Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Булевы алгебры

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Определение булевой алгебры **5**

II. Элементарные теоремы теории булевых алгебр **22**

II.1. Критерий обратного элемента 23
II.2. Следствие о дополнении к **0** и **1** 35
II.3. Теорема об инволютивности «дополнения» 36
II.4. Теорема об однозначности «дополнения» 38
II.5. Закон поглощения (сложение) 40
II.6. Закон поглощения (произведение) 46
II.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым 51
II.8. Законы де-Моргана 56
II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение) . . . 74
II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем) 86

II.11. Список элементарных теорем 100

III. Некоторые понятия теории булевых алгебр 101

III.1. Теорема о двойственной булевой алгебре 102

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре 105

III.3. Критерий индуцированного отношения частичного порядка 129

III.4. Определение атома булевой алгебры 131

III.5. Критерий атома 132

IV. Свойства атомов 133

IV.1. Теорема о произведении атомов 134

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением 136

IV.3. Теорема о **1** конечной булевой алгебры 150

IV.4. Теорема об элементах конечной БА 172

IV.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр . . 199
IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре 204

V. Связь булевых алгебр с решетками **236**

VI. Отличия булевой от линейной алгебры **240**

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1.	а)	$x + y = y + x;$	б)	$x * y = y * x;$
A2.	а)	$(x + y) + z = x + (y + z);$	б)	$(x * y) * z = x * (y * z);$
A3.	а)	$(x + y) * z = x * z + y * z;$	б)	$(x * y) + z = (x + z) * (y + z);$

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

А1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

А2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

А3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

А4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

A6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

А1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

А2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

А3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

А4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

А5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

А6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

А7. а) $x + \mathbf{0} = x$; б) $x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

I. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

A6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

A7. а) $x + \mathbf{0} = x$; б) $x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

A8. а) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$; б) $x * \overline{x} = \mathbf{0}$.

I. Определение булевой алгебры

Заметим, что мы *не знаем*, что представляет собой множество B, как определены операции $+, *$ и $^{-}$, и какие элементы выбраны в качестве $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

I. Определение булевой алгебры

Заметим, что мы *не знаем*, что представляет собой множество B, как определены операции $+, *$ и $^{-}$, и какие элементы выбраны в качестве $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

Нас интересуют только *свойства* этих операций. Таким образом, символы $B, +, *, ^{-}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ можно рассматривать, как *переменные*, и придавать им те или иные значения.

I. Определение булевой алгебры

Заметим, что мы *не знаем*, что представляет собой множество B, как определены операции $+, *$ и $\bar{\ }$, и какие элементы выбраны в качестве $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

Нас интересуют только *свойства* этих операций. Таким образом, символы $B, +, *, \bar{\ }, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ можно рассматривать, как *переменные*, и придавать им те или иные значения.

Рассмотреть пример?

I. Определение булевой алгебры

Разумеется, при других «значениях переменных» $B, \mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, ^{-}$ утверждения A1–A8 могут и не выполняться, тогда соответствующая алгебра не будет булевой алгеброй. Это напоминает ситуацию, возникающую при решении уравнений. В самом деле, существует бесконечно много решений уравнения $x + y = 6$. Если положить $x = 2$, $y = 4$, то $(x, y) = (2, 4)$ — решение уравнения, а если $x = 3$, $y = 2$ — то $(x, y) = (3, 2)$ — не решение. Главное отличие состоит в том, что у нас сейчас и «+» рассматривается, как переменная! То есть можно нужным образом подбирать операцию. Например, если считать, что «крестиком» (то есть $+$) обозначена операция «умножение», то $(x, y) = (3, 2)$ уже будет решением уравнения $x + y = 6$.

I. Определение булевой алгебры

Роль аксиом, подобных **аксиомам булевых алгебр** подобна, в некотором смысле, роли тестов для определения исправности аппарата (например, калькулятора или компьютера и т.п.). Чтобы «протестировать» ту или иную алгебру на «булевость», надо «прогнать ее через аксиомы», то есть проверить, выполняются ли эти аксиомы в «тестируемой» алгебре.

I. Определение булевой алгебры

Роль аксиом, подобных **аксиомам булевых алгебр** подобна, в некотором смысле, роли тестов для определения исправности аппарата (например, калькулятора или компьютера и т.п.). Чтобы «протестировать» ту или иную алгебру на «булевость», надо «прогнать ее через аксиомы», то есть проверить, выполняются ли эти аксиомы в «тестируемой» алгебре.

Таким образом школьное определение аксиомы, как утверждения, не требующего доказательств, верно лишь отчасти: в рамках соответствующей теории аксиомы принимаются без проверки, но для того, чтобы гарантировать применимость выводов теории к той или иной ситуации мы *обязаны* проверить, что эти аксиомы в рассматриваемом случае выполняются.

