Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

Раздел **электронного учебника** для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Линейные операторы и скалярное произведение **4**
I.1. Сопряженный оператор 5
I.2. Теорема о существовании сопряженного оператора 7
I.3. Определение сопряженного оператора 9
I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора 12
I.5. Доказательство теоремы о существовании сопряженного оператора 35
I.6. Свойства **сопряженного оператора** 36

II. Нормальные операторы **81**
II.1. Свойства нормальных операторов 83
II.2. Самосопряженные и эрмитовы операторы 134
II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов . . 135
II.4. Ортогональные и унитарные операторы 161

II.5. Свойства ортогональных и унитарных операторов . . . 162
II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора 163
II.7. Теорема об ортогональном операторе и ОНБ (критерий ортогональности оператора) 201

III. Применение к матричной алгебре **202**

I. Линейные операторы и скалярное произведение

Выше мы обогатили линейное пространство новой конструкцией — скалярным произведением. Отметим, что помимо **евклидовых пространств**, имеются другие конструкции, например, скалярное произведение в сиплектических пространствах и др.

I.1. Сопряженный оператор

В связи с введением новой конструкции, как обычно, проблематика теории значительно обогащается. Мы сейчас рассмотрим только одну серию проблем, связанных со «взаимодействием» линейных операторов и скалярного произведения в **евклидовых** и **унитарных** пространствах. При этом, как мы увидим, неожиданно появляются новые относительно простые решения некоторых «посторонних» (но очень актуальных!) проблем.

I.1. Сопряженный оператор

В связи с введением новой конструкции, как обычно, проблематика теории значительно обогащается. Мы сейчас рассмотрим только одну серию проблем, связанных со «взаимодействием» линейных операторов и скалярного произведения в **евклидовых** и **унитарных** пространствах. При этом, как мы увидим, неожиданно появляются новые относительно простые решения некоторых «посторонних» (но очень актуальных!) проблем.

В данном случае речь пойдет о «перебрасывании» оператора из первого множителя скалярного произведения на второй. Точнее, в ряде ситуаций необходимо представить число $\left(\hat{A}(x), y\right)$ в виде скалярного произведения, в котором вектор x стоит «не под оператором», то есть в виде (x, z). Оказывается, справедлива следующая теорема

I.2. Теорема о существовании сопряженного оператора

Теорема 1. *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ конечномерного* ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U *существует, причем единственный, такой оператор $\hat{B}$, что для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{B}(y)\right) .$$

I.2. Теорема о существовании сопряженного оператора

Теорема 1. *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ конечномерного* ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U *существует, причем единственный, такой оператор* $\hat{B}$, *что для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{B}(y)\right).$$

Доказательство этой теоремы мы приведем позже, после получения формулы для матрицы сопряженного оператора.

I.3. Определение сопряженного оператора

Определение 1. *Для линейного оператора* $\hat{A}$ *конечномерного* ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U **сопряженным оператором** *называется такой линейный оператор* $\hat{A}^*$, *что для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right). \tag{1}$$

I.3. Определение сопряженного оператора

Определение 1. *Для линейного оператора $\hat{A}$ конечномерного* ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** *U* **сопряженным оператором** *называется такой линейный оператор $\hat{A}^*$, что для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right). \tag{1}$$

В каких направлениях развивать исследование?

I.3. Определение сопряженного оператора

Определение 1. *Для линейного оператора* $\hat{A}$ *конечномерного* ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U **сопряженным оператором** *называется такой линейный оператор* $\hat{A}^*$*, что для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right). \tag{1}$$

Как обычно, один из первых вопросов после введения нового понятия: как «реализовать» эту конструкцию в «пространстве координат», то есть в $\mathbb{R}^n$. В данном случае, поскольку речь идет о линейном операторе (сопряженный оператор — это линейный оператор!), этот вопрос трансформируется в проблему вычисления *матрицы сопряженного оператора*. Ответ на этот вопрос оформим в виде следующей теоремы.

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если $A_{\text{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Здесь $\overline{X}$ — *операция покомпонентного* ***комплексного сопряжения***: $\overline{(x_{pq} + iy_{pq})_{n\times n}} = (x_{pq} - iy_{pq})_{n\times n}$, $\Gamma_{\boldsymbol{Б}}$ — ***матрица Грама***. *В случае, когда* U — ***евклидово пространство***, *в силу того, что комплексное сопряжение на множестве вещественных чисел является тождественным преобразованием, равенство (2) несколько упрощается:*

$$A^*_{\text{Б}} = \Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}.$$

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ — *матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

В обозначениях, принятых в электронике, где мнимая единица обозначается символом j, это равенство записывается так: $\overline{(x_{pq} + jq_{pq})_{n\times n}} = (x_{pq} - jy_{pq})_{n\times n}$.

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ — *матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство основано на использовании **типовых способов представления объектов в** $\mathbb{R}$.

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ — *матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно теореме о вычислении скалярного произведения...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если $A_{\text{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства U, то матрица $A^*_{\text{Б}}$ сопряженного оператора $\hat{A}^*$ имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$= \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно теореме о вычислении скалярного произведения...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$= \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно теореме **о координатах образа вектора**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\mathbf{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$= \left(A_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}\right)^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно теореме **о координатах образа вектора**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ — *матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$= \left(A_{\text{Б}}[x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно **свойствам операции транспонирования**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left(A_{\text{Б}}[x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно **свойствам операции транспонирования**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если $A_{\text{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе Б* ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица $A^*_{\text{Б}}$* ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left(A_{\text{Б}}[x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$$

Согласно теореме **о вычислении скалярного произведения**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left(A_{\text{Б}} [x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\left[\hat{A}^*(y)\right]_{\text{Б}}} =$$

Согласно теореме **о вычислении скалярного произведения**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\mathbf{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\mathbf{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$[x]^t_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} = \left(A_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}\right)^t \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{\left[\hat{A}^*(y)\right]_{\mathbf{Б}}} =$$

Согласно теореме **о координатах образа вектора**...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если $A_{\text{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе Б евклидова или унитарного пространства U, то матрица $A^*_{\text{Б}}$ сопряженного оператора $\hat{A}^*$ имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left(A_{\text{Б}}[x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\left[\hat{A}^*(y)\right]_{\text{Б}}} =$$

Согласно теореме о координатах образа вектора...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство.

$$[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left(A_{\text{Б}}[x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\left[\hat{A}^*(y)\right]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \overline{[y]_{\text{Б}}}.$$

Согласно теореме о координатах образа вектора...

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \, \overline{[y]_{\text{Б}}}$.

$$[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left(A_{\text{Б}} [x]_{\text{Б}}\right)^t \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = \left[\hat{A}(x)\right]_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} =$$

$$= \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) = [x]^t_{\text{Б}} \, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\left[\hat{A}^*(y)\right]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \, \overline{[y]_{\text{Б}}}.$$

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если $A_{\text{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства U, то матрица $A^*_{\text{Б}}$ **сопряженного оператора** $\hat{A}^*$ имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}}\, \overline{[y]_{\text{Б}}}$.
Ура?

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ — *матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}}\, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}}\, \overline{[y]_{\text{Б}}}$.

