

Министерство образования и науки РФ  
Уральский государственный экономический университет



Ю. Б. Мельников

# Исчисление высказываний

Раздел **электронного учебника**  
для сопровождения практического занятия

*Изд. 4-е, испр. и доп.*



e-mail: [melnikov@k66.ru](mailto:melnikov@k66.ru),  
[melnikov@r66.ru](mailto:melnikov@r66.ru)

сайты:  
<http://melnikov.k66.ru>,  
<http://melnikov.web.ur.ru>

Екатеринбург  
2012

Пример 1 проверки истинности и выводимости формулы  
в дифференциальном исчислении5

I. Исчисление высказываний с системой связок  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  24

Пример поиска доказательства . . . . . 25

Вспомогательная задача 1 . . . . . 28

Вспомогательная задача 2 . . . . . 39

Вспомогательная задача 3 . . . . . 45

Итоговое доказательство . . . . . 47

Пример 3 доказательства секвенции48

Пример 1 обогащения правилами вывода . . . . . 66

Пример 2 обогащения правилами вывода . . . . . 78

Пример доказательства с использованием дополнительного правила и без него . . . . .	82
<b>II. Исчисление высказываний с системой связок <math>\neg, \rightarrow</math></b>	<b>86</b>
Пример поиска доказательства . . . . .	87
<i>Примеры задач для самостоятельного решения</i>	100
<i>Поиск доказательств для исчисления с логическими связками <math>\neg, \wedge, \vee, \rightarrow</math></i>	100
Задача IV.1	101
Задача IV.2	102
Задача IV.3	103

Задача IV.4	104
Задача IV.5	105
Задача IV.6	106
<i>Дополнительные правила вывода</i>	106
Задача V.7	107
Задача V.8	108
Ответы и решения	109

**Пример 1.** *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

*Как можно проверить истинность формулы*

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.**

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Для того, чтобы проверить истинность **формулы (2)**  
МОЖНО

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Для того, чтобы проверить истинность **формулы (2)** можно  
— либо проверить равенство непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной  $x$  (семантическая проверка);

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Для того, чтобы проверить истинность **формулы (2)** можно

- либо проверить равенство непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной  $x$  (семантическая проверка);
- либо получить эту формулу с помощью правил дифференцирования (грамматическая проверка, использующая только формальные правила, без учета смысла обозначений).



**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)** состоит в проверке равенства непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной  $x$ .

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)** состоит в проверке равенства непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной  $x$ .

Мы (с некоторой «натяжкой») заменим этот процесс на вывод **формулы (2)**, используя определение производной функции.

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} =$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)**:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \end{aligned}$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)**:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cos \Delta x + x \cos x \sin \Delta x - x \sin x}{\Delta x} + \sin x = \end{aligned}$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)**:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cos \Delta x + x \cos x \sin \Delta x - x \sin x}{\Delta x} + \sin x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} x \cos x + \sin x = \end{aligned}$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)**:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cos \Delta x + x \cos x \sin \Delta x - x \sin x}{\Delta x} + \sin x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} x \cos x + \sin x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \left(-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + x \cos x + \sin x = \end{aligned}$$

**Решение.** Семантическая проверка истинности **формулы (2)**:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cos \Delta x + x \cos x \sin \Delta x - x \sin x}{\Delta x} + \sin x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} x \cos x + \sin x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \left(-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + x \cos x + \sin x = x \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Проверена **истинность формулы (2)**.



**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)',$$

Используем правило  $(fg)' = f'g + fg'...$

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

Используем правило  $(fg)' = f'g + fg'...$

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

Теперь применим правило  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \dots$

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)',$$

Теперь применим правило  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \dots$

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)',$$

Осталось воспользоваться правилом  $(\sin x)' = \cos x \dots$

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)', \quad F'(x) = \sin x + x \cos x.$$

Осталось воспользоваться правилом  $(\sin x)' = \cos x \dots$

**Пример 1.** Рассмотрим формулу

$$F(x) = x \sin x. \quad (1)$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \quad (2)$$

**Решение.** Грамматическая проверка **формулы (2)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)', \quad F'(x) = \sin x + x \cos x.$$

**Формула (2) доказана.**

**Ранее** мы проверили **истинность формулы (2)**.

[Вернуться к лекции?](#)

# I. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

**Алфавит ИВ** состоит из трех групп символов:

*Пропозициональные переменные:*  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$

*Логические символы или связки:* импликация  $\rightarrow$ , конъюнкция  $\&$  или  $\wedge$ , дизъюнкция  $\vee$ , отрицание  $\neg$  или  $\bar{\phantom{x}}$ , символ следования  $\vdash$ .

