Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Тензоры в евклидовых пространствах

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Тензоры в евклидовом пространстве

Пусть V — **евклидово пространство**.

Введение этой «безобидной» конструкции резко меняет обстановку в изучаемой нами теории. Отметим основные новшества, которыми мы сейчас займемся:

— во-первых,

I. Тензоры в евклидовом пространстве

Пусть V — **евклидово пространство**.

Введение этой «безобидной» конструкции резко меняет обстановку в изучаемой нами теории. Отметим основные новшества, которыми мы сейчас займемся:

— во-первых, можно естественным образом отождествить исходное евклидово пространство с сопряженным;

— во-вторых,

I. Тензоры в евклидовом пространстве

Пусть V — **евклидово пространство**.

Введение этой «безобидной» конструкции резко меняет обстановку в изучаемой нами теории. Отметим основные новшества, которыми мы сейчас займемся:

— во-первых, можно естественным образом отождествить исходное евклидово пространство с сопряженным;

— во-вторых, исчезает «непроходимая пропасть» между ко- и контравариантными координатами. Теперь мы можем по своему усмотрению менять структуру тензора ранга r (см раздел «жонглирование индексами»).

I.1. Отождествление V с V^*

Мы сейчас собираемся каждому вектору x из V поставить в соответствие некоторый линейный функционал $f(y)$.

I.1. Отождествление V с V^*

Мы сейчас собираемся каждому вектору x из V поставить в соответствие некоторый линейный функционал $f(y)$.

Для этого нам нужна некоторая функция, зависящая от y и от x, и линейная по y.

I.1. Отождествление V с V^*

Мы сейчас собираемся каждому вектору x из V поставить в соответствие некоторый линейный функционал $f(y)$.

Для этого нам нужна некоторая функция, зависящая от y и от x, и линейная по y.

Ясно, что для этой цели можно взять скалярное произведение.

I.1. Отождествление V с V^*

Каждому вектору x из V поставим в соответствие функцию $f(\bullet) = (\bullet, x)$, то есть функцию f, определенную формулой

$$f(y) = (y, x), \tag{1}$$

где y — произвольный вектор из V.

I.1. Отождествление V с V^*

Каждому вектору x из V поставим в соответствие функцию $f(\bullet) = (\bullet, x)$, то есть функцию f, определенную формулой

$$f(y) = (y, x), \tag{1}$$

где y — произвольный вектор из V.

Например, для евклидова пространства геометрических векторов линейному функционалу $f\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \text{пр}_L\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$, где L — некоторая ось, соответствует направляющий орт $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ оси L, так как

$$f(y) = \text{пр}_L\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right|} = \left(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

I.1. Отождествление V с V^*

Каждому вектору x из V поставим в соответствие функцию $f(\bullet) = (\bullet, x)$, то есть функцию f, определенную формулой

$$f(y) = (y, x), \tag{1}$$

где y — произвольный вектор из V.

Линейность функции, определенной **равенством (1)**, обеспечивается **второй аксиомой скалярного произведения**.

I.1. Отождествление V с V^*

Каждому вектору x из V поставим в соответствие функцию $f(\bullet) = (\bullet, x)$, то есть функцию f, определенную формулой

$$f(y) = (y, x), \tag{1}$$

где y — произвольный вектор из V.

Соотношение (1) задает **изоморфизм пространства** V на пространство V^*.

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$h(y) =$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$$h(y) = (y, c{\cdot}x{+}d{\cdot}z) =$$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$$h(y) = (y, c{\cdot}x{+}d{\cdot}z) = (c{\cdot}x{+}d{\cdot}z, y) =$$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$$h(y) = (y, c{\cdot}x{+}d{\cdot}z) = (c{\cdot}x{+}d{\cdot}z, y) = c{\cdot}(x, y){+}d{\cdot}(z, y) =$$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$$h(y) = (y, c\cdot x+d\cdot z) = (c\cdot x+d\cdot z, y) = c\cdot(x, y)+d\cdot(z, y) = c\cdot f(y)+d\cdot g(y),$$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$$h(y) = (y, c\cdot x+d\cdot z) = (c\cdot x+d\cdot z, y) = c\cdot(x, y)+d\cdot(z, y) = c\cdot f(y)+d\cdot g(y),$$

что доказывает линейность этого отображения. Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

В самом деле, если $f(y) = (y, x)$ и $g(y) = (y, z)$, то вектору $c \cdot x + d \cdot z$ соответствует функция

$$h(y) = (y, c{\cdot}x{+}d{\cdot}z) = (c{\cdot}x{+}d{\cdot}z, y) = c{\cdot}(x, y){+}d{\cdot}(z, y) = c{\cdot}f(y){+}d{\cdot}g(y),$$

что доказывает линейность этого отображения. Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y\ (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y\ (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

Итак, пусть f соответствует двум векторам x и z.

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y \; (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

Итак, пусть f соответствует двум векторам x и z. Тогда, для любого вектора y

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y \ (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

Итак, пусть f соответствует двум векторам x и z. Тогда, для любого вектора $y \quad (y, x) = (y, z)$, откуда

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y \ (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

Итак, пусть f соответствует двум векторам x и z. Тогда, для любого вектора y $\quad (y, x) = (y, z)$, откуда $0 = (y, x) - (y, z) = (y, x - z)$. Положим $y = x - z$.

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y \; (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

Итак, пусть f соответствует двум векторам x и z. Тогда, для любого вектора y $\quad (y, x) = (y, z)$, откуда $0 = (y, x) - (y, z) = (y, x - z)$. Положим $y = x - z$. По **аксиоме 3 скалярного произведения** получаем, что $x - z = \mathbf{0}$,

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Осталось проверить его взаимную однозначность, то есть справедливость формулы

$$\forall y \ (y, x) = (y, z) \Rightarrow x = z.$$

Итак, пусть f соответствует двум векторам x и z. Тогда, для любого вектора $y \quad (y, x) = (y, z)$, откуда $0 = (y, x) - (y, z) = (y, x - z)$. Положим $y = x - z$. По **аксиоме 3 скалярного произведения** получаем, что $x - z = \mathbf{0}$, что и доказывает взаимную однозначность.