Можно ли «сократить на $[x]^t_{\text{Б}}$ и на $\overline{[y]_{\text{Б}}}$»?

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}}\, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}}\, \overline{[y]_{\text{Б}}}$.

Можно ли «сократить на $[x]^t_{\text{Б}}$ и на $\overline{[y]_{\text{Б}}}$»?

Нельзя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \overline{[y]_{\text{Б}}}$.

Можно ли «сократить на $[x]^t_{\text{Б}}$ и на $\overline{[y]_{\text{Б}}}$»?

Нельзя, но...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б *евклидова или унитарного пространства* U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ *сопряженного оператора* $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \, \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \, \overline{[y]_{\text{Б}}}$.
По лемме о сокращении на произвольную матрицу получаем

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}}\, \overline{[y]_{\text{Б}}}$.
По лемме о сокращении на произвольную матрицу получаем

$$A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} = \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \Rightarrow$$

I.4. Теорема о матрице сопряженного оператора

Теорема 2. *Если* $A_{\text{Б}}$ *— матрица линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* Б ***евклидова*** *или* ***унитарного пространства*** U, *то матрица* $A^*_{\text{Б}}$ ***сопряженного оператора*** $\hat{A}^*$ *имеет вид*

$$A^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Итак, $[x]^t_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{[y]_{\text{Б}}} = [x]^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \overline{[y]_{\text{Б}}}$.
По лемме о сокращении на произвольную матрицу получаем

$$A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}} = \Gamma_{\text{Б}} \overline{\hat{A}^*_{\text{Б}}} \Rightarrow \hat{A}^*_{\text{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\text{Б}} A^t_{\text{Б}} \Gamma_{\text{Б}}}.$$

Теорема доказана.

I.5. Доказательство теоремы о существовании сопряженного оператора

Из **теоремы о матрице сопряженного оператора** и **теоремы об изоморфности пространства линейных операторов и пространства матриц** следует существование и единственность **сопряженного оператора**, см. **теорему о существовании сопряженного оператора**.

Рассмотрим пример?

I.6. Свойства сопряженного оператора

1. $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$.

2. $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$.

3. $\left(\lambda\hat{A}\right)^* = \overline{\lambda}\hat{A}^*$. Таким образом, для евклидовых пространств $\left(\lambda\hat{A}\right)^* = \lambda\hat{A}^*$.

4. **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^\perp = \operatorname{Ker}\hat{A}^*$.

5. $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

6. $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{*} = \hat{B}^{*}\hat{A}^{*}.$

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) =$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По определению сопряженного оператора и определению произведения операторов $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По определению сопряженного оператора и определению произведения операторов $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По определению сопряженного оператора и определению произведения операторов $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

С другой стороны,

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

С другой стороны,

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(x, \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y)\right).$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$.

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

С другой стороны,

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(x, \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y)\right).$$

Из **теоремы о существовании и единственности сопряженного оператора** следует доказываемое равенство.

I.6. Свойства **сопряженного оператора**

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

С другой стороны,

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(x, \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y)\right).$$

Из **теоремы о существовании и единственности сопряженного оператора** следует доказываемое равенство.

2) Доказательство аналогичное.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*.$

По **определению сопряженного оператора** и **определению произведения операторов** $\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) =$

$$= \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

С другой стороны,

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(x, \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y)\right).$$

Из **теоремы о существовании и единственности сопряженного оператора** следует доказываемое равенство.

2) Доказательство аналогичное.

3) Доказательство аналогичное.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Возьмем

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Возьмем вектор $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$. По определению **ортогонального дополнения**, **сопряженного оператора** и образа пространства, для любого вектора $u \in U$ имеем

$$= \left(\hat{A}(u), x\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Возьмем вектор $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$. По определению **ортогонального дополнения**, **сопряженного оператора** и образа пространства, для любого вектора $u \in U$ имеем

$$0 = \left(\hat{A}(u), x\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Возьмем вектор $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$. По определению **ортогонального дополнения**, **сопряженного оператора** и образа пространства, для любого вектора $u \in U$ имеем

$$0 = \left(\hat{A}(u), x\right) = \left(u, \hat{A}^{*}(x)\right).$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker}\hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker}\hat{A}^{*}$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker}\hat{A}^{*}$.

Возьмем вектор $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$. По определению **ортогонального дополнения**, **сопряженного оператора** и образа пространства, для любого вектора $u \in U$ имеем

$$0 = \left(\hat{A}(u), x\right) = \left(u, \hat{A}^{*}(x)\right).$$

Значит, вектор $\hat{A}^{*}(x)$ ортогонален к любому вектору пространства U.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Возьмем вектор $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$. По определению **ортогонального дополнения**, **сопряженного оператора** и образа пространства, для любого вектора $u \in U$ имеем

$$0 = \left(\hat{A}(u), x\right) = \left(u, \hat{A}^{*}(x)\right).$$

Значит, вектор $\hat{A}^{*}(x)$ ортогонален к любому вектору пространства U.

В частности, он ортогонален к самому себе: $\left(\hat{A}^{*}(x), \hat{A}^{*}(x)\right) = 0$, откуда $\hat{A}^{*}(x) = \mathbf{0}$. Значит, $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Надо доказать *равенство* множеств. Для этого надо показать два включения: $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^*$ и $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Возьмем вектор $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$. По определению **ортогонального дополнения**, **сопряженного оператора** и образа пространства, для любого вектора $u \in U$ имеем

$$0 = \left(\hat{A}(u), x\right) = \left(u, \hat{A}^*(x)\right).$$

Значит, вектор $\hat{A}^*(x)$ ортогонален к любому вектору пространства U.

В частности, он ортогонален к самому себе: $\left(\hat{A}^*(x), \hat{A}^*(x)\right) = 0$, откуда $\hat{A}^*(x) = \mathbf{0}$. Значит, $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Итак, доказано включение $\hat{A}(U)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$. Это еще проще.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Пусть

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^*$. Тогда

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$. Тогда для любого вектора u из U имеем, с одной стороны:

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^*$. Тогда для любого вектора u из U имеем, с одной стороны:

$$\left(u, \hat{A}^*(x)\right) = (u, \mathbf{0}) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$. Тогда для любого вектора u из U имеем, с одной стороны:

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) = (u, \mathbf{0}) = 0.$$

С другой стороны,

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$. Тогда для любого вектора u из U имеем, с одной стороны:

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) = (u, \mathbf{0}) = 0.$$

С другой стороны,

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) = \left(\hat{A}(u), x\right).$$

Значит,

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^*$. Тогда для любого вектора u из U имеем, с одной стороны:

$$\left(u, \hat{A}^*(x)\right) = (u, \mathbf{0}) = 0.$$

С другой стороны,

$$\left(u, \hat{A}^*(x)\right) = \left(\hat{A}(u), x\right).$$

Значит, для любого вектора $u \in U$ имеет место равенство $\left(\hat{A}(u), x\right) = 0$, то есть $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

4) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Осталось доказать обратное включение, то есть $\hat{A}(U)^{\perp} \supseteq \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \hat{A}^{*}$. Тогда для любого вектора u из U имеем, с одной стороны:

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) = (u, \mathbf{0}) = 0.$$

С другой стороны,

$$\left(u, \hat{A}^{*}(x)\right) = \left(\hat{A}(u), x\right).$$

Значит, для любого вектора $u \in U$ имеет место равенство $\left(\hat{A}(u), x\right) = 0$, то есть $x \in \hat{A}(U)^{\perp}$.

