, ^{-}, \to, \leftrightarrow\}$*;* *2)* $\{\&, \vee, ^{-}\}$*;* *3)* $\{\&, ^{-}\}$*;* *4)* $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть для всех функций, зависящих от меньшего, чем $n > 0$, количества аргументов, утверждение теоремы верно, и функция f зависит ровно от n аргументов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, ^{-}, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; *2)* $\{\&, \vee, ^{-}\}$; *3)* $\{\&, ^{-}\}$; *4)* $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть для всех функций, зависящих от меньшего, чем $n > 0$, количества аргументов, утверждение теоремы верно, и функция f зависит ровно от n аргументов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функции g и h, равные $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$, и, соответственно, $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1)$, зависят от $(n-1)$-го аргумента.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, ^{-}, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; *2)* $\{\&, \vee, ^{-}\}$; *3)* $\{\&, ^{-}\}$; *4)* $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть для всех функций, зависящих от меньшего, чем $n > 0$, количества аргументов, утверждение теоремы верно, и функция f зависит ровно от n аргументов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

По предположению индукции

$$f(x_1, \ldots, 0) = G[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}],$$

$$f(x_1, \ldots, 1) = H[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}],$$

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, ^{-}, \to, \leftrightarrow\}$; *2)* $\{\&, \vee, ^{-}\}$; *3)* $\{\&, ^{-}\}$; *4)* $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть для всех функций, зависящих от меньшего, чем $n > 0$, количества аргументов, утверждение теоремы верно, и функция f зависит ровно от n аргументов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

По предположению индукции

$$f(x_1, \ldots, 0) = G[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}],$$

$$f(x_1, \ldots, 1) = H[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}],$$

Тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, 0)\&\overline{x_n}) \vee (f(x_1, \ldots, 1)\&x_n) =$

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, \bar{\ }, \to, \leftrightarrow\}$; *2)* $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$; *3)* $\{\&, \bar{\ }\}$; *4)* $\{\vee, \bar{\ }\}$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть для всех функций, зависящих от меньшего, чем $n > 0$, количества аргументов, утверждение теоремы верно, и функция f зависит ровно от n аргументов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

По предположению индукции

$$f(x_1, \ldots, 0) = G[\&, \vee, \bar{\ }, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}],$$

$$f(x_1, \ldots, 1) = H[\&, \vee, \bar{\ }, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}],$$

Тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, 0)\&\overline{x_n}) \vee (f(x_1, \ldots, 1)\&x_n) =$

$$= (G[\&, \vee, \bar{\ }, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]\&\overline{x_n}) \vee (H[\&, \vee, \bar{\ }, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]\&x_n).$$

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, \overline{}, \to, \leftrightarrow\}$*;* *2)* $\{\&, \vee, \overline{}\}$*;* *3)* $\{\&, \overline{}\}$*;* *4)* $\{\vee, \overline{}\}$.

Доказательство. *Шаг индукции.*

$$f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (G[\&, \vee, \overline{}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]\&\overline{x_n}) \vee (H[\&, \vee, \overline{}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]\&x_n)$$

Это формула требуемого вида. Доказано, что $\{\&, \vee, \overline{}\}$ — полная система булевых функций.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* 1) $\{\&, \vee, ^{-}, \to, \leftrightarrow\}$; 2) $\{\&, \vee, ^{-}\}$; 3) $\{\&, ^{-}\}$; 4) $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. 2) Индукция по количеству появлений в формуле для f символа $\vee$. Итак, как уже доказано, f представима формулой $F[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]$, содержащей только обозначения переменных, скобки и символы $\&, \vee, ^{-}$.

Если на самом деле символ $\vee$ в этой формуле не встречается, то это формула нужного нам вида. База индукции доказана.

VII.1. Теорема о полных системах булевых функций

Теорема 1. *Следующие системы булевых функций являются полными:* *1)* $\{\&, \vee, ^{-}, \to, \leftrightarrow\}$*;* *2)* $\{\&, \vee, ^{-}\}$*;* *3)* $\{\&, ^{-}\}$*;* *4)* $\{\vee, ^{-}\}$.

