Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основные понятия теории множеств

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Неопределяемые понятия математики

Чем более развитой является наука, тем меньше в ней неопределяемых понятий. Математика может быть построена с помощью только двух неопределяемых понятий: *множество* и *элемент множества*.

I. Неопределяемые понятия математики

Чем более развитой является наука, тем меньше в ней неопределяемых понятий. Математика может быть построена с помощью только двух неопределяемых понятий: *множество* и *элемент множества*.

Так как понятия *множество* и *элемент множества* являются неопределяемыми понятиями математики, то определения этих объектов в математической литературе искать не следует.

I. Неопределяемые понятия математики

Хотя все математические понятия сводятся в конечном счете к понятиям *множество* и *элемент множества*, при изучении курса математики приходится вводить понятия, которые практически считаются неопределяемыми.

I. Неопределяемые понятия математики

Хотя все математические понятия сводятся в конечном счете к понятиям *множество* и *элемент множества*, при изучении курса математики приходится вводить понятия, которые практически считаются неопределяемыми.

Дело в том, что сведение понятия «число» к соответствующим множествам (например, кардинальным и ординальным числам), так же как и сведение понятия «отображение» ко множествам, представляет собой процедуру, с одной стороны достаточно сложную для понимания, с другой стороны почти бесполезную для решения «практических» задач. Это пример естественного противоречия, вызванного значительным отрывом математики от остальных наук по уровню абстрагирования.

II. Множество

«Объекты» из M называются **элементами** множества M, и про элементы из M говорят, что они **содержатся** в множестве M. Как отмечалось выше, понятие «элемент множества» и понятие «содержаться в множестве» являются в математике неопределяемыми. Утверждение «x является элементом множества M» символически записывается так: $x \in M$.

II. Множество

Мы ограничимся рамками «наивной теории множеств», и будем считать, что **множество** — это любая совокупность M некоторых *попарно различных* «объектов».

II. Множество

Мы ограничимся рамками «наивной теории множеств», и будем считать, что **множество** — это любая совокупность M некоторых *попарно различных* «объектов».

«Попарно различных» означает, что для любых «объектов» x и y мы можем сказать, различны эти «объекты» или нет. Например, для функций $f(x) = x^2 + 2x + 1$ и $g(x) = (x + 1)^2$ мы можем сказать, что это одна и та же функция, заданная разными выражениями.

II. Множество

Мы ограничимся рамками «наивной теории множеств», и будем считать, что **множество** — это любая совокупность M некоторых *попарно различных* «объектов».

«Попарно различных» означает, что для любых «объектов» x и y мы можем сказать, различны эти «объекты» или нет. Например, для функций $f(x) = x^2 + 2x + 1$ и $g(x) = (x+1)^2$ мы можем сказать, что это одна и та же функция, заданная разными выражениями.

«Набор» электронов не образует, вообще говоря, множества, так как все электроны считаются неразличимыми.

II.1. Условие определенности множества

Множество M задано тогда и только тогда, когда для любого «объекта» x можно ответить на вопрос, принадлежит ли этот «объект» множеству M или нет (иными словами, является ли x элементом множества M).

II.1. Условие определенности множества

Множество M задано тогда и только тогда, когда для любого «объекта» x можно ответить на вопрос, принадлежит ли этот «объект» множеству M или нет (иными словами, является ли x элементом множества M).

Отметим, что мы не утверждаем существования конструктивной процедуры для ответа на вопрос о принадлежности произвольного «объекта» множеству M, мы лишь утверждаем, что на этот вопрос в принципе можно ответить, хотя, быть может, мы не знаем, каким именно образом.

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Внимание! Это важно!

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы относительно множества

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы относительно множества сводятся

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы относительно множества сводятся к его элементам.

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы относительно множества сводятся к его элементам.

Мы будем говорить, что множество A **состоит** из элементов со свойством Ф тогда и только тогда, когда, *во-первых,*

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы относительно множества сводятся к его элементам.

Мы будем говорить, что множество A **состоит** из элементов со свойством Φ тогда и только тогда, когда, *во-первых*, всякий «объект», обладающий свойством Φ, принадлежит множеству A и, *во-вторых*,

II.2. Аксиома полноты

Множество полностью определяется своими элементами.

