Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Элементы канторовской «наивной» теории множеств

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Сравнение множеств по мощности **4**

I.1. Счетные множества 15

I.2. Теорема о несчетности континуума 16

I.3. Континуум 33

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств 35

II. Ординалы и кардиналы **49**

II.1. Ординалы (ординальные числа) 53

II.2. Актуальная и потенциальная бесконечность 71

II.3. Предельный и непредельный ординал 76

II.4. Полный порядок на совокупности ординалов 77

II.5. Кардиналы (кардинальные числа) 78

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала 80

II.7. Критерий ординала 97
II.8. Теорема об элементах ординала 114
II.9. Теорема о трансфинитной индукции 116
II.10. Теорема о наименьшем ординале 119
II.11. Соглашение об ординалах и кардиналах 122
II.12. Теорема Кантора-Бернштейна 123
II.12.1. Гипотеза индукции 125
II.12.2. База индукции 127
II.12.3. Непредельный шаг индукции 143
II.12.4. Предельный шаг индукции 161
II.12.5. Ограниченность параметра индукции 167

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств 170

I. Сравнение множеств по мощности

Важнейшей характеристикой конечного множества является количество элементов в этом множестве.

I. Сравнение множеств по мощности

Важнейшей характеристикой конечного множества является количество элементов в этом множестве.

Мы собираемся обобщить на бесконечные множества понятие «количество элементов» и сравнение множеств по числу элементов.

I. Сравнение множеств по мощности

Как понять, что во множестве B больше элементов, чем в A, если мы не умеем считать?

Рассмотрим пример?

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 1. *Говорят, что* **мощность** *множества* A **не превосходит мощности** *множества* B, *если существует такое* ***взаимно однозначное отображение*** f, *что* $\boldsymbol{D(f)} = A$ *и* $\boldsymbol{E(f)} \subseteq B$.

Тот факт, что мощность множества A не превосходит мощности множества B коротко записывается следующим образом: $|A| \leq |B|$.

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 1. *Говорят, что* **мощность** *множества* A **не превосходит мощности** *множества* B*, если существует такое* ***взаимно однозначное отображение*** f*, что* $\boldsymbol{D(f)} = A$ *и* $\boldsymbol{E(f)} \subseteq B$.

Тот факт, что мощность множества A не превосходит мощности множества B коротко записывается следующим образом: $|A| \leq |B|$.

Очевидно, что отношение $|A| \leq |B|$ на множестве всех подмножеств некоторого множества является отношением частичного порядка.

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 1. *Говорят, что* **мощность** *множества* A **не превосходит мощности** *множества* B*, если существует такое* ***взаимно однозначное отображение*** f*, что* $\boldsymbol{D(f)} = A$ *и* $\boldsymbol{E(f)} \subseteq B$.

Определение 2. *Говорят, что множества* A *и* B **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** A *и* B **равны** *тогда и только тогда, когда* $|A| \leq |B|$ *и* $|B| \leq |A|$. *Утверждение, что мощности множеств* A *и* B *равны записывается так:* $|A| = |B|$.

Рассмотреть пример?

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** *A и B* **равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Таким образом, если $|A| = |B|$, то существуют **взаимно однозначные функции** $f : A \mapsto B$ и $g : B \mapsto A$, причем, вообще говоря, может быть $E(f) \subset B$ (в частности, $E(f) \neq B$) или $E(g) \subset A$ (в частности, $E(g) \neq A$).

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** A *и* B **равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Возникает естественный вопрос: если $|A| = |B|$, то нельзя ли подобрать такую **взаимно однозначную функцию** $h : A \mapsto B$, что $E(h) = B$? Тогда вместо f можно было бы взять h, а вместо g — функцию h^{-1}.

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** A *и* B **равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

В **примере** в качестве такой функции h можно взять $h(z) = 2|z| + \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(z + 0.5) + 1)$, то есть функцию, имеющую таблицу значений

x	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(x)$	$\ldots$	4	2	1	3	5	$\ldots$

которую можно записать и так:

x	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$g(x)$	1	2	3	4	5	$\ldots$

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** A *и* B **равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \le |B|$ и $|B| \le |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Возникает естественный вопрос: если $|A| = |B|$, то нельзя ли подобрать такую **взаимно однозначную функцию** $h : A \mapsto B$, что $E(h) = B$? Тогда вместо f можно было бы взять h, а вместо g — функцию h^{-1}. Для того чтобы **доказать существование такой функции**, нам необходимо овладеть некоторой специальной техникой доказательства: методом трансфинитной индукции, и обосновать корректность этого метода (и найти границы применимости).

I. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** A *и* B **равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Возникает естественный вопрос: если $|A| = |B|$, то нельзя ли подобрать такую **взаимно однозначную функцию** $h : A \mapsto B$, что $E(h) = B$? Тогда вместо f можно было бы взять h, а вместо g — функцию h^{-1}. Для того чтобы **доказать существование такой функции**, нам необходимо овладеть некоторой специальной техникой доказательства: методом трансфинитной индукции, и обосновать корректность этого метода (и найти границы применимости).

I.1. Счетные множества

Определение 3. *Множество,* ***равномощное*** *множеству* $\mathbb{N}$, *называется* **счетным**.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0; 1]$, *является несчетным.*

Доказательство.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0; 1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Всякое действительное число из $[0; 1]$ можно однозначно представить в виде десятичной дроби $0.\alpha_1\alpha_2\ldots$, где для сколь угодно большого номера N найдется такой номер $n > N$, что $\alpha_n \neq 9$.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Всякое действительное число из $[0;1]$ можно однозначно представить в виде десятичной дроби $0.\alpha_1\alpha_2\ldots$, где для сколь угодно большого номера N найдется такой номер $n > N$, что $\alpha_n \neq 9$.

Последнее уточнение вызвано тем, что, например, $1 = 0.99999\ldots$.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0; 1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{N}$.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

$f(0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots) = 2,$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f:[0;1]\mapsto\mathbb{N}$.

$f(0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots)=1,$

$f(0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots)=2,$

$f(0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots)=3,$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$*, является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

$f(0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots) = 2,$

$f(0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots) = 3,$

$\ldots$

$f(0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots) =$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f:[0;1]\mapsto\mathbb{N}$.

$f(0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots)=1,$

$f(0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots)=2,$

$f(0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots)=3,$

$\ldots$

$f(0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots)=n,$

$\ldots$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{r|l}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots \ \mapsto \ 0,\beta_1 & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \\
\ldots & \ldots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots &
\end{array}
$$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$*, является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|l}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & \mapsto & 0,\beta_1\beta_2 & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & & & \\
\ldots & & & \ldots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & & &
\end{array}
$$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{r|l}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots \ \mapsto\ 0,\beta_1\beta_2\beta_3 & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & \ldots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots &
\end{array}
$$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f:[0;1]\mapsto\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rl|r}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & \beta_1\in\{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1\neq\alpha_{11}\\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & \beta_2\in\{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2\neq\alpha_{22}\\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & \beta_3\in\{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3\neq\alpha_{33}\\
\ldots & & \ldots\\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto\ 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n\in\{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n\neq\alpha_{nn}
\end{array}$$

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0; 1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{ll|l}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & \beta_1 \in \{0; 1; \ldots; 8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & \beta_2 \in \{0; 1; \ldots; 8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & \beta_3 \in \{0; 1; \ldots; 8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & \ldots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto\ 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0; 1; \ldots; 8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

Пусть $f(0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k$. Тогда

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rl|l}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & \ldots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto\ 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}$$

Пусть $f(0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k$. Тогда

$f(0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k = f(0,\alpha_{k1}\alpha_{k2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{kk}\ldots)$, но, по выбору элементов β_i, имеем $\beta_k \neq \alpha_{kk}$.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl|l}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\dots\alpha_{1n}\dots & & & \beta_1 \in \{0;1;\dots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\dots\alpha_{2n}\dots & & & \beta_2 \in \{0;1;\dots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\dots\alpha_{3n}\dots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\dots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\dots & & & \dots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\dots\alpha_{nn}\dots & \mapsto & 0,\beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\dots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}$$

Пусть $f(0,\beta_1\beta_2\beta_3\dots) = k$. Тогда

$f(0,\beta_1\beta_2\beta_3\dots) = k = f(0,\alpha_{k1}\alpha_{k2}\alpha_{n3}\dots\alpha_{kk}\dots)$, но, по выбору элементов β_i, имеем $\beta_k \neq \alpha_{kk}$.

Это противоречит **взаимной однозначности** f.

I.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|r}
0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & & \ldots \\
0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto & 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

Значит, предположение о существовании такой функции f было неверным, то есть множество $[0,1]$ несчетно.

I.3. Континуум

Определение 4. *Множество, равномощное множеству всех действительных чисел из* $[0; 1]$, *называется* **континуальным**, *или* **множеством мощности континуум**.

I.3. Континуум

Определение 4. *Множество, равномощное множеству всех действительных чисел из* $[0;1]$, *называется* **континуальным**, *или* **множеством мощности континуум**.