Теорема Фредгольма доказана.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\qquad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Следовательно,

$$0 = \left(\hat{A}(x), y\right) - \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right) =$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Следовательно,

$$0 = \left(\hat{A}(x), y\right) - \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right) = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Следовательно,

$$0 = \left(\hat{A}(x), y\right) - \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right) = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Это равенство **выполняется для любых векторов** x, y.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Следовательно,

$$0 = \left(\hat{A}(x), y\right) - \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right) = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Это равенство выполняется для любых векторов x, y.

Положим $y =$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Следовательно,

$$0 = \left(\hat{A}(x), y\right) - \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right) = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Это равенство **выполняется для любых векторов** x, y.

Положим $y = \hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x)$. Тогда

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

Для любых векторов $x, y \in U$ $\quad \left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right) =$

$$= \overline{\left(\hat{A}^*(y), x\right)} = \overline{\left(y, \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right)} = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Следовательно,

$$0 = \left(\hat{A}(x), y\right) - \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right) = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), y\right).$$

Это равенство **выполняется для любых векторов** x, y.

Положим $y = \hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x)$. Тогда

$$0 = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), \hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right).$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

$$0 = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), \hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right).$$

Из **аксиом евклидова** и **унитарного пространств** получаем, что $\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x) = \mathbf{0}$, то есть имеет место тождество

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

5) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}.$

$$0 = \left(\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x), \hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x)\right).$$

Из **аксиом евклидова** и **унитарного пространств** получаем, что $\hat{A}(x) - \left(\hat{A}^*\right)^*(x) = \mathbf{0}$, то есть имеет место тождество

$$\hat{A}(x) = \left(\hat{A}^*\right)^*(x),$$

что и требовалось доказать.

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

6) $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}.$

$$\hat{A}^*\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)^* = \hat{E}^* = \hat{E}.$$

I.6. Свойства сопряженного оператора

Доказательство.

6) $\left(\hat{A}^{-1}\right)^{*} = \left(\hat{A}^{*}\right)^{-1}$.

$$\hat{A}^{*}\left(\hat{A}^{-1}\right)^{*} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)^{*} = \hat{E}^{*} = \hat{E}.$$

Используя определение обратной матрицы и теорему об однозначности обратной матрицы, получаем доказываемое равенство $\left(\hat{A}^{-1}\right)^{*} = \left(\hat{A}^{*}\right)^{-1}$.

II. Нормальные операторы

Какие варианты взаимодействия линейного оператора с сопряжённым ему оператором наиболее перспективны для изучения?

II. Нормальные операторы

Определение 2. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *или* ***унитарного*** *пространства U называется* **нормальным оператором** *тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{A}^* = \hat{A}^*\hat{A}$.*

II.1. Свойства нормальных операторов

Здесь $\hat{A}$ — **нормальный оператор** евклидова или **унитарного** пространства U.

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda \hat{E}$ — **нормальный оператор**.

II.1. Свойства нормальных операторов

Здесь $\hat{A}$ — **нормальный оператор** евклидова или **унитарного** пространства U.

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

Здесь $\hat{A}$ — **нормальный оператор** евклидова или **унитарного** пространства U.

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

II.1. Свойства нормальных операторов

4') Если U — **унитарное** пространство, то существует ОНБ из **собственных векторов** нормального линейного оператора $\hat{A}$.

4'')Если U — **евклидово пространство** и **характеристический полином** **нормального оператора** $\hat{A}$ представим в виде $|A_{\text{Б}} - \lambda E| = (\lambda - \rho_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \rho_m)^{n_m}$, где $\rho_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то существует ОНБ **евклидова пространства** U, состоящий из **собственных векторов** линейного оператора $\hat{A}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

5) Если $\hat{A}$ — **нормальный оператор** евклидова пространства U, то существует такой ОНБ **Б** пространства U, что **матрица** $A_{\textbf{Б}}$ имеет клеточно-диагональный вид: $A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 & \dots & \mathbf{0} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D_k \end{pmatrix}$, причем диагональные клетки (то есть матрицы D_i) либо имеют размерность 1×1, либо имеют вид $D_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство.

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) = \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) = \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$$

$$= \hat{A}^*\hat{A} - \lambda\hat{A}^*\hat{E} - \overline{\lambda}\hat{E}\hat{A} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E}\hat{E} =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) = \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$$

$$= \hat{A}^*\hat{A} - \lambda\hat{A}^*\hat{E} - \overline{\lambda}\hat{E}\hat{A} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E}\hat{E} = \hat{A}\hat{A}^* - \lambda\hat{E}\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{A}\hat{E} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E} =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) = \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$$

$$= \hat{A}^*\hat{A} - \lambda\hat{A}^*\hat{E} - \overline{\lambda}\hat{E}\hat{A} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E}\hat{E} = \hat{A}\hat{A}^* - \lambda\hat{E}\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{A}\hat{E} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E} =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)\left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right) =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda \hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda \hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda} \hat{E}\right) \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) = \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda} \hat{E}\right) \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) =$$

$$= \hat{A}^* \hat{A} - \lambda \hat{A}^* \hat{E} - \overline{\lambda} \hat{E} \hat{A} + \lambda \overline{\lambda} \hat{E} \hat{E} = \hat{A} \hat{A}^* - \lambda \hat{E} \hat{A}^* - \overline{\lambda} \hat{A} \hat{E} + \lambda \overline{\lambda} \hat{E} =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda} \hat{E}\right) = \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda} \hat{E}\right) =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right)$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\hat{A}$ — **нормальный оператор**, то $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ тоже **нормальный оператор**.

По свойствам сопряженного оператора и определению **нормального оператора** $\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^* \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$

$$= \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) = \left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right)\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) =$$

$$= \hat{A}^*\hat{A} - \lambda\hat{A}^*\hat{E} - \overline{\lambda}\hat{E}\hat{A} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E}\hat{E} = \hat{A}\hat{A}^* - \lambda\hat{E}\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{A}\hat{E} + \lambda\overline{\lambda}\hat{E} =$$

$$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)\left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right) = \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)\left(\hat{A}^* - \overline{\lambda}\hat{E}\right) =$$

$= \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^*\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)$, т.е. $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Обратное следует из того, что если $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**, то как мы уже доказали, линейный оператор

$$\hat{A} =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Обратное следует из того, что если $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**, то как мы уже доказали, линейный оператор

$$\hat{A} = \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) - (-\lambda)\hat{E}$$

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Обратное следует из того, что если $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**, то как мы уже доказали, линейный оператор

$$\hat{A} = \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) - (-\lambda)\hat{E}$$

является **нормальным оператором.**

II.1. Свойства нормальных операторов

1) Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** или **унитарного** пространства U является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**.