Доказательство. 2) Индукция по количеству появлений в формуле для f символа $\vee$. Итак, как уже доказано, f представима формулой $F[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]$, содержащей только обозначения переменных, скобки и символы $\&, \vee, ^{-}$.

Пусть в формуле $F[\&, \vee, ^{-}, (,), x_1, \ldots, x_{n-1}]$ символ $\vee$ встречается $n > 0$ раз, и любая формула подобного вида, в которой этот символ встречается меньшее количество раз, может быть преобразована к виду, не содержащему $\vee$ совсем. Теорема доказана.

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x\&\overline{y}\&z\&t;$$

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x\&\overline{y}\&z\&t = 1 \iff$$

$$\iff$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x\&\overline{y}\&z\&t;$$

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x\&\overline{y}\&z\&t = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x; y; z; t) = (1; 0; 1; 1) \;\mapsto$$

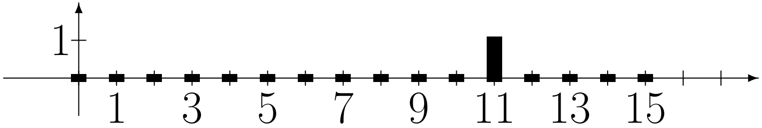
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x\&\overline{y}\&z\&t;$$

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x\&\overline{y}\&z\&t = 1 \iff$$

$$\iff (x; y; z; t) = (1; 0; 1; 1) \mapsto 8 + 2 + 1 = 11.$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

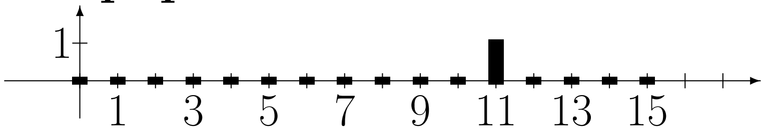


$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$$

$$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (x; y; z; t) = (1; 0; 1; 1) \ \mapsto 8 + 2 + 1 = 11.$$

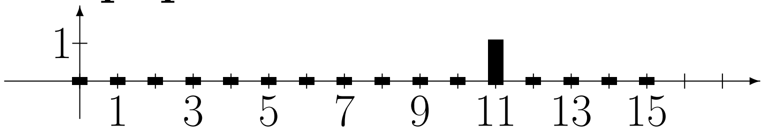
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$

$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



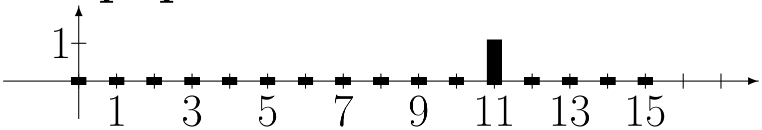
$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$

$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t = 1 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



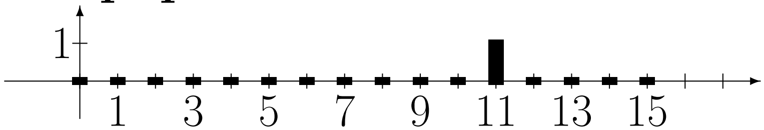
$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$

$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t = 1 \; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; (x; y; z; t) = (1; 0; 0; 1) \; \mapsto$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



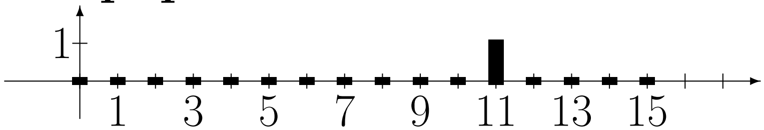
$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$

$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

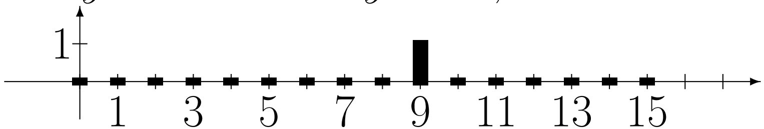
$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t = 1 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ (x; y; z; t) = (1; 0; 0; 1) \ \mapsto 8 + 1 = 9.$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$