У людей «со слабыми нервами» (или плохим образованием) иногда складывается впечатление, что континуум — это невообразимо большое множество, больше которого (по мощности) множеств не бывает. На самом деле это не так. Более того, «самого большого» (по мощности) множества не существует, как показывает следующая теорема.

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство.

Рассмотреть пример-обоснование обозначения 2^X?

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если* X *— множество и* 2^X *— множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Очевидно, что $|X| \leq \left|2^X\right|$.

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.
Тогда

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.
Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если* X *— множество и* 2^X *— множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f: 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y)\right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если* X *— множество и* 2^X *— множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y)\right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если* X *— множество и* 2^X *— множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{y \middle| y \notin f^{-1}(y)\right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y$

$f(Y) \notin Y$

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если* X *— множество и* 2^X *— множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \Rightarrow f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \Rightarrow$

$f(Y) \notin Y$

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y)\right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y$,

$f(Y) \notin Y$

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f: 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y$,

$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow$

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y,$$
$$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \in Y,$$

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если* X *— множество и* 2^X *— множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y)\right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y$,

$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \in Y$,

противоречие.

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то* $|X| < \left|2^X\right|$.

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y,$$
$$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \in Y,$$

противоречие. Теорема доказана.

I.4. Теорема о мощности множества подмножеств

Долгое время математиков волновала проблема: существует ли множество «промежуточной мощности», то есть мощности, большей счетной, но меньше континуальной. Как оказалось, ответить на этот вопрос в рамках традиционных теорий множеств (о них мы будем говорить ниже, в разделе, посвященном аксиоматическим теориям множеств) однозначно нельзя: добавление к списку аксиом любой из «традиционных» теорий множеств аксиомы о существовании такого множества или аксиомы о несуществовании такого множества не нарушает непротиворечивости исходной теории множеств.

II. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

II. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

— с одной стороны, служат для измерения количества («в автомобиле едет *три* человека», «у человека должно быть *пять* пальцев на руках» и т.п.);

II. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

— с одной стороны, служат для измерения количества («в автомобиле едет *три* человека», «у человека должно быть *пять* пальцев на руках» и т.п.);

с другой стороны, позволяют упорядочивать конечные множества («я стоял *пятым* в очереди», «Вы являетесь *сотым* посетителем выставки» и т.п.).

II. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

— с одной стороны, служат для измерения количества («в автомобиле едет *три* человека», «у человека должно быть *пять* пальцев на руках» и т.п.);

с другой стороны, позволяют упорядочивать конечные множества («я стоял *пятым* в очереди», «Вы являетесь *сотым* посетителем выставки» и т.п.).

Хотелось бы получить аналогичные «инструменты» и для бесконечных множеств, чтобы говорить, например, *мощность множества такая-то*, или упорядочивать бесконечные множества.

II.1. Ординалы (ординальные числа)

Сейчас мы построим важный пример вполне упорядоченного множества, причем построим в буквальном смысле «из ничего», точнее, из пустого множества (считая, что в интуитивном понимании пустое множество — это практически ничего). Таким образом, мы получим «инструмент» для упорядочивания любого множества: нам будет с чем сравнивать его элементы. Иными словами, ординальные числа играют роль «номеров» для случая, когда необходимо, чтобы «номер» мог быть бесконечным, но при этом оставалось бы возможным каждому интересующему нас «объекту» приписывать уникальный, только ему присущий «номер».

II.1. Ординалы (ординальные числа)

Согласно принципу «бритвы Оккама» мы не должны вводить новых неопределяемых понятий, то есть свести интересующие нас «конструкции» к тем понятиям теории множеств, которые уже введены. Такими понятиями являются «множество» и «элемент множества». Таким образом, желательно, чтобы ту роль, которую играет отношение $<$ на множестве натуральных чисел, взял на себя предикат $\in$.

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$						

$2 = 1 + 1 =$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$						

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} =$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$						

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\dots$	$n+1$	$\dots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$					

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\dots$	$n+1$	$\dots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$					

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 =$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$					

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} =$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$					

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\},$

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\dots$	$n+1$	$\dots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$				

$$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\},$$

$$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},$$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\dots$	$n+1$	$\dots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$				

$$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\},$$
$$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},$$
$$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} =$$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$				

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$,

$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\} =$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$				

$$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\},$$
$$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},$$
$$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\},$$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$			

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$,

$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$,

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$	$\ldots$		

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$,

$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$,

$\ldots$

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$	$\ldots$		

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$,

$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$,

$\ldots$

$n + 1 = n \cup \{n\} = \mathrm{Sc}(n)$...

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	...	$n+1$	...
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$	...	$n \cup \{n\}$	...

$2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

$3 = 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$,

$4 = 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$,

$\ldots$

$n + 1 = n \cup \{n\} = \mathrm{Sc}(n)$...

II.1. Ординалы (ординальные числа)

1	2	3	4	$\ldots$	$n+1$	$\ldots$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$	$\ldots$	$n \cup \{n\}$	$\ldots$

Можно ли поставить вопрос: «что будет после того, как мы «перешагнем» за бесконечность»? И что произойдет, если мы все-таки «перешагнем»?

II.2. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается **потенциально бесконечным** относительно некоторой процедуры, если постоянное применение этой процедуры не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта. Приведем аналогию из замечательной «сказки для научных сотрудников младшего возраста» Аркадия и Бориса Стругацких «Понедельник начинается в субботу». Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях». Здесь явно имеется в виду тот факт, что сколько бы ни прошло времени, следствие по делу Кощея Бессмертного не закончится. Но при такой постановке вопроса предполагается, что в каждый момент с начала следствия прошло *конечное* время.

II.2. Актуальная и потенциальная бесконечность

С другой стороны, Саша Привалов, герой этого романа, (который в Новогоднюю ночь дежурит в НИИЧАВО — «научно-исследовательском институте чародейства и волшебства») размышляет над следующим вопросом: «...если где-нибудь в бесконечно удаленной от нас точке времени Кощея и приговорят, то судьи, кто бы они ни были, окажутся в очень странном положении: смертную казнь к бессмертному преступнику применить невозможно, а вечное заключение, если учесть предварительное, он уже отбыл...» В данном случае подход к ситуации существенно изменился: предлагается рассмотреть «объект» (в данном случае время следствия) *в целом*, весь, а не сколь угодно большую, но все-таки *конечную часть* этого объекта. Это переход к **актуальной бесконечности**.

II.2. Актуальная и потенциальная бесконечность

Другой пример: представим себе строящееся бесконечное в одну сторону шоссе (считаем, что это шоссе строится на плоскости). В каждый момент времени построен только конечный участок этого шоссе. Можно ли поставить вопрос, например, об использовании этого шоссе *после* того, как оно *все* будет покрыто асфальтом?

II.2. Актуальная и потенциальная бесконечность

Следует ли признавать существование актуально бесконечных множеств? С одной стороны, это вопрос веры (подобно тому, как он ставится в религиях), а с другой стороны, еще и вопрос удобства и непротиворечивости теорий, в которых принимается или не принимается соответствующая гипотеза. Отметим, что отрицание существования актуально бесконечных множеств существенно обедняет математику, принуждает к отказу от использования многих важных математических теорем и методов. Поэтому сегодня, как правило, в математических теориях признается существование актуально бесконечных множеств.

II.2. Актуальная и потенциальная бесконечность

Поэтому, возвращаясь к понятию ординала, можно строить ординал, «перешагнувший за бесконечность». В качестве первого бесконечного ординала ω можно взять объединение всех построенных к этому моменту ординалов. Следующий ординал, $(\omega + 1)$, строится обычным образом:

$$(\omega + 1) = \mathrm{Sc}(\omega) = \omega \cup \{\omega\}.$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно, применяя для «перехода через бесконечность» объединение всех построенных ранее ординалов.

II.3. Предельный и непредельный ординал

Определение 5. *Ординал α, имеющий вид $(\beta + 1)$ для некоторого ординала β, называется* **непредельным ординалом***. Ординал, больший 1, и не являющийся непредельным, называется* **предельным ординалом***. Если α — непредельный ординал и $\alpha = \beta + 1$, то обычно ординал β обозначают через $\alpha - 1$.*

II.4. Полный порядок на совокупности ординалов

Для ординалов определим отношение $\leq$ правилом $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$. Нетрудно увидеть, что если γ — ординал, то на множестве всех таких ординалов α, что $\alpha \leq \gamma$, отношение $\leq$ является полным порядком. Доказано, что, в некотором смысле, других вполне упорядоченных множеств (с точностью до **изоморфизма** моделей) отличных от ординалов, нет.

II.5. Кардиналы (кардинальные числа)

Итак, мы получили набор «номеров» для упорядочивания бесконечных множеств (вопрос о том, для любого ли множества можно найти ординал равной ему по мощности, оставим пока открытым). Теперь можно получить «единицы измерения» мощности множеств: кардинальные числа, называемые еще кардиналами.

II.5. Кардиналы (кардинальные числа)

Итак, мы получили набор «номеров» для упорядочивания бесконечных множеств (вопрос о том, для любого ли множества можно найти ординал равной ему по мощности, оставим пока открытым). Теперь можно получить «единицы измерения» мощности множеств: кардинальные числа, называемые еще кардиналами.