Когда мы говорим о множестве, нас могут не интересовать свойства элементов, характер их взаимодействия друг с другом и т.п. — важно лишь, что

1) мы можем точно установить, содержится ли элемент в данном множестве;

2) для пары элементов, совпадают ли они.

Все вопросы относительно множества сводятся к его элементам.

Мы будем говорить, что множество A **состоит** из элементов со свойством Φ тогда и только тогда, когда, *во-первых,* всякий «объект», обладающий свойством Φ, принадлежит множеству A и, *во-вторых,* ни один «объект», не обладающий свойством Φ, множеству A не принадлежит.

II.3. Стандартные способы представления множества

1) Списком элементов: $M = \{a, b, \ldots\}$, где в фигурных скобках записаны все элементы множества M, и только они.

Рассмотреть пример?

II.3. Стандартные способы представления множества

1) Списком элементов: $M = \{a, b, \ldots\}$, где в фигурных скобках записаны все элементы множества M, и только они.

Этот способ удобен в случае, когда множество M состоит из небольшого количества элементов или когда по небольшому фрагменту списка элементов можно понять «устройство» всего списка, например,
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел или
$M = \{\text{папа}, \text{мама}, \text{дочь}, \text{сын}\}$ — множество, элементами которого являются только эти четыре слова.

II.3. Стандартные способы представления множества

1) Списком элементов: $M = \{a, b, \ldots\}$, где в фигурных скобках записаны все элементы множества M, и только они.

Этот способ удобен в случае, когда множество M состоит из небольшого количества элементов или когда по небольшому фрагменту списка элементов можно понять «устройство» всего списка, например,

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел или

$M = \{\text{папа}, \text{мама}, \text{дочь}, \text{сын}\}$ — множество, элементами которого являются только эти четыре слова.

Этот способ корректен, так как при таком задании мы можем ответить на выделенный рамочкой вопрос о том, принадлежит ли данный «объект» данному множеству.

II.3. Стандартные способы представления множества

1) Списком элементов: $M = \{a, b, \ldots\}$, где в фигурных скобках записаны все элементы множества M, и только они.

На самом деле иногда не обязательно выписывать *все* элементы данного множества. Например, множество всех четных натуральных чисел бесконечно, и поэтому выписать все его элементы невозможно, но по достаточно длинному фрагменту списка $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$ нетрудно понять «особенности устройства» этого множества и

II.3. Стандартные способы представления множества

1) Списком элементов: $M = \{a, b, \ldots\}$, где в фигурных скобках записаны все элементы множества M, и только они.

На самом деле иногда не обязательно выписывать *все* элементы данного множества. Например, множество всех четных натуральных чисел бесконечно, и поэтому выписать все его элементы невозможно, но по достаточно длинному фрагменту списка $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$ нетрудно понять «особенности устройства» этого множества и ответить на основной вопрос о принадлежности элемента этому множеству.

II.3. Стандартные способы представления множества

1) Списком элементов: $M = \{a, b, \ldots\}$, где в фигурных скобках записаны все элементы множества M, и только они.

На самом деле иногда не обязательно выписывать *все* элементы данного множества. Например, множество всех четных натуральных чисел бесконечно, и поэтому выписать все его элементы невозможно, но по достаточно длинному фрагменту списка $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$ нетрудно понять «особенности устройства» этого множества и ответить на основной вопрос о принадлежности элемента этому множеству.

Ясно, что $12 \in \mathbb{N}_2$, а число 9 или выражение $\sin^2 x$ — не являются элементами множества $\mathbb{N}_2$.

II.3. Стандартные способы представления множества

2) С помощью характеристического свойства:

$$M = \left\{ x \,\middle|\, \text{ критерий того, что } x \in M \right\}.$$

II.3. Стандартные способы представления множества

2) С помощью характеристического свойства:

$$M = \left\{ x \,\middle|\, \text{ критерий того, что } x \in M \right\}.$$

Например, множество всех четных натуральных чисел можно записать так:

$$M = \{n \,|\, n = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}.$$

II.3. Стандартные способы представления множества

2) С помощью характеристического свойства:

$$M = \left\{ x \,\middle|\, \text{ критерий того, что } x \in M \right\}.$$

Другой пример: $M = \left\{ x \,\middle|\, x^2 - 3x + 2 = 0 \right\} = \{1, 2\}$ — множество решений уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Этот способ также корректен, так как для ответа на вопрос *принадлежит ли данный «объект» данному множеству* достаточно проверить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству этого множества.

