Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Алгебраические системы

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Основные определения

В этом разделе часто фактически отождествляется *предикат* (**предикат-функцию** и **предикат-высказывание**) и **соответствующее** ему **отношение**.

I.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебраической системы**, F — *множество* ***операций***, *заданных на множестве* Ω, P — *множество* ***предикатов*** *или* ***отношений*** *заданных на множестве* Ω.

I.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебраической системы**, F — *множество* ***операций***, *заданных на множестве* Ω, P — *множество* ***предикатов*** *или* ***отношений*** *заданных на множестве* Ω.

При этом множество $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ называется **сигнатурой алгебраической системы** A.

I.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебраической системы**, F — *множество* ***операций***, *заданных на множестве* Ω, P — *множество* ***предикатов*** *или* ***отношений*** *заданных на множестве* Ω.

При этом множество $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ называется **сигнатурой алгебраической системы** A.

Применяется и другая трактовка этого понятия.

I.1. Алгебраическая система

Определение 2. Сигнатурой *называется упорядоченная тройка* $\langle R, F, \mu \rangle$, *где* R, F — *множества, причем* $R \cap F = \emptyset$, *и* $\mu : R \cup F \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ — *однозначное отображение.*

I.1. Алгебраическая система

Определение 2. Сигнатурой *называется упорядоченная тройка* $\langle R, F, \mu \rangle$, *где* R, F *— множества, причем* $R \cap F = \emptyset$, *и* $\mu : R \cup F \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ *— однозначное отображение.*

Предполагается, что R — множество предикатных символов, F — множество функциональных символов, μ каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие местность (арность) соответствующей функции или предиката.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A *— непустое множество;*
2. ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *— это* $\mu(r)$*-местный предикат на* A*;*
4. *если* $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A*.*

Предполагается, что R — множество предикатных символов, F — множество функциональных символов, μ каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие местность (арность) соответствующей функции или предиката.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^\Sigma \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. *A — непустое множество;*
2. *ν^Σ — отображение множества $R \cup F$ в множество отношений и операций на множестве A;*
3. *если $r \in R$, то $\nu^\Sigma(r)$ — это $\mu(r)$-местный предикат на A;*
4. *если $f \in F$, то $\nu^\Sigma(f)$ является $\mu(f)$-местной операцией на A.*

При этом A называется **носителем** алгебраической системы $\mathcal{A}$, а ν^Σ — **интерпретацией сигнатуры** Σ в A.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A *— непустое множество;*
2. ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$, *то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *— это* $\mu(r)$*-местный предикат на* A*;*
4. *если* $f \in F$, *то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A.

Соглашение 1. *В дальнейшем мы иногда при задании алгебраической системы вместо* **отношения** *будем указывать соответствующий ему* **предикат**.

I.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1. A — *непустое множество;*
2. ν^{Σ} — *отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* A*;*
3. *если* $r \in R$, *то* $\nu^{\Sigma}(r)$ — *это* $\mu(r)$*-местный предикат на* A*;*
4. *если* $f \in F$, *то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* A*.*

Рассмотреть пример?

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Иными словами, универсальная алгебра есть алгебраическая система с пустым набором отношений (предикатов).

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;
группа — $\langle G, \{\cdot, 1\} \rangle$;

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, F — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;
группа — $\langle G, \{\cdot, 1\} \rangle$;
поле — алгебра вида $\langle P, \{+, \cdot, 0, 1\} \rangle$.

I.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 5. Реляционной системой *или* **системой отношений**, *или* **моделью** *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель реляционной системы**, P — *множество предикатов, определенных на этой реляционной системе.*

Иными словами, система отношений есть алгебраическая система с пустым набором алгебраических операций.

I.3. Конечные алгебраические системы

В исследованиях частым и очень важным случаем является ситуация, когда носитель алгебраической системы конечен. Алгебраическая система, носитель которой конечен, называется **конечной алгебраической системой**. В частности, можно говорить о **конечной универсальной алгебре**.

I.3. Конечные алгебраические системы

В исследованиях частым и очень важным случаем является ситуация, когда носитель алгебраической системы конечен. Алгебраическая система, носитель которой конечен, называется **конечной алгебраической системой**. В частности, можно говорить о **конечной универсальной алгебре**.

Порядком конечной алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ называется количество элементов ее носителя. Порядок алгебраической системы $\mathcal{A}$ обозначается через $|\mathcal{A}|$. В случае, когда вид сигнатуры универсальной алгебры ясен из контекста, в качестве идентификатора универсальной алгебры обычно берут идентификатор ее носителя, то есть говорят «универсальная алгебра Ω» вместо «универсальная алгебра $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F} \rangle$».

I.4. Частичная система

Определение 6. Частичной системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель частичной системы**, F — *множество частичных операций, заданных на множестве* Ω, P — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ *называется* **сигнатурой частичной системы** $\mathcal{A}$.