Определение 6. *Для любого множества M наименьший относительно $\in$ ординал, равномощный множеству M, называется* **кардинальным числом** *или* **кардиналом** *множества M.*

Определение 7. *Ординал α называется* **кардиналом** *или* **кардинальным числом**, *если $\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$.*

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \ \Rightarrow x \subseteq X.$$

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \ \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \ \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X —* ***транзитивное множество*** *и всякий его элемент также является* ***транзитивным множеством****.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \ \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \ \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \ \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset\} \subseteq \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\Big\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \ \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset,\{\emptyset\}\} \subseteq \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\Big\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \ \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \; \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \; \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X —* ***транзитивное множество*** *и всякий его элемент также является* ***транзитивным множеством****.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \ \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \; \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \overset{?}{\subseteq} \{\emptyset, \; \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \ \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X —* ***транзитивное множество*** *и всякий его элемент также является* ***транзитивным множеством****.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subseteq \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\Big\}$$

является таковым и согласно этому определению.

II.6. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 8. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \;\Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 9. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X —* ***транзитивное множество*** *и всякий его элемент также является* ***транзитивным множеством****.*

Примеры другого рода: множества $\{\emptyset, \; \{\emptyset\}, \; \{\{\emptyset\}\}, \; \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ и

$$\{\emptyset, \; \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \; \{\emptyset\}, \; \{\{\emptyset\}\}, \; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

являются **транзитивными**, но не являются **ординалами**.

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство.

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \qquad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению ординала** $Y \in Z \Rightarrow$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным***.

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \qquad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению ординала** $Y \in Z \Rightarrow Y \subseteq Z$.

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \qquad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению ординала** $Y \in Z \Rightarrow Y \subseteq Z$.

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \qquad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению подмножества...**

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \Rightarrow \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению подмножества...**

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \Rightarrow \underbrace{X \in Z}_{\text{Ура!}}.$$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является **ординалом** тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве **транзитивным**.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является **ординалом** тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве **транзитивным**.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является **ординалом** тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве **транзитивным**.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \ \Rightarrow \qquad\qquad\qquad) \qquad\qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является **ординалом** тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве **транзитивным**.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \;\; \Rightarrow \qquad\qquad\qquad) \qquad\qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

Отношение $\in$ — **транзитивное**, поэтому

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X \in Z.$$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является **ординалом** тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве **транзитивным**.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \ \Rightarrow \ Y \in Z) \qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

Отношение $\in$ — **транзитивное**, поэтому

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \quad X \in Z.$$

II.7. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \; \Rightarrow \; Y \in Z) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{Ура!}}.$$

II.8. Теорема об элементах ординала

Теорема 4. *Всякий элемент* ***ординала*** *является* ***ординалом****.*

Доказательство.

II.8. Теорема об элементах ординала

Теорема 4. *Всякий элемент **ординала** является **ординалом**.*

Доказательство. Это очевидное следствие **критерия ординала**.

II.9. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* α, β *— ординалы и* φ *— некоторое утверждение об ординале и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta < \alpha) \to \varphi(\beta)\Big) \to \varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

II.9. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* α, β *— ординалы и* φ *— некоторое утверждение об ординале и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta < \alpha) \to \varphi(\beta)\Big) \to \varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Иными словами, пусть φ — некоторое высказывание об **ординалах**, причем $\varphi(\emptyset)$ — истинно (база индукции), и для любого **ординала** α, из того, что для любого **ординала** $\beta \in \alpha$ утверждение $\varphi(\beta)$ истинно, следует, что $\varphi(\alpha)$ также истинно (шаг индукции). Тогда для любого **ординала** α высказывание $\varphi(\alpha)$ истинно.

II.9. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если α, β — ординалы и φ — некоторое утверждение об ординале и* $\forall\alpha \left(\forall\beta\, (\beta < \alpha) \to \varphi(\beta)\right) \to \varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\, \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть посылка верна, но $\exists\alpha_0\, \neg\varphi(\alpha_0)$. Положим

$$X = \{\alpha \mid (\alpha < \alpha_0) \land \neg\varphi(\alpha)\} \in \alpha_0.$$

Если $X = \emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению. Множество X имеет минимальный элемент α_1. Но, в силу **транзитивности множества** α_1, получаем, что $\forall\beta\, (\beta < \alpha_1) \to \varphi(\beta)$. По предположению индукции тогда $\varphi(\alpha_1)$, что противоречит условию $\neg\varphi(\alpha_0)$. Теорема доказана.

II.10. Теорема о наименьшем ординале

Теорема 6. *Если* $\exists\alpha\ \varphi(\alpha)$, *то существует наименьший такой* ***ординал*** α, *что* $\varphi(\alpha)$.

Доказательство.

II.10. Теорема о наименьшем ординале

Теорема 6. *Если $\exists\alpha\ \varphi(\alpha)$, то существует наименьший такой **ординал** α, что $\varphi(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть это неверно. Докажем тогда, что

$$\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ \beta<\alpha\to\neg\varphi(\beta)\Big)\to\neg\varphi(\alpha). \tag{1}$$

Действительно, отрицание к этой формуле имеет вид

$$\exists\alpha\ \Big(\forall\beta\ \beta<\alpha\to\neg\varphi(\beta)\Big)\wedge\varphi(\alpha),$$

что представляет собой утверждение о том, что α — наименьший такой **ординал**, для которого $\varphi(\alpha)$. Но мы предположили, что это высказывание неверно, значит формулу (1) надо считать истинной. По теореме о трансфинитной индукции получаем, что $\forall\alpha\ \neg\varphi(\alpha)$, что противоречит посылке доказываемой теоремы.

Как мы уже отмечали, натуральным числам соответствуют конечные **ординалы**:

1	2	3	4	…
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$	…

Очевидно, что все конечные **ординалы** являются **кардиналами**. В теории множеств натуральные числа просто отождествляются с соответствующими им **ординалами**. Но тут имеется одна «неувязочка»: мы привыкли писать, например, $|\{a,b,c\}| = 3$, а сейчас придется писать $|\{a,b,c\}| = |\{\emptyset,\{\emptyset\}\}|$. Но множество $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, как и число 3, в этом случае фактически является «отметкой» шкалы мощностей множеств. Поэтому в теории множеств приняты следующие соглашения.

II.11. Соглашение об ординалах и кардиналах

Соглашение 1 (**об ординалах и кардиналах**). *Будем использовать следующие обозначения:*

- *если* α *—* ***ординал*** *и* $\beta \in \alpha$, *то будем писать* $\beta < \alpha$;
- *пусть* M *— произвольное множество, и* β *— наименьший* ***ординал*** *такой, что* $|M| = |\beta|$. *Тогда,* β *будем называть* **кардинальным числом** *множества* M, *или* **мощностью** *множества* M. *Таким образом, кардиналы в теории множеств играют роль естественной «шкалы мощностей» множеств. Поэтому, во-первых, будем писать* $|M| = \beta$ *(так как кардинал — это и есть* <u>*мощность*</u> *множества* M*). Во-вторых, для любого такого* ***ординала*** α, *что* $|M| < |\alpha|$ *будем писать, что* $|M| < \alpha$. *Последнее вызвано тем, что если* β *— мощность множества* M, *то, согласно утверждению «во-первых»,* $|M| = \beta < \alpha$.

II.12. Теорема Кантора-Бернштейна

Теорема 7. *Если существуют* ***взаимно однозначные отображения*** *f и g множества A на подмножество множества B и множества B на подмножество множества A, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** *h множества A на множество B. Иными словами, если $|A| = |B|$, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** *h множества A на множество B.*

Доказательство.

II.12. Теорема Кантора-Бернштейна

Теорема 7. *Если существуют* ***взаимно однозначные отображения*** *f и g множества A на подмножество множества B и множества B на подмножество множества A, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** *h множества A на множество B. Иными словами, если $|A| = |B|$, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** *h множества A на множество B.*

Доказательство. Будем строить искомое отображение h индуктивно. Будем заглавными буквами обозначать графики функций, обозначенных соответствующими строчными буквами, то есть, например, для функций s_5 имеем $S_5 = \{(x, s_5(x)) \mid x \in \text{ ООФ}(s_5)\}$.

II.12.1. Гипотеза индукции

Гипотеза индукции. *Для любого* ***ординала*** α*, не превосходящего некоторого* ***ординала*** θ*, существуют множества* $A'_\alpha \subseteq A$, $B'_\alpha \subseteq B$ *и отображения* h_α*, причем выполняются следующие утверждения:*

1) для любого $\alpha \le \theta$ *отображение* h_α *является* ***взаимно однозначным*** *с областью определения* A'_α *и областью значений* B'_α*;*

2) для любых ***ординалов*** $\beta < \alpha < \theta$ *имеем* $A'_\beta \subset A'_\alpha$ *и* $B'_\beta \subset B'_\alpha$*;*

3) $A'_\theta = A$, $B'_\theta = B$.

