Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы теории групп

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Группоиды

Какие универсальные алгебры $\langle \mathbf{A}; \{f_1; f_2; \ldots\}\rangle$ наиболее интересны для первоначального изучения?

I. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель $\mathbf{A}$ конечен, и **бесконечных**, у которых носитель $\mathbf{A}$ бесконечен.

I. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель $\mathbf{A}$ конечен, и **бесконечных**, у которых носитель $\mathbf{A}$ бесконечен.

«Экстремальность» по отношению к набору операций состоит в изучении алгебр с одной операцией. Алгебры с одной унарной операцией оказались не слишком интересны.

I. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия прирітетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель $\mathbf{A}$ конечен, и **бесконечных**, у которых носитель $\mathbf{A}$ бесконечен.

«Экстремальность» по отношению к набору операций состоит в изучении алгебр с одной операцией. Алгебры с одной унарной операцией оказались не слишком интересны.

Значительно более богатый материал предоставили алгебры с одной бинарной операцией, называемые **группоидами**. Чаще всего мы работали с операциями, обладающими свойством ассоциативности, позволяющими не заботиться о расположении скобок в выражениях типа $a \cdot b \cdot c$. Поэтому такие группоиды получили специальное название — **полугруппы**.

I. Группоиды

Определение 1. *Группоид* $\langle \boldsymbol{G}; \{*\}\rangle$ *с одной двуместной операцией* $*$ *называется* **полугруппой**, *если эта операция является ассоциативной, т.е. выполняется тождество:* $(a * b) * c = a * (b * c)$.

II. Группы

Определение 2. **Группой** *называется множество* G *с определенной на нем операцией* $*$, *удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в* G *существует такой элемент* e, *что* $g * e = e * g = g$ *для любого элемента* g *из* G;

существование обратного элемента: *для любого элемента* g *из* G *найдется такой элемент* g', *что* $g * g' = e$.

Элемент g' *называется* ***обратным*** *к* g.

II. Группы

Определение 2. **Группой** *называется множество G с определенной на нем операцией $*$, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в G существует такой элемент e, что $g * e = e * g = g$ для любого элемента g из G;*

существование обратного элемента: *для любого элемента g из G найдется такой элемент g', что $g * g' = e$.*

Элемент g' называется ***обратным*** *к g.*

В мультипликативной записи элемент, обратный к g, обычно обозначается через g^{-1}. В аддитивной записи — через $(-g)$.

II.1. Элементарные теоремы теории групп

Определение 2. **Группой** *называется множество G с определенной на нем операцией $*$, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в G существует такой элемент e, что $g * e = e * g = g$ для любого элемента g из G;*

существование обратного элемента: *для любого элемента g из G найдется такой элемент g', что $g * g' = e$.*

Элемент g' называется ***обратным*** *к g.*

Обычно изучение нового понятия осуществляется индуктивно (рассмотрением **примеров**) или дедуктивно (анализ определения, доказательство теорем).

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $\quad g * x = g \quad$ или $\quad x * g = g$.*

Доказательство.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$g = \quad (g * x)$$

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $\quad g * x = g \quad$ или $\quad x * g = g$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$g' * g = g' * (g * x)$$

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$= g' * g = g' * (g * x) =$$

Но левая часть равенства равна e согласно **аксиоме существования обратного элемента**.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) =$$

Но левая часть равенства равна e согласно **аксиоме существования обратного элемента**.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $\quad g * x = g \quad$ или $\quad x * g = g$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) =$$

Правую часть равенства преобразуем с помощью **аксиомы ассоциативности**.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $g * x = g$ или $x * g = g$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x =$$

Правую часть равенства преобразуем с помощью **аксиомы ассоциативности**.

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x =$$

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x = x.$$

II.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $\quad g * x = g \quad$ *или* $\quad x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x = x.$$

Следовательно, $x = e$, что и требовалось доказать.

Случай $x * g = g$ разбирается аналогично.

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство.

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow\; x * e = g' \;\Rightarrow$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow\; x * e = g' \;\Rightarrow\; x = g'.$$

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Достаточность. Если $x = g'$, то

II.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Достаточность. Если $x = g'$, то $x * g = e$ в силу аксиомы существования обратного элемента. Теорема доказана.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t* ***группы*** *G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t* ***группы*** *G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. Воспользуемся **теоремой об однозначности** g'.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t* ***группы*** *G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t* ***группы*** *G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности g'** элемент t является обратным к t', т.е. имеем $t = (t')'$.

II.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t* ***группы*** *G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е. имеем $t = (t')'$.

Теорема доказана.

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство.

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$(x*y)*(y'*x') =$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' =$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

Теорема доказана.

II.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

Теорема доказана.

Соглашение 1. *Применяются следующие обозначения: если X — подмножество группы G, и g — элемент группы G, то*

$$g * X = \left\{ g * x \,\middle|\, x \in X \right\}, \quad X * g = \left\{ x * g \,\middle|\, x \in X \right\}. \tag{1}$$

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество* H *группы* G *называется* **подгруппой** *группы* G *тогда и только тогда, когда* H *является группой относительно ограничения операции* $*$ *на* H.

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество* H *группы* G *называется* **подгруппой** *группы* G *тогда и только тогда, когда* H *является группой относительно ограничения операции* $*$ *на* H.

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$.

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$. Таким образом, условие $H \leq G$ является более сильным, чем $H \subseteq G$.

II.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$. Таким образом, условие $H \leq G$ является более сильным, чем $H \subseteq G$.

Тот факт, что $H \leq G$ и $H \neq G$, то $H < G$.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е. $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество* H *группы* G *называется* **подгруппой** *группы* G *тогда и только тогда, когда* H *является группой относительно ограничения операции* $*$ *на* H.

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество* H *группы* G *является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов* x *и* y *из* H *элементы* $x * y$ *и* x' *принадлежат* H, *т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Ассоциативность выполняется во всем G, а тем более в H.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Аксиома существования обратного элемента выполняется, поскольку в H содержится хотя бы один элемент h, и, следовательно, $h * h' = e$ — элемент из H.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество* H *группы* G *называется* **подгруппой** *группы* G *тогда и только тогда, когда* H *является группой относительно ограничения операции* $*$ *на* H.

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество* H *группы* G *является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов* x *и* y *из* H *элементы* $x * y$ *и* x' *принадлежат* H, *т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Аксиома существования обратного элемента выполняется, поскольку в H содержится хотя бы один элемент h, и, следовательно, $h * h' = e$ — элемент из H. Теорема доказана.

II.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Рассмотреть пример?

II.4. Смежные классы

Определение 4. *Для подгруппы H из G и элемента g из G множество $g * H = \Big\{ g * h \Big| h \in H \Big\}$ называется* **левым смежным классом** *группы G по H. Количество левых смежных классов группы G по подгруппе H называется* **индексом подгруппы** *H в группе G, и обозначается $\big|G : H\big|$. Множество $H * g = \Big\{ h * g \Big| h \in H \Big\}$ называется* **правым смежным классом** *группы G по H.*

Рассмотреть пример?

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

Надо доказать, что $x' * y \in H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; \quad = x * e \in y * H \;\Rightarrow$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

$$x = y * h \;\Rightarrow\; y' * x = h \in H.$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$
Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

$x = y * h \;\Rightarrow\; y' * x = h \in H.$
Из соображений симметрии $x' * y \in H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $1) \overset{?}{\Rightarrow} 2)$

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \ \Rightarrow \ x = x * e \in y * H \ \Rightarrow \ \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

$x = y * h \ \Rightarrow \ y' * x = h \in H$.

Из соображений симметрии $x' * y \in H$.

Итак, $1) \Rightarrow 2)$ доказано.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $2) \overset{?}{\Rightarrow} 3)$ — очевидно.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$*;* *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$ Пусть $x' * y \in H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$ Пусть $x' * y \in H$.

Надо доказать **равенство множеств.**

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; x * H = y * H.$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \begin{cases} x * H \subseteq y * H, \\ y * H \subseteq x * H. \end{cases}$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \Rightarrow \begin{cases} x * H \subseteq y * H, \\ y * H \subseteq x * H. \end{cases}$

Из соображений симметрии достаточно доказать только одно из включений, например, $x * H \subseteq y * H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \overset{?}{\Rightarrow} x * g \in y * H \right).$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $$x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \overset{?}{\Rightarrow} x * g \in y * H\right).$$

$$x' * y = h \;\Rightarrow \qquad\qquad x =$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\left\{\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{array}\right.$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $$x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \Big(x * g \in x * H \overset{?}{\Rightarrow} x * g \in y * H\Big).$$

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x =$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \ \Big(x * g \in x * H \ \overset{?}{\Rightarrow} \ x * g \in y * H \Big)$.

$$x' * y = h \ \Rightarrow \ y = x * h \ \Rightarrow \ x = y * h'.$$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \Big(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H\Big).$

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x = y * h'.$$

Значит, $x * g =$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\left\{\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{array}\right.$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $3) \stackrel{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \Rightarrow \left(x * g \in x * H \stackrel{?}{\Rightarrow} x * g \in y * H\right)$.

$$x' * y = h \Rightarrow y = x * h \Rightarrow x = y * h'.$$

Значит, $x * g = y * h' * g$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \Rightarrow \Big(x * g \in x * H \overset{?}{\Rightarrow} x * g \in y * H \Big).$

$$x' * y = h \Rightarrow y = x * h \Rightarrow x = y * h'.$$

Значит, $x * g = y * \underbrace{h' * g}_{\in H} \in$

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \ \left(x * g \in x * H \ \overset{?}{\Rightarrow} \ x * g \in y * H \right).$

$$x' * y = h \ \Rightarrow \ y = x * h \ \Rightarrow \ x = y * h'.$$

Значит, $x * g = y * \underbrace{h' * g}_{\in H} \in y * H.$

Итак,

$$x * g \in x * H \ \Rightarrow \ x * g \in y * H,$$

т.е. $x * H \subseteq y * H$.