Рассмотреть пример?

II.4. Пустое множество

Подобно тому, как для чисел удобно ввести число 0, означающее «нисколько», так и для множеств удобно рассмотреть множество, не содержащее ни одного элемента, его называют **пустым** и обозначают символом $\emptyset$.

II.4. Пустое множество

Подобно тому, как для чисел удобно ввести число 0, означающее «нисколько», так и для множеств удобно рассмотреть множество, не содержащее ни одного элемента, его называют **пустым** и обозначают символом $\emptyset$.

Является ли множество $\{\emptyset\}$ пустым?

III. Алгебраический подход к заданию множеств

Алгебраический подход к заданию множеств состоит из трёх компонентов:

III. Алгебраический подход к заданию множеств

Алгебраический подход к заданию множеств состоит из трёх компонентов:

— система базовых элементов;

III. Алгебраический подход к заданию множеств

Алгебраический подход к заданию множеств состоит из трёх компонентов:

— система базовых элементов;

— система типовых преобразований (например, **алгебраических операций**);

III. Алгебраический подход к заданию множеств

Алгебраический подход к заданию множеств состоит из трёх компонентов:

— система базовых элементов;

— система типовых преобразований (например, **алгебраических операций**);

— механизм аппроксимирования.

III.1. Подмножество

Подмножеством называется

III.1. Подмножество

Подмножеством называется часть множества.

Корректное определение?

III.1. Подмножество

Подмножеством называется часть множества.

Корректное определение?

Термин «часть» не входит в состав стандартных терминов теории множеств, поэтому отсекается «бритвой Оккама».

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество,

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество, все элементы которого входят в исходное (большое?) множество.

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество, все элементы которого входят в исходное (большое?) множество.

Неуклюже!!!

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество, все элементы которого входят в исходное (большое?) множество.

Как ссылаться на эти множества в тексте определения?

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество, все элементы которого входят в исходное (большое?) множество.

Как ссылаться на эти множества в тексте определения?

Надо обозначить эти множества буквами!

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество, все элементы которого входят в исходное (большое?) множество.

Множество** A **называется подмножеством множества** B **тогда и только тогда, когда все элементы множества** A **содержатся во множестве** B**.

III.1. Подмножество

Подмножеством называется множество, все элементы которого входят в исходное (большое?) множество.

Множество A называется подмножеством множества B тогда и только тогда, когда все элементы множества A содержатся во множестве B.

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \;\Rightarrow\; x \in B)\,. \tag{1}$$

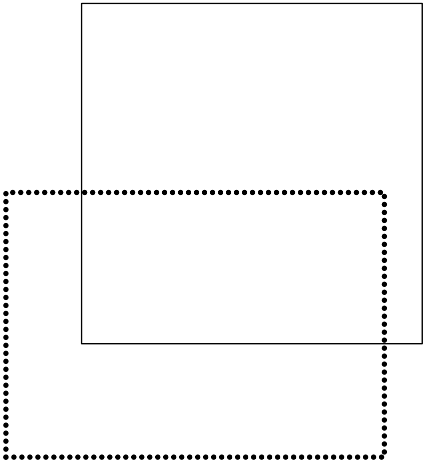
III.2. Операции алгебры подмножеств

Для задания множеств с помощью формул нам следует определить операции на совокупности множеств.

III.2.1. Пересечение множеств

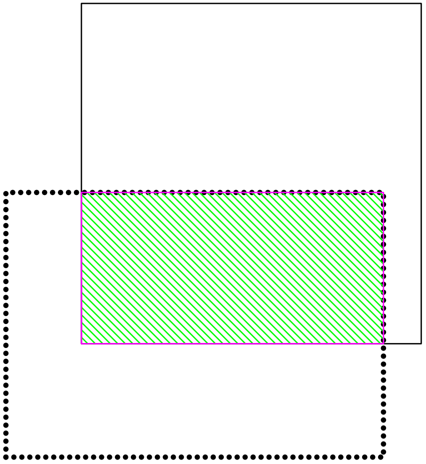
Пересечение — это...