II.12.1. Гипотеза индукции

Гипотеза индукции. *Для любого **ординала** α, не превосходящего некоторого **ординала** θ, существуют множества $A'_\alpha \subseteq A$, $B'_\alpha \subseteq B$ и отображения h_α, причем выполняются следующие утверждения:*

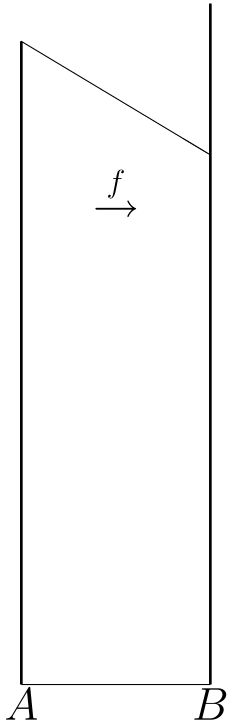
*1) для любого $\alpha \leq \theta$ отображение h_α является **взаимно однозначным** с областью определения A'_α и областью значений B'_α;*

*2) для любых **ординалов** $\beta < \alpha < \theta$ имеем $A'_\beta \subset A'_\alpha$ и $B'_\beta \subset B'_\alpha$;*

3) $A'_\theta = A$, $B'_\theta = B$.

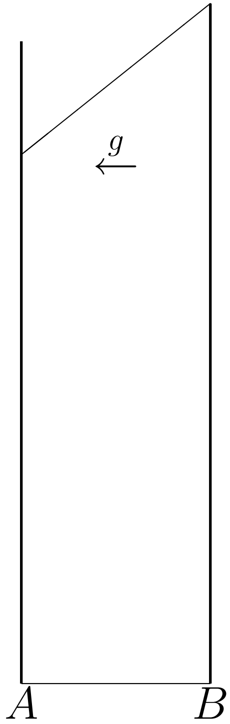
Если докажем гипотезу индукции, то h_θ, очевидно, будет искомым отображением.

II.12.2. База индукции



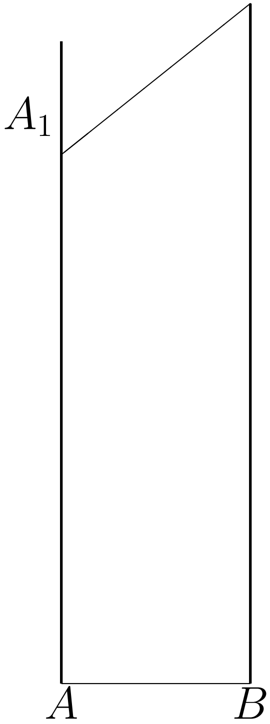
По условию $|A| \leq |B|$, поэтому существует **взаимно однозначная функция** $f: A \to B$.

II.12.2. База индукции

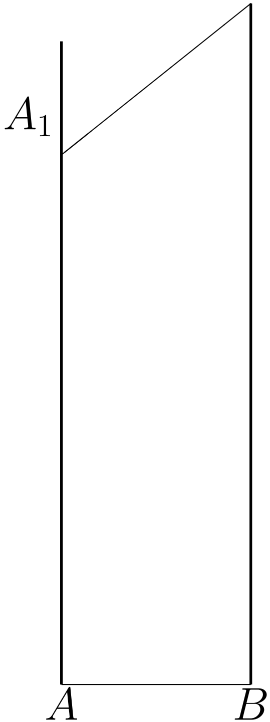


По условию $|A| \leq |B|$, поэтому существует **взаимно однозначная функция** $f : A \to B$.

II.12.2. База индукции

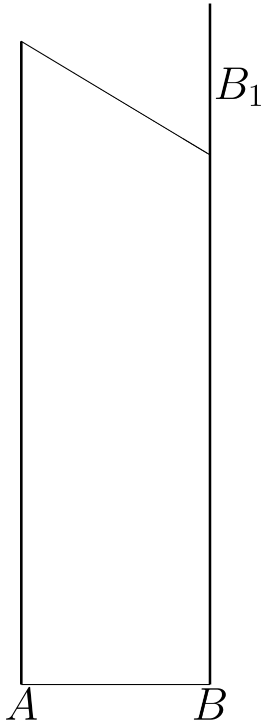


II.12.2. База индукции



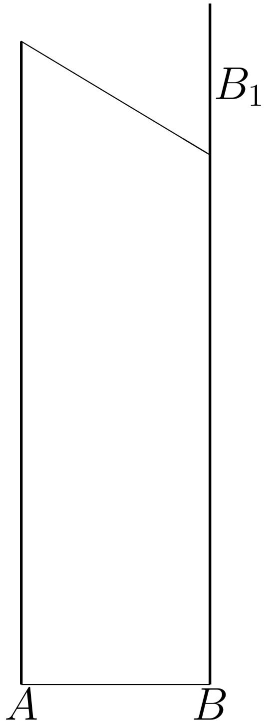
$$A_1 = A \backslash g(B),$$

II.12.2. База индукции



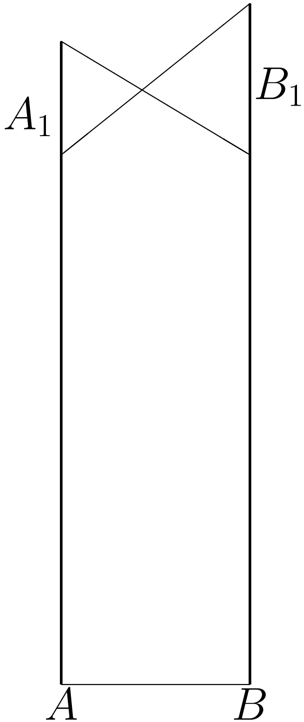
$$A_1 = A \backslash g(B),$$

II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

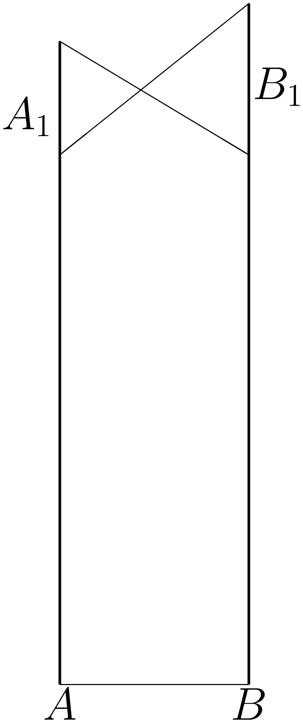
II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

Если $A_1 = \emptyset$, то положим $h = g^{-1}$.

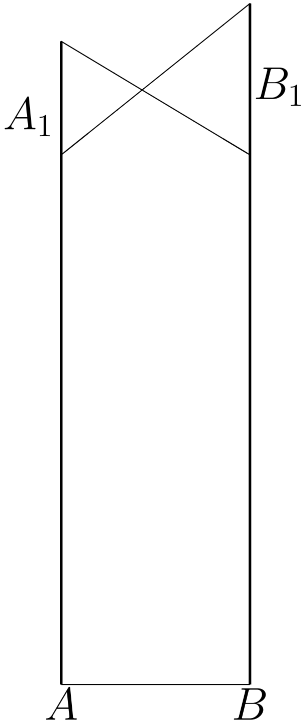
II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

Если $B_1 = \emptyset$, то положим $h = f$.

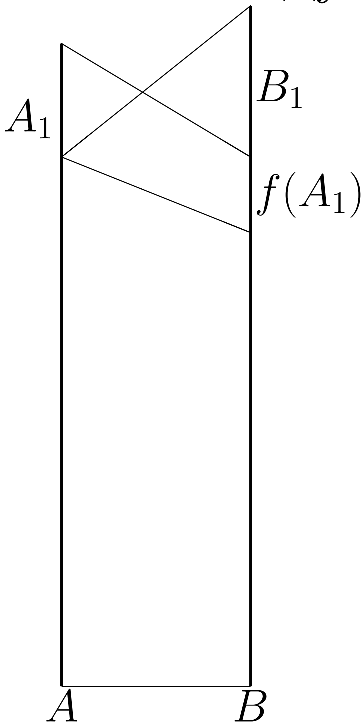
II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

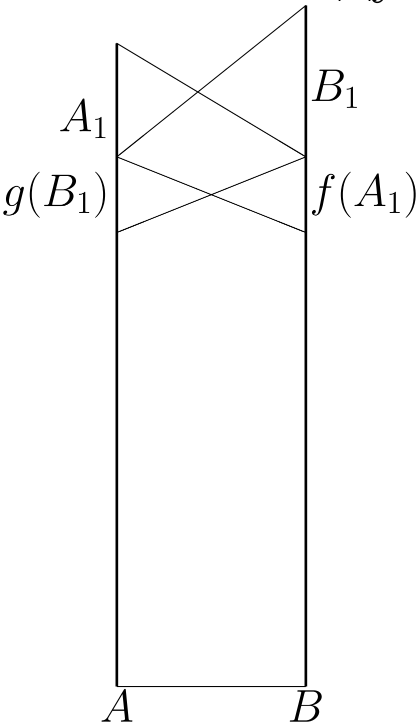
Значит, можно считать, что $A_1 \neq \emptyset$ и $B_1 \neq \emptyset$.