I. Определение булевой алгебры

Изучать новое понятие можно двумя способами:

I. Определение булевой алгебры

Изучать новое понятие можно двумя способами:

— индуктивным (**рассмотрение примеров**);

I. Определение булевой алгебры

Изучать новое понятие можно двумя способами:

— индуктивным (**рассмотрение примеров**);

— дедуктивным (анализ определения, получение следствий).

II. Элементарные теоремы теории булевых алгебр

Рассмотрим ряд важнейших теорем, следующих непосредственно из аксиом **булевой алгебры**.

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы А1-А8**, имеем

$\overline{x} =$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} =$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы А1-А8**, имеем

$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y =$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x} + \mathbf{0} = \overline{x} + x * y = \overline{x} * \mathbf{1} + x * y =$$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы А1-А8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y =$$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x} + \mathbf{0} = \overline{x} + x * y = \overline{x} * \mathbf{1} + x * y = \overline{x} * (x + y) + x * y = (\overline{x} * x + \overline{x} * y) + x * y =$$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y =$$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y = \overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y =$$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y = \overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y =$$

II.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y = \overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y = y,$$

что и требовалось доказать.

II.2. Следствие о дополнении к 0 и 1

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Следствие 1 (**о дополнении к 0 и 1**). *$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ и $\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Это очевидное следствие критерия обратного элемента и **аксиом A6-A8**.

II.3. Теорема об инволютивности «дополнения»

Теорема 2 (**об инволютивности** $\overline{}$). $\overline{\overline{x}} = x$.

Доказательство.

II.3. Теорема об инволютивности «дополнения»

Теорема 2 (**об инволютивности** $\overline{}$). $\overline{\overline{x}} = x$.

Доказательство. В **теореме 1** в качестве x возьмем $\overline{x}$, а в качестве y — элемент x. Тогда по **теореме 1** получаем заключение **теоремы 2**.

II.4. Теорема об однозначности «дополнения»

Теорема 3 (**об однозначности** $\overline{}$). $\overline{x} = \overline{y}$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

Доказательство.

II.4. Теорема об однозначности «дополнения»

Теорема 3 (**об однозначности** $\overline{}$). $\overline{x} = \overline{y}$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

Доказательство. Это очевидное следствие **теоремы 2**.

II.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

II.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y =$$

II.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y =$$

II.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y = x * (\mathbf{1} + y) =$$

II.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x.$

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y = x * (\mathbf{1} + y) = x * \mathbf{1} =$$

II.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y = x * (\mathbf{1} + y) = x * \mathbf{1} = x.$$

II.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (закон поглощения). $x * (x + y) = x.$

Доказательство.

II.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (**закон поглощения**). $x * (x + y) = x.$

Доказательство.

$$x * (x + y) =$$

II.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (закон поглощения). $x * (x + y) = x$.

Доказательство.

$$x * (x + y) = x * x + x * y =$$

II.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (**закон поглощения**). $x * (x + y) = x.$

Доказательство.

$$x * (x + y) = x * x + x * y = x + x * y =$$

II.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (**закон поглощения**). $x * (x + y) = x$.

Доказательство.

$$x * (x + y) = x * x + x * y = x + x * y = x.$$

II.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y.$

Доказательство.

II.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y$.

Доказательство.

$$x + y =$$

II.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y$.

Доказательство.

$$x + y = x + (x + \overline{x}) * y =$$

II.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y$.

Доказательство.

$$x + y = x + (x + \overline{x}) * y = x + x * y + \overline{x} * y =$$

II.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y.$

Доказательство.

$$x + y = x + (x + \overline{x}) * y = x + x * y + \overline{x} * y = x + \overline{x} * y.$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (законы де-Моргана). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство.

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить?

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x+y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x+y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x+y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0} * \overline{y} + \mathbf{0} * \overline{x} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (законы де-Моргана). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0} * \overline{y} + \mathbf{0} * \overline{x} = \mathbf{0} + \mathbf{0} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x+y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0} * \overline{y} + \mathbf{0} * \overline{x} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x+y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + \left(y + \overline{x} * \overline{y}\right) =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (законы де-Моргана). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) = x + y + \overline{x} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (законы де-Моргана). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) = x + y + \overline{x} = y + \mathbf{1} =$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (законы де-Моргана). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а). Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$. Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**. Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) = x + y + \overline{x} = y + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б). Используем ту же идею, что и в пункте а). Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б). Используем ту же идею, что и в пункте а). Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x * y * (\overline{x} + \overline{y}) = y * \mathbf{0} + x * \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

II.8. Законы де-Моргана

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). **а).** $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;

б). $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б). Используем ту же идею, что и в пункте а). Итак, по **теореме 6**,

$$x*y+\overline{x}+\overline{y} = \overline{x}+y+\overline{y} = \overline{x}+\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x*y*(\overline{x}+\overline{y}) = y*\mathbf{0}+x*\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

По **критерию обратного элемента** получаем равенство $\overline{x}+\overline{y} = \overline{x*y}$.