II.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) — доказано,

2) $\Rightarrow$ 3) — доказано,

3) $\Rightarrow$ 1) — доказано.

Теорема доказана.

II.6. Порядок элемента и порядок конечной группы

Определение 5. *Группа называется* **конечной***, если группа состоит из конечного числа элементов.* **Порядком конечной группы***, обозначаемым* $|G|$*, называется количество элементов этой группы.*

II.6. Порядок элемента и порядок конечной группы

Определение 5. *Группа называется* **конечной**, *если группа состоит из конечного числа элементов.* **Порядком конечной группы**, *обозначаемым $|G|$, называется количество элементов этой группы.*

Определение 6. *Говорят, что g —* **элемент конечного порядка**, *если существует такое число n, для которого $g^n = e$. Если g — элемент конечного порядка, то наименьшее такое натуральное число n, что $g^n = e$, называется* **порядком элемента**, *и обозначается $|g|$. В этом случае говорят, что g —* **элемент порядка** *n.*

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство* $|G| = |H| * |G : H|$.

Доказательство. Достаточно доказать, что
во-первых, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе;

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство* $|G| = |H| * |G : H|$.

Доказательство. Достаточно доказать, что
во-первых, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе;
во-вторых, различные смежные классы группы G по H не пересекаются;

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что
во-первых, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе;
во-вторых, различные смежные классы группы G по H не пересекаются;
в-третьих, количество элементов в каждом классе равно $|H|$.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \ \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. **Во-первых,**

$$g \in G \;\Rightarrow\; g = g * e \in$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \;\Rightarrow\; g = g * e \in g * H.$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы* H *конечной группы* G *справедливо равенство* $|G| = |H| * |G : H|$.

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \ \Rightarrow \ g = g * e \in g * H.$$

Значит, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы* H *конечной группы* G *справедливо равенство* $|G| = |H| * |G : H|$.

Доказательство. Во-вторых, пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in \big((x * H) \cap (y * H)\big) \end{cases} \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in \big((x * H) \cap (y * H)\big) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x' * z = h_1 \in H, \\ y' * z = h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x' * z = h_1 \in H, \\ y' * z = h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow x * H = z * H = y * H.$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} * \mathbf{H} \neq \mathbf{y} * \mathbf{H}, \\ x' * z = h_1 \in H, \\ y' * z = h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} * \mathbf{H} = z * H = \mathbf{y} * \mathbf{H}.$$

Противоречие показывает, что $x * H \neq y * H \ \Rightarrow \ x * H \cap y * H = \emptyset$.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. **В-третьих,** осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \Rightarrow \varphi(h_1) =$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \; H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \;\Rightarrow\; \varphi(h_1) = x * h_1 =$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \longrightarrow x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 =$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы* H *конечной группы* G *справедливо равенство* $|G| = |H| * |G : H|$.

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \longrightarrow x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. **В-третьих,** осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow \ x * h_1 = x * h_2 \ \Rightarrow$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы* H *конечной группы* G *справедливо равенство* $|G| = |H| * |G : H|$.

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \; H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \;\Rightarrow\; \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \;\Rightarrow\; x * h_1 = x * h_2 \;\Rightarrow\; h_1 = h_2.$$

II.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \longrightarrow x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow \ x * h_1 = x * h_2 \ \Rightarrow \ h_1 = h_2.$$

Теорема Лагранжа доказана.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (**о порядке подгруппы**). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

Следствие 2 (о порядке элемента группы). *Порядок любого элемента конечной группы делит нацело порядок самой группы*

Доказательство.

II.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

Следствие 2 (о порядке элемента группы). *Порядок любого элемента конечной группы делит нацело порядок самой группы*

Доказательство. Очевидно, т.к. порядок элемента равен порядку порожденной им **циклической подгруппы** (подробнее циклические группы мы рассмотрим **ниже**).

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для нееденичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Как **доказать делимость числа a на b** нацело?

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для нееденичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n =$$

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для нееденичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} =$$

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m =$$

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m =$$

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m =$$

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m = g^m,$$

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m = g^m,$$

что противоречит определению $|g|$, как наименьшего такого натурального числа, что $g^{|g|} = e$.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, $g^{(u \cdot w)} = (g^u)^w = e$.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, $g^{(u \cdot w)} = (g^u)^w = e$.

Поэтому, как доказано выше, $u \cdot w$ делится нацело на $u \cdot v$, то есть w делится нацело на v.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, w делится нацело на v.

С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, w делится нацело на v.

С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$.

Поэтому v делится нацело на w.

II.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, w делится нацело на v.

С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$.
Поэтому v делится нацело на w.

Следовательно, $v = w$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Перейти к доказательству теоремы о цикличности мультипликативной группы поля Галуа?

II.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом.

II.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом. Различие состоит в следующем. В первом случае рассматриваются такие элементы y, что для любого x из X выполняется равенство $x * y = y * x$.

II.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом. Различие состоит в следующем. В первом случае рассматриваются такие элементы y, что для любого x из X выполняется равенство $x * y = y * x$. Во втором случае $x*y$ может отличаться от $y*x$, но $x * y = y * x'$ для некоторого x' из X. Эта мысль оказалась настолько плодотворной, что были введены специальные термины.

II.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \begin{cases} y \in Y, \\ \forall x \in X \quad x * y = y * x \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

II.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств* X *и* Y *группы* G **централизатор** *множества* X *во множестве* Y *— это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \forall x \in X \quad x * y = y * x \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

Определение 8. *Для любого подмножеств* X *и* Y *группы* G **нормализатор** *множества* X *во множестве* Y *— это*

$$N_Y(X) = \left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} y \in Y, \\ \left\{ x * y \,\middle|\, x \in X \right\} = \left\{ y * x \,\middle|\, x \in X \right\} \end{cases} \right\}. \tag{3}$$

II.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \begin{cases} y \in Y, \\ \forall x \in X \quad x * y = y * x \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

Определение 8. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **нормализатор** *множества X во множестве Y — это*

$$N_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \begin{cases} y \in Y, \\ \left\{ x * y \;\middle|\; x \in X \right\} = \left\{ y * x \;\middle|\; x \in X \right\} \end{cases} \right\}. \tag{3}$$

Напомним, что в соответствии с соглашением 1 равенство $\left\{ x * y \;\middle|\; x \in X \right\} = \left\{ y * x \;\middle|\; x \in X \right\}$ можно представить в виде $y * X = X * y$.

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если* H — *подгруппа группы* G, *и* X — *подмножество группы* G, *то для множеств* $C_H(X)$ *и* $N_H(X)$ *имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G *являются подгруппами группы* G.

Доказательство.

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если* H *— подгруппа группы* G*, и* X *— подмножество группы* G*, то для множеств* $C_H(X)$ *и* $N_H(X)$ *имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G *являются подгруппами группы* G*.*

Доказательство. Как доказать включение одного множества в другое?

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если* H *— подгруппа группы* G*, и* X *— подмножество группы* G*, то для множеств* $C_H(X)$ *и* $N_H(X)$ *имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G *являются подгруппами группы* G*.*

Доказательство. Надо доказать, что всякий элемент из $C_H(X)$ является элементом из $N_H(X)$.

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если* H *— подгруппа группы* G*, и* X *— подмножество группы* G*, то для множеств* $C_H(X)$ *и* $N_H(X)$ *имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G *являются подгруппами группы* G*.*

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если* H *— подгруппа группы* G, *и* X *— подмножество группы* G, *то для множеств* $C_H(X)$ *и* $N_H(X)$ *имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G *являются подгруппами группы* G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если* H *— подгруппа группы* G*, и* X *— подмножество группы* G*, то для множеств* $C_H(X)$ *и* $N_H(X)$ *имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G *являются подгруппами группы* G*.*

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$ имеем $a * g = g * a$. Следовательно, выполняется равенство (8).

II.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$ имеем $a * g = g * a$. Следовательно, выполняется равенство (8).

Теорема доказана.

II.12. Порождающие элементы

Определение 9. *Пусть G — группа, A — какое-либо подмножество ее элементов. Говорят, что подгруппа H* ***порождена множеством*** *A, если H — это минимальная из подгрупп, содержащих A (внешняя характеризация). Подгруппа H, порожденная множеством A, обозначается $\langle A \rangle$.*

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть* G *— группа и* $A \subseteq G$*. Тогда*

$$\langle A\rangle = \left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}. \tag{4}$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть* G — *группа и* $A \subseteq G$. *Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть* G *— группа и* $A \subseteq G$. *Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ \end{cases} \Rightarrow$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A\rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A\rangle, \\ A \subseteq P \end{cases} \Rightarrow$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть* G — *группа и* $A \subseteq G$. *Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ A \subseteq P \end{cases} \Rightarrow A \subseteq \big(P \cap \langle A \rangle\big) \leq G.$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A\rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A\rangle\,, \\ A \subseteq P \end{cases} \Rightarrow\; A \subseteq \big(P \cap \langle A\rangle\big) \leq G.$$

Но $\langle A\rangle$ — минимальная среди таких подгрупп, поэтому $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$.