I.4. Частичная система

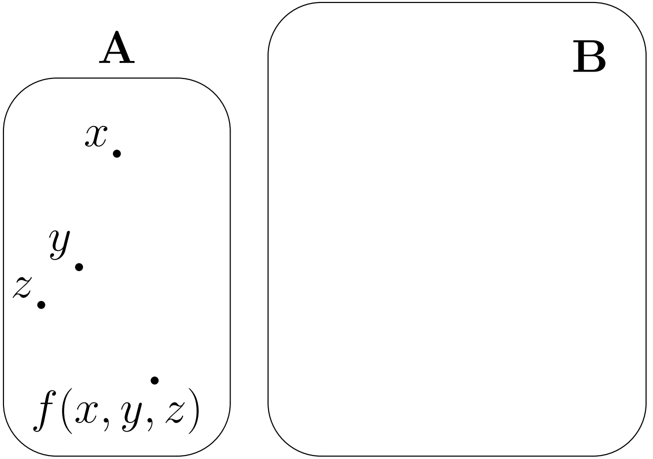
Определение 6. Частичной системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель частичной системы**, F — *множество частичных операций, заданных на множестве* Ω, P — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ *называется* **сигнатурой частичной системы** $\mathcal{A}$.

Важные частные случаи алгебраических систем связаны с ситуацией, когда $\mathrm{P} = \emptyset$ (универсальные алгебры) и $\mathrm{F} = \emptyset$ (модели или реляционные алгебры).

II. Изоморфизм, гомоморфизм

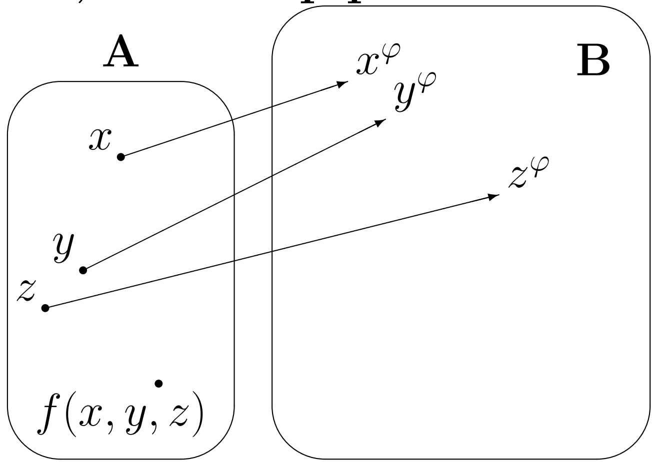
Мы сейчас определим некоторый тип функций, называемых *изоморфизмами* и *гомоморфизмами*. Для того чтобы при работе с гомоморфизмом (изоморфизмом) φ избежать громоздких формул типа $\varphi(f(x;y)) = \varphi(f)\,(\varphi(x);\varphi(y))$, мы будем образ элемента t под действием φ обозначать через t^{φ} вместо обычного обозначения $\varphi(t)$. На остальные функции (в частности, на алгебраические операции) это соглашение распространять не будем. Таким образом, если, например, g — трехместная алгебраическая операция, то $g(x,y,z)$ — это результат применения g к элементам x,y,z, а вот образы элементов x, $g(x,y,z)$, g под действием *гомоморфизма* или *изоморфизма* будем обозначать через, соответственно, x^{φ}, $(g(x,y,z))^{\varphi}$, g^{φ}.

II. Изоморфизм, гомоморфизм



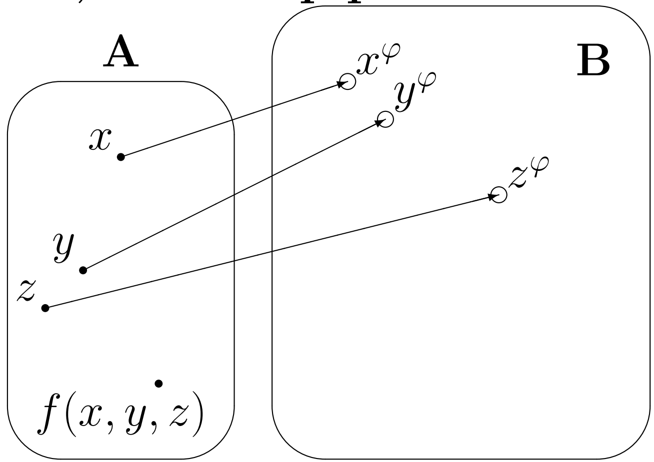
Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\}\,,\ \{P, \ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P}\rangle$.