*Вспомогательные символы:* левая круглая скобка «(», правая круглая скобка «)», запятая «,».

**Аксиома:**  $\Phi \vdash \Phi$ .

**Правила вывода:**

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$



1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Как доказать  $\dots \wedge \dots$ ?

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

В правилах вывода доказуемая секвенция с заключением в виде  $\dots \wedge \dots$  встречается только в правиле 1.

$$\frac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \quad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Значит, надо доказать две секвенции. Сначала докажем **первую** из них.

$$\frac{\neg(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \neg \mathbf{P} \quad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 1.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

У нас нет правила вывода с отрицанием в качестве доказываемой секвенции. Остается применение правила

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 1.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

У нас нет правила вывода с отрицанием в качестве доказываемой секвенции. Остается применение правила 9.

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Как можно доказать противоречивость теории?

---


$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

---


$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Что взять в качестве выводимых из  $\neg(P \vee Q), \neg\neg P$  формул  $\Phi$  и  $\neg\Phi$ ?

---


$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)$$



1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Что взять в качестве выводимых из  $\neg(P \vee Q), \neg\neg P$  формул  $\Phi$  и  $\neg\Phi$ ?

Наиболее естественные варианты:  $(P \vee Q)$  или  $\neg P$ .

---


$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Вариант  $\neg P$  вернет нас к первоначальной ситуации, поэтому выберем  $(P \vee Q)$  в качестве  $\Phi$ .

$$\frac{\overline{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash P \vee Q} \quad \overline{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash \neg(P \vee Q)}}{\frac{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)} (10)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Вторая секвенция быстро сводится к аксиоме.

$$\frac{\overline{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \quad \overline{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}}{\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)} (10)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Для оставшейся секвенции одно из условий можно убрать (она все равно остается истинной и, значит, доказуемой).

$$\frac{\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)} \quad \frac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)} (11, 12)}{\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P} (9)} (10)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Дизъюнкцию можно доказать только с помощью правил 4 и 5.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\neg \neg P \vdash P \vee Q}}{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash P \vee Q} \text{ (11, 12)} \quad \frac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash \neg(P \vee Q)} \text{ (11, 12)} \\
 \hline
 \frac{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg \neg P \vdash} \text{ (9)} \\
 \hline
 \neg(P \vee Q) \vdash \neg P \text{ (10)}
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось доказать секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \hline
 \neg\neg P \vdash P \\
 \hline
 \neg\neg P \vdash P \vee Q \quad (4) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q \quad (11, 12) \quad \neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q) \quad (11, 12) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q) \quad (10) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \\
 \hline
 \neg(P \vee Q) \vdash \neg P \quad (9)
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Надо «уменьшить» разницу в количестве отрицаний  $\neg$  между  $\neg(\neg P)$  и  $P$ . Для этого естественно воспользоваться правилом 9.

$$\overline{\neg\neg P \vdash P}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

***Вспом. задача 2. Докажите секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .***

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Противоречивость теории можно доказать только с помощью правила

$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P} (9)$$



1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Противоречивость теории можно доказать только с помощью правила 10.

$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P} (9)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Что взять в качестве  $\Phi$  и  $\neg\Phi$ ?

Очевидно, что оптимальным является выбор  $\neg P$  в качестве  $\Phi$ .

---


$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P} \text{ (9)} \quad (10)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось «убрать лишнее».

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}^{(11, 12)} \quad \frac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(12)} \\
 \hline
 \frac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash}^{(10)} \\
 \hline
 \frac{}{\neg\neg P \vdash P}^{(9)}
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg\neg P \vdash P$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось «убрать лишнее».