III.2.1. Пересечение множеств



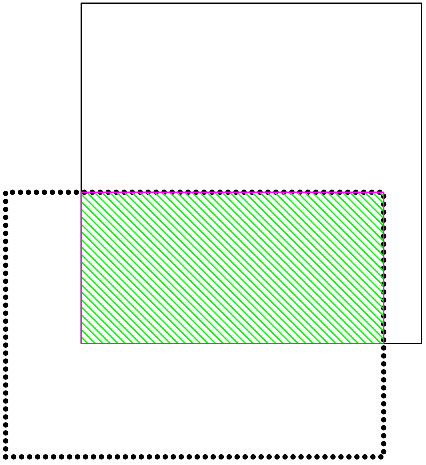
Пересечение — это...

III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение — это...

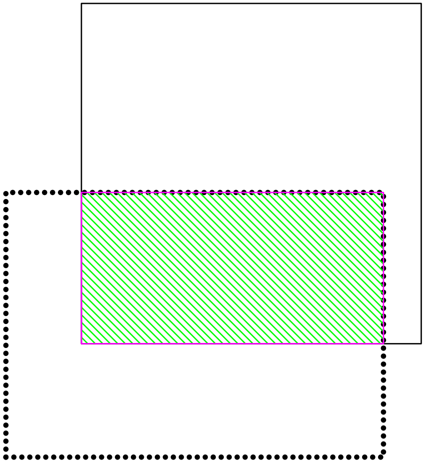
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение — это «общая часть» множеств.

Устроит ли нас это «определение»?

III.2.1. Пересечение множеств

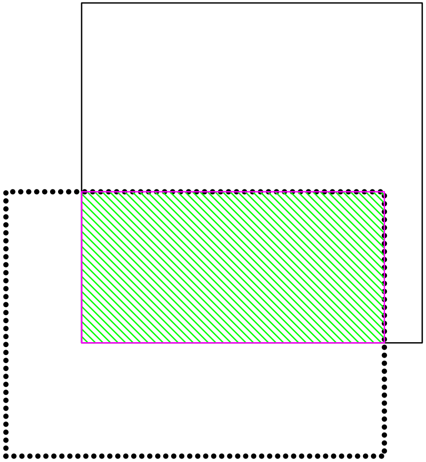


Пересечение — это «общая часть» множеств.

Устроит ли нас это «определение»?

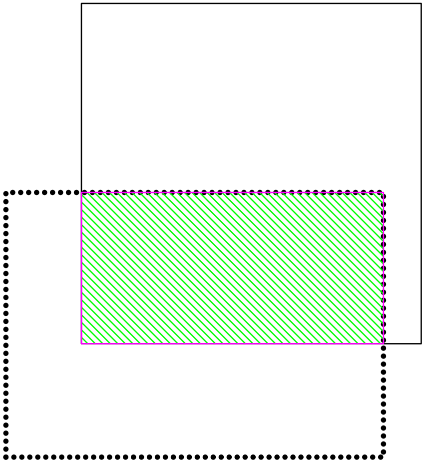
Слово «часть» не является математическим термином.

III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение — это...

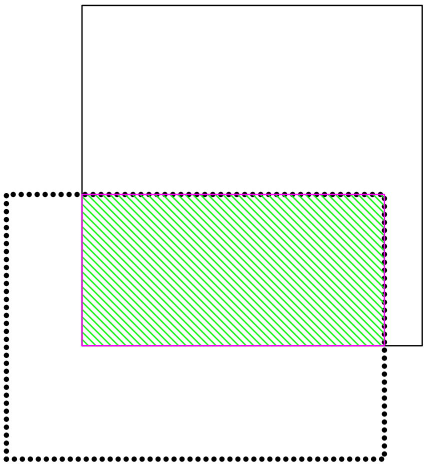
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение — это...