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Таким образом, для эвклидова пространства мы получили еще один способ задания векторов сопряженного пространства. Иными словами, для любого линейного функционала f (то есть вектора пространства V^*), определенного на V, можно подобрать такой вектор x, что $f(y) = (y, x)$.

Рассмотреть пример?

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Отождествляя изоморфные векторы, то есть функционал f и представляющий его вектор x (то есть такой вектор x, что $f(y) = (y, x)$), можно считать, что $V = V^*$.

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Отождествляя изоморфные векторы, то есть функционал f и представляющий его вектор x (то есть такой вектор x, что $f(y) = (y, x)$), можно считать, что $V = V^*$.

В частности, взаимный базис теперь можно искать в V. Как это сделать? Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V, и $\mathbf{Б}^* = \left\{e^1, e^2, \ldots, e^n\right\}$ — взаимный базис пространства V. Тогда, по определению взаимного базиса получаем соотношения

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{1}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Отождествляя изоморфные векторы, то есть функционал f и представляющий его вектор x (то есть такой вектор x, что $f(y) = (y, x)$), можно считать, что $V = V^*$.

В частности, взаимный базис теперь можно искать в V. Как это сделать? Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V, и $\mathbf{Б}^* = \left\{e^1, e^2, \ldots, e^n\right\}$ — взаимный базис пространства V. Тогда, по определению взаимного базиса получаем соотношения

$$\left(e_j, e^i\right) = \delta_j^i. \tag{2}$$

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{2}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Отождествляя изоморфные векторы, то есть функционал f и представляющий его вектор x (то есть такой вектор x, что $f(y) = (y, x)$), можно считать, что $V = V^*$.

В частности, взаимный базис теперь можно искать в V. Как это сделать? Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V, и $\mathbf{Б}^* = \left\{e^1, e^2, \ldots, e^n\right\}$ — взаимный базис пространства V. Тогда, по определению взаимного базиса получаем соотношения

$$\left(e_j, e^i\right) = \delta_j^i. \tag{2}$$

Для каждого i **соотношения (2)** задают систему из n линейных уравнений для координат вектора e^i.

I.1. Отождествление V с V^*

$$f(y) = (y, x). \tag{2}$$

Соотношение (1) задает изоморфизм пространства V на пространство V^*.

Отождествляя изоморфные векторы, то есть функционал f и представляющий его вектор x (то есть такой вектор x, что $f(y) = (y, x)$), можно считать, что $V = V^*$.

По определению взаимного базиса получаем соотношения

$$\left(e_j, e^i\right) = \delta_j^i. \tag{2}$$

Для каждого i **соотношения (2)** задают систему из n линейных уравнений для координат вектора e^i.

Итак, для того, чтобы найти взаимный базис, надо решить n систем из n линейных уравнений каждая. Естественно, лентяи-математики не могли удовлетвориться столь хлопотной процедурой.

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

Определение 1. *Пусть V — евклидово пространство.* **Ковариантным** *(соответственно,* **контравариантным***)* **метрическим тензором** *называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив (g_{ij}) (соответственно, (g^{ij})), где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ (соответственно, $g^{ij} = \left(e^i, e^j\right)$).*

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

Определение 1. *Пусть V — евклидово пространство.* **Ковариантным** *(соответственно,* **контравариантным***)* **метрическим тензором** *называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив (g_{ij}) (соответственно, (g^{ij})), где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ (соответственно, $g^{ij} = \left(e^i, e^j\right)$).*

Таким образом, дважды ковариантный метрический тензор каждому базису ставит в соответствие **матрицу Грама** этого базиса, а дважды контравариантный метрический тензор каждому базису ставит в соответствие **матрицу Грама** для **взаимного базиса**.

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

Определение 1. *Пусть V — евклидово пространство.* **Ковариантным** *(соответственно,* **контравариантным***)* **метрическим тензором** *называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив (g_{ij}) (соответственно, (g^{ij})), где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ (соответственно, $g^{ij} = \left(e^i, e^j\right)$).*

Иными словами, дважды ковариантный метрический тензор базису сопоставляет **матрицу Грама**.

Цель этого пункта — вывести три формулы:

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса:

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k.

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

$$g^{ik} =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

$$g^{ik} = \left(e^i, e^k\right) =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

$$g^{ik} = \left(e^i, e^k\right) = x^{ij} \cdot \left(e_j, e^k\right) =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

$$g^{ik} = \left(e^i, e^k\right) = x^{ij} \cdot \left(e_j, e^k\right) = x^{ij}\delta_j^k =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

$$g^{ik} = \left(e^i, e^k\right) = x^{ij} \cdot \left(e_j, e^k\right) = x^{ij} \delta_j^k = x^{ik}.$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

По критерию базиса вектора взаимного базиса (после отождествления V и V^*) можно разложить по векторам исходного базиса: $e^i = x^{ij} \cdot e_j$. Вычислим скалярное произведение с e^k. Получим, **согласно (2)**,

$$g^{ik} = \left(e^i, e^k\right) = x^{ij} \cdot \left(e_j, e^k\right) = x^{ij} \delta_j^k = x^{ik}.$$

Равенство (3) доказано.

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

Равенство (4) доказывается аналогично (надо умножить на e_k).

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

Наконец, умножая равенство (3) на e_k, получим

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

Наконец, умножая равенство (3) на e_k, получим

$$\delta^i_k =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

Наконец, умножая равенство (3) на e_k, получим

$$\delta^i_k = \left(e^i, e_k\right) =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

Наконец, умножая равенство (3) на e_k, получим

$$\delta^i_k = \left(e^i, e_k\right) = g^{ij} \cdot (e_j, e_k) =$$

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

Наконец, умножая равенство (3) на e_k, получим

$$\delta^i_k = \left(e^i, e_k\right) = g^{ij} \cdot (e_j, e_k) = g^{ij} \cdot g_{jk},$$

что эквивалентно (5).