II.12.2. База индукции



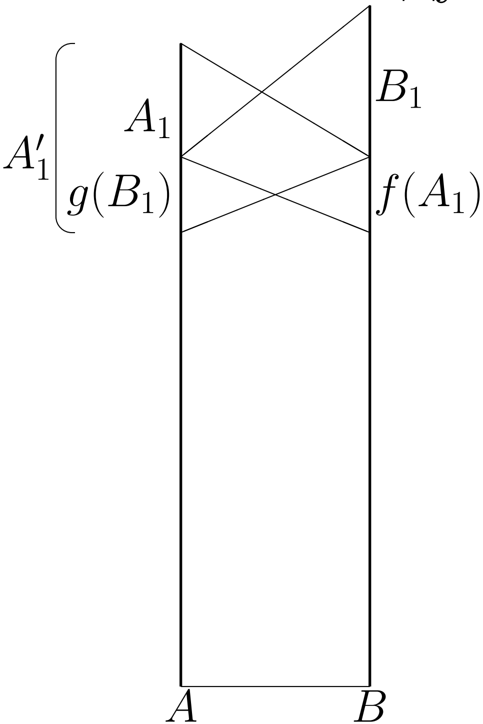
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

II.12.2. База индукции



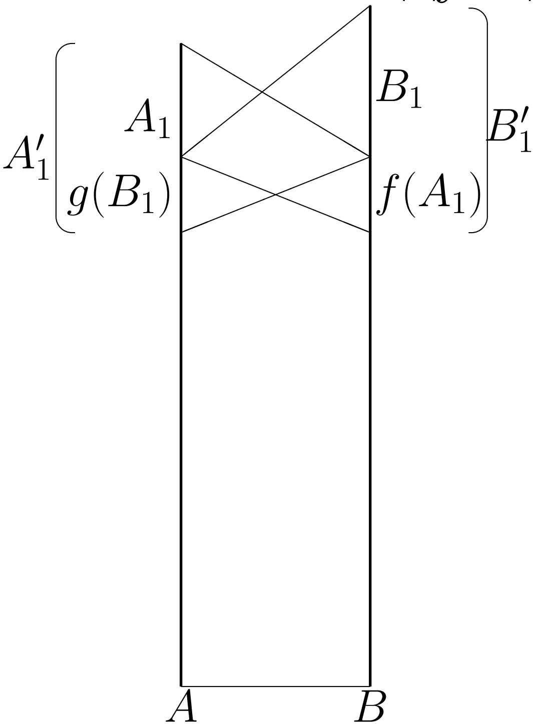
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

II.12.2. База индукции



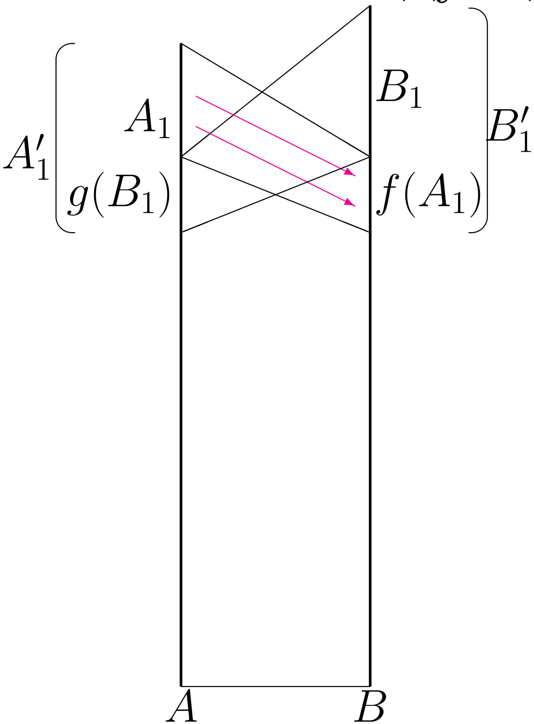
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A'_1 = A_1 \cup g(B_1),$$

II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A'_1 = A_1 \cup g(B_1), \quad B'_1 = B_1 \cup f(A_1),$$

II.12.2. База индукции

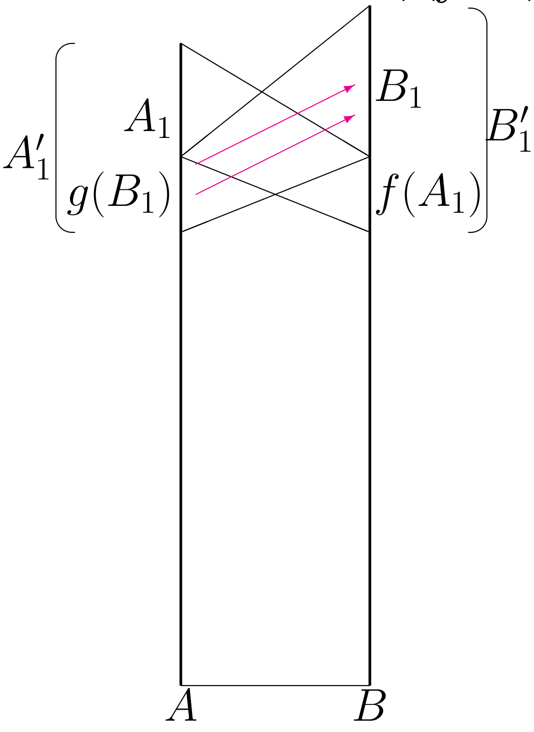


$$A_1 = A \setminus g(B), \quad B_1 = B \setminus f(A),$$

$$A_1' = A_1 \cup g(B_1), \quad B_1' = B_1 \cup f(A_1),$$

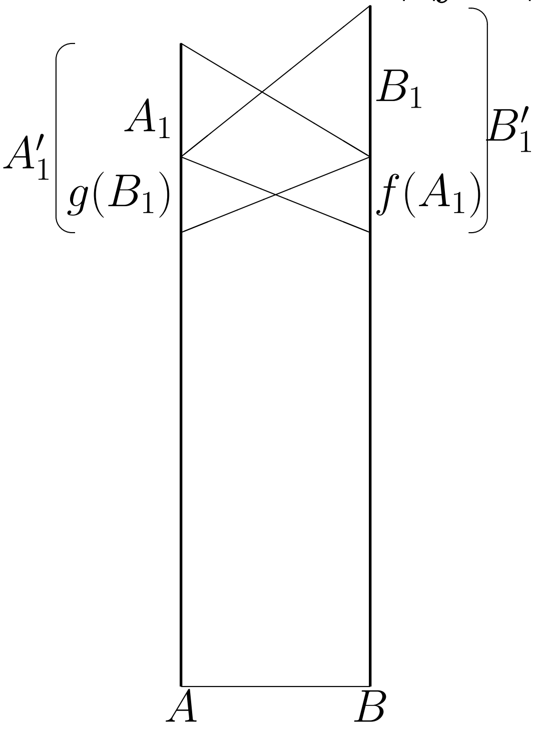
$$h_1(a) = \begin{cases} f(a) & \text{если} \quad a \in A_1, \\ & \end{cases}$$

II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A_1' = A_1 \cup g(B_1), \quad B_1' = B_1 \cup f(A_1),$$
$$h_1(a) = \begin{cases} f(a) & \text{если} \quad a \in A_1, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_1). \end{cases}$$

II.12.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A'_1 = A_1 \cup g(B_1), \quad B'_1 = B_1 \cup f(A_1),$$
$$h_1(a) = \begin{cases} f(a) & \text{если} \quad a \in A_1, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_1). \end{cases}$$

Функция h_1 является **взаимно однозначным отображением** с областью определения A'_1 и областью допустимых значений B'_1.

II.12.3. Непредельный шаг индукции

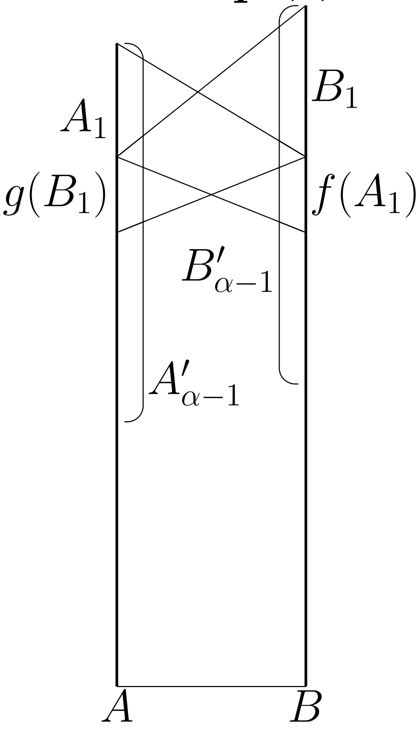
Пусть α — **непредельный ординал**, то есть **ординал** $\alpha - 1$ определен, где $\alpha - 1$ — такой **ординал**, что $\alpha = (\alpha - 1) \cup \{\alpha - 1\}$.