Нам придется ссылаться на множества, пересечение которых рассматривается. Для этого

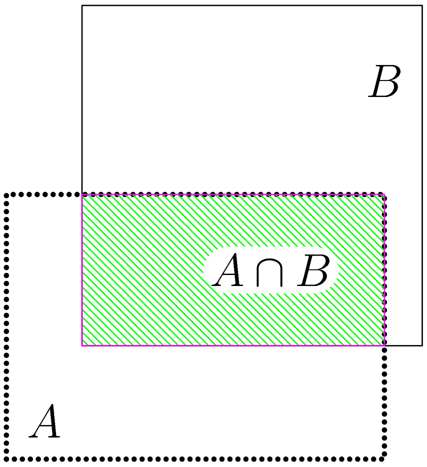
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение — это множество...

Нам придется ссылаться на множества, пересечение которых рассматривается. Для этого обозначим их буквами.

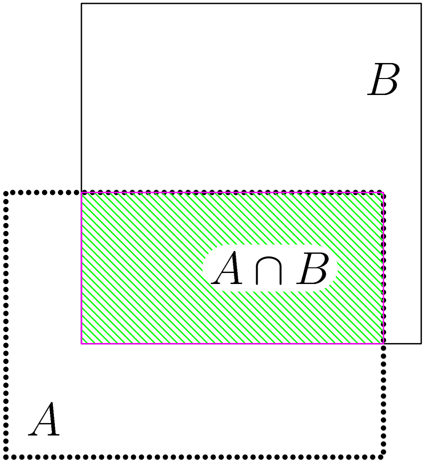
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение — это множество...

Нам придется ссылаться на множества, пересечение которых рассматривается. Для этого обозначим их буквами.

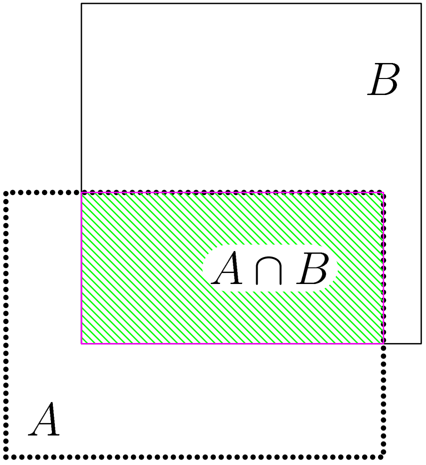
III.2.1. Пересечение множеств



Родовое понятие?

Пересечение множеств A *и* B — *это...*

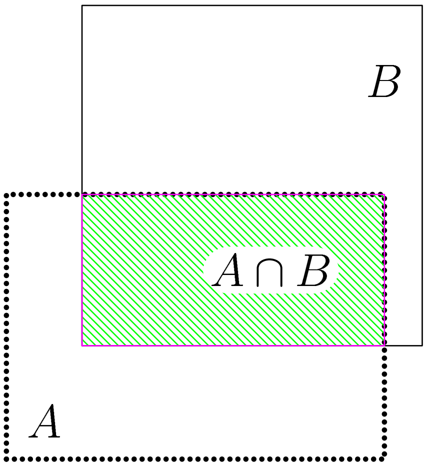
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение множеств A *и* B — *это...*

Родовое понятие — множество!

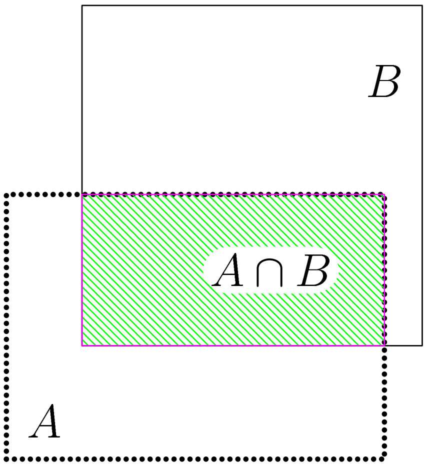
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение множеств A *и* B *— это множество...*

Характеристическое свойство?