Доказательство. Обратное следует из того, что если $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — **нормальный оператор**, то как мы уже доказали, линейный оператор

$$\hat{A} = \left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) - (-\lambda)\hat{E}$$

является **нормальным оператором.**

В доказанном ранее утверждении вместо $\hat{A}$ берем $\hat{A} - \lambda\hat{E}$, и вместо λ — число $(-\lambda)$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Очевидно, что $\hat{A}$ является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда **нормальным оператором** является $\hat{A}^*$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Очевидно, что $\hat{A}$ является **нормальным оператором** тогда и только тогда, когда **нормальным оператором** является $\hat{A}^*$.

Поэтому, в силу свойства $\hat{A} = \left(\hat{A}^*\right)^*$ **сопряженного оператора**, достаточно доказать только необходимость.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) =$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$,

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда

$$\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда
$\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

Тогда $\hat{B}(v) =$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

Тогда $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

Тогда $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$.

Следовательно, в силу доказанной выше нормальности оператора $\hat{B}$, получаем

$$= \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

Тогда $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$.

Следовательно, в силу доказанной выше нормальности оператора $\hat{B}$, получаем

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

Тогда $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$.

Следовательно, в силу доказанной выше нормальности оператора $\hat{B}$, получаем

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. Итак, пусть $v \in U$ — **собственный вектор**, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $\hat{A}(v) = \rho v$, откуда $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$. Обозначим оператор $\hat{A} - \rho\hat{E}$ через $\hat{B}$.

Тогда $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$.

Следовательно, в силу доказанной выше нормальности оператора $\hat{B}$, получаем

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) = \left(\hat{B}^*(v), \hat{B}^*(v)\right).$$

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. $\hat{A}(v) = \rho v$, $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, $\hat{B} = \hat{A} - \rho\hat{E}$, $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$,

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) = \left(\hat{B}^*(v), \hat{B}^*(v)\right).$$

По **аксиомам скалярного произведения** получаем $\hat{B}^*(v) = \mathbf{0}$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. $\hat{A}(v) = \rho v$, $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, $\hat{B} = \hat{A} - \rho\hat{E}$, $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$,

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) = \left(\hat{B}^*(v), \hat{B}^*(v)\right).$$

По **аксиомам скалярного произведения** получаем $\hat{B}^*(v) = \mathbf{0}$.

Значит $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)^*(v) = \mathbf{0}$, то есть, в силу свойств сопряженного оператора,

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. $\hat{A}(v) = \rho v$, $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, $\hat{B} = \hat{A} - \rho\hat{E}$, $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$,

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) = \left(\hat{B}^*(v), \hat{B}^*(v)\right).$$

По **аксиомам скалярного произведения** получаем $\hat{B}^*(v) = \mathbf{0}$.

Значит $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)^*(v) = \mathbf{0}$, то есть, в силу свойств сопряженного оператора, $\left(\hat{A}^* - \overline{\rho}\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, откуда

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. $\hat{A}(v) = \rho v$, $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, $\hat{B} = \hat{A} - \rho\hat{E}$, $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$,

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) = \left(\hat{B}^*(v), \hat{B}^*(v)\right).$$

По **аксиомам скалярного произведения** получаем $\hat{B}^*(v) = \mathbf{0}$.

Значит $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)^*(v) = \mathbf{0}$, то есть, в силу свойств сопряженного оператора, $\left(\hat{A}^* - \overline{\rho}\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, откуда $\hat{A}^*(v) = \overline{\rho}v$.

II.1. Свойства нормальных операторов

2) Вектор $v \in U$ является собственным вектором **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

Доказательство. $\hat{A}(v) = \rho v$, $\left(\hat{A} - \rho\hat{E}\right)(v) = \mathbf{0}$, $\hat{B} = \hat{A} - \rho\hat{E}$, $\hat{B}(v) = \mathbf{0}$,

$$0 = \left(\hat{B}(v), \hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}^*\hat{B}(v)\right) = \left(v, \hat{B}\hat{B}^*(v)\right) = \left(\hat{B}^*(v), \hat{B}^*(v)\right).$$

Итак, $\hat{A}^*(v) = \overline{\rho}v$.

Так как v — ненулевой вектор (он — собственный для $\hat{A}$), то v — **собственный вектор** для $\hat{A}^*$, что и требовалось доказать.

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство.

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = \left(u, \hat{A}^*(v)\right) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = \left(u, \hat{A}^*(v)\right) = (u, \overline{\beta} v) =$$

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = \left(u, \hat{A}^*(v)\right) = (u, \overline{\beta} v) = \beta(u, v).$$

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = \left(u, \hat{A}^*(v)\right) = \left(u, \overline{\beta} v\right) = \beta(u, v).$$

Значит, $\alpha(u, v) = \beta(u, v)$, откуда $(\alpha - \beta)(u, v) = 0$.

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\left(\hat{A}(u), v\right) = \left(u, \hat{A}^*(v)\right) = (u, \overline{\beta} v) = \beta(u, v).$$

Значит, $\alpha(u, v) = \beta(u, v)$, откуда $(\alpha - \beta)(u, v) = 0$. Так как $\alpha - \beta \neq 0$, то

II.1. Свойства нормальных операторов

3) Если $u, v \in U$ — собственные векторы **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

Доказательство. Пусть $u \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α и $v \in U$ — собственный вектор **нормального оператора** $\hat{A}$, отвечающий собственному значению β, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда, с одной стороны,

$$\Big(\hat{A}(u), v\Big) = (\alpha u, v) = \alpha(u, v).$$

С другой стороны, по **доказанному свойству** 2) **нормального оператора**,

$$\Big(\hat{A}(u), v\Big) = \Big(u, \hat{A}^*(v)\Big) = (u, \overline{\beta} v) = \beta(u, v).$$

Значит, $\alpha(u, v) = \beta(u, v)$, откуда $(\alpha - \beta)(u, v) = 0$. Так как $\alpha - \beta \neq 0$, то $(u, v) = 0$, что и требовалось доказать.

II.1. Свойства нормальных операторов

4) и 5) — без доказательства.

II.2. Самосопряженные и эрмитовы операторы

Определение 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(соответственно,* ***унитарного****) пространства* U *называется* **самосопряженным оператором** *(соответственно,* **эрмитовым оператором***) тогда и только тогда, когда* $\hat{A}^* = \hat{A}$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

1) **Самосопряженный** (эрмитов) оператор является **нормальным оператором**.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

1) **Самосопряженный** (эрмитов) оператор является **нормальным оператором**.

2) Характеристический полином самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ представим в виде

$$|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E| = (\lambda - \rho_1)^{n_1} \dots (\lambda - \rho_m)^{n_m},$$

где $\rho_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. В частности, **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ включается в $\mathbb{R}$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$ (говорят еще, что в этом случае из $\hat{A}$ *извлекается квадратный корень*).

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$ (говорят еще, что в этом случае из $\hat{A}$ *извлекается квадратный корень*).

4) Если самосопряженный оператор $\hat{A}$ обладает свойством идемпотентности, то есть $\hat{A}\hat{A} = \hat{A}$, то $\hat{A}$ — либо тождественный оператор (то есть $\hat{A} = \hat{E}$), либо $\hat{A}$ — оператор ортогонального проецирования.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

1) **Самосопряженный** (эрмитов) оператор является **нормальным оператором**.