II.12.3. Непредельный шаг индукции

Пусть α — **непредельный ординал**, то есть **ординал** $\alpha - 1$ определен, где $\alpha - 1$ — такой **ординал**, что $\alpha = (\alpha - 1) \cup \{\alpha - 1\}$.

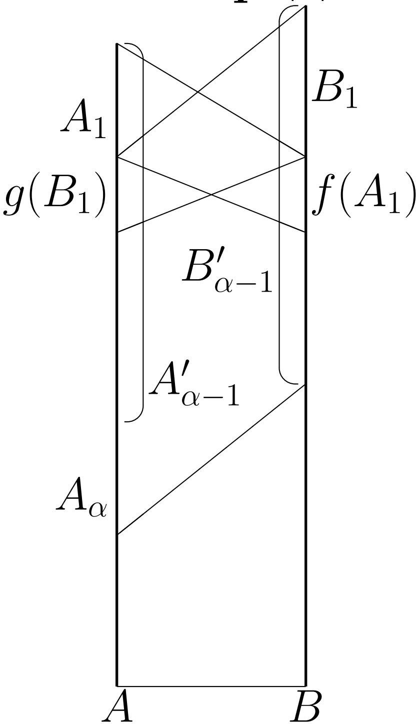
Иными словами, для **ординала** α существует наибольший **ординал** $\alpha - 1$ из всех **ординалов**, меньших α.

II.12.3. Непредельный шаг индукции

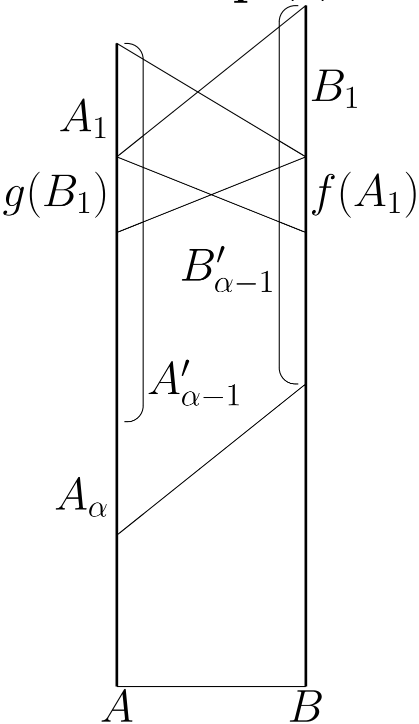


Пусть для любого **ординала** $\beta \leq (\alpha - 1)$ уже построены множества A'_β, B'_β и **взаимно однозначные отображения** h_β с областью определения A'_β и областью значений B'_β, причем для любых **ординалов** $\gamma < \beta < \alpha$ имеем $A'_\gamma \subset A'_\beta$ и $B'_\gamma \subset B'_\beta$, причем $A'_{\alpha-1} \neq \emptyset$ и $B'_{\alpha-1} \neq \emptyset$.

II.12.3. Непредельный шаг индукции

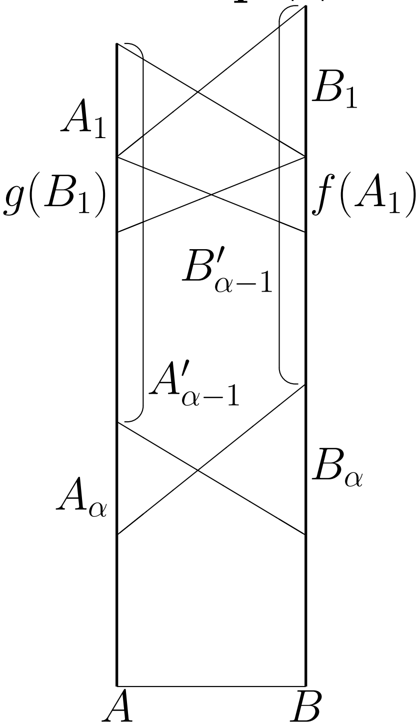


II.12.3. Непредельный шаг индукции



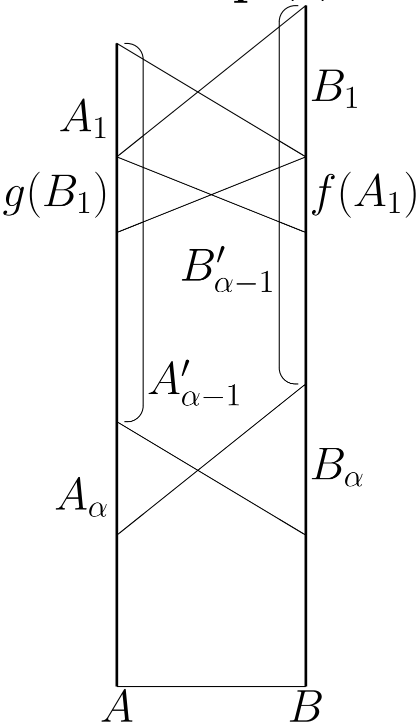
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



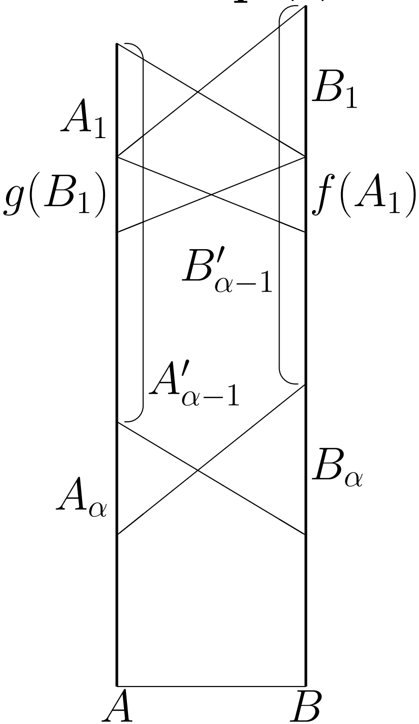
$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

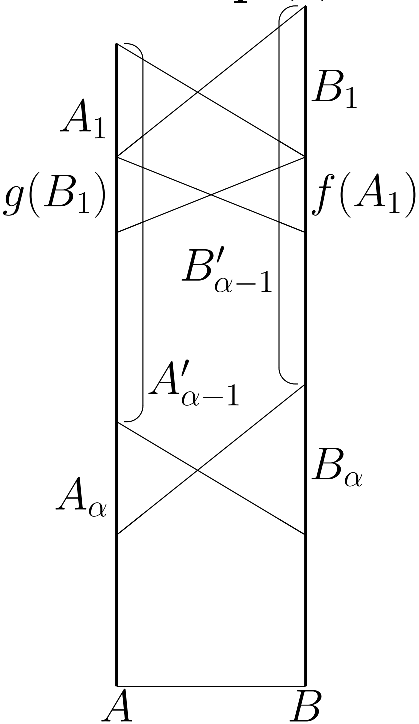
II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right), \\
B_\alpha &= B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),
\end{aligned}
$$

Если $A_\alpha = \emptyset$, то $h(x) = \begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a \in A'_{\alpha-1}, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_\alpha). \end{cases}$

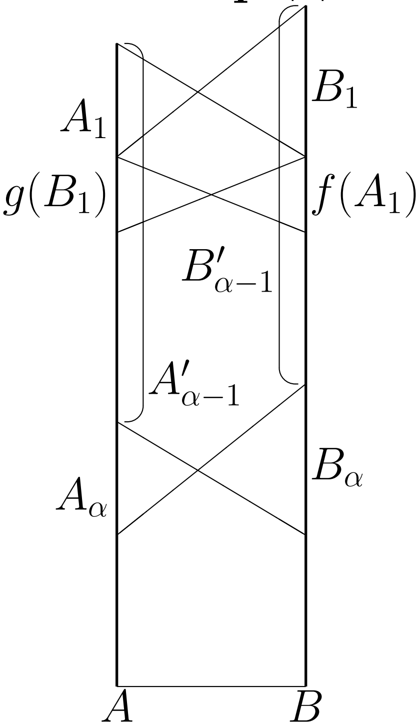
II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

Если $B_\alpha = \emptyset$, то $h(x) = \begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a \in A'_{\alpha-1}, \\ f(a) & \text{если} \quad a \in A_\alpha. \end{cases}$

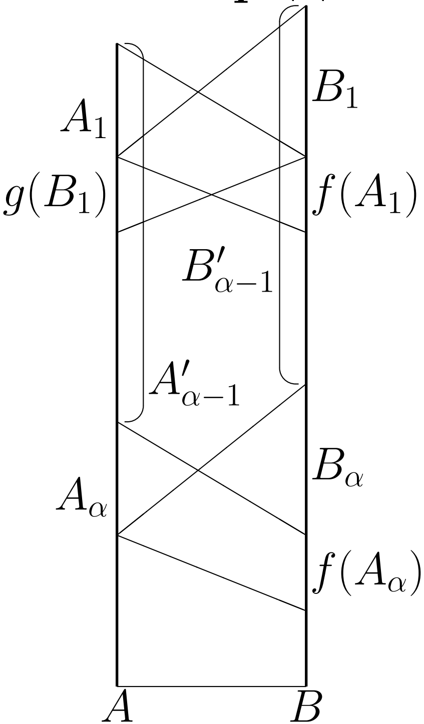
II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

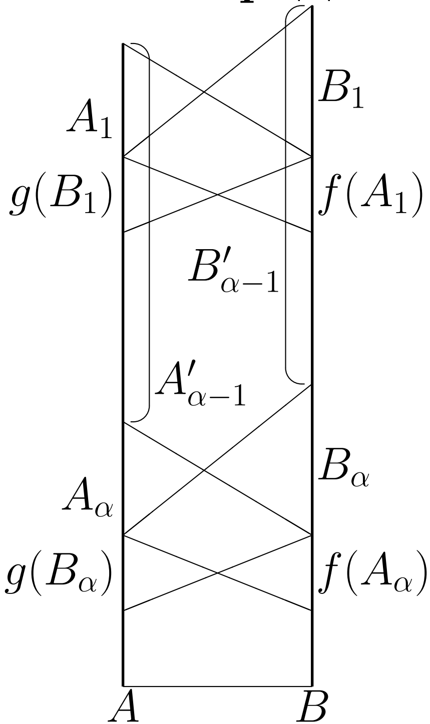
Значит, можно считать, что $A_\alpha \neq \emptyset$ и $B_\alpha \neq \emptyset$.