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение

Равенство $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство.

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 a)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 a)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство* $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам A3 а)** и **A7 б)**,

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам A3 а)** и **A7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство* $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам A3 а)** и **A7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) = y * x + y * \overline{y} =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение
Равенство $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) = y * x + y * \overline{y} = y * x + \mathbf{0} =$$

II.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) = y * x + y * \overline{y} = y * x + \mathbf{0} = y * x.$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство.

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение $(x * y = x)$). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) = x * \mathbf{0} =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) = x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) = x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

— получили требуемое соотношение.

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность.

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам А8 а), А3 а), А7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) = x * y + x * \overline{y} =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) = x * y + x * \overline{y} = x * y + \mathbf{0} =$$

II.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) = x * y + x * \overline{y} = x * y + \mathbf{0} = x * y.$$

II.11. Список элементарных теорем

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). $y = \overline{x} \iff \begin{cases} y + x = \mathbf{1}, \\ y * x = \mathbf{0}. \end{cases}$

Теорема 2 (**об инволютивности** $\overline{}$). $\overline{\overline{x}} = x$.

Теорема 3 (**об однозначности** $\overline{}$). $\overline{x} = \overline{y} \iff x = y$.

Теорема 4 (**закон поглощения**). $x + x * y = x$.

Теорема 5 (**закон поглощения**). $x * (x + y) = x$.

Теорема 6. $x + y = x + \overline{x} * y$.

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). ***а).*** $\overline{x + y} = \overline{x} * \overline{y}$; ***б).*** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Теорема 8. *Равенство* $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Теорема 9. *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. ***Рассмотреть пример?***

III. Некоторые понятия теории булевых алгебр

Рассмотрим некоторые теоремы и «вторичные» понятия теории булевых алгебр.

III.1. Теорема о двойственной булевой алгебре

Теорема 10 (**о двойственной булевой алгебре**). *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *— булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *тоже является булевой алгеброй.*

Доказательство.

III.1. Теорема о двойственной булевой алгебре

Теорема 10 (о двойственной булевой алгебре). *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ — *булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *тоже является булевой алгеброй.*

Доказательство. Очевидное следствие из **аксиом булевой алгебры**.

III.1. Теорема о двойственной булевой алгебре

Теорема 10 (о двойственной булевой алгебре). *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ — *булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *тоже является булевой алгеброй.*

Доказательство. Очевидное следствие из **аксиом булевой алгебры**.

Определение 1. *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ — *булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *называется алгеброй,* **двойственной** *к булевой алгебре* $\mathcal{B}$*.*

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство.

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна:

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна:

$$x * x = x \;\Rightarrow$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна:

$$x * x = x \;\Rightarrow\; x \leq x.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (**О частичном порядке на булевой алгебре**). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow x = x * y =$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow \; x = x * y = y * x =$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (**О частичном порядке на булевой алгебре**). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow x = x * y = y * x = y.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение* $\leq$ *является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \; x \leq z$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \qquad \Rightarrow \; x \leq z$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow x * z = \qquad\qquad \Rightarrow x \leq z.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow x * z = (x * y) * z = \qquad \Rightarrow x \leq z.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \; x * z = x * (y * z) = \qquad\qquad \Rightarrow \; x \leq z.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow x * z = x * y * z = x * y = \quad \Rightarrow x \leq z.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (**О частичном порядке на булевой алгебре**). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow x * z = x * y * z = x * y = x \Rightarrow$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \; x * z = \; x * y * z \; = x * y = x \; \Rightarrow \; x \leq z.$$

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \ x * z = \ x * y * z \ = x * y = x \ \Rightarrow \ x \leq z.$$

Теорема доказана.

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Определение 2. *Отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$, называется* **индуцированным частичным порядком**.

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение* $\leq$ *является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Определение 2. *Отношение* $\leq$*, введенное на булевой алгебре правилом:* $x \leq y$ *тогда и только тогда, когда* $x * y = x$*, называется* **индуцированным частичным порядком**.

Например, в **булевой алгебре подмножеств** $\langle A;\ \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ множества M (то есть $A = \left\{X \,\middle|\, X \subseteq M\right\}$) индуцированный порядок совпадает с отношением, соответствующему предикату $\subseteq$.

III.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Определение 2. *Отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$, называется* **индуцированным частичным порядком**.

В **алгебре n-местных булевых функций** $\langle A, \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ индуцированный порядок совпадает с отношением, соответствующему предикату $\leq$.

III.3. Критерий индуцированного отношения частичного порядка

Теорема 12 (Критерий $\leq$). *В булевой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$.*

Доказательство.

III.3. Критерий индуцированного отношения частичного порядка

Теорема 12 (Критерий $\leq$). *В булевой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$.*

Доказательство. Очевидное следствие **определения** и **аксиомы A5**.