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A\rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно. Таким образом,

$$\begin{cases} P \leq \langle A\rangle, \\ \langle A\rangle \subseteq P \end{cases} \Rightarrow$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно. Таким образом,

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ \langle A \rangle \subseteq P \end{cases} \Rightarrow\; P = \langle A \rangle,$$

II.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть* G — *группа и* $A \subseteq G$. *Тогда*

$$\langle A\rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно. Таким образом,

$$\begin{cases} P \leq \langle A\rangle, \\ \langle A\rangle \subseteq P \end{cases} \Rightarrow \; P = \langle A\rangle,$$

т.е. (4) доказана.

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * \mathbf{z} \;\Rightarrow$$

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * z \;\Rightarrow\; z = y' * x * y.$$

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * z \Rightarrow z = y' * x * y.$$

Другой вариант: как «измеритель» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент t, что

$$x * y = y * x * \mathtt{t} \Rightarrow$$

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * z \;\Rightarrow\; z = y' * x * y.$$

Другой вариант: как «измеритель» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент t, что

$$x * y = y * x * t \;\Rightarrow\; t = x' * y' * x * y.$$

II.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Определение 10. *Элементы a и b группы G называются* **сопряженными** *с помощью элемента c, если $b = c' * a * c$. Выражение $c' * a * c$ коротко записывается в виде a^c.*

Определение 11. *Назовем* **коммутатором** *элементов x, y группы G элемент $[x, y]$, определяемый формулой $[x, y] = x' * y' * x * y$.*

Рассмотрим пример?

II.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы

Определение 12. Взаимным коммутантом $[A, B]$ *подгрупп* A *и* B *группы* G *называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида* $[a, b]$*, где* a *из* A*,* b *— из* B*.*

II.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы

Определение 12. Взаимным коммутантом $[A, B]$ *подгрупп* A *и* B *группы* G *называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида* $[a, b]$, *где* a *из* A, b *— из* B.

Определение 13. Коммутантом G' *группы* G *называется подгруппа* $[G, G]$.

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство.

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов* x, y *группы* G

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство.

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad = x.$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство.

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \qquad = y' * x * y = x.$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство.

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x^y = y' * x * y = x.$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Далее,

$$x * y = y * x \; \Leftrightarrow \; y =$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Далее,

$$x * y = y * x \;\Leftrightarrow\; y = x' * y * x =$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Далее,

$$x * y = y * x \;\Leftrightarrow\; y = x' * y * x = y^x.$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y =$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x =$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x = x' * x = e$.

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x = x' * x = e$.

Итак, если $x * y = y * x$, то $[x, y] = e$.

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] =$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов* x, y *группы* G

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов* x, y *группы* G

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$

$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y =$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y =$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$

$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов* x, y *группы* G

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$

$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$

$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y =$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$

$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$

$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y =$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов* x, y *группы* G

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$

$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$

$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

Следовательно, если $[x, y] = e$, то $y * x = x * y$.

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$

$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$

$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

Следовательно, если $[x, y] = e$, то $y * x = x * y$.

Теорема доказана.

II.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \tag{5}$$

Определение 14. ***Группа*** *с* ***коммутативной*** *групповой операцией называется* ***коммутативной*** *или* ***абелевой группой***.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

1. $(a * b)^c = c' * a * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c = c' * a * e * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c = c' * a * c * c' * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c = c' * a * c * c' * b * c = a^c * b^c$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a, b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a, b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e,$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a, b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e$,

следовательно, по теореме 2 об однозначности обратного элемента

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e$,

следовательно, по теореме 2 об однозначности обратного элемента $\left(a^b\right)' = (a')^b$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b, c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a, b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

3. $a^b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b = a * a' * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b = a * a' * b' * a * b = a * [a, b]$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

4. $[a, b] =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] = a' * b' * a * b =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] = a' * b' * a * b = a' * (b^a) =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] = a' * b' * a * b = a' * (b^a) = b'^a * b$.

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a * b, c] =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a * b, c] = (a * b)' * c' * a * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a, b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

$$= b' * a' * c' * a * e * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

$$= b' * a' * c' * a * \underbrace{c * b * b' * c'}_{e} * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

$$= b' * a' * c' * a * \underbrace{c * b * b' * c'}_{e} * b * c = [a,c]^b * [b,c].$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a, b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a, b*c] =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

6. $[a, b * c] = a' * (b * c)' * a * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

6. $[a, b * c] = a' * (b * c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * a * c * c' * a' * b' * a * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;
4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;
6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

6. $[a, b * c] = a' * (b * c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * \underbrace{a * c * c' * a'}_{e} * b' * a * b * c =$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * \underbrace{a * c * c' * a'}_{e} * b' * a * b * c = [a,c] * [a,b]^c.$$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

7. $[a,b]' =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

7. $[a,b]' = (a' * b' * a * b)' =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

7. $[a, b]' = (a' * b' * a * b)' = b' * a' * \underbrace{(b')'}_{b} * \underbrace{(a')'}_{a} =$

II.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a * b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a, b]$;

4. $[a, b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a * b, c] = [a, c]^b * [b, c]$;

6. $[a, b * c] = [a, c] * [a, b]^c$; 7. $[a, b]' = [b, a]$.

Доказательство.

7. $[a, b]' = (a' * b' * a * b)' = b' * a' * \underbrace{(b')'}_{b} * \underbrace{(a')'}_{a} = [b, a]$.

II.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. *Подгруппа N из G называется* **нормальной** *в G, если левые смежные классы группы G по подгруппе N совпадают с правыми.*

Что-то много слов...

II.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. *Подгруппа N из G называется* **нормальной** *в G, если для любого g из G справедливо равенство $g * N = N * g$.*

Уже лучше, но...

II.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. $$\underbrace{N \trianglelefteq G}_{\substack{\textbf{нормальная}\\ \textit{подгруппа}}} \quad \Leftrightarrow \quad g * N = N * g. \tag{5}$$

Вот теперь хорошо!

II.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. $\underbrace{N \trianglelefteq G}_{\substack{\textbf{нормальная}\\ \textit{подгруппа}}} \iff g * N = N * g.$ (5)

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Например, **мы нашли** все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**: $H_1 = \{a, b, c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

Оказалось, что нормальной подгруппой является только $H_1 \trianglelefteq G$.

В самом деле...

II.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. $$\underbrace{N \trianglelefteq G}_{\substack{\textbf{нормальная}\\ \textit{подгруппа}}} \quad \Leftrightarrow \quad g * N = N * g. \tag{5}$$

Например, **мы нашли** все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**:
$H_1 = \{a, b, c\}, \quad H_2 = \{a, p\}, \quad H_3 = \{a, q\},$
$H_4 = \{a, r\}.$
Оказалось, что нормальной подгруппой является только $H_1 \trianglelefteq G$.
В самом деле...

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

$$b * H_2 = \{b, q\} \neq \{b, r\} = H_2 * b, \quad b * H_3 = \{b, r\} \neq \{b, p\} = H_3 * b,$$

$$b * H_4 = \{b, p\} \neq \{b, q\} = H_4 * b.$$

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.
1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.
Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

Поэтому $x^g =$

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.
1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.
Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.
Поэтому $x^g = g' * x * g =$

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.
1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.
Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.
Поэтому $x^g = g' * x * g = y \in N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y. По предположению y содержится в N. Поэтому

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y. По предположению y содержится в N. Поэтому $x * g = g * y$, то есть $N * g$ содержится в $g * N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является **нормальной** в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$.

Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит,

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элементнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит, $g * x = z * g$, поэтому $g * N$ включается в $N * g$. Таким образом, $g * N = N * g$.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит, $g * x = z * g$, поэтому $g * N$ включаеся в $N * g$. Таким образом, $g * N = N * g$. Пункт 1 доказан.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N. В силу соотношения 4) имеем $[x, g] = x' * (x^g)$ — элемент из N, так как x' и x^g — элементы из N.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N. В силу соотношения 4) имеем $[x, g] = x' * (x^g)$ — элемент из N, так как x' и x^g — элементы из N.

Необходимость доказана.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Достаточность.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G. В силу соотношения 3) $x^g = x[x, g]$ — элемент из N, и, согласно пункту 1, получаем, что N — нормальная подгруппа.

II.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*

2. *$[N, G] \leq N$.*

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G. В силу соотношения 3) $x^g = x[x, g]$ — элемент из N, и, согласно пункту 1, получаем, что N — нормальная подгруппа.

Теорема доказана.

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть* N — ***нормальная подгруппа*** *группы* G*. Тогда для любых* x, y *из* G *для каждого элемента* z *из* $(x * y) * N$ *имеем:* $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$*. Таким образом, произведение смежных классов группы* G *по нормальной подгруппе* N *является смежным классом.*

Рассмотреть пример?