II.12.3. Непредельный шаг индукции



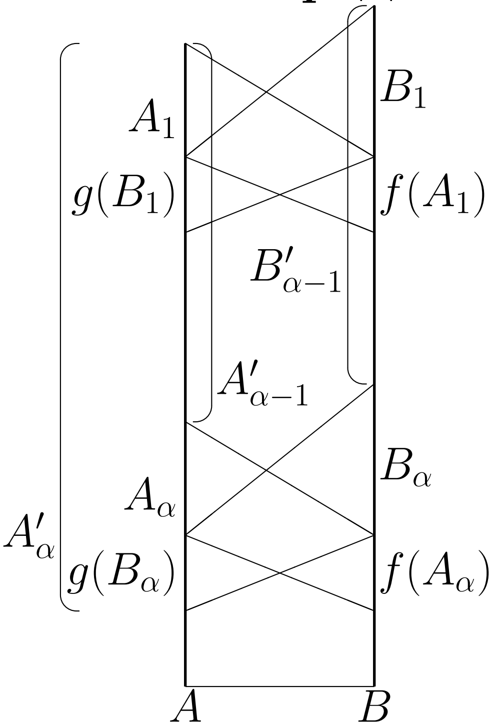
$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



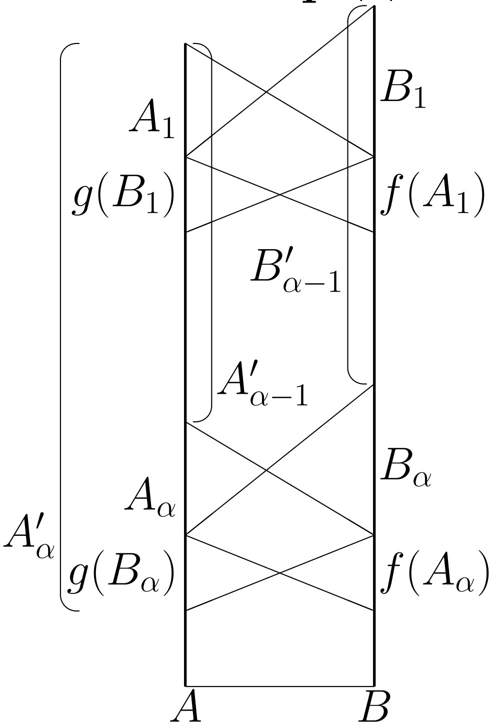
$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



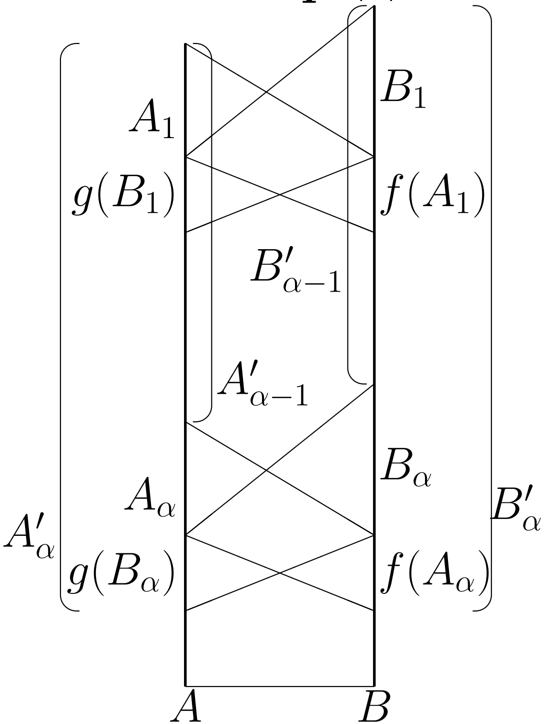
$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



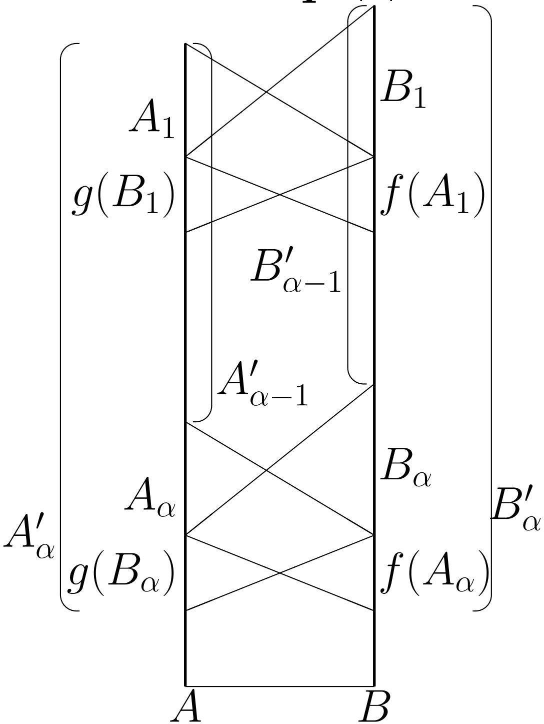
$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),\\
B_\alpha &= B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),\\
A'_\alpha &= A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),
\end{aligned}
$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



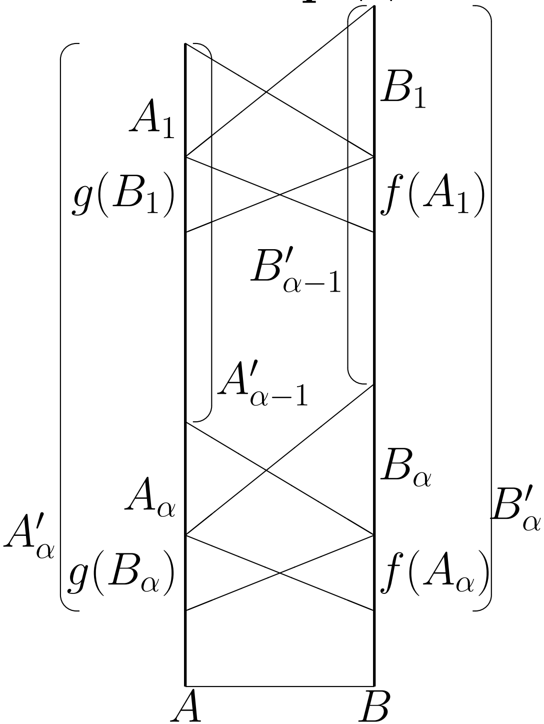
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$
$$B'_\alpha = B'_{\alpha-1} \cup B_\alpha \cup f(A_\alpha),$$

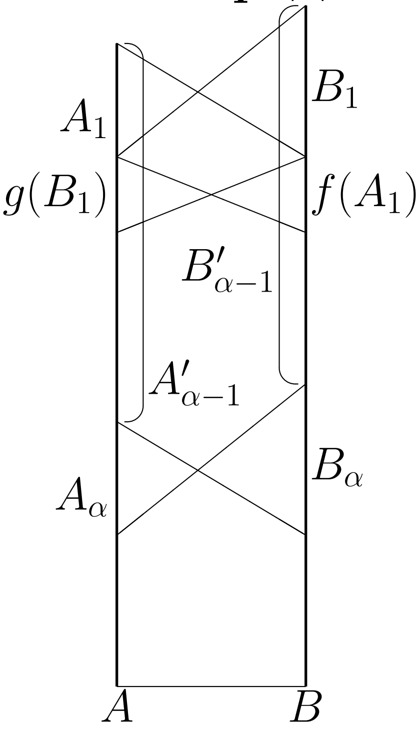
II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),\\
B_\alpha &= B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),\\
A'_\alpha &= A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),\\
B'_\alpha &= B'_{\alpha-1} \cup B_\alpha \cup f(A_\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
h_\alpha(a) = \begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a \in A'_{\alpha-1}, \\ f(a) & \text{если} \quad a \in A_\alpha, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_\alpha). \end{cases}
$$

II.12.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \backslash \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \backslash B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \backslash \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \backslash A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$
$$B'_\alpha = B'_{\alpha-1} \cup B_\alpha \cup f(A_\alpha),$$
$$h_\alpha(a) = \begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a \in A'_{\alpha-1}, \\ f(a) & \text{если} \quad a \in A_\alpha, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_\alpha). \end{cases}$$

Функция h_α является **взаимно однозначным отображением** с областью определения A'_α и областью допустимых значений B'_α.