II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

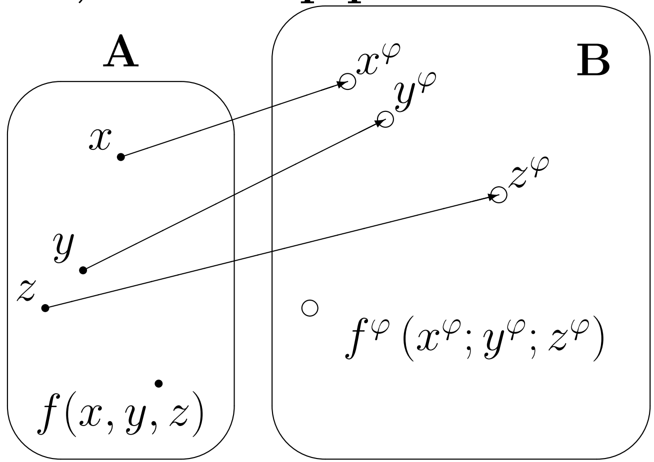
II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \{f, \ldots\}, \{P, \ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

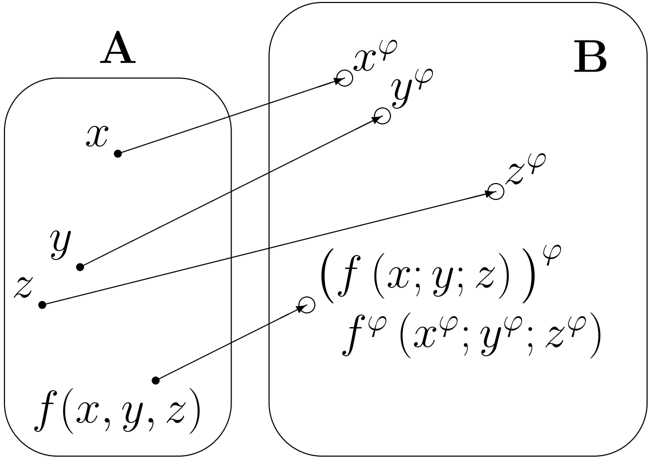
II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \{f, \ldots\}, \{P, \ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

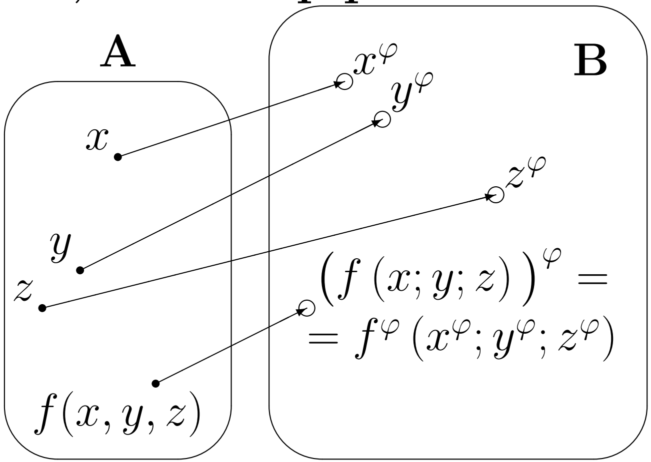
II. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

II. Изоморфизм, гомоморфизм



Должно быть совпадение: $\big(f\,(x; y; z)\big)^\varphi = f^\varphi\,(x^\varphi; y^\varphi; z^\varphi)$.

Рассмотреть пример?

II.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathrm{F} \to \mathrm{F}' \\ \mathrm{P} \to \mathrm{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *на* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{P}$ ***<u>на</u>*** $\Omega' \cup \mathrm{F}' \cup \mathrm{P}'$*;*

во-вторых, $\forall f \in \mathrm{F} \quad \forall x_i \in \Omega$

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p \in \mathrm{P}$ *имеем*

$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow \ p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi})$.

Рассмотрим пример?

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$*, то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом****.*

Доказательство.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство.

Сначала докажем утверждение **«во-первых»**.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство.

По **критерию существования обратной функции** функция φ^{-1} является **взаимно однозначной функцией.**

Утверждение **«во-первых»** доказано.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую системy $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathrm{F}'$. Надо:

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathrm{F}'$. Надо: $\quad (h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathrm{F}'$. Надо: $\quad (h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = h^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right).$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на** алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathrm{F}'$. Надо: $\quad (h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = h^{\varphi^{-1}} \left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}} \right)$.

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому существует такая операция $f \in \mathrm{F}$, что $h = f^{\varphi}$.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому у y_i существуют прообразы, т.е. элементы x_i из Ω такие, что

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому у y_i существуют прообразы, т.е. элементы x_i из Ω такие, что $y_i = x_i^{\varphi}$.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} =$$

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому у y_i существуют прообразы, т.е. элементы x_i из Ω такие, что $y_i = x_i^{\varphi}$.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} =$$

По условию φ является **изоморфизмом**...

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} =$$

По условию φ является **изоморфизмом**...

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} =$$

По определению **обратной функции**...

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} = f(x_1, \ldots, x_n) =$$

По определению **обратной функции**...