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть* N — ***нормальная подгруппа*** *группы* G. *Тогда для любых* x, y *из* G *для каждого элемента* z *из* $(x * y) * N$ *имеем:* $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. *Таким образом, произведение смежных классов группы* G *по нормальной подгруппе* N *является смежным классом.*

Доказательство.

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$(x{*}N){*}(y{*}N) =$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть* N — ***нормальная подгруппа*** *группы* G. *Тогда для любых* x, y *из* G *для каждого элемента* z *из* $(x * y) * N$ *имеем:* $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. *Таким образом, произведение смежных классов группы* G *по нормальной подгруппе* N *является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N =$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N =$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x * N) * (y * N) = x * (N * y) * N = x * (y * N) * N = (x * y) * (N * N) =$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x * N) * (y * N) = x * (N * y) * N = x * (y * N) * N = (x * y) * (N * N) =$$

$$= (x * y) * N =$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть* N — ***нормальная подгруппа*** *группы* G. *Тогда для любых* x, y *из* G *для каждого элемента* z *из* $(x*y)*N$ *имеем:* $(x*N)*(y*N) = (x*y)*N = z*N$. *Таким образом, произведение смежных классов группы* G *по нормальной подгруппе* N *является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x*y*h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x*y)*N = (x*y)*(h*N) =$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть* N — ***нормальная подгруппа*** *группы* G. *Тогда для любых* x, y *из* G *для каждого элемента* z *из* $(x * y) * N$ *имеем:* $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. *Таким образом, произведение смежных классов группы* G *по нормальной подгруппе* N *является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x * y) * N = (x * y) * (h * N) = (x * y * h) * N =$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x * N) * (y * N) = x * (N * y) * N = x * (y * N) * N = (x * y) * (N * N) =$$

$$= (x * y) * N = (x * y) * (h * N) = (x * y * h) * N = z * N.$$

II.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x * y) * N = (x * y) * (h * N) = (x * y * h) * N = z * N.$$

Лемма доказана.

II.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12. *Множество смежных классов группы G по **нормальной подгруппе** N является **группой** относительно операции умножения **смежных классов**, определенной в **лемме об умножении смежных классов по подгруппе**.*

II.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12. *Множество смежных классов группы G по **нормальной подгруппе** N является **группой** относительно операции умножения **смежных классов**, определенной в **лемме об умножении смежных классов по подгруппе**.*

Доказательство сводится к простой проверке аксиом группы.

II.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12. *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** *N является* ***группой*** *относительно операции умножения* ***смежных классов****, определенной в* ***лемме об умножении смежных классов по подгруппе****.*

Определение 16. *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** *N с операцией умножения смежных классов называется* **фактор-группой** *группы G по подгруппе N. Фактор-группа группы G по подгруппе N обозначается G/N.*

Рассмотреть пример?

III. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 17. *Функция* $f : G \longrightarrow H$ *называется* **гомоморфизмом** *группы* $\langle G, \{*\} \rangle$ ***на*** *(в) группу* $\langle H, \{\circ\} \rangle$*, если*

$$\forall x, y \in G \qquad f(x * y) = f(x) \circ f(y). \tag{6}$$

Если f *является* ***взаимно однозначной функцией****, то* f *называется* **изоморфизмом***.*

Рассмотрим пример?

III. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 17. *Функция* $f : G \to H$ *называется* **гомоморфизмом** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ ***на*** *(в) группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$*, если*

$$\forall x, y \in G \qquad f(x * y) = f(x) \circ f(y). \tag{6}$$

Если f *является* ***взаимно однозначной функцией****, то* f *называется* **изоморфизмом***.*

С точки зрения теории групп все изоморфные группы одинаковы, ведь нас не интересует «природа» элементов группы, конкретный способ задания операции (в том смысле, что нам неважно, каким образом, по какой формуле и т.п. вычисляется результат групповой операции, процесс вычисления мы не рассматриваем).

III. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 17. *Функция $f : G \to H$ называется* **гомоморфизмом** *группы $\langle G, \{*\}\rangle$* ***на*** *(в) группу $\langle H, \{\circ\}\rangle$, если*

$$\forall x, y \in G \qquad f(x * y) = f(x) \circ f(y). \tag{6}$$

Если f является ***взаимно однозначной функцией****, то f называется* **изоморфизмом**.

С точки зрения теории групп все изоморфные группы одинаковы, ведь нас не интересует «природа» элементов группы, конкретный способ задания операции.

Поэтому в большинстве теорем в теории групп группы различаются только с точностью до изоморфизма (то есть изоморфные группы отождествляются).

III.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13. *Если* f *—* ***гомоморфизм*** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ *с единичным элементом* a *на группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$, *с единичным элементом* b, *то для любого элемента* x *из* G $\qquad f(a) = b \quad$ *и* $\quad f(x') = f(x)'$.

III.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13. *Если f — **гомоморфизм** группы $\langle G, \{*\}\rangle$ с единичным элементом a на группу $\langle H, \{\circ\}\rangle$, с единичным элементом b, то для любого элемента x из G* $\quad f(a) = b \quad$ *и* $\quad f(x') = f(x)'$.

Доказательство. По определению гомоморфизма $f(x) = f(a * x) = f(a) \circ f(x)$, следовательно, согласно **теореме 1 (критерию нейтрального элемента)**, $f(a) = b$.

III.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13. *Если f — **гомоморфизм** группы $\langle G, \{*\}\rangle$ с единичным элементом a на группу $\langle H, \{\circ\}\rangle$, с единичным элементом b, то для любого элемента x из G* $\quad f(a) = b \quad$ *и* $\quad f(x') = f(x)'$.

Доказательство. По определению гомоморфизма $f(x) = f(a * x) = f(a) \circ f(x)$, следовательно, согласно **теореме 1 (критерию нейтрального элемента)**, $f(a) = b$.

Далее, $b = f(a) = f(x * x') = f(x) \circ f(x')$, поэтому, в силу **теоремы 2 об однозначности обратного элемента**, $f(x') = f(x)'$. Теорема доказана.

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

*является подгруппой, **изоморфной** группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ является **изоморфизмом**.

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

$$x = y \;\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если* H *— подгруппа группы* G*, то для любого* $g \in G$ *множество* H^g*, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе* H*.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; g' * x * g = g' * y * g \;\Leftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если* H *— подгруппа группы* G*, то для любого* $g \in G$ *множество* H^g*, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе* H*.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Для доказательства, что ψ — **изоморфизм**, осталось проверить свойство $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$.

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) =$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g =$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g =$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

$$= x^g * y^g =$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

*является подгруппой, **изоморфной** группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

$$= x^g * y^g = \psi(x) * \psi(y).$$

III.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

*является подгруппой, **изоморфной** группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y).$$

Теорема доказана.

III.3. Ядро гомоморфизма

Определение 18. Ядром *гомоморфизма* f *называется множество* $\mathrm{Ker}(f)$ *всех тех элементов* x *группы* G, *образом которых является единичный элемент группы* H: $\quad f(x) = e$.

III.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\operatorname{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство.

III.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$.

III.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$. Согласно **определению ядра**, для доказательства этого факта надо проверить, что образ этого элемента — единичный. Но это сделать легко:

III.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$. Согласно **определению ядра**, для доказательства этого факта надо проверить, что образ этого элемента — единичный. Но это сделать легко:

$$f([x, g]) = [f(x), f(g)] = [e, f(g)] = e,$$

что и требовалось доказать.

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$*.*

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8)

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{g * n \,\middle|\, n \in N\right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G *на* $\mathbf{G/N}$*.*

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) =$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) =$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G *на* $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$
$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$
$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} =$$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} = g * h * N.$$

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} = g * h * N.$$

Следовательно, $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$. Теорема доказана.

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если* N *— нормальная подгруппа группы* G*, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G *на* $\mathbf{G/N}$*.*

Гомоморфизм ψ называется **естественным гомоморфизмом** группы G на фактор-группу G/N.

III.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если* N — *нормальная подгруппа группы* G, *то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{g * n \,\middle|\, n \in N\right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G *на* $\mathbf{G/N}$.

Гомоморфизм ψ называется **естественным гомоморфизмом** группы G на фактор-группу G/N.

Оказывается, что фактор-группами исчерпывается, с точностью до изоморфизма, множество всех гомоморфных образов группы G.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса).

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса). Итак, пусть $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$. Тогда для некоторого g из $\mathrm{Ker}(f)$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H. *Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$. *Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$, *то* $f = E * F$, *где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, *причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса). Итак, пусть $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$. Тогда для некоторого g из $\mathrm{Ker}(f)$ $\quad x * g = y$. Поэтому

$$f(y) = F(y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * g * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) = f(x).$$

Однозначность F доказана.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Надо проверить, что для произвольных x, y из G

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H. *Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$. *Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$, *то* $f = E * F$, *где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, *причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Надо проверить, что для произвольных x, y из G

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) * F(y * \mathrm{Ker}(f)).$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) =$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) =$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

$$= f(x) * f(y) =$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H. *Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$. *Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$, *то* $f = E * F$, *где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, *причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

$$= f(x) * f(y) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) * F(y * \mathrm{Ker}(f)),$$

то есть F — гомоморфизм.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F, т.е.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F, т.е.

$$x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y).$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H. *Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$. *Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$, *то* $f = E * F$, *где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, *причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$. Рассмотрим $x'y$. Так как f — гомоморфизм, то, согласно теореме об образе обратного и нейтрального элементов,

$$f(x' * y) = f(x') * f(y) = f(x)' * f(y) = e.$$

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$. Рассмотрим $x'y$. Так как f — гомоморфизм, то, согласно теореме об образе обратного и нейтрального элементов,

$$f(x' * y) = f(x') * f(y) = f(x)' * f(y) = e.$$

Следовательно, $x' * y$ принадлежит $\mathrm{Ker}(f)$. Таким образом, по критерию совпадения смежных классов, $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$, что и требовалось доказать.