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P} (11, 12) \quad \frac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P} (12) \\
 \hline
 \frac{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash} (10) \\
 \hline
 \frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P} (9)
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 3.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Аналогично **доказательству вспомогательной задачи 1** получаем следующее доказательство.

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \hline
 \neg\neg Q \vdash Q \\
 \hline
 \neg\neg Q \vdash P \vee Q \quad (4) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash P \vee Q \quad (11, 12) \quad \neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q) \quad (11, 12) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg(P \vee Q) \quad (10) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg Q \quad (9) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 3.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

При этом доказательство секвенции  $\neg\neg Q \vdash Q$  аналогично **доказательству утверждения**  $\neg\neg P \vdash P$ .

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \hline
 \neg\neg Q \vdash Q \\
 \hline
 \neg\neg Q \vdash P \vee Q \quad (4) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash P \vee Q \quad (11, 12) \quad \neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q) \quad (11, 12) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg(P \vee Q) \quad (10) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg Q \quad (9) \\
 \hline
 \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Вспом. задача 3.** Докажите секвенцию  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$ .

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

В итоге получили следующее доказательство.

$$\begin{array}{c}
 \text{Решение вспом. задачи 1} \quad \text{Решение вспом. задачи 2} \\
 \hline
 \neg(P \vee Q) \vdash \neg P \qquad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q \\
 \hline
 \neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q \qquad (1)
 \end{array}$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

**Решение.**



**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

---


$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P \quad (7)$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} \quad (7)$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Psi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\frac{}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash} \quad (10)$$

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} \quad (7)$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Psi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q \quad \overline{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash} \quad (11, 12), \quad (10) \\
 \hline
 \frac{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} \quad (7)
 \end{array}$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q} (11, 12), \quad \frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg \neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash} (10) \\
 \hline
 P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P \\
 \hline
 P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P \quad (7)
 \end{array}$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q} (11, 12), \quad \frac{\mathbf{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash} (10) \\
 \hline
 P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P \\
 \hline
 P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P \quad (7)
 \end{array}$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

---


$$P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q$$

$$\frac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q} (11, 12), \quad \frac{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash} (10)$$

$$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$$

$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

(8)

(7)

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \neg \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\frac{\overline{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash P}^{(11, 12)} \quad \overline{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(11, 12)}}{\mathbf{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q}}^{(8)}$$

$$\frac{\overline{\neg Q, \vdash \neg Q} \quad \overline{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q}^{(11, 12)}, \quad \mathbf{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash}^{(10)}$$

$$\frac{\overline{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}^{(7)}$$



**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\frac{\frac{\neg \neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash P,}^{(11, 12)} \quad \frac{}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(11, 12)}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg \neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}^{(8)}$$

$$\frac{\frac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q}^{(11, 12)}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg \neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash}^{(10)}$$

$$\frac{\frac{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{(7)}$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$	2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$	3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$	4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$	5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$		7. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi};$	8. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$	
9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$	10. $\frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \neg \Phi};$	11. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$	12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$	

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P}, \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q} \quad (11, 12) \\
 \hline
 \mathbf{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q} \quad (8)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q} \quad (11, 12), \quad \mathbf{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q} \\
 \hline
 P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \quad (10)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P \\
 \hline
 P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P \quad (7)
 \end{array}$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \\
 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}; \quad 8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \\
 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 11. \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad 12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.
 \end{array}$$

$$\frac{\frac{\neg \neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash P,} (11, 12) \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash P \rightarrow Q} (11, 12)}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q} (8)$$

$$\frac{\frac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash \neg Q} (11, 12), \quad \frac{}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash Q} (10)}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg \neg P \vdash}$$

$$\frac{\frac{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{} (7)$$

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}} \text{ (9)} \\
 \frac{\neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,} \text{ (11, 12)} \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q} \text{ (11, 12)} \\
 \hline
 \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q} \text{ (8)}
 \end{array}$$

- |   |  |   |   |   |
|---|--|---|---|---|
| 1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$                                   | 2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$            | 3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$   | 4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$ | 5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$ |
| 6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$ | 7. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$ | 8. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$  |   |   |
| 9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$   | 10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$   | 11. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi; \Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$ | 12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$    |   |