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} = f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= h^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right).$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ *—* ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**. Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\left(y_1, \ldots, y_n\right)$.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ *—* ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом****.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\,(y_1, \ldots, y_n)$.

Надо доказать, что

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\left(y_1, \ldots, y_n\right)$.

Надо доказать, что $q\left(y_1, \ldots, y_n\right) \;\Leftrightarrow$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.
Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\left(y_1, \ldots, y_n\right)$.
Надо доказать, что $q\left(y_1, \ldots, y_n\right) \Leftrightarrow q^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right)$.

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.
Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\,(y_1, \ldots, y_n)$.
Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q\,(y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ *—* ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.
Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\left(y_1, \ldots, y_n\right)$.
Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q\left(y_1, \ldots, y_n\right) \Leftrightarrow p^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right) \Leftrightarrow$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\,(y_1, \ldots, y_n)$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q\,(y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}\,(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) \;\Leftrightarrow\; p\,(x_1, \ldots, x_n) \;\Leftrightarrow$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если φ — **изоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ **на** алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то **обратная функция** φ^{-1} является **изоморфизмом**.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\left(y_1, \ldots, y_n\right)$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q\left(y_1, \ldots, y_n\right) \Leftrightarrow p^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right) \Leftrightarrow p\left(x_1, \ldots, x_n\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right).$$

II.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ *—* ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathrm{P}'$ и пусть выполняется предикат $q\left(y_1, \ldots, y_n\right)$.

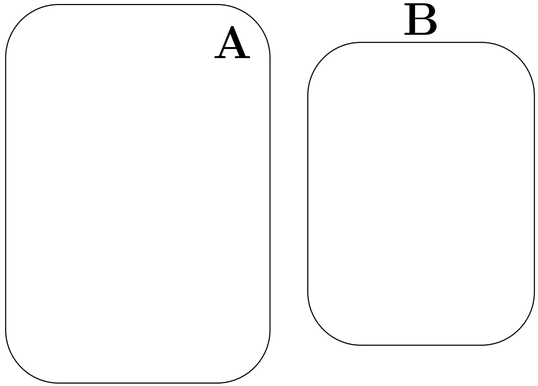
Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q\left(y_1, \ldots, y_n\right) \Leftrightarrow p^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right) \Leftrightarrow p\left(x_1, \ldots, x_n\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right).$$

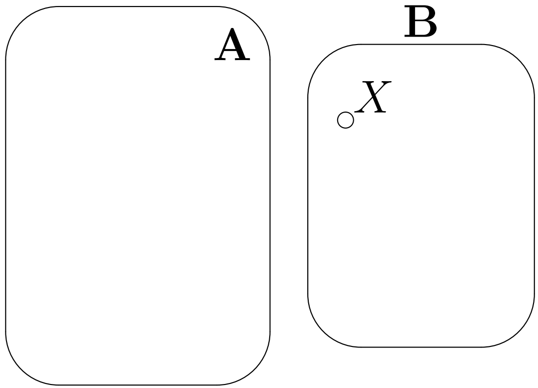
Теорема доказана.

II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

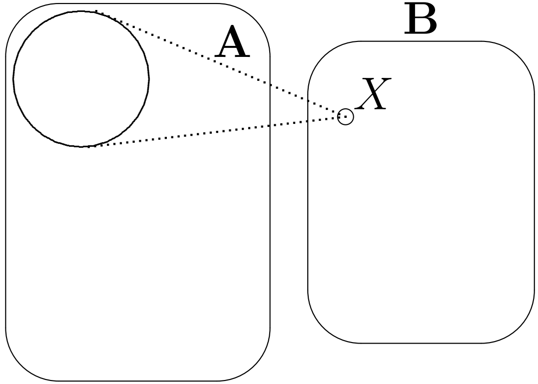
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда

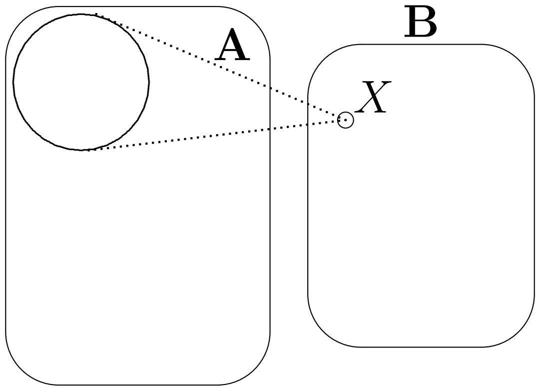
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$,

