Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Бином Ньютона и «треугольник Паскаля»

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Введение

В математических исследованиях нередко возникает необходимость представить выражение $(a+b)^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в виде суммы выражений вида $\alpha_{k,m}a^k b^m$, где $\alpha_{k,m}$ — некоторый коэффициент. Для этого обычно применяется один из двух способов: метод, основанный на «**треугольнике Паскаля**» и использование формулы «**бинома Ньютона**».

II. «Треугольник Паскаля»

Сначала рассмотрим **построение «треугольника Паскаля»**, а потом — его **использование для преобразования** выражения $(a+b)^n$.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

«Треугольник Паскаля» представляет собой набор строк, состоящий из чисел, сгруппированных по определенному закону (который мы сейчас опишем) таким образом, что получается фигура, напоминающая треугольник. Например, мы изобразили первые 6 строк «треугольника Паскаля».

Слева от вертикальной черты мы указали номер строки, причем нумерацию строк мы начали с 0.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Рассмотрим процесс построения «треугольника Паскаля».

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0	1

Сначала на «вершину» «треугольника Паскаля» поместим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0	**1**
1	1

На левой «стороне» «треугольника Паскаля» запишем 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$\begin{array}{r|ccc} 0 & & \mathbf{1} & \\ 1 & 1 & & 1 \end{array}$$

Крайний правый элемент « нижней стороны» «треугольника Паскаля» также сделаем равным 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0			1		
1		**1**		1	
2	1				

В следующей строке на левую «сторону» «треугольника Паскаля» вновь поместим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0			1	
1		1		1
2	1		2	

Следующий элемент строки «треугольника Паскаля» представляет собой сумму элементов предыдущей строки, находящихся над ним слева и справа. Эти элементы предыдущей строки выделены пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0			1		
1		1		**1**	
2	1		2		1

На «правой стороне» «треугольника Паскаля» ставим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		**1**		2		1
3	1					

Итак, процедура построения очередной строки — «нижней стороны» «треугольника Паскаля» начинается с того, что на место крайнего левого элемента ставим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		**1**		**2**		1
3	1		3			

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		1	
2		1		**2**		**1**
3	1		3		3	

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		1		2		**1**		
3	1		3		3		1	

Последний элемент строки равен 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		**1**		3		3		1	
4	1								

Итак, на место крайнего левого элемента ставим 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1			
1				1		1		
2			1		2		1	
3		**1**		**3**		3		1
4	1		4					

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
0 & & & & & 1 & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
3 & & 1 & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & 1 \\
4 & 1 & & 4 & & 6 & & & \\
\end{array}
$$

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		**3**		**1**	
4	1		4		6		4		

Каждый следующий элемент в строке равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки, отмеченных пурпурным цветом.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1				
1					1		1			
2				1		2		1		
3			1		3		3		**1**	
4		1		4		6		4		1

Крайний правый элемент строки вновь делаем равным 1.

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		**1**		4		6		4		1	
5	1										

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		**1**		**4**		6		4		1	
5	1		5								

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1				
1					1		1			
2				1		2		1		
3			1		3		3		1	
4		1		4		**6**		**4**		1
5	1		5		10		10			

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1				
1					1		1			
2				1		2		1		
3			1		3		3		1	
4		1		4		6		**4**		**1**
5	1		5		10		10		5	

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		**1**	
5	1		5		10		10		5		1

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		**1**		5		10		10		5		1
6	1											

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
\mathbf{5} & & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		**5**		**10**		10		5		1
6	1		6		15							

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		**10**		**10**		5		1
6	1		6		15		20					

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		**10**		**5**		1	
6	1		6		15		20		15				

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		5		10		10		**5**		**1**
6	1		6		15		20		15		6	

II.1. Построение «треугольника Паскаля»

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & \mathbf{1} & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3$

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a+b)^3 =$

Сначала заготовим «шаблон», без учета значений числовых коэффициентов.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении

$(a + b)^3 = \_\_a^3 +$

Степень 3 у a^3 совпадает со степенью суммы $(a + b)^3$.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b +$

Если представить первое слагаемое в виде a^3b^0, то можно сказать, что у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

$$\begin{array}{r|l} 0 & \end{array}$$

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 +$

Вновь у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3.$

Вновь у следующего слагаемого степень элемента a понижается на 1, а степень элемента b — увеличивается на 1.

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0	1
1	1 1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0			1	
1		**1**		1
2	1			

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3.$

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0			1	
1		**1**		**1**
2	1		2	

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1		
1			1		**1**	
2		1		2		1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Для нахождения коэффициентов начала получим первые три строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0	1
1	1 1
2	**1** 2 1
3	1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = \_\_a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

$$\begin{array}{r|ccccccc}
0 & & & & 1 & & & \\
1 & & & 1 & & 1 & & \\
\mathbf{2} & & \mathbf{1} & & 2 & & 1 & \\
3 & 1 & & & & & & \\
\end{array}$$

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0	1
1	1 1
2	**1** **2** 1
3	1 3

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + \_\_a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3.$

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1			
1			1		1		
2		**1**		**2**		1	
3	1		3				

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & 1 & & \\
1 & & & 1 & & 1 & \\
2 & & 1 & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} \\
3 & 1 & & 3 & & 3 & \\
\end{array}$$

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + \_\_ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		1		**2**		**1**		
3	1		3		3			

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \_\_b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \_\_b^3.$

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		1		2		**1**		
3	1		3		3		1	

Допустим, надо раскрыть скобки в выражении $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Наконец, получим нужные коэффициенты, используя элементы четвертой строки «треугольника Паскаля».

II.2. Использование «треугольника Паскаля»

0				1				
1			1		1			
2		1		2		**1**		
3	1		3		3		1	

Получили ответ:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Рассмотреть пример?

III. Бином Ньютона

Традиционно под «биномом Ньютона» понимают формулу

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{(n-3)!3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{n!}{(n-m)!m!}a^{n-m}b^m + \ldots + b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m.$$

Следует учесть, что по определению $0! = 1$.

Рассмотреть пример?

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?