III.4. Определение атома булевой алгебры

Теорема 12 (Критерий $\leq$). *В булевой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$.*

Доказательство. Очевидное следствие **определения** и **аксиомы A5**.

Определение 3. *Отличный от $\mathbf{0}$ элемент x булевой алгебры $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ называется* **атомом**, *если для любого элемента y из B, отличного от $\mathbf{0}$, справедлива альтернатива: либо $x * y = x$, либо $x * y = \mathbf{0}$.*

Рассмотреть пример?

Как мы увидим, для конечных булевых алгебр роль атомов является решающей.

III.5. Критерий атома

Теорема 12 (Критерий $\leq$). *В булевой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$.*

Доказательство. Очевидное следствие определения и **аксиомы A5**.

Определение 3. *Отличный от $\mathbf{0}$ элемент x булевой алгебры $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ называется* **атомом**, *если для любого элемента y из B, отличного от $\mathbf{0}$, справедлива альтернатива: либо $x * y = x$, либо $x * y = \mathbf{0}$.*

Лемма 1 (критерий атома). *Элемент x является атомом булевой алгебры тогда и только тогда, когда он является минимальным ненулевым элементом относительно индуцированного частичного порядка.*

IV. Свойства атомов

Рассмотрим некоторые свойства атомов.

IV.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

IV.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Прямое следствие определения атома: $x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\} = \{\mathbf{0}\}$, то есть $x * y = \mathbf{0}$.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По закону де-Моргана достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По закону де-Моргана достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y =$

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} =$

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

С другой стороны, по **аксиомам булевой алгебры**, $\overline{x} * y + x * y =$

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

С другой стороны, по **аксиомам булевой алгебры**, $\overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y =$

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

С другой стороны, по **аксиомам булевой алгебры**, $\overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y =$

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (**Св1: о произведении атомов**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (**Св2: о поглощении атома дополнением**). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

С другой стороны, по **аксиомам булевой алгебры**, $\overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y = y$.

IV.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13 (Св1: о произведении атомов). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14 (Св2: о поглощении атома дополнением). *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. По **закону де-Моргана** достаточно доказать равенство $\overline{x} * y = y$. Так как y — **атом**, то достаточно доказать, что $\overline{x} * y \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\overline{x} * y = \mathbf{0}$. По **свойству Св1: «о произведении атомов»** получаем, что $x * y = \mathbf{0}$. Следовательно, с одной стороны, $\overline{x} * y + x * y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

С другой стороны, по **аксиомам булевой алгебры**, $\overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y = y$. Значит, $y = \mathbf{0}$, что противоречит определению атома.

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство.

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\left\langle B, \left\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\right\}\right\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B*, и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$*.*

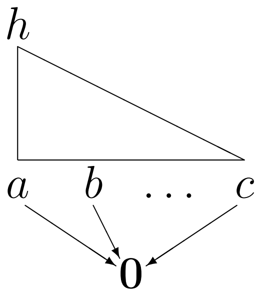
Доказательство.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & b \arrow[d] & \ldots & c \arrow[dll] \\ & \mathbf{0} & & \end{tikzcd}$$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

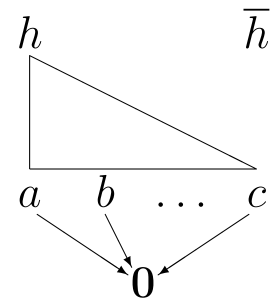


IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По закону де-Моргана $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.



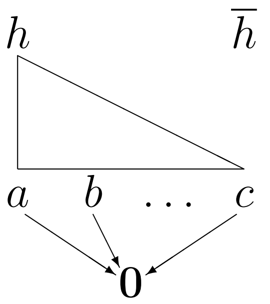
IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$.



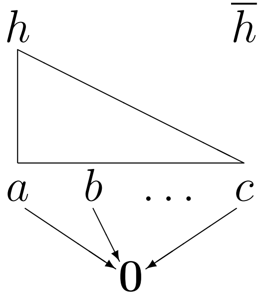
IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.



IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

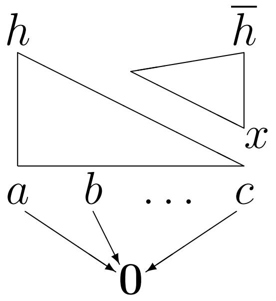
Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.



IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ — *множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

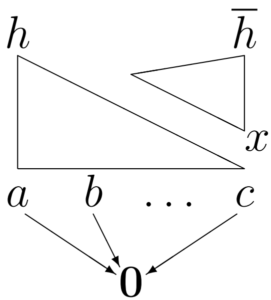
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.



IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B*, и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$*.*

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

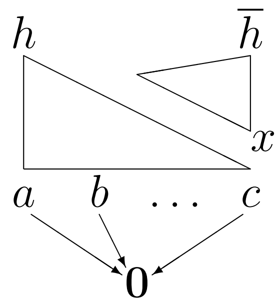
По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.