I.2. Нахождение взаимного базиса с помощью метрического тензора

$$e^i = g^{ij} \cdot e_j \tag{3}$$

$$e_i = g_{ij} \cdot e^j \tag{4}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \tag{5}$$

С помощью формул (3) и (5) нахождение взаимного базиса сводится к стандартным матричным вычислениям.

Рассмотреть пример?

I.3. Свойства метрического тензора

Помимо формул (3), (4), (5) отметим следующие свойства метрического тензора.

I.3. Свойства метрического тензора

1. g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор;

I.3. Свойства метрического тензора

1. g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор;
2. Если $x = x^i \cdot e_i$, $y = y^i \cdot e_i$, то $(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$;

I.3. Свойства метрического тензора

1. g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор;
2. Если $x = x^i \cdot e_i$, $y = y^i \cdot e_i$, то $(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$;
3. ко- и контравариантные метрические тензоры являются симметричными тензорами, то есть $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$;

I.3. Свойства метрического тензора

1. g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор;

2. Если $x = x^i \cdot e_i$, $y = y^i \cdot e_i$, то $(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$;

3. ко- и контравариантные метрические тензоры являются симметричными тензорами, то есть $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$;

4. $\det(g_{ij}) \neq 0$, $\det\left(g^{ij}\right) \neq 0$;

I.3. Свойства метрического тензора

1. g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор;
2. Если $x = x^i \cdot e_i$, $y = y^i \cdot e_i$, то $(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$;
3. ко- и контравариантные метрические тензоры являются симметричными тензорами, то есть $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$;
4. $\det(g_{ij}) \neq 0$, $\det\left(g^{ij}\right) \neq 0$;
5. Пусть **Б** — ОНБ пространства V, A — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$. Тогда метрический тензор g'_{ij} в базисе **Б**$'$ можно вычислить по формуле $\left(g'_{ij}\right) = A^t \cdot A$;

I.3. Свойства метрического тензора

1. g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор;

2. Если $x = x^i \cdot e_i$, $y = y^i \cdot e_i$, то $(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$;

3. ко- и контравариантные метрические тензоры являются симметричными тензорами, то есть $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$;

4. $\det(g_{ij}) \neq 0$, $\det\left(g^{ij}\right) \neq 0$;

5. Пусть **Б** — ОНБ пространства V, A — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$. Тогда метрический тензор g'_{ij} в базисе **Б**$'$ можно вычислить по формуле $\left(g'_{ij}\right) = A^t \cdot A$;

6. Если V — пространство геометрических векторов, и $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правая тройка, то $e_1 e_2 e_3 = \sqrt{g}$, где $e_1 e_2 e_3$ — смешанное произведение, $g = \det(g_{ij})$.

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$g'_{ij} =$

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$g'_{ij} = \left(e'_i;\ e'_j\right) =$

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$g'_{ij} = \left(e'_i;\ e'_j\right) = \left(a_i^p e_p;\ a_j^q e_q\right) =$

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$g'_{ij} = \left(e'_i;\ e'_j\right) = \left(a^p_i e_p;\ a^q_j e_q\right) = a^p_i a^q_j \left(e_p;\ e_q\right) =$

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$$g'_{ij} = \left(e'_i;\ e'_j\right) = \left(a_i^p e_p;\ a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q \left(e_p;\ e_q\right) = a_i^p a_j^q g_{pq},$$

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$$g'_{ij} = \left(e'_i;\ e'_j\right) = \left(a_i^p e_p;\ a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q \left(e_p;\ e_q\right) = a_i^p a_j^q g_{pq},$$

т.е. получили **тензорный закон**.

1). g_{ij} — дважды ковариантный тензор, g^{ij} — дважды контравариантный тензор.

Доказательство:

$$g'_{ij} = \left(e'_i;\ e'_j\right) = \left(a_i^p e_p;\ a_j^q e_q\right) = a_i^p a_j^q \left(e_p;\ e_q\right) = a_i^p a_j^q g_{pq},$$

т.е. получили **тензорный закон**.

Для g^{ij} доказательство аналогичное, с использованием **теоремы об изменении взаимного базиса**.

2). Если $x = x^i \cdot e_i, \quad y = y^i \cdot e_i, \quad$ то
$(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$.

Доказательство:

$(x, y) =$

2). Если $x = x^i \cdot e_i, \quad y = y^i \cdot e_i, \quad$ то
$(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}.$

Доказательство:

$(x, y) = \left(x^i \cdot e_i, y^i \cdot e_i\right) =$

2). Если $x = x^i \cdot e_i, \quad y = y^i \cdot e_i, \quad$ то

$(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}.$

Доказательство:

$(x, y) = \big(x^i \cdot e_i, y^i \cdot e_i\big) = x^i \cdot y^j \cdot (e_i, e_j) =$

2). Если $x = x^i \cdot e_i, \quad y = y^i \cdot e_i, \quad$ то
$(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$.

Доказательство:

$$(x, y) = \left(x^i \cdot e_i, y^i \cdot e_i\right) = x^i \cdot y^j \cdot (e_i, e_j) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij}.$$

2). Если $x = x^i \cdot e_i, \quad y = y^i \cdot e_i,$ то
$(x, y) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij} = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}.$

Доказательство:

$(x, y) = \left(x^i \cdot e_i, y^i \cdot e_i\right) = x^i \cdot y^j \cdot (e_i, e_j) = x^i \cdot y^j \cdot g_{ij}.$

Формула $(x, y) = x_i \cdot y_j \cdot g^{ij}$ выводится аналогично.

3). Ко- и контравариантные метрические тензоры являются симметричными тензорами, то есть $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$.

Доказательство:

Очевидное следствие **первой аксиомы скалярного произведения**.

4). $\det\left(g_{ij}\right) \neq 0$, $\det\left(g^{ij}\right) \neq 0$.