III.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f *— гомоморфизм группы* G *на группу* H*. Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$*. Более того, если* E *— естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$*, то* $f = E * F$*, где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$*, причем* F *— изоморфизм.*

Доказательство. Соотношение $f = E * F$ является просто переформулировкой определения отображения F.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

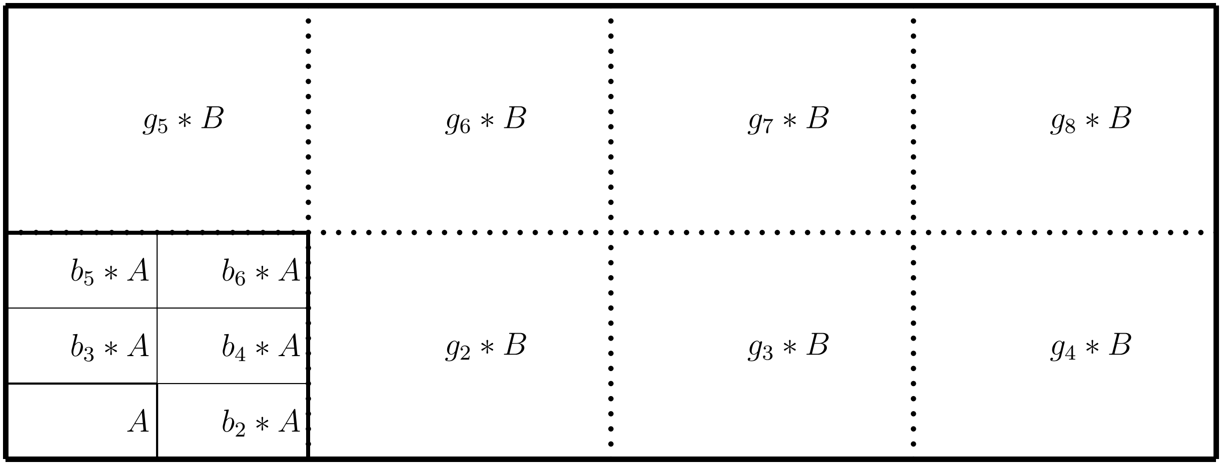
III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Прямоугольниками изображены группа G, $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

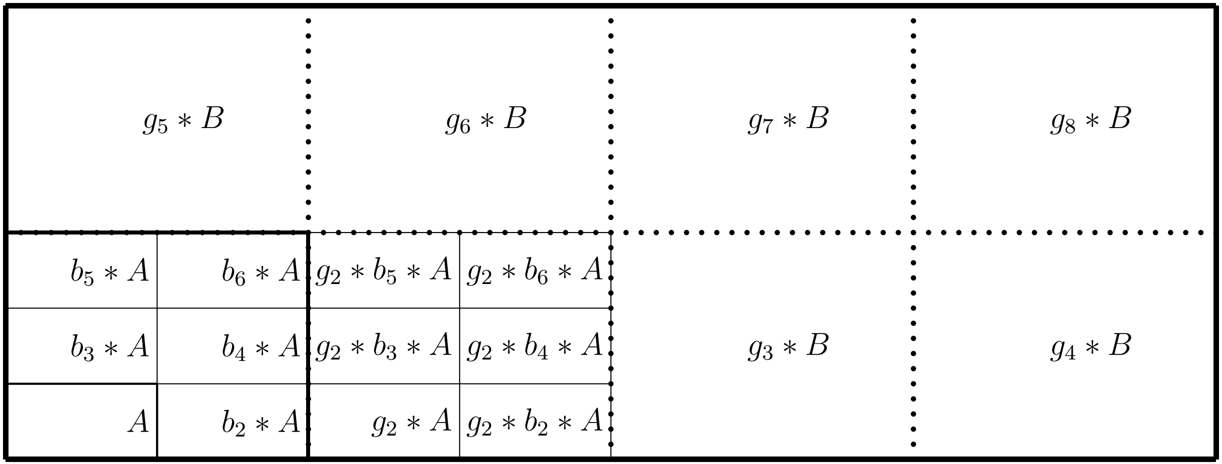
Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

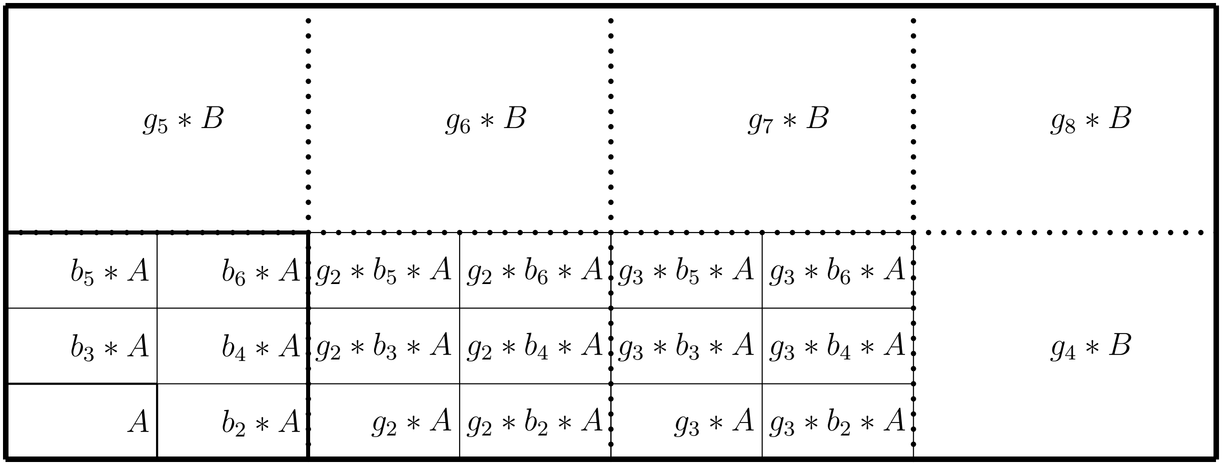
Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

$g_5 * B$		$g_6 * B$		$g_7 * B$		$g_8 * B$	
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

<table>
<tr><td>$g_5 * b_5 * A$</td><td>$g_5 * b_6 * A$</td><td colspan="2" rowspan="3">$g_6 * B$</td><td colspan="2" rowspan="3">$g_7 * B$</td><td colspan="2" rowspan="3">$g_8 * B$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * b_3 * A$</td><td>$g_5 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * A$</td><td>$g_5 * b_2 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_5 * A$</td><td>$b_6 * A$</td><td>$g_2 * b_5 * A$</td><td>$g_2 * b_6 * A$</td><td>$g_3 * b_5 * A$</td><td>$g_3 * b_6 * A$</td><td>$g_4 * b_5 * A$</td><td>$g_4 * b_6 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_3 * A$</td><td>$b_4 * A$</td><td>$g_2 * b_3 * A$</td><td>$g_2 * b_4 * A$</td><td>$g_3 * b_3 * A$</td><td>$g_3 * b_4 * A$</td><td>$g_4 * b_3 * A$</td><td>$g_4 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$b_2 * A$</td><td>$g_2 * A$</td><td>$g_2 * b_2 * A$</td><td>$g_3 * A$</td><td>$g_3 * b_2 * A$</td><td>$g_4 * A$</td><td>$g_4 * b_2 * A$</td></tr>
</table>

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

<table>
<tr><td>$g_5 * b_5 * A$</td><td>$g_5 * b_6 * A$</td><td>$g_6 * b_5 * A$</td><td>$g_6 * b_6 * A$</td><td colspan="2" rowspan="3">$g_7 * B$</td><td colspan="2" rowspan="3">$g_8 * B$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * b_3 * A$</td><td>$g_5 * b_4 * A$</td><td>$g_6 * b_3 * A$</td><td>$g_6 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * A$</td><td>$g_5 * b_2 * A$</td><td>$g_6 * A$</td><td>$g_6 * b_2 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_5 * A$</td><td>$b_6 * A$</td><td>$g_2 * b_5 * A$</td><td>$g_2 * b_6 * A$</td><td>$g_3 * b_5 * A$</td><td>$g_3 * b_6 * A$</td><td>$g_4 * b_5 * A$</td><td>$g_4 * b_6 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_3 * A$</td><td>$b_4 * A$</td><td>$g_2 * b_3 * A$</td><td>$g_2 * b_4 * A$</td><td>$g_3 * b_3 * A$</td><td>$g_3 * b_4 * A$</td><td>$g_4 * b_3 * A$</td><td>$g_4 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$b_2 * A$</td><td>$g_2 * A$</td><td>$g_2 * b_2 * A$</td><td>$g_3 * A$</td><td>$g_3 * b_2 * A$</td><td>$g_4 * A$</td><td>$g_4 * b_2 * A$</td></tr>
</table>

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * b_5 * A$	$g_6 * b_6 * A$	$g_7 * b_5 * A$	$g_7 * b_6 * A$		
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$	$g_6 * b_3 * A$	$g_6 * b_4 * A$	$g_7 * b_3 * A$	$g_7 * b_4 * A$	$g_8 * B$	
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$	$g_6 * A$	$g_6 * b_2 * A$	$g_7 * A$	$g_7 * b_2 * A$		
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/A)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * b_5 * A$	$g_6 * b_6 * A$	$g_7 * b_5 * A$	$g_7 * b_6 * A$	$g_8 * b_5 * A$	$g_8 * b_6 * A$
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$	$g_6 * b_3 * A$	$g_6 * b_4 * A$	$g_7 * b_3 * A$	$g_7 * b_4 * A$	$g_8 * b_3 * A$	$g_8 * b_4 * A$
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$	$g_6 * A$	$g_6 * b_2 * A$	$g_7 * A$	$g_7 * b_2 * A$	$g_8 * A$	$g_8 * b_2 * A$
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство. Обозначим через φ отображение, определенное формулой: для любого g из G положим

$$\varphi\Big((g * A) * \Big\{b_\alpha * A \,\Big|\, b_\alpha \in B\Big\}\Big) = g * B. \tag{9}$$

Вернёмся к лекции?