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash} (10) \\
 \hline
 \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \\
 \hline
 \frac{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,} (11, 12) \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q} (11, 12) \\
 \hline
 \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q} \quad (8)
 \end{array}$$

- |   |  |  |   |   |
|---|--|--|---|---|
| 1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$   | 2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$                | 3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$                                | 4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$ | 5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$ |
| 6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$ | 7. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi};$     | 8. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$ |   |   |
| 9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$   | 10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$ | 11. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$  | 12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$    |   |

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\frac{\frac{\overline{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}^{(11, 12)}, \quad \frac{\overline{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(11, 12)}}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(10)}}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(9)}$$

$$\frac{\frac{\neg\neg P \vdash P}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P}^{(11, 12)} \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(11, 12)}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(8)}$$

1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$	2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$	3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$	4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$	5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$	7. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi};$	8. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$		
9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$	10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$	11. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi, \quad \Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$	12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$	

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\frac{\frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}^{(11, 12)}, \quad \frac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(11, 12)}}{\neg\neg P, \neg P \vdash} \quad (10)$$

$$\frac{\frac{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P}^{(11, 12)}, \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(11, 12)}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}} \quad (8)$$

1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$ ;	2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}$ ;	3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$ ;	4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$ ;	5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$ ;
6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi; \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$ ;	7. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}$ ;	8. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$ ;		
9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ ;	10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash}$ ;	11. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi; \Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$ ;	12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$ .	

**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\frac{\frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}^{(11, 12)}, \quad \frac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(11, 12)}}{\neg\neg P, \neg P \vdash} \quad (10)$$

$$\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}$$

$$\frac{\frac{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P}^{(11, 12)}, \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(11, 12)}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}} \quad (8)$$

- |   |  |   |   |   |
|---|--|---|---|---|
| 1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$   | 2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$                | 3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$   | 4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$ | 5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$ |
| 6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$ | 7. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     | 8. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$  |   |   |
| 9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$   | 10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$ | 11. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi; \quad \Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$ | 12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$    |   |



**Пример 3.** Докажите, что  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ .

$$\frac{\frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}^{(11, 12)}, \quad \frac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}^{(11, 12)}}{\neg\neg P, \neg P \vdash}^{(10)}$$

$$\frac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash}^{(9)}$$

$$\frac{\frac{\neg\neg P \vdash P}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P}^{(11, 12)}, \quad \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \rightarrow Q}^{(11, 12)}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}^{(8)}$$

$$P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q$$

$$\frac{\frac{\neg Q \vdash \neg Q}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}^{(11, 12)}, \quad \frac{}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}^{(10)}}{P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}$$

$$P \rightarrow Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash$$

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}^{(7)}$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Какие следствия можно получить из секвенции  $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$ ?

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{???}, \quad ???, \quad \dots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Какие следствия можно получить из секвенции  $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$ ? Такое условие имеется только в правиле вывода **7**.

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{???}, \quad ???, \quad \dots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \quad \dots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

В каких правилах вывода присутствует импликация?

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \quad \dots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg \Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens).

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \quad \dots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg \Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens). Для этого надо использовать секвенцию, в которой выводится  $\Phi$ .

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \quad \dots, \quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$



1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens). Для этого надо использовать секвенцию, в которой выводится  $\Phi$ .

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ??? \vdash \Phi, \quad \dots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Надо использовать секвенцию, в которой выводятся  $\Phi$ , и в условии должно присутствовать  $\neg(\neg\Phi)$ .

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi, \quad \dots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.  
Условие секвенции  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$  можно «обогащить» формулой  $\neg(\neg\Phi)$  с помощью правила 12.

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi, \quad \dots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.  
Доказательство секвенции  $\neg(\neg\Phi) \vdash \Phi$  было осуществлено при решении **вспомогательной задачи**.

$$\frac{\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)}, \quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi, \quad \dots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$  не увеличивает множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

Применение этого правила надо заменить на следующий фрагмент дерева доказательства:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}^{(7)} \\
 \frac{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi \rightarrow \Psi},^{(11, 12)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{Вспомогательная задача} \\
 \hline
 \frac{}{\neg(\neg\Phi) \vdash \Phi} \\
 \hline
 \frac{}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi}^{(11, 12)}
 \end{array}
 \quad
 \frac{}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}^{(8)}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать, что применение правила вывода  $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Решение.**

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать, что применение правила вывода  $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Решение.** Применим стратегию предвкушения. Для применения этого правила надо было предварительно вывести противоречивость совокупности формул  $\Gamma$ .