Доказательство:

Согласно **формуле (5)** метрический тензор обратим. Осталось применить **критерий обратимости матрицы**.

5). Пусть **Б** — ОНБ пространства V, A — матрица перехода из базиса **Б** в базис $\mathbf{Б}'$. Тогда метрический тензор g'_{ij} в базисе $\mathbf{Б}'$ можно вычислить по формуле $\left(g'_{ij}\right) = A^t \cdot A$.

Доказательство:

Согласно пункту 1)

5). Пусть **Б** — ОНБ пространства V, A — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$. Тогда метрический тензор g'_{ij} в базисе **Б**$'$ можно вычислить по формуле $\left(g'_{ij}\right) = A^t \cdot A$.

Доказательство:

Согласно пункту 1) $\quad g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$, что на матричном языке дает

5). Пусть **Б** — ОНБ пространства V, A — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$. Тогда метрический тензор g'_{ij} в базисе **Б**$'$ можно вычислить по формуле $\left(g'_{ij}\right) = A^t \cdot A$.

Доказательство:
Согласно пункту 1) $\quad g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$, что на матричном языке дает $\Gamma' = A^t \cdot \Gamma \cdot A$. Но Γ —

5). Пусть **Б** — ОНБ пространства V, A — матрица перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$. Тогда метрический тензор g'_{ij} в базисе **Б**$'$ можно вычислить по формуле $\left(g'_{ij}\right) = A^t \cdot A$.

Доказательство:

Согласно пункту 1) $\quad g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$, что на матричном языке дает $\Gamma' = A^t \cdot \Gamma \cdot A$. Но Γ — единичная матрица по условию, откуда получаем требуемое заключение.

6). Если V — пространство геометрических векторов, и $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правая тройка, то $e_1 e_2 e_3 = \sqrt{g}$, где $e_1 e_2 e_3$ — смешанное произведение, $g = \det(g_{ij})$.

Доказательство:

В качестве базиса **Б** возьмем какой-нибудь ОНБ. Положим $\mathbf{Б}' = \{e_1, e_2, e_3\}$.

6). Если V — пространство геометрических векторов, и $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правая тройка, то $e_1 e_2 e_3 = \sqrt{g}$, где $e_1 e_2 e_3$ — смешанное произведение, $g = \det(g_{ij})$.

Доказательство:

В качестве базиса **Б** возьмем какой-нибудь ОНБ. Положим $\mathbf{Б}' = \{e_1, e_2, e_3\}$. Согласно **пункту 5)** $\Gamma' = A^t \cdot A$.

6). Если V — пространство геометрических векторов, и $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правая тройка, то $e_1 e_2 e_3 = \sqrt{g}$, где $e_1 e_2 e_3$ — смешанное произведение, $g = \det(g_{ij})$.

Доказательство:

В качестве базиса **Б** возьмем какой-нибудь ОНБ. Положим $\mathbf{Б}' = \{e_1, e_2, e_3\}$. Согласно **пункту 5)** $\Gamma' = A^t \cdot A$. Вычислим определитель от левой и правой части. Слева получим

6). Если V — пространство геометрических векторов, и $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правая тройка, то $e_1 e_2 e_3 = \sqrt{g}$, где $e_1 e_2 e_3$ — смешанное произведение, $g = \det(g_{ij})$.

Доказательство:

В качестве базиса **Б** возьмем какой-нибудь ОНБ. Положим $\mathbf{Б}' = \{e_1, e_2, e_3\}$. Согласно **пункту 5)** $\Gamma' = A^t \cdot A$. Вычислим определитель от левой и правой части. Слева получим g, а справа — $\det(A^t \cdot A) = \det(A^t) \cdot \det(A) = \det(A)^2 = (e_1 e_2 e_3)^2$, что влечет требуемое равенство.

I.4. «Жонглирование» индексами

Для евклидова пространства можно считать $V = V^*$, откуда, например, $V \otimes V^* = V \otimes V$. Вектору из $V \otimes V^*$ соответствует тензор-массив $T^i_{\bullet j}$, компоненты которого определены формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^i_j \cdot e_i \otimes e^j$.

I.4. «Жонглирование» индексами

Для евклидова пространства можно считать $V = V^*$, откуда, например, $V \otimes V^* = V \otimes V$. Вектору из $V \otimes V^*$ соответствует тензор-массив $T^{i}_{\bullet j}$, компоненты которого определены формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^i_j \cdot e_i \otimes e^j$. Отсюда получаем равенство $T^i_j \cdot e_i \otimes e^j = T^{ij} \cdot e_i \otimes e_j$.

I.4. «Жонглирование» индексами

Для евклидова пространства можно считать $V = V^*$, откуда, например, $V \otimes V^* = V \otimes V$. Вектору из $V \otimes V^*$ соответствует тензор-массив $T^i_{\bullet j}$, компоненты которого определены формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^i_j \cdot e_i \otimes e^j$. Отсюда получаем равенство $T^i_j \cdot e_i \otimes e^j = T^{ij} \cdot e_i \otimes e_j$. Но тензор-вектору в правой части соответствует тензор-функция $\left(T^{ij}\right)$. Получается, что две существенно различных тензор-функции определяют один и тот же тензор-вектор. В этом смысле можно сказать, что эти тензоры равны.

I.4. «Жонглирование» индексами

Для евклидова пространства можно считать $V = V^*$, откуда, например, $V \otimes V^* = V \otimes V$. Вектору из $V \otimes V^*$ соответствует тензор-массив $T^i_{\bullet j}$, компоненты которого определены формулой $\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^i_j \cdot e_i \otimes e^j$. Отсюда получаем равенство $T^i_j \cdot e_i \otimes e^j = T^{ij} \cdot e_i \otimes e_j$. Но тензор-вектору в правой части соответствует тензор-функция $\left(T^{ij}\right)$. Получается, что две существенно различных тензор-функции определяют один и тот же тензор-вектор. В этом смысле можно сказать, что эти тензоры равны.