III.2.1. Пересечение множеств

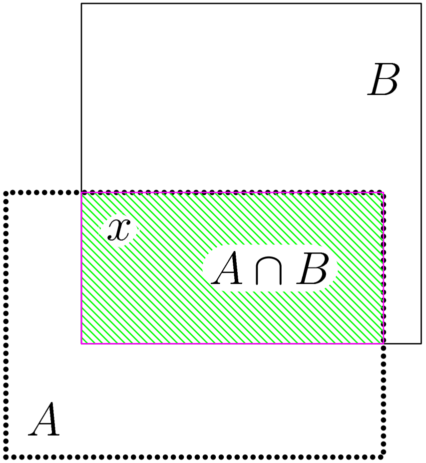


Пересечение множеств A и B — это множество…

Характеристическое свойство?

Согласно **аксиоме полноты**, характеристическое свойство следует сформулировать в терминах элементов этих множеств.

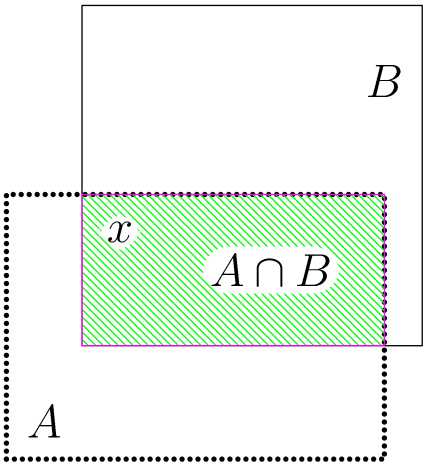
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение множеств A *и* B *— это множество...*

Элемент x принадлежит $A \cap B$, если

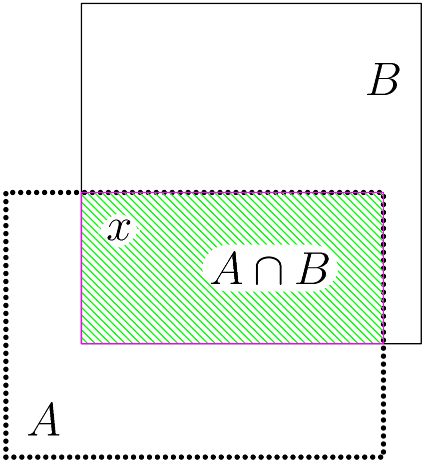
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение множеств A и B — это множество...

Элемент x принадлежит $A \cap B$, если $x \in A$ и $x \in B$, т.е.

III.2.1. Пересечение множеств

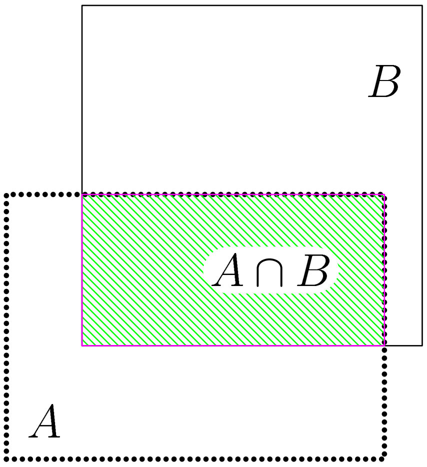


Пересечение множеств A *и* B *— это множество...*

Элемент x принадлежит $A \cap B$, если $x \in A$ и $x \in B$, т.е.

$$\begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

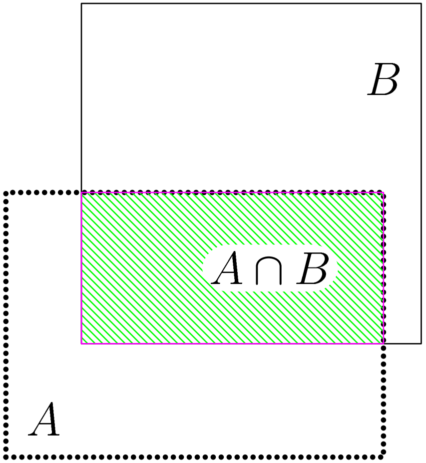
III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

Слишком много слов естественного языка.