Доказательство. Очевидное следствие из определений.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) Характеристический полином самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ представим в виде

$$|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E| = (\lambda - \rho_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \rho_m)^{n_m},$$

где $\rho_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. В частности, **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ включается в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Если U — **унитарное пространство**, то положим $V = U$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Если U — **унитарное пространство**, то положим $V = U$. Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Пусть теперь U — **евклидово пространство**. Проведем так называемую *комплексификацию* **евклидова пространства** U. Точнее, положим

$$V = \left\{ u_1 + iu_2 \,\middle|\, u_i \in U,\ i \in \{1, 2\} \right\},$$

и на множестве V операции $+$, $(\lambda_1 + i\lambda_2)\cdot$ и **скалярное произведение** $(\ldots, \ldots)_V$ определим формулами:

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Если U — **унитарное пространство**, то положим $V = U$. Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Пусть теперь U — **евклидово пространство**. Проведем так называемую *комплексификацию* **евклидова пространства** U. Точнее, положим

$$V = \left\{ u_1 + iu_2 \,\middle|\, u_i \in U,\ i \in \{1, 2\} \right\},$$

и на множестве V операции $+$, $(\lambda_1 + i\lambda_2)\cdot$ и **скалярное произведение** $(\ldots, \ldots)_V$ определим формулами:

$$(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) =$$
$$(\lambda_1 + i\lambda_2)\,(u_1 + iu_2) =$$
$$\big((u_1 + iu_2)\,,\,(u_3 + iu_4)\big)_V =$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Если U — **унитарное пространство**, то положим $V = U$. Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Пусть теперь U — **евклидово пространство**. Проведем так называемую *комплексификацию* **евклидова пространства** U. Точнее, положим

$$V = \left\{ u_1 + iu_2 \,\middle|\, u_i \in U, \; i \in \{1, 2\} \right\},$$

и на множестве V операции $+$, $(\lambda_1 + i\lambda_2) \cdot$ и **скалярное произведение** $(\ldots, \ldots)_V$ определим формулами:

$$(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) = (u_1 + u_3) + i\,(u_2 + u_4)\,,$$
$$(\lambda_1 + i\lambda_2)\,(u_1 + iu_2) =$$
$$\big((u_1 + iu_2)\,,\,(u_3 + iu_4)\big)_V =$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Если U — **унитарное пространство**, то положим $V = U$. Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Пусть теперь U — **евклидово пространство**. Проведем так называемую *комплексификацию* **евклидова пространства** U. Точнее, положим

$$V = \left\{ u_1 + iu_2 \,\middle|\, u_i \in U,\ i \in \{1, 2\} \right\},$$

и на множестве V операции $+$, $(\lambda_1 + i\lambda_2)\cdot$ и **скалярное произведение** $(\ldots, \ldots)_V$ определим формулами:

$$(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) = (u_1 + u_3) + i(u_2 + u_4),$$
$$(\lambda_1 + i\lambda_2)(u_1 + iu_2) = (\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2) + i(\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2),$$
$$\big((u_1 + iu_2), (u_3 + iu_4)\big)_V =$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Если U — **унитарное пространство**, то положим $V = U$. Сначала сведем доказательство к случаю эрмитова оператора. Пусть теперь U — **евклидово пространство**. Проведем так называемую *комплексификацию* **евклидова пространства** U. Точнее, положим

$$V = \left\{ u_1 + iu_2 \,\middle|\, u_i \in U,\ i \in \{1,2\} \right\},$$

и на множестве V операции $+$, $(\lambda_1 + i\lambda_2)\cdot$ и **скалярное произведение** $(\ldots,\ldots)_V$ определим формулами:

$$(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) = (u_1 + u_3) + i\,(u_2 + u_4)\,,$$
$$(\lambda_1 + i\lambda_2)\,(u_1 + iu_2) = (\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2) + i\,(\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2)\,,$$
$$\big((u_1 + iu_2)\,,\,(u_3 + iu_4)\big)_V = (u_1, u_3) + (u_2, u_4) + i\,\big((u_2, u_3)\ - (u_1, u_4)\big)\,.$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

$$(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) = (u_1 + u_3) + i\,(u_2 + u_4)$$
$$(\lambda_1 + i\lambda_2)\,(u_1 + iu_2) = (\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2) + i\,(\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2)\,,$$
$$\big((u_1 + iu_2)\,,\,(u_3 + iu_4)\big)_V = (u_1, u_3) + (u_2, u_4) + i\,\big((u_2, u_3)\, - (u_1, u_4)\big)\,.$$

Нетрудно проверить, что V с этими операциями и таким скалярным произведением является **унитарным пространством**, которое (сейчас рассматривается случай, когда U — **евклидово пространство**) называется **комплексификацией** евклидова пространства U. Положим

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

$$
\begin{aligned}
&(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) = (u_1 + u_3) + i\,(u_2 + u_4) \\
&(\lambda_1 + i\lambda_2)\,(u_1 + iu_2) = (\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2) + i\,(\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2)\,, \\
&\big((u_1 + iu_2)\,,\,(u_3 + iu_4)\big)_V = (u_1, u_3) + (u_2, u_4) + i\,\big((u_2, u_3)\,-(u_1, u_4)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что V с этими операциями и таким скалярным произведением является **унитарным пространством**, которое (сейчас рассматривается случай, когда U — **евклидово пространство**) называется **комплексификацией** **евклидова пространства** U.

Положим

$$
\hat{B}\,(u_1 + iu_2) = \hat{A}\,(u_1) + i\hat{A}\,(u_2)\,.
$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

$$(u_1 + iu_2) + (u_3 + iu_4) = (u_1 + u_3) + i\,(u_2 + u_4)$$
$$(\lambda_1 + i\lambda_2)\,(u_1 + iu_2) = (\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2) + i\,(\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2)\,,$$
$$\Big((u_1 + iu_2)\,,\ (u_3 + iu_4)\Big)_V = (u_1, u_3) + (u_2, u_4) + i\,\Big((u_2, u_3)\ - (u_1, u_4)\Big)\,.$$

$$\hat{B}\,(u_1 + iu_2) = \hat{A}\,(u_1) + i\hat{A}\,(u_2)\,.$$

Нетрудно проверить, что $\hat{B}$ является эрмитовым оператором. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис **евклидова пространства** U. **Очевидно**, что упорядоченная система векторов $\mathbf{Б}' = \{e_1 + i\mathbf{0}, \ldots, e_n + i\mathbf{0}\}$ является базисом **унитарного пространства** V, причем $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}} = \mathbf{B}_{\mathbf{Б}'}$. В частности, **характеристический полином** оператора $\hat{B}$ совпадает с **характеристическим полиномом оператора** $\hat{A}$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Итак, осталось доказать, что все корни **характеристического полинома эрмитова оператора**. $\hat{B}$ **унитарного пространства** V являются вещественными числами. Характеристический полином, согласно основной теореме алгебры, **вполне приводим**. Пусть ρ — корень **характеристического полинома**, v — **собственный вектор** линейного оператора $\hat{B}$, отвечающий собственному значению ρ. Согласно свойствам сопряженного оператора v является собственным вектором оператора $\hat{B}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$. Но $\hat{B}^* = \hat{B}$, поэтому