Следовательно, теперь мы можем сами менять структуру рассматриваемого тензора, «поднимать» и «опускать» индексы, или, как говорят, «жонглировать» ими. Осталось понять, как при этом меняются координаты.

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1\ldots j_k u}_{i_1\ldots i_m v} = T^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m v p} \cdot g^{up} = T^{j_1\ldots j_k uq}_{i_1\ldots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T_{i_1\dots i_m v}^{j_1\dots j_k u} = T_{i_1\dots i_m vp}^{j_1\dots j_k} \cdot g^{up} = T_{i_1\dots i_m}^{j_1\dots j_k uq} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Итак, что общего у тензоров $T'(\mathbf{Б}) = \left(T_{i_1\dots i_m v}^{j_1\dots j_k u}\right)$ и $T''(\mathbf{Б}) = \left(T_{i_1\dots i_m}^{j_1\dots j_k uq}\right)$?

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T_{i_1\dots i_m v}^{j_1\dots j_k u} = T_{i_1\dots i_m vp}^{j_1\dots j_k} \cdot g^{up} = T_{i_1\dots i_m}^{j_1\dots j_k uq} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Итак, что общего у тензоров $T'(\mathbf{Б}) = \left(T_{i_1\dots i_m v}^{j_1\dots j_k u}\right)$ и $T''(\mathbf{Б}) = \left(T_{i_1\dots i_m}^{j_1\dots j_k uq}\right)$? Отличается и структура этих тензоров, более того, массивы их компонент в одном и том же базисе, как правило, различны! Но мы говорим, что это «как бы один и тот же тензор», поскольку

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1 \dots j_k u}_{i_1 \dots i_m v} = T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m vp} \cdot g^{up} = T^{j_1 \dots j_k uq}_{i_1 \dots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Итак, что общего у тензоров $T'(\mathbf{Б}) = \left(T^{j_1 \dots j_k u}_{i_1 \dots i_m v}\right)$ и $T''(\mathbf{Б}) = \left(T^{j_1 \dots j_k uq}_{i_1 \dots i_m}\right)$? Отличается и структура этих тензоров, более того, массивы их компонент в одном и том же базисе, как правило, различны! Но мы говорим, что это «как бы один и тот же тензор», поскольку имеет место *совпадение соответствующих им тензор-векторов*.

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1 \ldots j_k u}_{i_1 \ldots i_m v} = T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m v p} \cdot g^{up} = T^{j_1 \ldots j_k u q}_{i_1 \ldots i_m} \cdot g_{vq}. \qquad (6)$$

Идею доказательства формулы (6) продемонстрируем на примере тензора $T^{i \bullet km}_{j}$, в котором надо «опустить», например, индекс k. Согласно **формуле (4)** получаем

$$T^{i \bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_m =$$

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1\dots j_k u}_{i_1\dots i_m v} = T^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_m vp} \cdot g^{up} = T^{j_1\dots j_k uq}_{i_1\dots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Идею доказательства формулы (6) продемонстрируем на примере тензора $T^{i\bullet km}_{j}$, в котором надо «опустить», например, индекс k. Согласно **формуле (4)** получаем

$$T^{i\bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_m = T^{i\bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes g_{ks} e^s \otimes e_m =$$

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1\ldots j_k u}_{i_1\ldots i_m v} = T^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m vp} \cdot g^{up} = T^{j_1\ldots j_k uq}_{i_1\ldots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Идею доказательства формулы (6) продемонстрируем на примере тензора $T^{i\bullet km}_{j}$, в котором надо «опустить», например, индекс k. Согласно **формуле (4)** получаем

$$T^{i\bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_m = T^{i\bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes g_{ks} e^s \otimes e_m =$$

$$= T^{i\bullet km}_{j} \cdot g_{ks} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e^s \otimes e_m =$$

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1\ldots j_k u}_{i_1\ldots i_m v} = T^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m vp} \cdot g^{up} = T^{j_1\ldots j_k uq}_{i_1\ldots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Идею доказательства формулы (6) продемонстрируем на примере тензора $T^{i\bullet km}_{j}$, в котором надо «опустить», например, индекс k. Согласно **формуле (4)** получаем

$$T^{i\bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_m = T^{i\bullet km}_{j} \cdot e_i \otimes e^j \otimes g_{ks} e^s \otimes e_m =$$

$$= T^{i\bullet km}_{j} \cdot g_{ks} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e^s \otimes e_m = T^{i\bullet\bullet m}_{\bullet js} \cdot e_i \otimes e^j \otimes e^s \otimes e_m.$$

Отсюда получаем требуемое равенство $T^{ikm}_{j} \cdot g_{ks} = T^{im}_{js}$.

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1\ldots j_k u}_{i_1\ldots i_m v} = T^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m vp} \cdot g^{up} = T^{j_1\ldots j_k uq}_{i_1\ldots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Можно формулу (6) сформулировать в виде следующего правила.

I.4. «Жонглирование» индексами

$$T^{j_1 \dots j_k u}_{i_1 \dots i_m v} = T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m v p} \cdot g^{up} = T^{j_1 \dots j_k u q}_{i_1 \dots i_m} \cdot g_{vq}. \tag{6}$$

Можно формулу (6) сформулировать в виде следующего правила.

Для того, чтобы «опустить» (соответственно, «поднять») индекс, надо вычислить внутреннее произведение исходного тензора с дважды ковариантным (соответственно, дважды контравариантным) тензором, причем свертка берется по опускаемому (поднимаемому) индексу.

Рассмотреть пример?