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать, что применение правила вывода  $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Решение.** Применим стратегию предвкушения. Для применения этого правила надо было предварительно вывести противоречивость совокупности формул  $\Gamma$ . Сделать это можно было только с помощью правила вывода 10. Значит, до этого были получены секвенции  $\Gamma \vdash \Psi$  и  $\Gamma \vdash \neg\Psi$  для некоторой формулы  $\Psi$ .



1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать, что применение правила вывода  $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Решение.** Применение данного правила надо заменить на следующий фрагмент дерева доказательства:

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \Psi,} (12) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \neg\Psi} (12)}{\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi} (9)} (10).$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать секвенцию  $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$  с использованием **дополнительного правила вывода**, и без использования этого правила.

**Решение.**

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать секвенцию  $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$  с использованием **дополнительного правила вывода**, и без использования этого правила.

**Решение** с использованием **дополнительного правила**:

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P,}^{(12)} \quad \frac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}^{(12, 11)} \\
 \hline
 \frac{\mathbf{P, \neg P \vdash}}{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}}^{(2)} \\
 \hline
 \frac{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q,}^{(12, 11)} \quad \frac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q,}^{(12, 11)} \quad \frac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}^{(12)} \\
 \hline
 \frac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q}^{(7)} \quad (6)
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Пример.** Доказать секвенцию  $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$  с использованием **дополнительного правила вывода**, и без использования этого правила.

**Решение.** Для того, чтобы получить «нормальное» доказательство, использующее только правила вывода 1-12, надо, как указано в примере **2**, удалить «дробь»  $\frac{P, \neg P \vdash}{P, \neg P \vdash Q}$  и сделать следующие «вставки» (выделены прямоугольниками)

Решение с использованием **дополнительного правила**:

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P} (12) \quad \frac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P} (12, 11) \\
 \hline
 \frac{\mathbf{P, \neg P \vdash}}{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}} (2) \\
 \frac{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q} (12, 11) \quad \frac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q} (12, 11) \quad \frac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q} (12) \\
 \hline
 \frac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q} (7) \quad \frac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q} (12) \\
 \hline
 \frac{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q} (6)
 \end{array}$$

Решение без применения **дополнительного правила**:

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P} (12) \quad \frac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P} (12, 11) \\
 \frac{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash P}}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash \neg P}} (12) \quad \frac{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash P}}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash \neg P}} (12) \\
 \hline
 \frac{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash P}}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash Q}} (12) \\
 \frac{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash Q}}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q} (12, 11) \quad \frac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q} (12, 11) \quad \frac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q} (12) \\
 \hline
 \frac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q} (7) \quad \frac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q} (12) \\
 \hline
 \frac{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q} (6)
 \end{array}$$

[Вернёмся к лекции?](#)

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

Система аксиом исчисления высказываний «порождается» в этом случае следующими тремя схемами секвенций (в отличие от единственной секвенции):

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;
2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;
3.  $\vdash ((\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi) \rightarrow ((\neg\Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi))$ .

В данном случае можно ограничиться единственным правилом вывода: правилом **modus ponens** или **правилом отделения**:

$$\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$$

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;
2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;  $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$
3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi))$ .

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.**

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;
2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;  $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$
3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi))$ .

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что  $\Psi = P \rightarrow P$ .



## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$

2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta));$       $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что  $\Psi = P \rightarrow P$ . Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки  $\Phi$  этого правила.

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;

2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;  $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi))$ .

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что  $\Psi = P \rightarrow P$ . Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки  $\Phi$  этого правила.

Брать  $P \rightarrow P$ , видимо, не имеет смысла, так как доказательство формулы  $(P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P)$  вряд ли проще доказательства исходной формулы.

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$

2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta));$       $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что  $\Psi = P \rightarrow P$ . Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки  $\Phi$  этого правила.