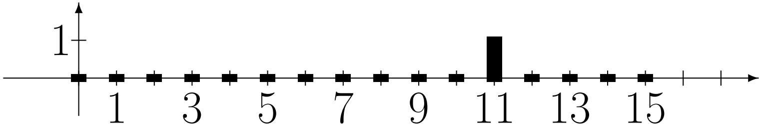


$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

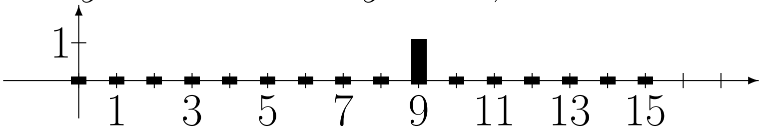
$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t = 1 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (x; y; z; t) = (1; 0; 0; 1) \;\mapsto 8 + 1 = 9.$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



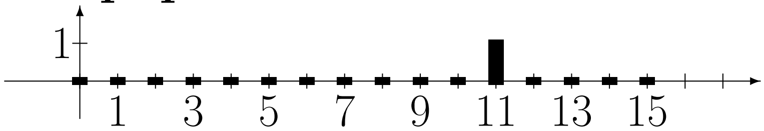
$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$



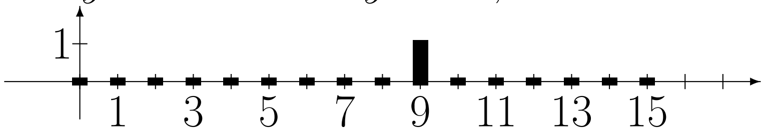
$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

$$(x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t) = (x \& \overline{y} \& z \& t) \vee (x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t);$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$



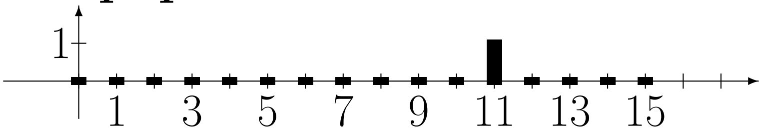
$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$

$$(x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t) = (x \& \overline{y} \& z \& t) \vee (x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t);$$

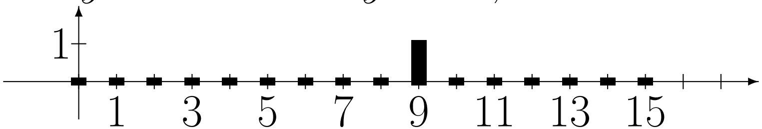
$$(x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t) = (x \& \overline{y} \& z \& t) \vee (x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t) = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x; y; z; t) \in \big\{(1; 0; 1; 1),\; (1; 0; 0; 1)\big\} \mapsto 8 + 2 + 1 = 11, \quad 8 + 1 = 9.$$

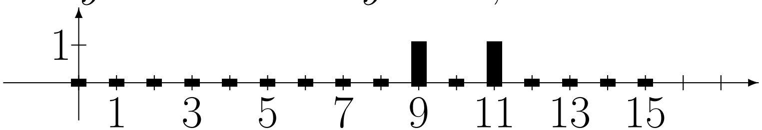
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t = x \& \overline{y} \& z \& t;$



$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t = x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t;$



$(x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t) = (x \& \overline{y} \& z \& t) \vee (x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t);$

$$(x \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t) = (x \& \overline{y} \& z \& t) \vee (x \& \overline{y} \& \overline{z} \& t) = 1 \iff$$
$$\iff (x; y; z; t) \in \{(1; 0; 1; 1),\ (1; 0; 0; 1)\} \mapsto 8 + 2 + 1 = 11, \quad 8 + 1 = 9.$$

Дизъюнкция — это максимум «дизъюнктов».