II. Псевдотензоры

Определение 2. *Пусть V — линейное пространство размерности n над полем K.* **Псевдотензором** *ранга r* **веса** α, *где $r = k + m$, m раз ковариантным, k раз контравариантным, называется функция T, каждому базису* $\boldsymbol{Б}$ *пространства V ставящая в соответствие массив $T(\boldsymbol{Б}) = \left(T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$ элементов из K, причем для любых двух базисов* Б *и* Б′ *пространства V элементы массивов $T(\boldsymbol{Б}) = \left(T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$ и $T\left(\acute{\boldsymbol{Б}}\right) = \left(\acute{T}^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$ связаны* **псевдотензорным законом**:

$$\acute{T}^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m} = (\det A)^{\alpha} \cdot a^{p_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot a^{p_m}_{i_m} \cdot b^{j_1}_{q_1} \cdot b^{j_2}_{q_2} \cdot \ldots b^{j_k}_{q_k} \cdot T^{q_1 \dots q_k}_{p_1 \dots p_m}, \qquad (7)$$

где $A = \left(a^{i}_{\bullet j}\right)$ — матрица перехода из Б *в* Б′, *$\left(b^{i}_{\bullet j}\right)$ — матрица обратного перехода.*

II. Псевдотензоры

Таким образом, **псевдотензорный закон** отличается от **тензорного** только множителем $(\det A)^\alpha$.

II. Псевдотензоры

Таким образом, **псевдотензорный закон** отличается от **тензорного** только множителем $(\det A)^{\alpha}$. В частности, псевдотензор веса 0 — это тензор. В зависимости от ранга используются еще следующие термины: псевдоскаляр (при $r = 0$), и псевдовектор (при $r = 1$).

II.1. Примеры псевдотензоров

1. $g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

II.1. Примеры псевдотензоров

1. $g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

2. Для любых тензоров $_{ij}$ и R^{ij} функции, сопоставляющие базису числа $\det(T_{ij}) = \det(T(\mathbf{Б}))$ и $\det\left(R^{ij}\right) = \det(R(\mathbf{Б}))$ являются псевдоскалярами веса 2 и -2 соответственно.

II.1. Примеры псевдотензоров

1. $g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

2. Для любых тензоров $_{ij}$ и R^{ij} функции, сопоставляющие базису числа $\det(T_{ij}) = \det(T(\textbf{Б}))$ и $\det\left(R^{ij}\right) = \det(R(\textbf{Б}))$ являются псевдоскалярами веса 2 и -2 соответственно.

3. $\sqrt{g(\textbf{Б})}$ — псевдоскаляр веса 1. Здесь $g(\textbf{Б})$ — детерминант значения дважды ковариантного метрического тензора на базисе **Б**, то есть $g(\textbf{Б})$ — детерминант матрицы Грама базиса **Б**.

Доказательство.

II.1. Примеры псевдотензоров

$g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

Доказательство. Известное равенство $g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$ в матричном виде запишется так:

II.1. Примеры псевдотензоров

$g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

Доказательство. Известное равенство $g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$ в матричном виде запишется так: $\Gamma_{\mathbf{Б}'} = A^t \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot A$.

II.1. Примеры псевдотензоров

$g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

Доказательство. Известное равенство $g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$ в матричном виде запишется так: $\Gamma_{\text{Б}'} = A^t \cdot \Gamma_{\text{Б}} \cdot A$. По свойствам детерминанта получаем:

$$g' =$$

II.1. Примеры псевдотензоров

$g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

Доказательство. Известное равенство $g'_{ij} = a^p_i \cdot a^q_j \cdot g_{pq}$ в матричном виде запишется так: $\Gamma_{\mathbf{Б}'} = A^t \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot A$. По свойствам детерминанта получаем:

$$g' = \det \Gamma_{\mathbf{Б}'} =$$

II.1. Примеры псевдотензоров

$g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

Доказательство. Известное равенство $g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$ в матричном виде запишется так: $\Gamma_{\mathbf{Б}'} = A^t \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot A$. По свойствам детерминанта получаем:

$$g' = \det \Gamma_{\mathbf{Б}'} = \det\left(A^t \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot A\right) =$$

II.1. Примеры псевдотензоров

$g = \det(g_{ij})$ — псевдоскаляр веса 2.

Доказательство. Известное равенство $g'_{ij} = a_i^p \cdot a_j^q \cdot g_{pq}$ в матричном виде запишется так: $\Gamma_{\mathbf{Б}'} = A^t \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot A$. По свойствам детерминанта получаем:

$$g' = \det \Gamma_{\mathbf{Б}'} = \det\left(A^t \cdot \Gamma_{\mathbf{Б}} \cdot A\right) = \det A^t \cdot g \cdot \det A = (\det A)^2 \cdot g,$$

что и требовалось доказать.

II.1. Примеры псевдотензоров

Для любых тензоров $_{ij}$ и R^{ij} функции, сопоставляющие базису числа $\det(T_{ij}) = \det(T(\mathbf{Б}))$ и $\det\left(R^{ij}\right) = \det(R(\mathbf{Б}))$ являются псевдоскалярами веса 2 и -2 соответственно.

Доказательство

II.1. Примеры псевдотензоров

Для любых тензоров $_{ij}$ и R^{ij} функции, сопоставляющие базису числа $\det\left(T_{ij}\right) = \det\left(T(\mathbf{Б})\right)$ и $\det\left(R^{ij}\right) = \det\left(R(\mathbf{Б})\right)$ являются псевдоскалярами веса 2 и -2 соответственно.

Доказательство переносится с первого примера почти дословно.

II.1. Примеры псевдотензоров

$\sqrt{g(\mathbf{Б})}$ — псевдоскаляр веса 1. Здесь $g(\mathbf{Б})$ — детерминант значения дважды ковариантного метрического тензора на базисе **Б**, то есть $g(\mathbf{Б})$ — детерминант матрицы Грама базиса **Б**.

Доказательство.

II.1. Примеры псевдотензоров

$\sqrt{g(\mathbf{Б})}$ — псевдоскаляр веса 1. Здесь $g(\mathbf{Б})$ — детерминант значения дважды ковариантного метрического тензора на базисе $\mathbf{Б}$, то есть $g(\mathbf{Б})$ — детерминант матрицы Грама базиса $\mathbf{Б}$.

Доказательство. Это очевидное следствие первого примера.