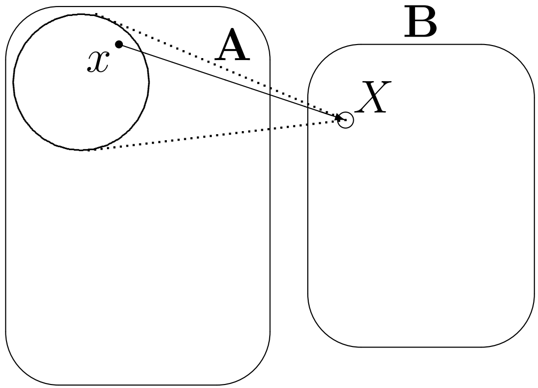
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что

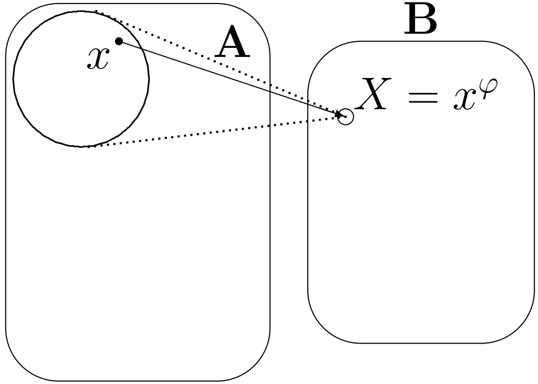
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что $x \in P$.

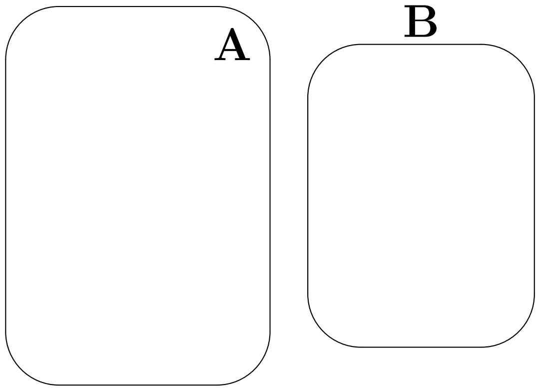
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.

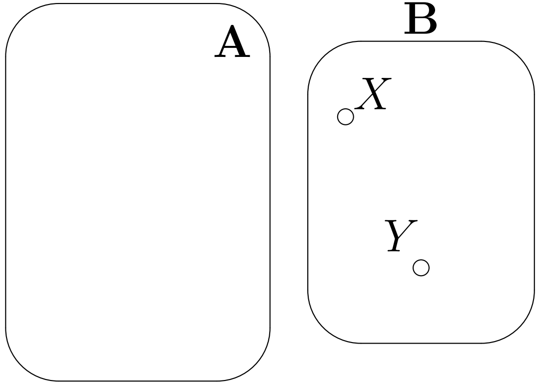
Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ: $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha^\varphi = X\right\}$, найдется такой элемент x, что $x \in P$.

II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

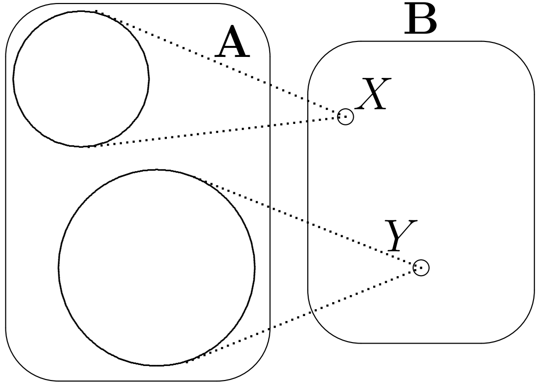
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда

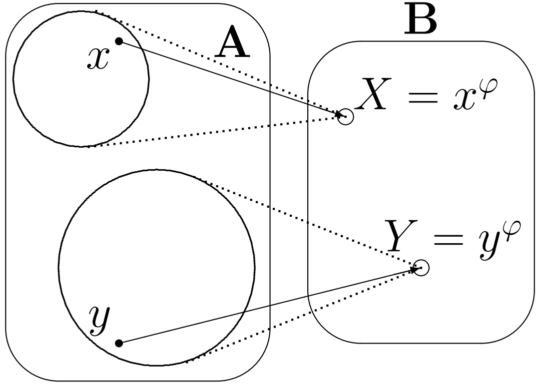
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель **A** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\}\rangle$ в **B** и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y

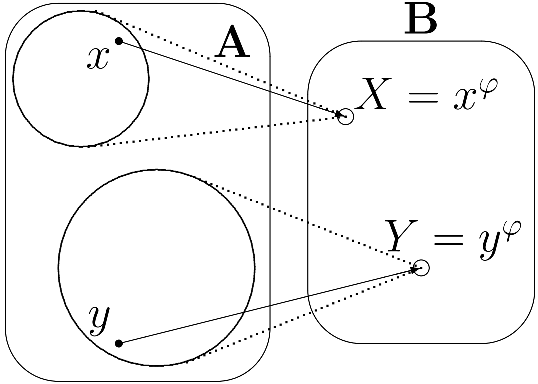
II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель **A** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\}\rangle$ в **B** и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что

II.3. Индуцированное отношение



Пусть φ — функция, отображающая носитель **A** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\}\rangle$ в **B** и Q — двуместное отношение.

Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что $(x,\ y) \in Q$.

II.3. Индуцированное отношение

Определение 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\}\rangle$ *— алгебраическая система,* $\mathbf{B}$ *— некоторое множество и* φ *— функция, отображающая* $\mathbf{A}$ *во множество* $\mathbf{B}$*. Тогда говорят, что* P' *— отношение,* ***индуцированное отношением*** P *в том и только том случае, если*

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \in P' \ \Leftrightarrow\ \exists x_1, \ldots x_n \begin{cases} x_1^{\varphi} = y_1, \\ x_2^{\varphi} = y_2, \\ \ldots \\ x_n^{\varphi} = y_n, \\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in P. \end{cases} \tag{2}$$

II.4. Гомоморфизм

Определение 9. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathrm{F} & \to & \mathrm{F}' \\ \mathrm{P} & \to & \mathrm{P}' \end{cases}$ *называется* **гомоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если для любой операции* f *из* F *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *имеем* ***равенство (1)***, *то есть* $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ *(в частности, «арность» операций* f *и* f^φ *совпадает).*

Гомоморфизм φ *называется* **сильным гомоморфизмом**, *если* p^φ *совпадает с индуцированным отношением, т.е из* $p^\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *следует, что в* Ω *найдутся такие элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что, во-первых,*

$$x_1^\varphi = y_1, \quad x_2^\varphi = y_2, \quad \ldots, \quad x_n^\varphi = y_n,$$

и, во-вторых, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— истинно. Иными словами,* p^φ *совпадает с отношением,* ***индуцированным отношением*** p.

Уберем лишние слова...

II.4. Гомоморфизм

Определение 9. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathrm{F} \to \mathrm{F}' \\ \mathrm{P} \to \mathrm{P}' \end{cases}$ *называется* **гомоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если для любой операции* f *из* F *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *имеем* ***равенство (1)***, *то есть* $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ *(в частности, «арность» операций* f *и* f^φ *совпадает).*

Гомоморфизм φ *называется* **сильным гомоморфизмом**, *если* p^φ *совпадает с отношением,* ***индуцированным отношением*** p.

Рассмотреть пример?

II.5. Критерий изоморфизма

Теорема 2. *Взаимно однозначный* ***гомоморфизм*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является* ***сильным гомоморфизмом****.*

Доказательство.

II.5. Критерий изоморфизма

Теорема 2. *Взаимно однозначный* ***гомоморфизм*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является* ***сильным гомоморфизмом****.*

Доказательство. Это прямое следствие соответствующих определений.

III. Теоремы о гомоморфизмах

Оказывается, для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ можно построить такое множество M алгебраических систем, что любой гомоморфный образ алгебраической системы $\mathcal{A}$ относительно сильного гомоморфизма изоморфен некоторой алгебраической системе из M. В этом случае говорят, что *получено описание с точностью до изоморфизма всех гомоморфных (относительно сильных гомоморфизмов) образов алгебраической системы* $\mathcal{A}$.

III. Теоремы о гомоморфизмах

Для построения носителей алгебраических систем из M используется только носитель исходной алгебраической системы $\mathcal{A}$. Точнее, носители алгебраических систем из M представляют собой множества, состоящие из подмножеств носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Говоря еще более точно, носитель любой алгебраической системы из M представляет собой *множество классов эквивалентных элементов* носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Однако в качестве соответствующего отношения эквивалентности можно брать только некоторые специальные отношения, так называемые *конгруенции*, о которых пойдет речь ниже.

III.1. Конгруенция

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ и $f\left(y_1; y_2; \ldots; y_n\right)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

III.1. Конгруенция

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \; f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right);$$

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ и $f\left(y_1; y_2; \ldots; y_n\right)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

III.1. Конгруенция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \; f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right); f\left(y_1, \qquad\qquad\qquad \right) \\ \end{cases}$$

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ и $f\left(y_1; y_2; \ldots; y_n\right)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

III.1. Конгруенция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \\ \\ \end{cases} \Rightarrow \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n); f(y_1, y_2, \qquad\qquad)$$

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

III.1. Конгруенция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \ldots \\ \end{cases} \Rightarrow \ f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,; f\,(y_1, y_2, \ldots, \qquad)$$

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f\,(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

III.1. Конгруенция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \ldots \\ (x_n; y_n) \in T \end{cases} \Rightarrow \big(f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,; f\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) \in T.$$

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f\,(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Вот теперь можно оформить определение...