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$f(x;y;z;t) = (\qquad\qquad\qquad) \vee$$
$$\vee \left(\qquad\qquad\qquad\right) \vee \left(\qquad\qquad\qquad\right) =$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$f(x;y;z;t) = (\qquad\qquad\qquad) \vee$$
$$\vee \Big(\qquad\qquad\qquad\Big) \vee \Big(\qquad\qquad\qquad\Big) =$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$

$$\vee \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \vee \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) =$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \vee \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) =$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) =$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

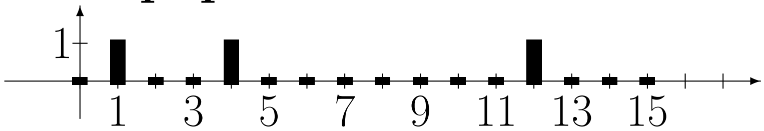
$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) =$$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

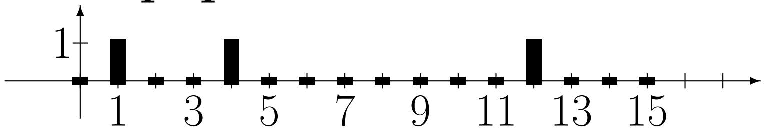


$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$
$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Получили **дизъюнктивную нормальную форму**.

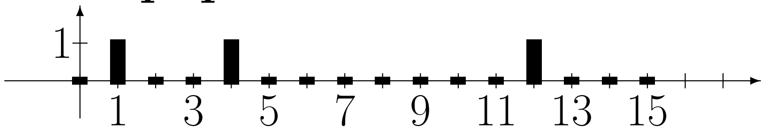
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$
$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \bar{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \bar{t}\right) =$
$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	$\boxed{0}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

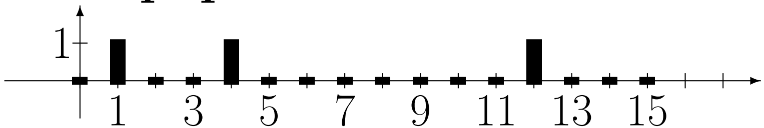
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	$\boxed{0}$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

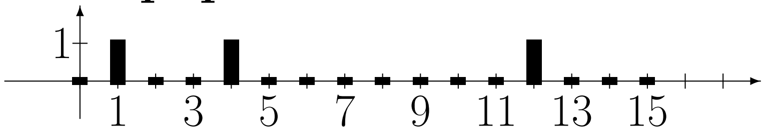
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(x \vee y \vee \overline{z} \vee t\right) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	$\boxed{0}$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

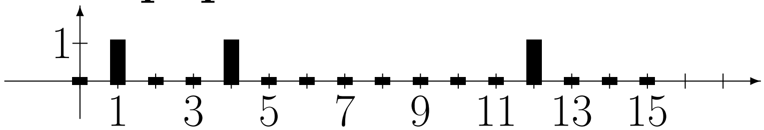
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	$\boxed{0}$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

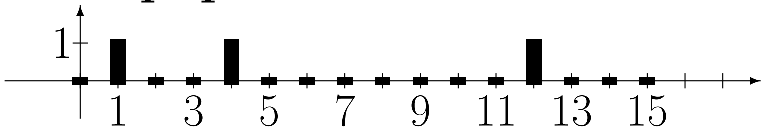
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z\wedge t)\vee$$
$$\vee\left(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z}\wedge\overline{t}\right)\vee\left(x\wedge y\wedge\overline{z}\wedge\overline{t}\right)=$$
$$=(x\vee y\vee z\vee t)\wedge\left(x\vee y\vee z\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge(x\vee y\vee\overline{z}\vee t)\wedge\left(x\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee t)\wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	$\boxed{0}$
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

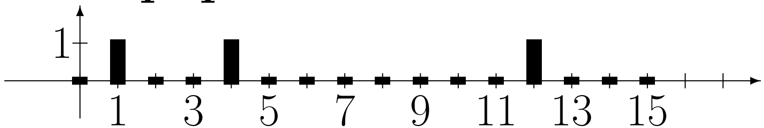
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	$\boxed{0}$
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