III.2.1. Пересечение множеств

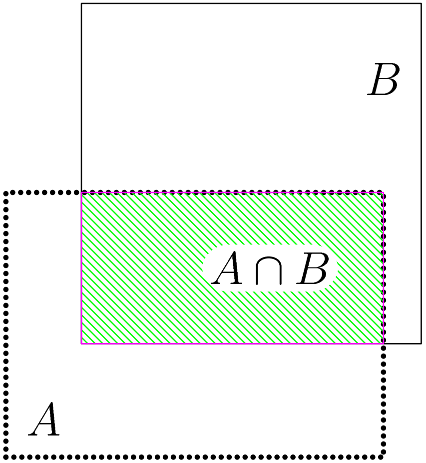


Пересечение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

Пересечением множеств A **и** B называется множество $A \cap B$:

$$A \cap B = \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases} \right\}.$$

III.2.1. Пересечение множеств



Пересечение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

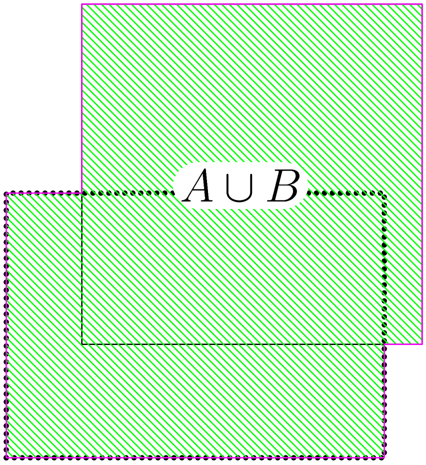
Пересечением множеств A **и** B называется множество $A \cap B$:

$$A \cap B = \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases} \right\}.$$

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases} \qquad (2)$$

III.2.2. Объединение множеств

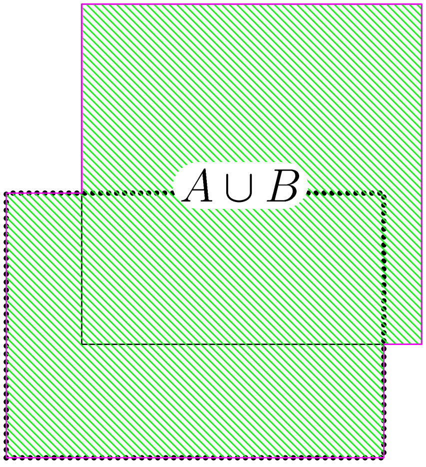
Пересечение множеств *A* ***и*** *B — это множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B.*



Объединение множеств...

III.2.2. Объединение множеств

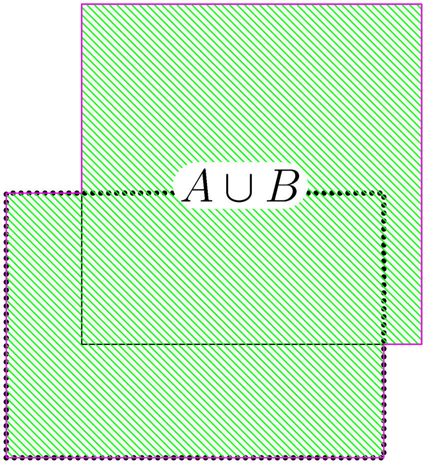
Пересечение множеств A ***и*** B — *это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.



Объединение множеств A ***и*** B — *это множество* $A \cup B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству* A *или множеству* B.

III.2.2. Объединение множеств

Пересечение множеств *A* ***и*** *B — это множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B.*



Объединение множеств *A* ***и*** *B — это множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B.*

Здесь «или» — неисключающее, т.е. не «либо..., либо...»

III.2.2. Объединение множеств

Пересечение множеств A ***и*** B — *это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

Объединение множеств A ***и*** B — *это множество* $A \cup B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству* A *или множеству* B.

III.2.2. Объединение множеств

Пересечение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

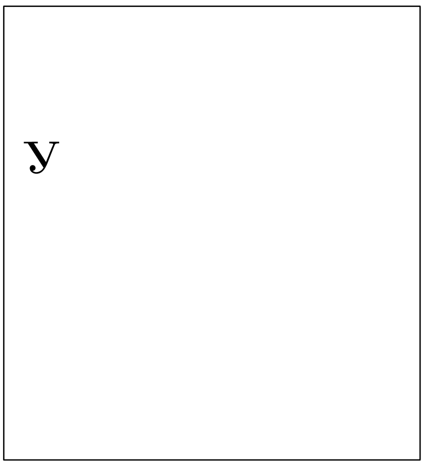
Объединение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cup B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству* A *или множеству* B.

$$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in B. \end{array} \right.$$

III.2.3. Дополнение ко множеству

Пересечение множеств A ***и*** B — *это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

Объединение множеств A ***и*** B — *это множество* $A \cup B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству* A *или множеству* B.