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * A * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * A * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\Big((g * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\}\Big) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = (g_\beta * A) * \Big\{b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \Big\{g_\alpha * b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = \Big\{g_\beta * b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \ \Rightarrow \ g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \ \Rightarrow$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\Big((g * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\}\Big) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = (g_\beta * A) * \Big\{b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big\{g_\alpha * b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = \Big\{g_\beta * b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha = A \Rightarrow$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\Big((g * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\}\Big) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = (g_\beta * A) * \Big\{b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \Big\{g_\alpha * b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = \Big\{g_\beta * b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \ \Rightarrow \ g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha = A \ \Rightarrow \ g_\alpha * A = g_\beta * A.$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * A = g_\beta * A.$$

Следовательно, φ — **однозначное** отображение.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\Big((g * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\}\Big) = g * B. \tag{9}$$

Взаимная однозначность отображения φ очевидна:

$$g_\alpha * A = g_\beta * A \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (g_\alpha * A) * \Big\{b_\alpha * A \Big| b_\alpha \in B\Big\} = (g_\beta * A) * \Big\{b_\beta * A \Big| b_\beta \in B\Big\}$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Осталось проверить, что φ — **гомоморфизм**, т.е. что $\varphi(X * Y) = \varphi(X) * \varphi(Y)$.

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{g_\beta * b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * g_\beta * \left\{b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * g_\beta * \underbrace{\left\{b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}}_{=\left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * A * g_\beta * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A^{g_\beta} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B = g_\alpha * B * g_\beta * B =$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B = g_\alpha * B * g_\beta * B =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) * \varphi\left((g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right).$$

III.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G, *причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, *то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, *и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) * \varphi\left((g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right).$$

Теорема доказана.

III.8. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 19 (третья теорема о гомоморфизме). *Если A — **нормальная подгруппа** группы B, которая является подгруппой в G, и H — **нормальная подгруппа** в G, то $(B * H)/(A * H)$ **изоморфна** $B/\left(A * (B \cap H)\right)$.*

Доказательство.

III.8. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 19 (третья теорема о гомоморфизме). *Если* A — ***нормальная подгруппа*** *группы* B, *которая является подгруппой в* G, *и* H — ***нормальная подгруппа*** *в* G, *то* $(B * H)/(A * H)$ ***изоморфна*** $B/\left(A * (B \cap H)\right)$.

Доказательство. Положим $f(b * A * H) = b * A * (B \cap H)$. Непосредственной проверкой по определению получаем, что f — **функция**, потом — что это **гомоморфизм**, и, наконец, проверкой его **взаимной однозначности** заканчивается доказательство этой теоремы.

III.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство.

III.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Пусть G/N — абелева группа. При естественном гомоморфизме коммутатор, очевидно, переходит в коммутатор.

III.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Пусть G/N — абелева группа. При естественном гомоморфизме коммутатор, очевидно, переходит в коммутатор. Поэтому, согласно критерию перестановочности элементов, в силу абелевости G/N, получаем, что $[x, y] * N = N$ — единичный элемент фактор-группы G/N. Значит, G' включается в N.

III.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Осталось проверить, что G/G' — коммутативная группа.

III.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Осталось проверить, что G/G' — коммутативная группа.

Так как в фактор-группе все коммутаторы — единичные, то, по критерию перестановочности элементов, G/G' — абелева группа.

Теорема доказана.

IV. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять:

IV. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять: 1) построение **таблицы Кэли** групповой операции (для конечных групп); 2) построение решетки подгрупп (т.е. множества подгрупп с отношением включения одной подгруппы в другую); 3) построение всех (с точностью до изоморфизма) гомоморфных образов (достаточно построить все фактор-группы).

IV. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять: 1) построение **таблицы Кэли** групповой операции (для конечных групп); 2) построение решетки подгрупп (т.е. множества подгрупп с отношением включения одной подгруппы в другую); 3) построение всех (с точностью до изоморфизма) гомоморфных образов (достаточно построить все фактор-группы).

В данном разделе для развития исследовательского аппарата теории групп применим **стратегию перехода от изучения отдельного объекта с исследованию системы объектов**. Рассмотрим **операции** на множестве подгрупп.

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой*[1] *группы G.*

Доказательство.

[1] Точнее, носителем подгруппы.

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow$$

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A, \\ \\ \\ x \in B, \\ \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow$$

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если* A *и* B *— подгруппы группы* G*, то* $A \cap B$ *является подгруппой группы* G*.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow$$

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ x * y \in B, \\ y' \in B \end{cases} \Rightarrow$$

IV.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ x * y \in B, \\ y' \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A \cap B, \\ x' \in A \cap B. \end{cases}$$

IV.2. Произведение подгрупп

Определение 19. Произведением подгрупп *A и B группы G называется множество*

$$A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \begin{cases} a \in A, \\ b \in B. \end{cases} \right\} \tag{10}$$

Произведение подгрупп — **не обязательно подгруппа**.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Произведение подгрупп A и B группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда $A * B = B * A$.*

Много слов естественного языка...

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Вот это уже стоит конспектировать.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Надо доказать, что

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \le G$.
Надо доказать, что $A * B = B * A$.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Как доказать, что $A * B = B * A$?

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \le G$.

Как доказать, что $A * B = B * A$?

i) С помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) свести к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Как доказать, что $A * B = B * A$?

i) С помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;
ii) свести к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;
iii) «от противного».

Естественно, выбираем второй вариант.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \le G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \le G \end{cases} \Rightarrow \ (a * b)^{-1} \in A * B \ \Rightarrow$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow \ (a * b)^{-1} \in A * B \ \Rightarrow \ (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a * b = (a_1 * b_1)^{-1} =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow \ (a * b)^{-1} \in A * B \ \Rightarrow \ (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a * b = (a_1 * b_1)^{-1} = b_1^{-1} * a_1^{-1}$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * b = (a_1 * b_1)^{-1} = \underbrace{b_1^{-1}}_{B} * \underbrace{a_1^{-1}}_{A} \in B * A.$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \le G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \le G \end{cases} \Rightarrow \ (a * b)^{-1} \in A * B \ \Rightarrow \ (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a * b = (a_1 * b_1)^{-1} = \underbrace{b_1^{-1}}_{B} * \underbrace{a_1^{-1}}_{A} \in B * A.$$

Значит, $A * B \subseteq B * A$.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$= b * a \in B * A.$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$= \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

Но

$$\begin{cases} a^{-1} * b^{-1} \in B * A, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

Но

$$\begin{cases} a^{-1} * b^{-1} \in B * A, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow \left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} \in A * B.$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$. Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

Но

$$\begin{cases} a^{-1} * b^{-1} \in B * A, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow \left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} \in A * B.$$

Следовательно,

$$b * a \in B * A \Rightarrow b * a = \left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} \in A * B.$$

Необходимость доказана.

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \le G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \le G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) = a_1 * (b_1 * a_2) * b_2 =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \le G$ *и* $B \le G$, *то*

$$A * B \le G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \le G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) = a_1 * (b_1 * a_2) * b_2 = a_1 * (a_3 * b_3) * b_2 =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) = a_1 * (b_1 * a_2) * b_2 = a_1 * (a_3 * b_3) * b_2 =$$

$$= (a_1 * a_3) * (b_3 * b_2) \in A * B.$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = \underbrace{b^{-1} * a^{-1}}_{B * A = A * B} =$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = \underbrace{b^{-1} * a^{-1}}_{B*A=A*B} = a_1 * b_1$$

IV.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = \underbrace{b^{-1} * a^{-1}}_{B*A=A*B} = a_1 * b_1 \in A * B.$$

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23. *Пусть A — подгруппа группы G, B — подгруппа группы A. Тогда множество $A * B$, равное, по определению, $\Big\{a * b \,\Big|\, (a \in A)\&(b \in B)\Big\}$, совпадает с A.*

Много слов естественного языка...

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что в условиях этой теоремы $A * B = B * A$ (см. доказательство теоремы).