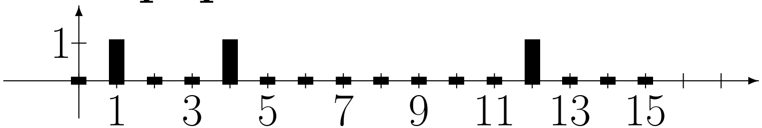
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	$\boxed{0}$
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$

$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$

$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$

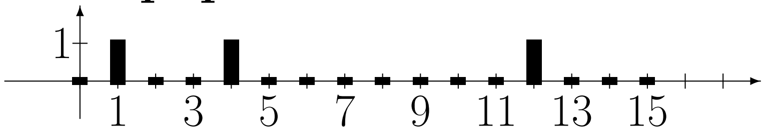
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$

$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	$\boxed{0}$
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

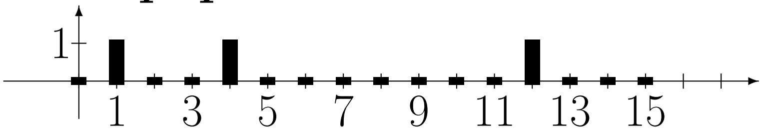
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	$\boxed{0}$
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

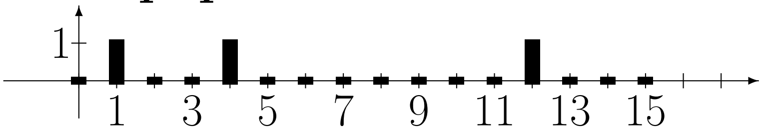
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	$\boxed{0}$
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

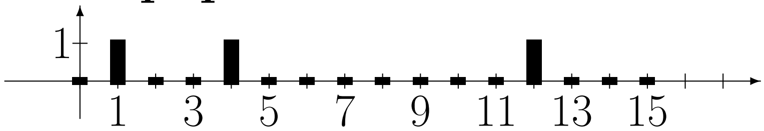
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$
\begin{aligned}
&f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee \\
&\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) = \\
&= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge \\
&\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge \\
&\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge \\
&\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge \\
&\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge \\
&\wedge \left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge
\end{aligned}
$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	$\boxed{0}$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

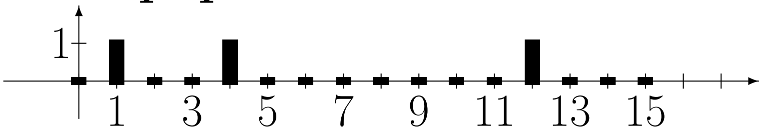
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z\wedge t)\vee$$
$$\vee\left(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z}\wedge\overline{t}\right)\vee\left(x\wedge y\wedge\overline{z}\wedge\overline{t}\right)=$$
$$=(x\vee y\vee z\vee t)\wedge\left(x\vee y\vee z\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge(x\vee y\vee\overline{z}\vee t)\wedge\left(x\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee t)\wedge\left(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge(\overline{x}\vee y\vee z\vee t)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee z\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee t)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee\overline{t}\right)\wedge$$
$$\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{t}\right)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee t)\wedge$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	$\boxed{0}$
1	1	1	1	0

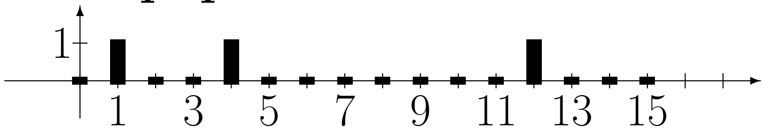
VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge$$
$$\wedge \left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right).$$

x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	$\boxed{0}$

VII.2. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы



x	y	z	t	$f(x;y;z;t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$f(x;y;z;t) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) \vee \left(x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(x \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{t}\right) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t) \wedge$$
$$\wedge \left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}\right).$$

Получили дизъюнктивную и, соответственно, **конъюнктивную нормальную форму**.

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$*. Тогда для любой булевой функции* f*, не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство.