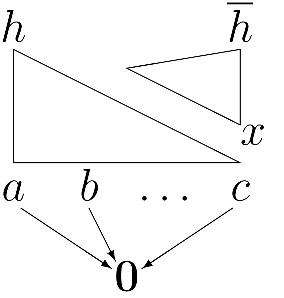
Воспользуемся **леммой 1**.



IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.

Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B*, и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

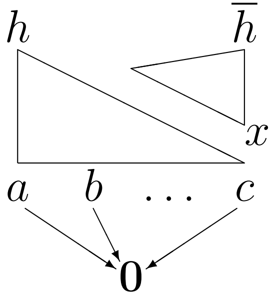
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.



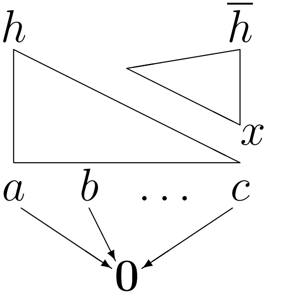
Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

В силу **транзитивности отношения** $\leq$ имеем $\begin{cases} x \leq \overline{h}, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.

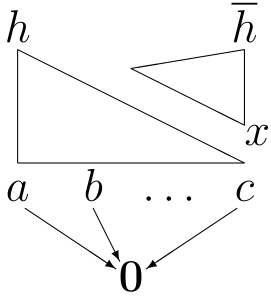
Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

В силу **транзитивности отношения** $\leq$ имеем $\begin{cases} x \leq \overline{h}, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \; y \leq \overline{h}.$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.

Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

В силу **транзитивности отношения** $\leq$ имеем $\begin{cases} x \leq \overline{h}, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \; y \leq \overline{h}$.

Но $y \neq x$, что противоречит минимальности x.

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

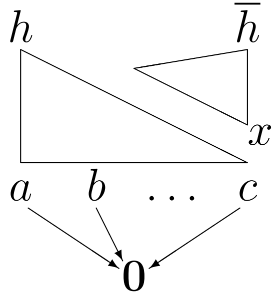
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.



Итак, мы показали, что x — минимальный ненулевой элемент, поэтому по **лемме 1** x является атомом.

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

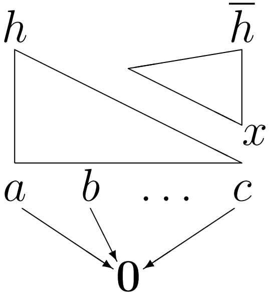
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Покажем, что x — это атом.



Итак, мы показали, что x — минимальный ненулевой элемент, поэтому по **лемме 1** x является атомом.

Без ограничения общности можно считать, что $x = a$.

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

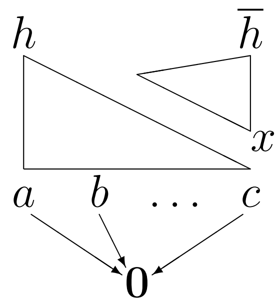
По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Мы получили, что $x = a$.

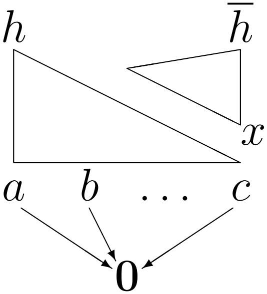
По **определению индуцированного отношения** $\leq$



IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow$$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

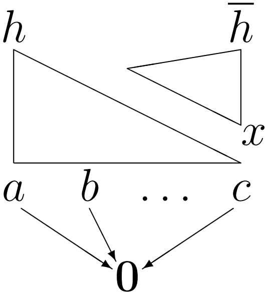
Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.



Мы получили, что $x = a$.

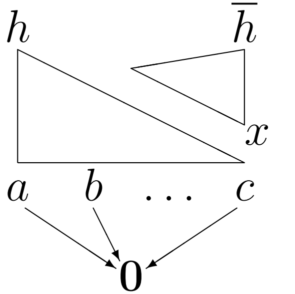
По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} =$$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = a * \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} =$$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

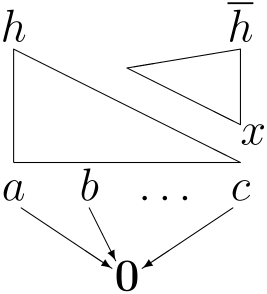
Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.



Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = \underbrace{a * \overline{a}}_{\mathbf{0}} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} =$$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

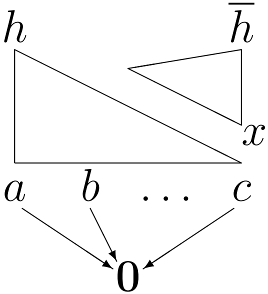
Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{\quad}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.



Мы получили, что $x = a$.