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \le A \le G \ \Rightarrow \ A * B = A \le G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

$$a \in A \ \Rightarrow$$

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

$$a \in A \;\Rightarrow\; a = a * e \in A * B,$$

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \le A \le G \;\Rightarrow\; A * B = A \le G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

$$a \in A \;\Rightarrow\; a = a * e \in A * B,$$

т.е. $A \subseteq A * B$.

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow$$

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; a * \underbrace{b}_{B \subseteq A} \in A,$$

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \le A \le G \;\Rightarrow\; A * B = A \le G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.
Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; a * \underbrace{b}_{B \subseteq A} \in A,$$

откуда $A * B \subseteq A$.

IV.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; a * \underbrace{b}_{B \subseteq A} \in A,$$

откуда $A * B \subseteq A$.

Итак, $A * B = A \leq G$, теорема доказана.

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Много слов естественного языка...

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G, \quad B \leq G \quad$ *и* $\quad A * B \leq G$, *то*

$$g = \overbrace{\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B}}^{\textit{однозначно}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \tag{13}$$

Все равно пока много слов естественного языка...

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $\quad B \leq G \quad$ *и* $\quad A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости. Пусть представление элемента в виде $a * b$ является однозначным.

Как доказать, что $A \cap B = \{e\}$?

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $B \leq G$ *и* $A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости. Пусть представление элемента в виде $a * b$ является однозначным.

Как доказать, что $A \cap B = \{e\}$?

Естественно взять произвольный элемент из пересечения и показать, что этот элемент — нейтральный.

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $B \leq G$ *и* $A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G$, $B \le G$ *и* $A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $B \leq G$ *и* $A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G$, $B \le G$ *и* $A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ \end{cases}$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $B \leq G$ *и* $A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ \end{cases}$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $\quad B \leq G \quad$ *и* $\quad A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ e = g. \end{cases}$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G$, $\quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ e = g. \end{cases}$$

Необходимость доказана.

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\textit{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G$, $\quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \qquad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$g = a_1{*}b_1 = a_2{*}b_2 \;\Rightarrow$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G$, $B \leq G$ *и* $A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \Rightarrow g = e.$$

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \Rightarrow \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \Rightarrow$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G$, $B \le G$ *и* $A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_2' * a_1 = e, \\ b_2 * b_2' = e. \end{cases} \;\Rightarrow$$

IV.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G$, $B \le G$ *и* $A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}\right)}_{\textit{однозначность разложения}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \Rightarrow \begin{cases} a_2' * a_1 = e, \\ b_2 * b_2' = e. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

IV.3. Прямое произведение подгрупп

Теорема об однозначности разложения элемента позволяет выделить важный случай произведения подгрупп. Можно предложить две изоморфные, но не равные конструкции: **внутреннее прямое произведение подгрупп** и **внешнее прямое произведение групп**.

IV.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 20. *Пусть A и B — подгруппы группы G, причем $A \cap B = \{e\}$ и для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется равенство $a * b = b * a$. Тогда произведение $A * B$ подгрупп A и B называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как $A \times B$.*

Рассмотрим пример?

IV.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 20. *Пусть* A *и* B *— подгруппы группы* G, *причем* $A \cap B = \{e\}$ *и для любых* $a \in A$, $b \in B$ *выполняется равенство* $a * b = b * a$. *Тогда произведение* $A * B$ *подгрупп* A *и* B *называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как* $A \times B$.

Теорема 25 (о внутреннем прямом произведении подгрупп). *Внутреннее прямое произведение подгрупп* A *и* B *группы* G *является группой, причем представление элемента из* $A * B$ *в виде* $a * b$ *определяется* ***однозначно***.

Доказательство.

IV.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 20. *Пусть* A *и* B *— подгруппы группы* G*, причем* $A \cap B = \{e\}$ *и для любых* $a \in A$, $b \in B$ *выполняется равенство* $a * b = b * a$. *Тогда произведение* $A * B$ *подгрупп* A *и* B *называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как* $A \times B$.

Теорема 25 (о внутреннем прямом произведении подгрупп). *Внутреннее прямое произведение подгрупп* A *и* B *группы* G *является группой, причем представление элемента из* $A * B$ *в виде* $a * b$ *определяется* ***однозначно***.

Доказательство. Это очевидное следствие **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** и **теоремы об однозначности разложения элемента.**

IV.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением****.*

Доказательство.

IV.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является **прямым произведением**.*

Доказательство. По **критерию нормальности подгруппы** имеем, что $[A, B] \leq [A, G] \leq A$ и $[A, B] \leq [G, B] \leq B$, откуда

IV.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением****.*

Доказательство. По **критерию нормальности подгруппы** имеем, что $[A, B] \leq [A, G] \leq A$ и $[A, B] \leq [G, B] \leq B$, откуда $[A, B] \leq A \cap B = \{e\}$, что и требовалось доказать.

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство.

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) =$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) =$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) =$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) = (a_1, b_1) * \big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\big)\,.$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) = (a_1, b_1) * \big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\big)\,.$$

Ассоциативность доказана.

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. **Нейтральным элементом** является, очевидно,

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. **Нейтральным элементом** является, очевидно,

$(e_A,\ e_B)$, где e_A — нейтральный элемент группы A, e_B — нейтральный элемент группы B.

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Наконец, к элементу $(a,\ b)$ **обратным** является упорядоченная пара

$$(a,\ b)' =$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Наконец, к элементу $(a,\ b)$ **обратным** является упорядоченная пара

$$(a,\ b)' = (a',\ b')\,.$$

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Теорема доказана.

IV.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Определение 21. *Пусть A и B — группы. Тогда декартово произведение $A \times B$ называется* **(внешним) прямым произведением** *групп A и B.*

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство.

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. В силу **теоремы об однозначности разложения элемента** отображение ψ, заданное формулой

$$\psi(a * b) = (a,\ b)\,,\ \text{где } \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \tag{16}$$

является **взаимно однозначным**.

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) =$$

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (об изоморфности внешнего и внутреннего произведений). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) =$$

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) = \left(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\right) =$$

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) = \left(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\right) =$$

$$= \left(a_1,\ b_1\right) * \left(a_2,\ b_2\right) =$$

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (об изоморфности внешнего и внутреннего произведений). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) = \left(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\right) =$$

$$= \left(a_1,\ b_1\right) * \left(a_2,\ b_2\right) = \psi\left(a_1 * b_1\right) * \psi\left(a_2 * b_2\right).$$

IV.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) = \left(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\right) =$$

$$= \left(a_1,\ b_1\right) * \left(a_2,\ b_2\right) = \psi\left(a_1 * b_1\right) * \psi\left(a_2 * b_2\right).$$

Теорема доказана.

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство. В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** достаточно проверить, что $A * B = B * A$.

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b =$$

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b =$$

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b =$$

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \ \Rightarrow$$

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** получаем, что $A * B$ — подгруппа группы G. Теорема доказана.

IV.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B \rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** получаем, что $A * B$ — подгруппа группы G. Теорема доказана.

Определение 22. *Произведение подгрупп A и B группы G называется* **полупрямым**, *если $A \trianglelefteq G$ и $A \cap B = \{e\}$. Полупрямое произведение обозначается как $A \rightthreetimes B$.*

Рассмотрим пример?

V. Абелевы группы

Рассмотрим группы с коммутативной групповой операцией.

V.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

V.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

V.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

V.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

– минимальное число **порождающих группы**;

V.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

– минимальное число **порождающих группы**;

– **период группы**, т.е. максимум **порядков элементов группы** и др.

V.1.1. Определение циклической группы

Определение 23. *Группа G называется* **циклической**, *если для некоторого элемента g из G имеем*

$$G = \left\{ g^n,\ (g')^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ g^n,\ \left(g^{-1}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство.

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} =$$

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа **циклической группы** является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H}$$

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит,

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит, $r = 0$.

V.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит, $r = 0$.

Следовательно, m делится нацело на k, т.е. все элементы из H являются стеренями элемента a^k. Теорема доказана.

V.2. Конечнопорожденные абелевы группы

Теорема 31 (о строении конечнопорожденной абел. группы). *Любая **абелева** группа с конечным числом **порождающих элементов** представима в виде прямого произведения **циклических групп**.*

VI. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп** **наиболее перспективны для изучения**?

VI. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп** **наиболее перспективны для изучения**?

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет выделить случай, когда гомоморфизм отображает группу G на себя. Такие гомоморфизмы называются **эндоморфизмами**.

Эндоморфизмы, которые являются изоморфизмами, называются **автоморфизмами**.

VI. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп** **наиболее перспективны для изучения**?

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет выделить случай, когда гомоморфизм отображает группу G на себя. Такие гомоморфизмы называются **эндоморфизмами**.

Эндоморфизмы, которые являются изоморфизмами, называются **автоморфизмами**.

Как результат применения **стратегии построения модели** можно интрепретировать исследования гомоморфизмов в определенные классы групп. Такие гомоморфизмы называют **представлениями** групп. В теории групп особую роль играют **подстановочные представления** групп, т.е. гомоморфизм группы в группу подстановок, т.е. **группу перестановок элементов некоторого множества** Ω.

VII. Представления

Под **представлением группы** понимают гомоморфизм группы в некоторый фиксированный класс групп.