III.1. Конгруенция

Определение 10. Конгруенцией *алгебраической системы* $\mathcal{A}$ *называется* ***отношение эквивалентности*** T *такое, что для любой* n*-местной операции* f *из* F

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \ldots \\ (x_n; y_n) \in T \end{cases} \Rightarrow \; \big(f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,; f\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) \in T. \qquad (3)$$

Отношение эквивалентности T называется конгруенцией, если для любой операции $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f\,(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Рассмотреть пример?

III.2. Индуцированная операция

Определение 11. *Пусть* T *—* ***конгруенция*** *на* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$*. Положим* $\forall x \in \Omega \quad x^{\psi_T} = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}$*, т.е.* x^{ψ_T} *— класс эквивалентных по* T *элементов, в котором содержится элемент* x*. Пусть* Ω_T *— множество классов эквивалентных по* T *элементов. В каждом классе* C *из* Ω_T *выберем по представителю* x_C*.*

Каждой n*-местной операции* f *из* $\mathbf{F}$ *поставим в соответствие операцию на* Ω_T*, определенную правилом*

$$f^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (f(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}))^{\psi_T}.$$

Говорят, что операция f^{ψ_T} **индуцирована операцией** f*.*

III.3. Индуцированные отношения

Определение 12. *Пусть* T — ***конгруенция*** *на* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. *Положим* $\forall x \in \Omega \quad x^{\psi_T} = \{y \mid y \in \Omega \,\&\, (x;\ y) \in T\}$, *т.е.* x^{ψ_T} — *класс эквивалентных по* T *элементов, в котором содержится элемент* x. *Пусть* Ω_T — *множество классов эквивалентных по* T *элементов. В каждом классе* C *из* Ω_T *выберем по представителю* x_C.

Каждому отношению P *из* $\mathbf{P}$ *поставим в соответствие отношение* P^{ψ_T}, *для которого* $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T}$ *тогда и только тогда, когда для каждого* i *найдутся такие элементы* $y_i \in C_i$, *что* $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in P$. *При этом говорят, что отношение* P^{ψ_T} **индуцировано отношением** P.

III.4. Фактор-система

Определение 13. *Пусть T — **конгруенция** на $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. Положим $\forall x \in \Omega \quad x^{\psi_T} = \{y \mid y \in \Omega \; \& \; (x;\; y) \in T\}$, т.е. x^{ψ_T} — класс эквивалентных по T элементов, в котором содержится элемент x. Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C.*

*Множество операций, **индуцированных операциями** из $\mathbf{F}$ обозначим через $\mathbf{F}_T$, а множество отношений, **индуцированных отношениями** из $\mathbf{P}$ — через $\mathbf{P}_T$. Таким образом, $\mathbf{F}_T = \{f^{\psi_T} \mid f \in \mathbf{F}\}$ и $\mathbf{P}_T = \{P^{\psi_T} \mid P \in \mathbf{P}\}$. Алгебраическая система $A/T = \langle \Omega_T, \mathbf{F}_T, \mathbf{P}_T \rangle$ называется* **фактор-системой** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ по **конгруенции** T.*

Рассмотреть пример?

III.5. Теорема об описании гомоморфных образов

Теорема 3. *Если φ — гомоморфизм $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle \to \mathcal{B} = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то справедливы следующие утверждения:*

1) *если $(x;\ y) \in T_\varphi \Leftrightarrow x^\varphi = y^\varphi$, то T_φ является* ***конгруенцией****;*

2) ***отображение** ψ_{T_φ} является **сильным гомоморфизмом** системы $\mathcal{A}$ на фактор-систему $\mathcal{A}/T_\varphi$;*

3) *пусть $\mathcal{A}/T_\varphi = \langle \Omega_{T_\varphi}, \mathrm{F}_{T_\varphi}, \mathrm{P}_{T_\varphi} \rangle$ и отображение*
$$\varepsilon : \begin{cases} \Omega_{T_\varphi} \to \Omega'; \\ \mathrm{F}_{T_\varphi} \to \mathrm{F}'; \\ \mathrm{P}_{T_\varphi} \to \mathrm{P}' \end{cases}$$
определим правилами: $C_x^\varepsilon = x^\varphi$, для $f'' \in \mathrm{F}_{T_\varphi}$, индуцированной операцией $f \in \mathrm{F}$, положим $(f'')^\varepsilon = f^\varphi$, для $p'' \in \mathrm{P}_{T_\varphi}$, индуцированного предикатом $p \in \mathrm{P}$, положим $(p'')^\varepsilon = p^\varphi$. Тогда ε является ***взаимно однозначным гомоморфизмом****;*

4) *если φ —* ***сильный гомоморфизм****, то ε является* ***изоморфизмом****.*

III.5. Теорема об описании гомоморфных образов

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**).

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если* T *— **конгруенция** на алгебраической системе* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, *то отображение* ψ_T *является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно,

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно, ψ_T — **гомоморфизм**.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из F. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруенции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно, ψ_T — **гомоморфизм**.