$$= \hat{B}\,(v) = \hat{B}^*\,(v) =$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Итак, осталось доказать, что все корни **характеристического полинома эрмитова оператора**. $\hat{B}$ **унитарного пространства** V являются вещественными числами. Характеристический полином, согласно основной теореме алгебры, **вполне приводим**. Пусть ρ — корень **характеристического полинома**, v — **собственный вектор** линейного оператора $\hat{B}$, отвечающий собственному значению ρ. Согласно свойствам сопряженного оператора v является собственным вектором оператора $\hat{B}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$. Но $\hat{B}^* = \hat{B}$, поэтому

$$\rho v = \hat{B}(v) = \hat{B}^*(v) =$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Итак, осталось доказать, что все корни **характеристического полинома эрмитова оператора**. $\hat{B}$ **унитарного пространства** V являются вещественными числами. Характеристический полином, согласно основной теореме алгебры, **вполне приводим**. Пусть ρ — корень **характеристического полинома**, v — **собственный вектор** линейного оператора $\hat{B}$, отвечающий собственному значению ρ. Согласно свойствам сопряженного оператора v является собственным вектором оператора $\hat{B}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$. Но $\hat{B}^* = \hat{B}$, поэтому

$$\rho v = \hat{B}\left(v\right) = \hat{B}^*\left(v\right) = \overline{\rho} v,$$

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

2) **Доказательство.** Итак, осталось доказать, что все корни **характеристического полинома эрмитова оператора**. $\hat{B}$ **унитарного пространства** V являются вещественными числами. Характеристический полином, согласно основной теореме алгебры, **вполне приводим**. Пусть ρ — корень **характеристического полинома**, v — **собственный вектор** линейного оператора $\hat{B}$, отвечающий собственному значению ρ. Согласно свойствам сопряженного оператора v является собственным вектором оператора $\hat{B}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$. Но $\hat{B}^* = \hat{B}$, поэтому

$$\rho v = \hat{B}\left(v\right) = \hat{B}^*\left(v\right) = \overline{\rho} v,$$

поэтому $\rho = \overline{\rho}$. Следовательно, ρ — вещественное число, что и требовалось доказать.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. Доказательство этого свойства представляет собой удачный пример использования **теоремы об изоморфизме пространства линейных операторов и пространства матриц**. Мы так перейдем в пространство матриц, что ответ там станет очевидным, а потом с победой вернемся «домой», в «родное» **евклидово пространство** U.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. По свойствам **нормального оператора** существует ОНБ **Б** из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. По свойствам **нормального оператора** существует ОНБ **Б** из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$.

В этом базисе **матрица A оператора** $\hat{A}$ диагональна, причем на диагонали стоят неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. По свойствам **нормального оператора** существует ОНБ **Б** из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$.

В этом базисе **матрица** A **оператора** $\hat{A}$ диагональна, причем на диагонали стоят неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Обозначим через $\hat{B}$ оператор, матрица B которого в базисе **Б** диагональна, причем на диагонали стоят числа $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. **Б** — ОНБ из **собственных векторов** $\hat{A}$.

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$A_{\mathbf{Б}} = B_{\mathbf{Б}} \cdot B_{\mathbf{Б}} \;\Rightarrow$

По **теореме об изоморфности пространства операторов и пространства матриц**...

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. Б — ОНБ из **собственных векторов** $\hat{A}$.

$$A_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$A_{\text{Б}} = B_{\text{Б}} \cdot B_{\text{Б}} \ \Rightarrow \ \hat{A} = \hat{B} \cdot \hat{B}.$$

По **теореме об изоморфности пространства операторов и пространства матриц**...

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

3) Если **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$.

Доказательство. **Б** — ОНБ из **собственных векторов** $\hat{A}$.

$$A_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \ B_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$A_{\textbf{Б}} = B_{\textbf{Б}} \cdot B_{\textbf{Б}} \ \Rightarrow \ \hat{A} = \hat{B} \cdot \hat{B}.$$

Самосопряженность оператора $\hat{B}$ следует из **формулы для вычисления матрицы сопряженного оператора** и того факта, что **матрица Грама** ОНБ **Б** — единичная.

II.3. Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

4) Если самосопряженный оператор $\hat{A}$ обладает свойством идемпотентности, то есть $\hat{A}\hat{A} = \hat{A}$, то $\hat{A}$ — либо тождественный оператор (то есть $\hat{A} = \hat{E}$), либо $\hat{A}$ — оператор ортогонального проецирования.

Доказательство. Доказательство этого факта мы приводить не будем.

II.4. Ортогональные и унитарные операторы

Определение 4. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(соответственно,* ***унитарного****) пространства U называется* **ортогональным оператором** *(соответственно,* **унитарным оператором***) тогда и только тогда, когда $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$.*

II.5. Свойства ортогональных и унитарных операторов

1. Ортогональный оператор является **нормальным оператором**.

2. **Критерий ортогональности нормального оператора.** Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова пространства** U является ортогональным тогда и только тогда, когда он, во-первых, нормальный, и, во-вторых, существует такой ОНБ **евклидова пространства** U, в котором **матрица оператора** $\hat{A}$ клеточно-диагональна, причем клетки имеют вид либо (1), либо (-1), либо $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

3. В любом базисе **Б** **детерминант** матрицы $A_{\text{Б}}$ ортогонального оператора $\hat{A}$ равен 1 или (-1).

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Определение 5. *Оператор* $\hat{A}$ *нормированного линейного пространства* U *называется* **изометрическим** *тогда и только тогда, когда для любого вектора* x *имеет место равенство* $||x|| = ||\hat{A}(x)||$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Определение 5. *Оператор $\hat{A}$ нормированного линейного пространства U называется* **изометрическим** *тогда и только тогда, когда для любого вектора x имеет место равенство $||x|| = ||\hat{A}(x)||$.*

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) =$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^* \left(\hat{A}(x)\right)\right) =$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^* \left(\hat{A}(x)\right)\right) = \left(x, \hat{A}^{-1}\hat{A}(x)\right) =$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** (**унитарного**) пространства U является **изометрическим** относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^* \left(\hat{A}(x)\right)\right) = \left(x, \hat{A}^{-1}\hat{A}(x)\right) = (x, x),$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** (**унитарного**) пространства U является **изометрическим** относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^* \left(\hat{A}(x)\right)\right) = \left(x, \hat{A}^{-1}\hat{A}(x)\right) = (x, x),$$

то есть $||\hat{A}(x)|| =$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^*\left(\hat{A}(x)\right)\right) = \left(x, \hat{A}^{-1}\hat{A}(x)\right) = (x,x),$$

то есть $||\hat{A}(x)|| = \sqrt{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right)} =$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^* \left(\hat{A}(x)\right)\right) = \left(x, \hat{A}^{-1}\hat{A}(x)\right) = (x, x),$$

то есть $||\hat{A}(x)|| = \sqrt{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right)} = \sqrt{(x,x)} =$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Из ортогональности (унитарности) изометричность относительно указанной нормы следует с очевидностью:

$$\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) = \left(x, \hat{A}^*\left(\hat{A}(x)\right)\right) = \left(x, \hat{A}^{-1}\hat{A}(x)\right) = (x,x),$$