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots ; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots ; a_n) = (b_1; \ldots ; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots ; a_n) \neq (b_1; \ldots ; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Следовательно, если $f(b_1; \ldots; b_n) = 1$, то

$$\bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) =$$

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots ; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots ; a_n) = (b_1; \ldots ; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots ; a_n) \neq (b_1; \ldots ; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Следовательно, если $f(b_1; \ldots ; b_n) = 1$, то

$$\bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)}\right) = \left(b_1^{\sigma(b_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(b_n)}\right) \vee \ldots =$$

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Следовательно, если $f(b_1; \ldots; b_n) = 1$, то

$$\bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \left(b_1^{\sigma(b_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(b_n)} \right) \vee \ldots = 1.$$

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Наоборот, если $f(b_1; \ldots; b_n) = 0$, то в выражении
$\bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right)$ все «дизъюнкты» равны

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$*. Тогда для любой булевой функции* f*, не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots ; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots ; a_n) = (b_1; \ldots ; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots ; a_n) \neq (b_1; \ldots ; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Наоборот, если $f(b_1; \ldots ; b_n) = 0$, то в выражении $\bigvee\limits_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right)$ все «дизъюнкты» равны 0.

VII.3. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме

Теорема 2. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной нулю тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(x_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma(a_n)} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Наоборот, если $f(b_1; \ldots; b_n) = 0$, то в выражении

$\bigvee_{f(a_1;\ldots;a_n)=1} \left(b_1^{\sigma(a_1)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\sigma(a_n)} \right)$ все «дизъюнкты» равны 0.

Значит, и все это выражение равно 0.

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots ; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots ; a_n) \neq (b_1; \ldots ; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots ; a_n) = (b_1; \ldots ; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f\left(b_1; \ldots ; b_n\right) = 0$, то

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) =$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f(b_1; \ldots; b_n) = 0$, то

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) = \left(b_1^{\sigma(\overline{b_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{b_n})} \right) \wedge \ldots =$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f(b_1; \ldots; b_n) = 0$, то

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) = \underbrace{\left(b_1^{\sigma(\overline{b_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{b_n})} \right)}_{=0} \wedge \ldots =$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f(b_1; \ldots; b_n) = 0$, то

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) = \underbrace{\left(b_1^{\sigma(\overline{b_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{b_n})} \right)}_{=0} \wedge \ldots = 0.$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f(b_1; \ldots; b_n) = 1$, то (полагая $a_k = \overline{b_k}$)

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) =$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, \text{ если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f(b_1; \ldots; b_n) = 1$, то (полагая $a_k = \overline{b_k}$)

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) = \left(b_1^{\sigma(b_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(b_n)} \right) \wedge \ldots =$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f\,(b_1; \ldots; b_n) = 1$, то (полагая $a_k = \overline{b_k}$)

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) = \underbrace{\left(b_1^{\sigma(b_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(b_n)} \right)}_{=1} \wedge \ldots =$$

VII.4. Теорема о конъюнктивной нормальной форме

Теорема 3. *Введем обозначения:* $x^{\sigma(0)} = \overline{x} = \neg x$ *и* $x^{\sigma(1)} = x$. *Тогда для любой булевой функции* f, *не равной единице тождественно, справедливо равенство*

$$f(x_1; \ldots; x_n) = \bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(x_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right).$$

Доказательство.

$$\left(b_1^{\sigma(a_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(a_n)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) \neq (b_1; \ldots; b_n), \\ 0, & \text{если } (a_1; \ldots; a_n) = (b_1; \ldots; b_n), \end{cases}$$

поскольку $0^{\sigma(0)} = \overline{0} = \neg 0 = 1 = 1^{\sigma(1)}, \quad 0^{\sigma(1)} = 0 = \overline{1} = \neg 1 = 1^{\sigma(0)}$.

Если $f(b_1; \ldots; b_n) = 1$, то (полагая $a_k = \overline{b_k}$)

$$\bigwedge_{f(a_1;\ldots;a_n)=0} \left(b_1^{\sigma(\overline{a_1})} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(\overline{a_n})} \right) = \underbrace{\left(b_1^{\sigma(b_1)} \vee \ldots \vee b_n^{\sigma(b_n)} \right)}_{=1} \wedge \ldots = 1.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?