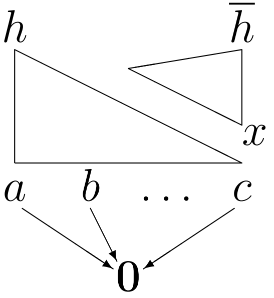
По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = \underbrace{a * \overline{a}}_{\mathbf{0}} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} = \mathbf{0},$$

IV.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B*, и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = \underbrace{a * \overline{a}}_{\mathbf{0}} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} = \mathbf{0},$$

но $a \neq \mathbf{0}$ по **определению атома**. Теорема доказана.

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

Тогда любой ненулевой элемент a *может быть представлен в виде* $x + y + \ldots + z$, *где* $\{x,\ y,\ \ldots,\ z\}$ *множество всех* ***атомов***, ***сравнимых*** *с* a.

Слишком много слов естественного языка...

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \\ t_i \leq a. \end{cases}$$

Уже лучше...

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \; - \; \textbf{\textit{атомы}}, \; \textit{т.е.} \; \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\; t_i\}, \\ t_i \leq a, \;\; \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Совсем хорошо...

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство.

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{array} \right.$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \; \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле,

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{\textit{атомы}}, \ \textit{т.е.} \ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0}, \ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{\textit{атомы}}, \ \textit{т.е.} \ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0}, \ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} +$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \;-\; \textbf{\textit{атомы}},\ \text{т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots +$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots + t_m * t_{m+1} + \ldots +$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textit{атомы},\ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots + t_m * t_{m+1} + \ldots + t_m * t_n =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots + t_m * t_{m+1} + \ldots + t_m * t_n = \mathbf{0}.$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{\textit{атомы}}, \ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

Итак,

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{0}.$$

В силу **критерия обратного элемента** $\overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m$.

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \textbf{\textit{атомы}},\ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 =$

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{атомы},\ \text{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 =$

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

$$t_1 \leq a \quad \Leftrightarrow \quad a + t_1 = a.$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ — \ \textbf{атомы}, \ \text{т.е.} \ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 =$

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

$$t_2 \leq a \quad \Leftrightarrow \quad a + t_2 = a.$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$,

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

$$t_m \leq a \quad \Leftrightarrow \quad a + t_m = a.$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ — \ \textbf{\textit{атомы}}, \ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}\,, \\ t_i \leq a, \ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \; \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}},\ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \overset{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_1 + \ldots + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_1 + \ldots + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n = a + \mathbf{1} =$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_1 + \ldots + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n = a + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textit{\textbf{атомы}}, \ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}\,, \\ t_i \leq a, \ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n = \mathbf{1},$$

$$a * (t_{m+1} + \ldots + t_n) = a * t_{m+1} + \ldots + a * t_n = \mathbf{0}.$$

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \;\text{—}\; \textbf{\textit{атомы}},\ \text{т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n = \mathbf{1},$$

$$a * (t_{m+1} + \ldots + t_n) = a * t_{m+1} + \ldots + a * t_n = \mathbf{0}.$$

По **критерию обратного элемента** $a = \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n}$.

IV.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}}, \textit{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \textit{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a = \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

Теорема доказана.

IV.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство.

IV.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра **изоморфна** алгебре подмножеств множества ее **атомов**.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

IV.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{\quad}) = \overline{\quad}$ (в последнем случае под $\overline{\quad}$ понимается **дополнение**).

Согласно **теореме об элементах конечной булевой алгебры**, всякий элемент этой алгебры является суммой некоторых ее **атомов**.

IV.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

Согласно **теореме об элементах конечной булевой алгебры**, всякий элемент этой алгебры является суммой некоторых ее **атомов**. Для **атомов** $a, b, \ldots, c$ положим

$$f(a + b + \ldots + c) = \{a, b, \ldots, c\}, \quad f(\mathbf{0}) = \emptyset. \tag{1}$$

IV.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра **изоморфна** алгебре подмножеств множества ее **атомов**.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

Согласно **теореме об элементах конечной булевой алгебры**, всякий элемент этой алгебры является суммой некоторых ее **атомов**. Для **атомов** $a, b, \ldots, c$ положим

$$f(a + b + \ldots + c) = \{a, b, \ldots, c\}, \quad f(\mathbf{0}) = \emptyset. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что f — требуемый изоморфизм. Теорема доказана.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где n — натуральное число, равное количеству* ***атомов*** *булевой алгебры $\mathcal{B}$.*

Доказательство.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Согласно **теореме о классификации конечных булевых алгебр** достаточно доказать, что множество всех подмножеств n-элементного множества состоит из 2^n элементов.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов,* $\quad$ *где* $n = |B|$.

Доказательство. Согласно **теореме о классификации конечных булевых алгебр** достаточно доказать, что множество всех подмножеств n-элементного множества состоит из 2^n элементов.

Обозначим множество подмножеств множества A через P_A, а количество элементов в множестве P_A для n-элементного множества A — через $k(n)$. Надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* $\quad$ *где* $n = |B|$.