то есть $||\hat{A}(x)|| = \sqrt{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right)} = \sqrt{(x,x)} = ||x||.$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Осталось проверить ортогональность (унитарность) изметрического оператора. Это доказательство, в отличие от большинства предыдущих, требует специфического приема.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Доказательство. Пусть $\hat{A}$ — **изометрический** (относительно указанной нормы) оператор **евклидова** (унитарного) пространства. Тогда для любых векторов x, y и скаляра λ

$$\Big(\hat{A}(x - \lambda y), \hat{A}(x - \lambda y)\Big) = (x - \lambda y, x - \lambda y). \tag{3}$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.

$$= \Big(\hat{A}(x - \lambda y), \hat{A}(x - \lambda y)\Big) = (x - \lambda y, x - \lambda y). \tag{3}$$

$=$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.

$$= \left(\hat{A}(x - \lambda y), \hat{A}(x - \lambda y)\right) = (x - \lambda y, x - \lambda y). \qquad (3)$$

$$= \left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) - \lambda \left(\hat{A}(y), \hat{A}(x)\right) - \overline{\lambda} \left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda} \left(\hat{A}(y), \hat{A}(y)\right) =$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.

$$= \left(\hat{A}(x-\lambda y), \hat{A}(x-\lambda y)\right) = (x-\lambda y, x-\lambda y). \qquad (3)$$

$$= \left(\hat{A}(x), \hat{A}(x)\right) - \lambda\left(\hat{A}(y), \hat{A}(x)\right) - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\left(\hat{A}(y), \hat{A}(y)\right) =$$

$$= (x,x) - \lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y)\,.$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.

$$(x,x) - \lambda\overline{\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right)} - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$$

$$= \left(\hat{A}(x-\lambda y),\hat{A}(x-\lambda y)\right) = (x-\lambda y, x-\lambda y) = \tag{3}$$

$$=$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.
$$(x,x) - \lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$$
$$= \left(\hat{A}(x - \lambda y), \hat{A}(x - \lambda y)\right) = (x - \lambda y, x - \lambda y) = \tag{3}$$
$$= (x,x) - \lambda\,(y,x) - \overline{\lambda}\,(x,y) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $(x,x) - \lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$

$$= \left(\hat{A}(x-\lambda y), \hat{A}(x-\lambda y)\right) = (x-\lambda y, x-\lambda y) = \tag{3}$$

$$= (x,x) - \lambda\,(y,x) - \overline{\lambda}\,(x,y) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$$

$$= (x,x) - \lambda\overline{(x,y)} - \overline{\lambda}\,(x,y) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y)\,.$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $$(x,x) - \lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$$

$$= (x,x) - \lambda\overline{(x,y)} - \overline{\lambda}\,(x,y) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y)\,.$$

Отсюда

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $$(x,x) - \lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} - \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y) =$$

$$= (x,x) - \lambda\overline{(x,y)} - \overline{\lambda}\,(x,y) + \lambda\overline{\lambda}\,(y,y)\,.$$

Отсюда

$$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\,(x,y)\,. \qquad (4)$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x, y)} + \overline{\lambda}\,(x, y)\,. \quad (4)$$

Положим $\lambda = 1$. Тогда равенство (4) преобразуется к виду

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.

$$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\,(x,y)\,. \quad (4)$$

Положим $\lambda = 1$. Тогда равенство (4) преобразуется к виду

$$\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \overline{(x,y)} + (x,y)\,,$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.
$$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\,(x,y)\,. \quad (4)$$

Положим $\lambda = 1$. Тогда равенство (4) преобразуется к виду

$$\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \overline{(x,y)} + (x,y)\,,$$

то есть $\operatorname{Re}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \operatorname{Re}(x,y)$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x, y)} + \overline{\lambda}\,(x, y)\,. \qquad (4)$$

$$\operatorname{Re}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \operatorname{Re}\,(x, y).$$

Если U — унитарное пространство, положим $\lambda = i$. Тогда равенство (4) имеет вид

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\,(x,y)\,. \quad (4)$$

$\operatorname{Re}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \operatorname{Re}\,(x,y)$.

Если U — унитарное пространство, положим $\lambda = i$. Тогда равенство (4) имеет вид

$$i\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} - i\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = i\overline{(x,y)} - i\,(x,y)\,,$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\lambda\overline{\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\,(x,y)\,. \quad (4)$

$\operatorname{Re}\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right) = \operatorname{Re}\,(x,y)$.

Если U — унитарное пространство, положим $\lambda = i$. Тогда равенство (4) имеет вид

$$i\overline{\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right)} - i\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right) = i\overline{(x,y)} - i\,(x,y)\,,$$

то есть $\operatorname{Im}\left(\hat{A}(x),\hat{A}(y)\right) = \operatorname{Im}\,(x,y)$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$ **евклидова** (**унитарного**) пространства U является **изометрическим** относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во.
$$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x, y)} + \overline{\lambda}\,(x, y)\,. \quad (4)$$

При $\lambda = 1$ имеем $\mathrm{Re}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \mathrm{Re}\,(x, y)$. При $\lambda = i$ имеем $\mathrm{Im}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \mathrm{Im}\,(x, y)$.

Таким образом у комплексных чисел $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)$ и (x, y) совпадают и действительные, и мнимые части.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является **изометрическим** относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $$\lambda\overline{\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)} + \overline{\lambda}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \lambda\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\,(x,y)\,. \quad (4)$$

При $\lambda = 1$ имеем $\mathrm{Re}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \mathrm{Re}\,(x,y)$. При $\lambda = i$ имеем $\mathrm{Im}\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = \mathrm{Im}\,(x,y)$.

Таким образом у комплексных чисел $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right)$ и (x,y) совпадают и действительные, и мнимые части.

Поэтому $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = (x,y)$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = (x, y)$, откуда $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\right) = (x, y)$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства* U *является* ***изометрическим*** *относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = (x, y)$, откуда $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\right) = (x, y)$.

Следовательно, $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0$. Положим $x =$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\Big(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\Big) = (x, y)$, откуда $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\Big) = (x, y)$.

Следовательно, $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\Big) = 0$. Положим $x = \hat{A}^*\hat{A}(y) - y$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = (x, y)$, откуда $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\right) = (x, y)$.

Следовательно, $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0$. Положим $x = \hat{A}^*\hat{A}(y) - y$.

$$\left(\hat{A}^*\hat{A}(y) - y, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0 \ \Rightarrow$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = (x, y)$, откуда $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\right) = (x, y)$.

Следовательно, $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0$. Положим $x = \hat{A}^*\hat{A}(y) - y$.

$$\left(\hat{A}^*\hat{A}(y) - y, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0 \Rightarrow$$

В силу **положительной определенности скалярного произведения**...

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\left(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\right) = (x, y)$, откуда $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\right) = (x, y)$.

Следовательно, $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0$. Положим $x = \hat{A}^*\hat{A}(y) - y$.

$$\left(\hat{A}^*\hat{A}(y) - y, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\right) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{A}^*\hat{A}(y) - y = \mathbf{0}.$$

В силу **положительной определенности скалярного произведения**...

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\Big(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\Big) = (x, y)$, откуда $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\Big) = (x, y)$.