Докажем, что это **сильный гомоморфизм**.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — n-местный предикат из P. Тогда по **определению фактор-системы**

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — n-местный предикат из P. Тогда по **определению фактор-системы**

$$\mathcal{P}^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ \mathcal{P}(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}), \end{cases}$$

т.е.

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — n-местный предикат из P. Тогда по определению фактор-системы

$$\mathcal{P}^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ \mathcal{P}(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}), \end{cases}$$

т.е.

$$\mathcal{P}^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i^{\psi_T} = C_i, \\ \mathcal{P}(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) = 1. \end{cases}$$

III.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруенция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — n-местный предикат из P. Тогда по **определению фактор-системы**

$$\mathcal{P}^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ \mathcal{P}(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}), \end{cases}$$

т.е.

$$\mathcal{P}^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i^{\psi_T} = C_i, \\ \mathcal{P}(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) = 1. \end{cases}$$

По **определению индуцированного отношения** получаем, что ψ_T — **сильный гомоморфизм**. Лемма доказана.

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x; y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда », является **конгруенцией**.*

Слишком много слов...

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *—* ***гомоморфизм****, то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ *—* ***конгруенция****.*

Доказательство.

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *—* ***гомоморфизм****, то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ *—* ***конгруенция****.*

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{array}\right. \Rightarrow$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *—* ***гомоморфизм****, то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ *—* ***конгруенция****.*

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *—* ***гомоморфизм****, то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ *—* ***конгруенция****.*

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \ldots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *—* ***гомоморфизм****, то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ *—* ***конгруенция****.*

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ – ***конгруенция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \ldots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) =$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруенция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \ldots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \ldots, y_n^\varphi) =$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруенция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \ldots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \ldots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруенция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \dots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \dots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

III.7. Лемма о конгруенции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — **гомоморфизм**, то отношение $T_\varphi = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi\right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — **конгруенция**.*

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \ldots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \ldots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \ldots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in T_\varphi$. Лемма доказана.

III.8. Доказательство теоремы 3

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруенции, порожденной гомоморфизмом**.

III.8. Доказательство теоремы **3**

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруенции, порожденной гомоморфизмом**.

Утверждение 2 следует из **леммы о фактор-системе**.

III.8. Доказательство теоремы 3

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруенции, порожденной гомоморфизмом**.

Утверждение 2 следует из **леммы о фактор-системе**.

Докажем оставшиеся утверждения теоремы.

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруенции** T_φ,

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруенции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруенции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} =$$

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} =$$

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \ \Rightarrow \ \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруенции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} =$$

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруенции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^\varphi = y^\varphi = C_y^{\varepsilon}.$$

Значит, ε — однозначное отображение.

III.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\; y) \in T_{\varphi}$, и, по определению **конгруенции** T_{φ}, $x^{\varphi} = y^{\varphi}$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} = C_y^{\varepsilon}.$$

Значит, ε — однозначное отображение.

Повторяя эти же аргументы в обратном порядке, получаем, что ε — **взаимно однозначное отображение**.

III.8. Доказательство теоремы 3

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

III.8. Доказательство теоремы 3

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

Если f'' — операция из F_{T_φ}, индуцированная n-местной операцией f из F, и $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}$ — классы эквивалентных по T_φ элементов, то $f''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n})^\varepsilon$, по определению ε, совпадает с $f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$, то есть ε — **взаимно однозначный** **гомоморфизм**.

III.8. Доказательство теоремы 3

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

Если f'' — операция из F_{T_φ}, индуцированная n-местной операцией f из F, и $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}$ — классы эквивалентных по T_φ элементов, то $f''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n})^\varepsilon$, по определению ε, совпадает с $f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$, то есть ε — **взаимно однозначный гомоморфизм**.

Наконец, если φ — **сильный гомоморфизм**, то для любого предиката p'' из P_{T_φ}, индуцированного n-местным предикатом p из P, утверждение

$$p''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } p^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$$

следует из определения предиката p'' и **определения сильного гомоморфизма**.

Рассмотреть пример?

III.9. Теорема о фактор-системе фактор-системы

Теорема 4. *Если* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *— алгебраическая система,* T *— ее* ***конгруенция****,* T' *— некоторая* ***конгруенция*** *фактор-системы* $\mathcal{A}/T$*, и*

$$T'' = \left\{ (x; y) \,\middle|\, \left(\left\{ x' \,\middle|\, (x; x') \in T \right\} ; \left\{ y' \,\middle|\, (y; y') \in T \right\} \right) \in T' \right\},$$

(иными словами, каждый класс эквивалентных по T'' *элементов представляет собой объединение элементов всех тех классов эквивалентности по* T*, которые эквивалентны между собой по* T''*) то фактор-система* $(\mathcal{A}/T)/T'$ *изоморфна фактор-системе* $\mathcal{A}/T''$*.*

Доказательство.

Рассмотрим пример?

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?