II.12.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

II.12.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

II.12.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta$,

II.12.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta, \quad B'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B'_\beta,$

II.12.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta, \quad B'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B'_\beta$,

$h_\alpha(x) = h_\beta(x)$, где β — наименьший такой ординал, что $x \in A'_\beta$.

II.12.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

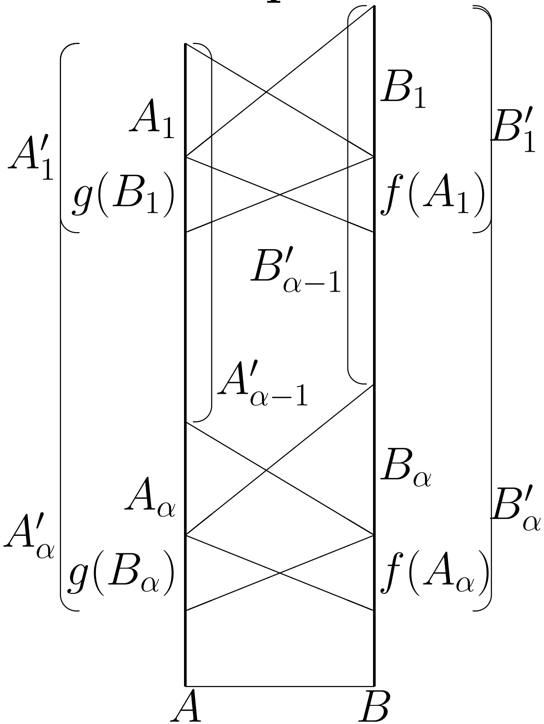
Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta, \quad B'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B'_\beta,$

$h_\alpha(x) = h_\beta(x)$, где β — наименьший такой ординал, что $x \in A'_\beta$.

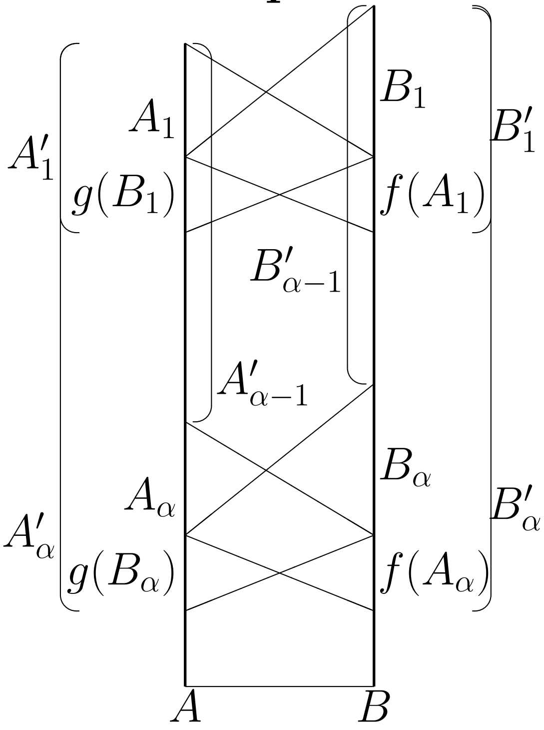
Очевидно, что набор A'_α и B'_α, h_α удовлетворяет гипотезе индукции.

II.12.5. Ограниченность параметра индукции



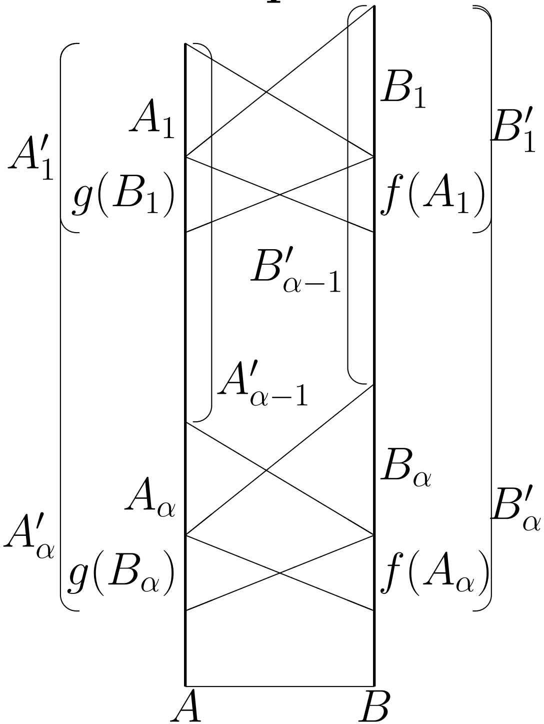
Осталось показать, что для некоторого такого θ, что $|\theta| \leq |A|$, процесс оборвется.

II.12.5. Ограниченность параметра индукции



В самом деле, если для некоторого такого **ординала** α, что $\alpha > |A|$ имеем $A_\alpha \neq A$, то можно выбрать для каждого $\beta < \alpha$ по элементу a_β из $A_{\beta+1} \setminus A_\beta$. Тогда подмножество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ из A имеет большую мощность, чем $|A|$. Это, очевидно, невозможно, так как используя определение, легко показать, что *мощность* подмножества не превосходит мощности исходного множества.

II.12.5. Ограниченность параметра индукции



В самом деле, если для некоторого такого **ординала** α, что $\alpha > |A|$ имеем $A_\alpha \neq A$, то можно выбрать для каждого $\beta < \alpha$ по элементу a_β из $A_{\beta+1} \setminus A_\beta$. Тогда подмножество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ из A имеет большую мощность, чем $|A|$. Это, очевидно, невозможно, так как используя определение, легко показать, что *мощность* подмножества не превосходит мощности исходного множества.

Рассмотреть примеры?

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{У}$ — множество всех множеств. Тогда $\mathbf{У} \in \mathbf{У}$.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{У}$ — множество всех множеств. Тогда $\mathbf{У} \in \mathbf{У}$.

Назовем множество со свойством $M \in M$ «необычным», а множество со свойством $M \notin M$ — «обычным».

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

Обозначим через K множество всех «обычных» множеств (не являющихся «необычными»):

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

Каково K — «обычное» или «необычное»?

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) Пусть K — «обычное» множество:

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $K \notin K =$

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{X \,\middle|\, X \notin X\right\}.$$

1) $K \notin K = \left\{X \,\middle|\, X \notin X\right\}$

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \right\}$

Для $X = K$ выполняется характеристическое свойство из определения множества K.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow$

Для $X = K$ выполняется характеристическое свойство из определения множества K.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{K \notin K} \right\} \;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

Для $X = K$ выполняется характеристическое свойство из определения множества K.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \Big\{ X \,\Big|\, X \notin X \Big\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \Big\{ X \,\Big|\, \underbrace{\underline{\mathbf{X}} \notin \underline{\mathbf{X}}}_{K \notin K} \Big\} \;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) Остается рассмотреть случай, когда K — «необычное» множество.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \Big\{ X \,\Big|\, X \notin X \Big\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \Big\{ X \,\Big|\, \underbrace{\underline{\mathbf{X}} \notin \underline{\mathbf{X}}}_{K \notin K} \Big\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) $K \in K =$

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{K \notin K} \right\} \;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $K \in K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}$

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \Big\{ X \,\Big|\, X \notin X \Big\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \Big\{ X \,\Big|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{K \notin K} \Big\} \;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K} \in \mathbf{K} = \Big\{ X \,\Big|\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \Big\} \;\Rightarrow$

В характеристическом свойстве из определения множества K положим $X = K$.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{K \notin K} \right\} \;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K} \in \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{\exists X \;X = K} \right\} \;\Rightarrow$

В характеристическом свойстве из определения множества K положим $X = K$.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{K \notin K} \right\} \;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K} \in \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{\exists X\ X = K} \right\} \;\Rightarrow\; K \notin K,$ противоречие.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} \Rightarrow$ Выполняется характ. свойство для $K \Rightarrow K \in K$, противоречие.

2) $\mathbf{K} \in \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{\exists X\ X = K} \right\} \Rightarrow K \notin K$, противоречие.

III. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \right\}.$$

1) $K \notin K \;\Rightarrow\;$ $\begin{array}{c}\text{Выполняется характ.}\\ \text{свойство для } K\end{array}$ $\;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K} \in K \;\Rightarrow\;$ $\begin{array}{c}\text{Т.к. для всех эл-тов из } K\\ \text{выполняется характ.св-во}\end{array}$ $\;\Rightarrow\; K \notin K,$ противоречие.

Теорема доказана.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?