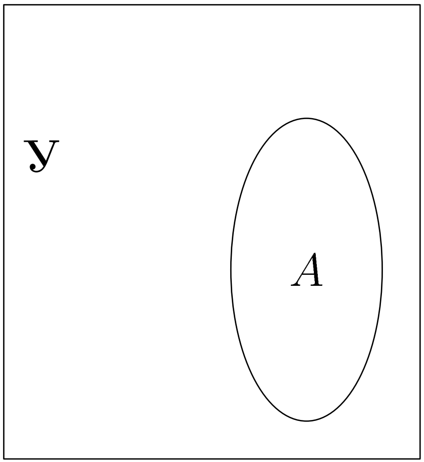


Пусть **У** — *фиксированное множество,*

III.2.3. Дополнение ко множеству

Пересечение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cap B$*, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A*, и множеству* B*.*

Объединение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cup B$*, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству* A *или множеству* B*.*

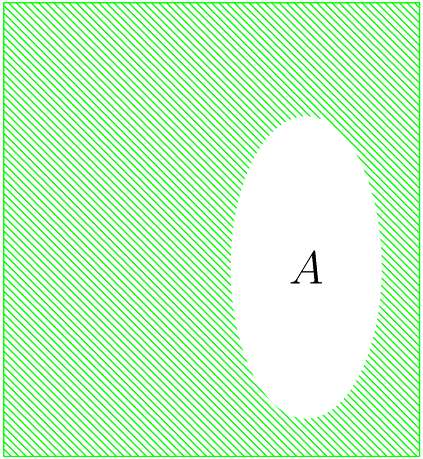


Пусть **У** *— фиксированное множество,* $A \subseteq B$*.*

III.2.3. Дополнение ко множеству

***Пересечение множеств** A **и** B — это множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B.*

***Объединение множеств** A **и** B — это множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B.*

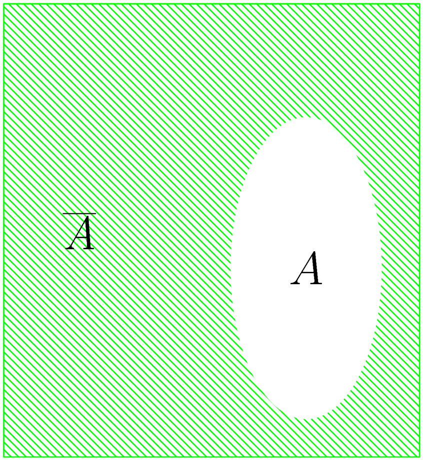


Пусть **У** *— фиксированное множество,* $A \subseteq B$. ***Дополнением ко множеству** A называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A.*

III.2.3. Дополнение ко множеству

Пересечение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cap B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* A, *и множеству* B.

Объединение множеств A ***и*** B *— это множество* $A \cup B$, *состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству* A *или множеству* B.



Пусть **У** *— фиксированное множество,* $A \subseteq B$. ***Дополнением ко множеству*** A *называется множество* $\overline{A}$, *состоящее из всех тех элементов, которые не принадлежат множеству* A.

III.2.4. Декартово произведение множеств

Определение 1. ***Декартовым произведением множеств*** *A и B называется множество упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит A, а вторая — B:*

$$A \times B = \left\{ (a; b) \,\middle|\, \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}. \tag{3}$$

III.2.4. Декартово произведение множеств

Определение 1. ***Декартовым произведением множеств*** *A и B называется множество упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит A, а вторая — B:*

$$A \times B = \left\{ (a; b) \,\middle|\, \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \right\}. \tag{3}$$

Например,

$$\{0;\ 1;\ 2\} \times \{a;\ b\} = \big\{(0; a);\ (0; b);\ (1; a);\ (1; b);\ (2; a);\ (2; b)\big\}.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?