VII.1. Подстановочные представления

Определение 24. Подстановочным представлением *группы* G *называется гомоморфизм группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n.

VII.1.1. Регулярное подстановочное представление

Определение 24. Подстановочным представлением *группы* G *называется гомоморфизм группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n.

Определение 25. ***Подстановочное представление*** F *группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n *множества* Ω *называется* **регулярным**, *если*

$$\forall \omega \in \Omega \, \exists g \in G \quad F[g](\omega) \neq \omega. \tag{17}$$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow$$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow\; g * x * H = g * y * H \;\Leftrightarrow$$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow\; g * x * H = g * y * H \;\Leftrightarrow\; F[g](x) = F[g](y).$$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является гомоморфизмом: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$
$= F[g]\,(F[h](x)) =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$
$= F[g]\,(F[h](x)) = F[g] \circ F[h](x)$.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по

Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \Big\{ x * H \,\Big|\, x \in G \Big\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем ядро гомоморфизма F:
$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем ядро гомоморфизма F:
$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \exists h \in H \quad h = x' * g * x =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по

*Если G — группа, $H \le G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая **перестановку** $F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

*является **регулярным подстановочным представлением** группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:
$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\; \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \exists h \in H \quad h = x' * g * x = g^x.$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Итак, $g \in \operatorname{Ker} F \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G \quad g^x \in H$.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по

Если G — группа, $H \le G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Итак, $g \in \operatorname{Ker} F \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G \quad g^x \in H$. Следовательно, $\operatorname{Ker} F \subseteq H$.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Осталось показать, что если N — такая нормальная подгруппа группы G, что $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H$, то $\operatorname{Ker} F = N$.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая **перестановку** $F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

*является **регулярным подстановочным представлением** группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Осталось показать, что если N — такая нормальная подгруппа группы G, что $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H$, то $\operatorname{Ker} F = N$. Пусть $g \in N$.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \le G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$

$F[g](x) = g * x * H =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
*Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая **перестановку** $F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

*является **регулярным подстановочным представлением** группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H =$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по
Если G — группа, $H \le G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H = x * H.$

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{x * H \,\middle|\, x \in G\right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H = x * H$. Значит, $g \in \operatorname{Ker} F$.

VII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по

Если G — группа, $H \le G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

VII.2. Операторные и матричные представления

Определение 26. Операторным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу* ***невырожденных*** *(т.е. с нулевым* ***ядром****) линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство U с групповой операцией* ***«композиция (суперпозиция) функций»****.*

VII.2. Операторные и матричные представления

Определение 26. Операторным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу* ***невырожденных*** *(т.е. с нулевым* ***ядром****) линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство U с групповой операцией* ***«композиция (суперпозиция) функций»****.*

Определение 27. Матричным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу $GL_n(F)$* ***невырожденных матриц*** *размерности $n \times n$ с коэффициентами из поля F с групповой операцией* ***«умножение матриц»****.*

VII.2. Операторные и матричные представления

Переход от операторного представления к матричному осуществляется с помощью выбора **базиса** в пространстве U и использования **матрицы линейного оператора**.

VII.2. Операторные и матричные представления

Переход от операторного представления к матричному осуществляется с помощью выбора **базиса** в пространстве U и использования **матрицы линейного оператора**.

Если $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ — **операторное представление**, **Б** — **базис** линейного пространства U, то **матричное представление** $\mathcal{A}_M$ определено формулой: для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}_M(g) = (\mathcal{A}[g])_{\text{Б}} \,,$$

где $X_{\text{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{X}$ в базисе **Б**.

VII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. *Операторное представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

VII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. *Операторное представление* $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

VII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. *Операторное представление $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ называется* **приводимым**, *если U представимо в виде $U = V \oplus W$, где* ненулевые *подпространства V и W являются $\mathcal{A}[g]$-инвариантными для любого $g \in G$. В противном случае представление $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ называется* **неприводимым**.

Как следует из рассмотренной ниже **теоремы Машке**, для операторного представления в группу $\operatorname{Aut} U$ **невырожденных линейных операторов** линейного пространства над полем $\mathcal{C}$ комплексных чисел неприводимость равносильна отсутствию в U собственных (т.е. отличных от U и от нулевого подпространства) $\mathcal{A}[G]$-инвариантных подпространств. Под $\mathcal{A}[G]$-инвариантным подпространством понимается, естественно,

VII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. *Операторное представление* $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

Как следует из рассмотренной ниже **теоремы Машке**, для операторного представления в группу $\operatorname{Aut} U$ **невырожденных линейных операторов** линейного пространства над полем $\mathcal{C}$ комплексных чисел неприводимость равносильна отсутствию в U собственных (т.е. отличных от U и от нулевого подпространства) $\mathcal{A}[G]$-инвариантных подпространств. Под $\mathcal{A}[G]$-инвариантным подпространством понимается, естественно, подпространство, являющееся $\mathcal{A}[g]$-инвариантным для любого $g \in G$.

VII.2.2. Теорема Машке

Теорема 33 (Машке). *Справедливы следующие утверждения:*

1) всякое ***операторное представление*** *над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений группы* G *над полем* $\mathbb{C}$*;*

2) если $\mathcal{A}$ *—* ***матричное представление*** *группы* G *над* $\mathbb{C}$ *и*

$$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall g \in G \quad \mathcal{A}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k\times k}(g) & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{B}_{m\times k}(g) & \mathbf{C}_{m\times m}(g) \end{pmatrix},$$

то существует невырожденная матрица $\mathbf{T}$*, что*

$$\mathbf{T}^{-1}\mathcal{A}(g)\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k\times k}(g) & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{B}_{m\times k}(g) & \mathbf{C}_{m\times m}(g) \end{pmatrix};$$

3) если $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ *— операторное представление группы* G *в группу* ***невырожденных операторов*** *линейного пространства* U*.* $V \leq U$*, причем для любого* $g \in G$ *подпространство* V *—* $\mathcal{A}[g]$***-инвариантное****, то существует такое* $\mathcal{A}[g]$***-инвариантное*** *подпространство* W*, что* $U = V \oplus W$*.*

VII.2.3. Лемма Шура

Лемма 3 (Шур). *Пусть* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ — *неприводимые* ***операторные представления*** *группы* G *в линейные пространства* U *и* V *над полем* F. *Если* $\hat{P}: U \to V$ — *такой линейный оператор, что*

$$\forall g \in G \quad \mathcal{A}[g] \circ \hat{P} = \hat{P} \circ \mathcal{A}[g], \tag{19}$$

то либо $\hat{P}$ — *нулевой оператор, либо* $\operatorname{Ker} \hat{P} = \{\mathbf{0}_U\}$.

VII.2.4. Эквивалентные представления

«Одинаковость» представлений понимается в теории групп следующим образом.

VII.2.4. Эквивалентные представления

Определение 29. *Пусть* U *и* V *— линейные пространства над полем* F *и* G *— группа.* ***Операторные представления*** $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$, *и* $\mathcal{B} : G \to \operatorname{Aut} V$ *называются* **эквивалентными**, *если существует такой изоморфизм (т.е.* ***невырожденный линейный оператор****)* $\hat{T}$ *линейного пространства* U *на линейное пространство* V, *что*

$$\forall g \in G \, \forall u \in U \; \left(\hat{T}\left(\mathcal{A}[g](u)\right) = \mathcal{B}[g]\left(\hat{T}(u)\right)\right). \tag{20}$$

VII.2.4. Эквивалентные представления

Определение 30. *Матричные представления* $\mathcal{A} : G \to GL_n(F)$, *и* $\mathcal{B} : G \to GL_n(F)$ *называются* **эквивалентными**, *если существует такая матрица* $\mathbf{T}$, *что*

$$\forall g \in G \quad \mathcal{B}(g) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathcal{A}(g) \cdot \mathbf{T}. \tag{21}$$

VII.2.4. Эквивалентные представления

В силу **теоремы об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц** **операторные представления** $\mathcal{A}: \; G \to \operatorname{Aut} U$, и $\mathcal{B}: \; G \to \operatorname{Aut} V$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие матричные представления, т.е. матричные представления, полученные следующим образом: если $\mathbf{Б}$ — базис линейного пространства U, $\mathbf{В}$ — базис линейного пространства V, то матричные представления $\mathcal{A}_M$ и $\mathcal{B}_M$ определены формулой: для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}_M(g) = (\mathcal{A}[g])_{\mathbf{Б}}\,, \quad \mathcal{B}_M(g) = (\mathcal{B}[g])_{\mathbf{В}}\,,$$

где $X_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{X}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

VIII. Задание групп образующими и определяющими отношениями

Рассмотрим еще один типовой способ задания группы.

VIII. Задание групп образующими и определяющими отношениями

Теорема 34 (Дик). *Если группа* $G = \left\{ I \,\middle|\, V(I) \right\}$ *задается системой порождающих* I *и некоторой системой определяющих соотношений* $V(I)$, *а группа* $H = \left\{ I \,\middle|\, W(I) \right\}$ *задается системой порождающих* I *и некоторой системой определяющих соотношений* $W(I)$, *причем* $V(I) \subseteq W(I)$, *то* H *есть гомоморфный образ группы* G, *т.е. существует такая нормальная подгруппа* N *группы* G, *что* $H \simeq G/N$.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?