Доказательство. *База индукции.* Каково минимальное возможное количество элементов в множестве? Часто отвечают, что 1, но это неверно. Существует еще пустое множество, поэтому $n_0 = 0$. У пустого множества есть только одно подмножество — само это множество, то есть у множества $\emptyset$ множество подмножеств имеет вид $\{\emptyset\}$. Таким образом, $k(0) = 1 = 2^0$. База индукции доказана.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ — *булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Как мы уже отмечали, главная задача при применении метода математической индукции состоит в том, что надо свести рассматриваемую ситуацию к случаю «меньшего n».

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Надо «уменьшить количество элементов в множестве A». Для этого

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Надо «уменьшить количество элементов в множестве A». Для этого удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B. Так как в множестве B содержится ровно $n-1$ элемент, то, по предположению индукции, в множестве P_B содержится ровно $k(n-1) = 2^{n-1}$ элементов — подмножеств множества B.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B. Так как в множестве B содержится ровно $n-1$ элемент, то, по предположению индукции, в множестве P_B содержится ровно $k(n-1) = 2^{n-1}$ элементов — подмножеств множества B. Осталось выяснить, сколько подмножеств множества A не попало в P_B. Мы докажем, что их столько же, сколько элементов в P_B.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B. Так как в множестве B содержится ровно $n-1$ элемент, то, по предположению индукции, в множестве P_B содержится ровно $k(n-1) = 2^{n-1}$ элементов — подмножеств множества B. Осталось выяснить, сколько подмножеств множества A не попало в P_B. Если мы докажем, что их столько же, сколько элементов в P_B, то

$$k(n) = k(n-1) + k(n-1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 * 2^{n-1} = 2^n.$$

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Как доказать, что подмножеств множества A, не попавших в P_B, столько же, сколько элементов в P_B? Можно, например,

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Как доказать, что подмножеств множества A, не попавших в P_B, столько же, сколько элементов в P_B? Можно, например, установить взаимно однозначное отображение f множества P_B на множество всех тех подмножеств множества A, которые не являются элементами множества P_B.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Во-первых, при этом $f(C)$ — элемент из P_A, не являющийся элементом множества P_B,

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Во-первых, при этом $f(C)$ — элемент из P_A, не являющийся элементом множества P_B, во-вторых, очевидно, что $\text{ООФ}(f) \cup \text{ОДЗ}(f) = D(f) \cup E(f) = P(A)$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Осталось проверить, что отображение f является *взаимно однозначным*, т.е.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Осталось проверить, что отображение f является *взаимно однозначным*, т.е.

$$C = D \iff f(C) = f(D).$$

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Тот факт, что

$$C = D \Rightarrow f(C) = f(D)$$

следует из однозначности операции $\cup$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

В данном случае мы фактически проведем только «генерацию», «оформление» проведите самостоятельно.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Итак, надо доказать *равенство* множеств C и D. Заметим, что роль множеств C и D совершенно одинакова: если мы поменяем обозначения C и D местами, ни одно из утверждений от этого не изменится. Как говорят «C и D входят во все формулы симметрично».

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Итак, надо доказать *равенство* множеств C и D. Как говорят «C и D входят во все формулы симметрично». Поэтому можно доказать только одно включение, например, $C \subseteq D$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* $\quad$ *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \ \Leftrightarrow \ f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$. Поэтому $x \in D \cup \{a\}$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$. Поэтому $x \in D \cup \{a\}$. Значит, по определению объединения множеств, $x \in D$ или $x \in \{a\}$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$. Поэтому $x \in D \cup \{a\}$. Значит, по определению объединения множеств, $x \in D$ или $x \in \{a\}$. Так как $x \in B$, то, по выбору B, $x \neq a$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Доказано, что $x \notin \{a\}$, таким образом, $x \in D$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Итак, доказано, что $C \subseteq D$, поэтому («из соображений симметрии») $C = D$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$*.*

Доказательство. Таким образом, доказано, что f — взаимно однозначное отображение, причем, очевидно, ОДЗ$(f) \cap (f) = \emptyset$, и ОДЗ$(f) \cup (f) = A$.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Таким образом, доказано, что f — взаимно однозначное отображение, причем, очевидно, ОДЗ$(f) \cap (f) = \emptyset$, и ОДЗ$(f) \cup (f) = A$. Следовательно, подмножеств множества A, не являющихся элементами множества P_B ровно столько же, сколько элементов в множестве P_B, то есть 2^{n-1} штук.

IV.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Таким образом, доказано, что f — взаимно однозначное отображение, причем, очевидно, $\text{ОДЗ}(f) \cap (f) = \emptyset$, и $\text{ОДЗ}(f) \cup (f) = A$. Следовательно, подмножеств множества A, не являющихся элементами множества P_B ровно столько же, сколько элементов в множестве P_B, то есть 2^{n-1} штук.