II.2. Символ Леви-Чивита

Определение 3. *Пусть дан массив чисел* $(\varepsilon_{ijk}) = \left(\varepsilon^{ijk}\right)$*, где индексы* i, j, k *изменяются от 1 до 3, причем*

- $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1;$
- $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1;$
- $\varepsilon_{ijk} = 0$ *во всех остальных случаях (то есть если какие-либо два индекса совпадают).*

Обозначения ε_{ijk} *и* ε^{ijk} *элементов этого массива называются* **символами Леви-Чивита***.*

II.2. Символ Леви-Чивита

Используя тензорные обозначения[1], имеем

$$(\varepsilon_{ijk}) = (\varepsilon^{ijk}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

[1] Подчернем, что о тензорах здесь пока речи не идет, используются только тензорные обозначения!

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство.

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. Возьмем значение (T_{ijk}) функции T в каком-нибудь базисе. Для того, чтобы доказать это равенство, вычислим его левую и правую части, и сравним их.

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ — *антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} =$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ — *антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} T_{123},$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132} T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} =$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ — *антисимметричеcкий по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132} T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1} T_{123},$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ — *антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132} T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \varepsilon_{231} T_{123},$$

$$T_{213} = -T_{123} =$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132} T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \varepsilon_{231} T_{123},$$

$$T_{213} = -T_{123} = \underbrace{\varepsilon_{213}}_{=-1} T_{123},$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132}T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \varepsilon_{231}T_{123},$$

$$T_{213} = -T_{123} = \varepsilon_{213}T_{123},$$

$$T_{312} = T_{123} =$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132} T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \varepsilon_{231} T_{123},$$

$$T_{213} = -T_{123} = \varepsilon_{213} T_{123},$$

$$T_{312} = T_{123} = \underbrace{\varepsilon_{312}}_{=1} T_{123},$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ — *антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132}T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \varepsilon_{231}T_{123},$$

$$T_{213} = -T_{123} = \varepsilon_{213}T_{123},$$

$$T_{312} = T_{123} = \varepsilon_{312}T_{123},$$

$$T_{321} = -T_{123} =$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \text{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. По определению T и ε_{ijk} получаем:

$$T_{132} = -T_{123} = \varepsilon_{132}T_{123},$$

$$T_{231} = T_{123} = \varepsilon_{231}T_{123},$$

$$T_{213} = -T_{123} = \varepsilon_{213}T_{123},$$

$$T_{312} = T_{123} = \varepsilon_{312}T_{123},$$

$$T_{321} = -T_{123} = \underbrace{\varepsilon_{321}}_{=-1}T_{123},$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. Переставляя местами первые два индекса в элементах T_{iik} получаем $T_{iik} = -T_{iik}$, откуда

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. Переставляя местами первые два индекса в элементах T_{iik} получаем $T_{iik} = -T_{iik}$, откуда $T_{iik} = 0$.

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 1. *Пусть массив* $(T_{ijk})_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3\}}$ *— антисимметрический по любой паре индексов, то есть*

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -T_{kji}, \quad \textit{где} \quad \{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}\,.$$

Тогда $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{123}$.

Доказательство. Переставляя местами первые два индекса в элементах T_{iik} получаем $T_{iik} = -T_{iik}$, откуда $T_{iik} = 0$.

Аналогично получаем $T_{ijj} = 0$ и $T_{iji} = 0$.

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 2. *Пусть* $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ *Тогда* $\det M = \varepsilon^{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c$

(напомним, что $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$*).*

Доказательство. Надо просто вычислить правую и левую части этого равенства, и сравнить их. Проделайте это самостоятельно.

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 3. *Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* (ε_{ijk}) *(соответственно,* $\left(\varepsilon^{ijk}\right)$*), является псевдотензором ранга 3 веса* -1 *(соответственно, веса 1).*

Доказательство. Возьмем два базиса **Б** и **Б**$'$. Надо доказать, что

$$\varepsilon_{ijk} = (\det A)^{-1} \cdot a_i^p \cdot a_j^q \cdot a_k^r \cdot \varepsilon_{pqr}, \quad \varepsilon^{ijk} = \det A \cdot b_p^i \cdot b_q^j \cdot b_r^k \cdot \varepsilon^{pqr}.$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 3. *Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* (ε_{ijk}) *(соответственно,* $\left(\varepsilon^{ijk}\right)$*), является псевдотензором ранга 3 веса* -1 *(соответственно, веса 1).*

Доказательство. Возьмем два базиса **Б** и **Б**$'$. Надо доказать, что

$$\varepsilon_{ijk} = (\det A)^{-1} \cdot a_i^p \cdot a_j^q \cdot a_k^r \cdot \varepsilon_{pqr}, \quad \varepsilon^{ijk} = \det A \cdot b_p^i \cdot b_q^j \cdot b_r^k \cdot \varepsilon^{pqr}.$$

Но это равенство следует непосредственно из свойства 2.

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 3. *Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* (ε_{ijk}) *(соответственно,* $\left(\varepsilon^{ijk}\right)$*), является псевдотензором ранга 3 веса* -1 *(соответственно, веса 1).*

Свойство 4. $\varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} =$

$$= \delta_{il} \cdot \delta_{km} - \delta_{im} \cdot \delta_{kl} = \delta_i^l \cdot \delta_k^m - \delta_i^m \cdot \delta_k^l = \delta_l^i \cdot \delta_m^k - \delta_m^i \cdot \delta_l^k.$$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 3. *Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* (ε_{ijk}) *(соответственно,* $\left(\varepsilon^{ijk}\right)$*), является псевдотензором ранга 3 веса* -1 *(соответственно, веса 1).*

Свойство 4. $\varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} =$

$$= \delta_{il} \cdot \delta_{km} - \delta_{im} \cdot \delta_{kl} = \delta_i^l \cdot \delta_k^m - \delta_i^m \cdot \delta_k^l = \delta_l^i \cdot \delta_m^k - \delta_m^i \cdot \delta_l^k.$$