Следовательно, $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\Big) = 0$. Положим $x = \hat{A}^*\hat{A}(y) - y$.

$$\Big(\hat{A}^*\hat{A}(y) - y, \hat{A}^*\hat{A}(y) - y\Big) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{A}^*\hat{A}(y) - y = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$, теорема доказана, хотя финал можно было провести иначе:

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор* $\hat{A}$ ***евклидова*** *(**унитарного**) пространства* U *является **изометрическим** относительно нормы* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\Big(\hat{A}(x), \hat{A}(y)\Big) = (x, y)$, откуда $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\Big) = (x, y)$.

Перейдем на язык матриц. Для этого надо сначала *выбрать базис* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства U. Тогда доказанное тождество $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\Big) = (x, y)$ преобразуется к виду

$$[x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} A^*_{\mathbf{Б}} A_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}.$$

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\Big(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\Big) = (x, y)$, откуда

$$[x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} A^*_{\mathbf{Б}} A_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}.$$

Матрицы $[x]_{\mathbf{Б}}$ и $[y]_{\mathbf{Б}}$ — произвольные, поэтому по **лемме о сокращении на произвольную матрицу** имеем $\Gamma_{\mathbf{Б}} A^*_{\mathbf{Б}} A_{\mathbf{Б}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}$, откуда, в силу невырожденности **матрицы Грама**, получаем $A^*_{\mathbf{Б}} A_{\mathbf{Б}} = E$, то есть $A^*_{\mathbf{Б}} = A^{-1}_{\mathbf{Б}}$.

II.6. Теорема об ортогональности изометрического оператора

Теорема 3. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова*** *(****унитарного****) пространства U является* ***изометрическим*** *относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Док-во. $\left(x, \hat{A}^*\hat{A}(y)\right) = (x, y)$, откуда

$$[x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}A^*_{\mathbf{Б}}A_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}.$$

$$A^*_{\mathbf{Б}} = A^{-1}_{\mathbf{Б}}.$$

По **теореме об изоморфизме пространства матриц и пространства линейных операторов** получаем $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$, то есть оператор $\hat{A}$ — ортогональный (унитарный).

Теорема доказана.

II.7. Теорема об ортогональном операторе и ОНБ (критерий ортогональности оператора)

Теорема 4. *Линейный оператор $\hat{A}$* ***евклидова пространства*** *U является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит ОНБ в ОНБ. Точнее, эквивалентны следующие утверждения:*

1. *$\hat{A}$ является ортогональным оператором;*
2. *существует ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ такой, что система векторов $\left\{\hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является ортонормированным базисом;*
3. *для любого ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ система векторов $\left\{\hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является ортонормированным базисом.*

Без доказательства.

III. Применение к матричной алгебре

В рассмотренных выше теоремах мы, в основном, применяли матричную алгебру для доказательства утверждений об операторах. Но, разумеется, с успехом осуществляется и «обратный процесс»: с помощью алгебры операторов доказываются утверждения для алгебры матриц. Одно из таких утверждений мы сейчас рассмотрим. Сначала отметим, что оказывается удобным перенести «операторную» терминологию на язык матриц, и ввести понятие нормальной, ортогональной и унитарной матрицы.

III. Применение к матричной алгебре

Определение 6. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) если и только если она является* ***матрицей одноименного оператора*** *в некотором ортонормированном базисе.*

III. Применение к матричной алгебре

Определение 6. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной**, **унитарной** *или* **эрмитовой***) если и только если она является* ***матрицей одноименного оператора*** *в некотором ортонормированном базисе.*

Используя тот факт, что **матрица Грама** ортонормированного базиса — единичная, можно дать чисто матричную характеризацию этих матриц: матрица A — *нормальная* тогда и только тогда, когда $A^tA = AA^t$; матрица *ортогональная* (унитарная, эрмитова) тогда и только тогда, когда $A^t = A^{-1}$.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Утверждение о вещественности спектра матрицы A означает, что

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Утверждение о вещественности спектра матрицы A означает, что все корни **характеристического полинома** которой являются действительными числами

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим **евклидово пространство**, возьмем в нем ОНБ $\mathbf{Б}$, и рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в базисе $\mathbf{Б}$ матрицу A: $A_{\mathbf{Б}} = A$.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим **евклидово пространство**, возьмем в нем ОНБ **Б**, и рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в базисе **Б** матрицу A: $\quad A_{\mathbf{Б}} = A$.

Тогда $\hat{A}$ — **нормальный оператор**.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим **евклидово пространство**, возьмем в нем ОНБ **Б**, и рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в базисе **Б** матрицу A: $A_{\mathbf{Б}} = A$.

Тогда $\hat{A}$ — **нормальный оператор**.

По свойствам **нормального оператора**, в условиях доказываемой теоремы найдется ОНБ **В** из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим **евклидово пространство**, возьмем в нем ОНБ $\mathbf{Б}$, и рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в базисе $\mathbf{Б}$ матрицу A: $A_{\mathbf{Б}} = A$.

Тогда $\hat{A}$ — **нормальный оператор**.

По свойствам **нормального оператора**, в условиях доказываемой теоремы найдется ОНБ $\mathbf{В}$ из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$.

Обозначим через T матрицу перехода из $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{В}$.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим **евклидово пространство**, возьмем в нем ОНБ **Б**, и рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в базисе **Б** матрицу A: $A_{\mathbf{Б}} = A$.

Тогда $\hat{A}$ — **нормальный оператор**.

По свойствам **нормального оператора**, в условиях доказываемой теоремы найдется ОНБ **В** из **собственных векторов** оператора $\hat{A}$.

Обозначим через T матрицу перехода из **Б** в базис **В**.

Тогда $T^{-1}AT$ является матрицей оператора в базисе из **собственных векторов**, то есть диагональной матрицей.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. $T^{-1}AT$ является матрицей оператора в базисе из **собственных векторов**, то есть диагональной матрицей.

Осталось доказать, что T — ортогональная матрица.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным **спектром** найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. $T^{-1}AT$ является матрицей оператора в базисе из **собственных векторов**, то есть диагональной матрицей.

Осталось доказать, что T — ортогональная матрица.

Пусть $\hat{T}$ — линейный оператор, имеющий в базисе **Б** матрицу T.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным **спектром** найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. $T^{-1}AT$ является матрицей оператора в базисе из **собственных векторов**, то есть диагональной матрицей.

Осталось доказать, что T — ортогональная матрица.

Пусть $\hat{T}$ — линейный оператор, имеющий в базисе **Б** матрицу T.

Тогда $\hat{T}$ переводит ОНБ **Б** в ОНБ **В**, поэтому $\hat{T}$ — ортогональный оператор.

III. Применение к матричной алгебре

Теорема 5. *Для любой нормальной матрицы A с вещественным* ***спектром*** *найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Доказательство. $T^{-1}AT$ является матрицей оператора в базисе из **собственных векторов**, то есть диагональной матрицей.

Осталось доказать, что T — ортогональная матрица.

Пусть $\hat{T}$ — линейный оператор, имеющий в базисе **Б** матрицу T.

Тогда $\hat{T}$ переводит ОНБ **Б** в ОНБ **В**, поэтому $\hat{T}$ — ортогональный оператор.

Следовательно, матрица T, как матрица ортогонального оператора в ОНБ, является ортогональной матрицей.

Теорема доказана.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?