Согласно принципу математической индукции, доказываемое утверждение справедливо для любого конечного множества.

Рассмотреть пример?

V. Связь булевых алгебр с решетками

Определение 4. *Реляционная система (система отношений)* $\mathcal{A} = \langle A, \{\leq\}\rangle$, *где* $\leq$ — *отношение частичного порядка*, *называется* **решеткой**, *если для любых* x, y *из* A

$$\exists u \in A \quad \exists v \in A \quad \forall p \in A \quad \forall q \in A \quad \begin{cases} v \leq x \leq u, \\ v \leq y \leq u, \\ \begin{cases} p \leq x, \\ p \leq y \end{cases} \Rightarrow \; p \leq v, \\ \begin{cases} x \leq q, \\ y \leq q \end{cases} \Rightarrow \; u \leq q. \end{cases} \tag{2}$$

При этом элемент $u = \sup\{x, y\}$ *называется* **точной верхней гранью** *множества* $\{x, y\}$, $v = \inf\{x, y\}$ *называется* **точной нижней гранью** *множества* $\{x, y\}$.

V. Связь булевых алгебр с решетками

Определение 4. *Реляционная система* (*система отношений*) $\mathcal{A} = \langle A, \{\leq\}\rangle$, *где* $\leq$ — *отношение частичного порядка*, *называется* **решеткой**, *если для любых* x, y *из* A

$$\exists u \in A \quad \exists v \in A \quad \forall p \in A \quad \forall q \in A \quad \begin{cases} v \leq x \leq u, & \boxed{\begin{array}{l} u = \sup\{x, y\} \\ v = \inf\{x, y\} \end{array}} \\ v \leq y \leq u, & \\ \begin{cases} p \leq x, \\ p \leq y \end{cases} \Rightarrow \ p \leq v, & \\ \begin{cases} x \leq q, \\ y \leq q \end{cases} \Rightarrow \ u \leq q. & \end{cases} \tag{2}$$

Определение 5. *Решёткой* **с дополнениями** *называется решётка со свойством*

$$\exists \mathbf{0} \in A \ \exists \mathbf{1} \in A \ \forall x \in A \ \begin{cases} \mathbf{0} \leq x, \\ x \leq \mathbf{1} \end{cases} \qquad \exists \overline{x} \in A \ \begin{cases} \sup\{x, \ \overline{x}\} = \mathbf{1}, \\ \inf\{x, \ \overline{x}\} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3}$$

V. Связь булевых алгебр с решетками

Теорема 19. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *—* ***булева алгебра****, и* $\leq$ *—* ***индуцированное отношение частичного порядка****, то* ***реляционная система*** $\langle B, \{\leq\}\rangle$ *является* ***решеткой****;*

2. $\mathcal{A} = \langle A,\ \{\leq\}\rangle$ *—* ***решетка с дополнениями****, в которой операции введены формулами:*

$$\begin{cases} x + y = \sup\{x, y\}, \\ x * y = \inf\{x, y\}, \\ \overline{x} = z, \end{cases} \tag{4}$$

то $\langle A, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *является* ***булевой алгеброй****.*

Доказательство.

V. Связь булевых алгебр с решетками

Теорема 19. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ — ***булева алгебра***, *и* $\le$ — ***индуцированное отношение частичного порядка***, *то* ***реляционная система*** $\langle B, \{\le\}\rangle$ *является* ***решеткой***;

2. $\mathcal{A} = \langle A,\ \{\le\}\rangle$ — ***решетка с дополнениями***, *в которой операции введены формулами:*

$$\begin{cases} x + y = \sup\{x, y\}, \\ x * y = \inf\{x, y\}, \\ \overline{x} = z, \end{cases} \tag{4}$$

то $\langle A, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *является* ***булевой алгеброй***.

Доказательство сводится к проверке аксиом.

VI. Отличия булевой от линейной алгебры

Эти результаты демонстрируют роль **атомов** булевой алгебры. Прослеживается аналогия с теорией линейных пространств, при этом очевидны следующие отличия:

VI. Отличия булевой от линейной алгебры

Эти результаты демонстрируют роль **атомов** булевой алгебры. Прослеживается аналогия с теорией линейных пространств, при этом очевидны следующие отличия:

1. В линейных пространствах изоморфизм определяется неоднозначно, в зависимости от выбора базиса. В булевых алгебрах множество **атомов** определяется однозначно.

VI. Отличия булевой от линейной алгебры

Эти результаты демонстрируют роль **атомов** булевой алгебры. Прослеживается аналогия с теорией линейных пространств, при этом очевидны следующие отличия:

1. В линейных пространствах изоморфизм определяется неоднозначно, в зависимости от выбора базиса. В булевых алгебрах множество **атомов** определяется однозначно.

2. В теории линейных пространств «стандартное» пространство — арифметическое — обладает мощным вычислительным аппаратом: аппаратом матричной алгебры.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?