Свойство 5. $\varepsilon_{imn} \cdot \varepsilon_{jmn} = \varepsilon_{imn} \cdot \varepsilon^{jmn} = \varepsilon^{imn} \cdot \varepsilon_{jmn} = 2 \cdot \delta_i^j = 2 \cdot \delta_j^i.$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 3. *Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* (ε_{ijk}) *(соответственно,* $\left(\varepsilon^{ijk}\right)$*), является псевдотензором ранга 3 веса* -1 *(соответственно, веса 1).*

Свойство 4. $\varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} =$

$$= \delta_{il} \cdot \delta_{km} - \delta_{im} \cdot \delta_{kl} = \delta_i^l \cdot \delta_k^m - \delta_i^m \cdot \delta_k^l = \delta_l^i \cdot \delta_m^k - \delta_m^i \cdot \delta_l^k.$$

Свойство 5. $\varepsilon_{imn} \cdot \varepsilon_{jmn} = \varepsilon_{imn} \cdot \varepsilon^{jmn} = \varepsilon^{imn} \cdot \varepsilon_{jmn} = 2 \cdot \delta_i^j = 2 \cdot \delta_j^i.$

Свойство 6. $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = 6.$

II.3. Свойства символов Леви-Чивита

Свойство 3. *Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* (ε_{ijk}) *(соответственно,* $\left(\varepsilon^{ijk}\right)$*), является псевдотензором ранга 3 веса* -1 *(соответственно, веса 1).*

Свойство 4. $\varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ikn} \cdot \varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{ikn} \cdot \varepsilon_{lmn} =$

$$= \delta_{il} \cdot \delta_{km} - \delta_{im} \cdot \delta_{kl} = \delta_i^l \cdot \delta_k^m - \delta_i^m \cdot \delta_k^l = \delta_l^i \cdot \delta_m^k - \delta_m^i \cdot \delta_l^k.$$

Свойство 5. $\varepsilon_{imn} \cdot \varepsilon_{jmn} = \varepsilon_{imn} \cdot \varepsilon^{jmn} = \varepsilon^{imn} \cdot \varepsilon_{jmn} = 2 \cdot \delta_i^j = 2 \cdot \delta_j^i.$

Свойство 6. $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = 6.$

Свойства 4, 5, 6 доказываются непосредственным вычислением левой и правой части равенств.

II.4. Тензор Леви-Чивита

Определение 4. *Пусть* V — *евклидово трехмерное пространство. Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* $(e_{ijk}) = \left(\sqrt{g} \cdot \varepsilon_{ijk}\right)$ *(соответственно,* $\left(e^{ijk}\right) = \left(\sqrt{g}^{-1} \cdot \varepsilon^{ijk}\right)$*), где* $g = \det(g_{ij})$, *называется* **тензором Леви-Чивита**.

Здесь e_{ijk} и e^{ijk} — **символ Леви-Чивита**.

II.4. Тензор Леви-Чивита

Определение 4. *Пусть V — евклидово трехмерное пространство. Функция, каждому базису ставящая в соответствие массив $(e_{ijk}) = \left(\sqrt{g} \cdot \varepsilon_{ijk}\right)$ (соответственно, $\left(e^{ijk}\right) = \left(\sqrt{g}^{-1} \cdot \varepsilon^{ijk}\right)$), где $g = \det(g_{ij})$, называется тензором Леви-Чивита.*

То, что тензор Леви-Чивита — действительно тензор, следует из того, что g — псевдотензор веса -2, свойства 3) и обратного псевдотензорного признака. Мы не будем приводить формулировку правила частного для псевдотензоров, поскольку она почти дословно повторяет **обратный тензорный признак**, за исключением того, что R — должен быть псевдотензором веса α, Q — псевдотензором веса β, и тогда T будет иметь вес $\beta - \alpha$.

II.5. Геометрические применения тензора Леви-Чивита

Пусть V — линейное пространство геометрических векторов, $\mathbf{Б} = \{v_1, v_2, v_3\}$ — правая тройка. В частности, по свойству 6) метрического тензора $v_1 v_2 v_3 = \sqrt{g}$. Описываемые ниже методы связаны с вычислением векторного и смешанного произведений в произвольном, не обязательно ортонормированном базисе.

II.5. Геометрические применения тензора Леви-Чивита

Вычисление векторного произведения. Пусть $x = x^i v_i = x_i v^i$, $y = y^i v_i = y_i v^i$. Тогда

$$z^i \cdot v_i = z_i \cdot v^i = [x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j \cdot v_k,$$

то есть

$$z^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j, \quad z_k = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j. \tag{8}$$

II.5. Геометрические применения тензора Леви-Чивита

Вычисление векторного произведения. Пусть $x = x^i v_i = x_i v^i$, $y = y^i v_i = y_i v^i$. Тогда

$$z^i \cdot v_i = z_i \cdot v^i = [x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j \cdot v_k,$$

то есть

$$z^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j, \quad z_k = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j. \tag{8}$$

Вычисление смешанного произведения. Пусть $x = x^i v_i = x_i v^i$, $y = y^i v_i = y_i v^i$, $z = z^i v_i = z_i v^i$. Тогда

$$xyz = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j \cdot z_k. \tag{9}$$

Доказательство этих утверждений мы приводить не будем.

II.5. Геометрические применения тензора Леви-Чивита

Вычисление векторного произведения. Пусть $x = x^i v_i = x_i v^i$, $y = y^i v_i = y_i v^i$. Тогда

$$z^i \cdot v_i = z_i \cdot v^i = [x, y] = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot v^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j \cdot v_k,$$

то есть

$$z^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j, \quad z_k = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j. \tag{8}$$

Вычисление смешанного произведения. Пусть $x = x^i v_i = x_i v^i$, $y = y^i v_i = y_i v^i$, $z = z^i v_i = z_i v^i$. Тогда

$$xyz = e_{ijk} \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^k = e^{ijk} \cdot x_i \cdot y_j \cdot z_k. \tag{9}$$

Рассмотреть пример?

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?