Отметим, что посылка должна быть выводима, поэтому первой посылкой должна быть либо аксиома, либо доказуемая формула.

Например,  $P$  не годится, так как эта формула «не обязана» быть истинной в любой модели.

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

$$1. \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$$

$$2. \vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)); \quad \frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$$

$$3. \vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что  $\Psi = P \rightarrow P$ . Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки  $\Phi$  этого правила.

Отметим, что посылка должна быть выводима, поэтому первой посылкой должна быть либо аксиома, либо доказуемая формула.

Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$

2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta));$       $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

3.  $\vdash ((\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi) \rightarrow ((\neg\Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Следовательно, для того, чтобы можно было воспользоваться правилом modus ponens, надо еще доказать формулу  $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;

2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;  $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi))$ .

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Надо доказать  $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Эту формулу можно получить тоже только с помощью правила modus ponens.

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

$$1. \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$$

$$2. \vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)); \quad \frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$$

$$3. \vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Надо доказать  $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Попытка использовать для второго аргумента в правиле modus ponens результат подстановки соответствующих формул в схему аксиом 1, по-видимому, бесперспективна.

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

$$1. \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$$

$$2. \vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)); \quad \frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$$

$$3. \vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Надо доказать  $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

В этом случае придется брать в качестве  $\Phi$  формулу  $P \rightarrow P$ , то есть ту самую формулу, которую мы доказываем, а она к моменту использования в доказательстве должна уже быть доказана.



## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

1.  $\vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;

2.  $\vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;  $\frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

3.  $\vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi))$ .

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Надо доказать  $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Поэтому остается применить схему аксиом 2.

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

$$1. \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$$

$$2. \vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)); \quad \frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$$

$$3. \vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi)).$$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

**Решение.** Генерация доказательства. Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и  $\Psi$ :  $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

Надо доказать  $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$ .

В схеме аксиом 2 придется положить  $\Phi = P$ ,  $\Psi = P \rightarrow P$ ,  $\Theta = P$ . Следовательно, для применения правила отделения, надо доказать формулу  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta) = P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)$ . Но это результат подстановки в схему аксиом 1 формулы  $P$  в качестве  $\Phi$  и формулы  $P \rightarrow P$  в качестве  $\Psi$ .

## II. Исчисление высказываний с системой связок

$\neg, \rightarrow$

$$1. \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi);$$

$$2. \vdash (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)); \quad \frac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$$

$$3. \vdash \left( (\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow ((\neg \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi) \right).$$

**Пример.** Доказать формулу  $P \rightarrow P$ .

Решение.

$$\frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P), \left( P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P) \right) \rightarrow \left( (P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P) \right)}{\frac{(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P), \quad P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow P}}$$

Вернёмся к лекции?

# Задания для самостоятельного выполнения

**Задача IV.1.** (Ответ приведен на стр.111.) Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Задача IV.2.** (Ответ приведен на стр.120.) Докажите секвенцию  
 $\neg P, P \vee Q \vdash Q$ .

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

### Задача IV.3. (Ответ приведен на стр.123.)

Докажите секвенцию

$$P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q.$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

# Задача IV.4. (Ответ приведен на стр.128.)

Доказать формулу

$\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$ .

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$



### Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.130.)

Доказать формулу

$$\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \rightarrow \Phi;$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

## Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.132.)

Доказать формулу

$$\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi.$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Задача V.7.** (Ответ приведен на стр.134.) Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Задача V.8.** (Ответ приведен на стр.137.) Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

# Ответы и решения

# Решение задачи 1.

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** Составив истинностную таблицу этой функции, легко убеждаемся в том, что эта функция тождественно равна 1, то есть истинна. Проверим доказуемость.

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Генерация» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Нам надо доказать секвенцию  $\vdash P \vee \neg P$ . «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».



**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Генерация» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Нам надо доказать секвенцию  $\vdash P \vee \neg P$ . «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash$ .

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Генерация» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Нам надо доказать секвенцию  $\vdash P \vee \neg P$ . «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash$ .

Единственное правило вывода, позволяющее в качестве вывода получить секвенцию такого вида — это правило 10.

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Генерация» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Нам надо доказать секвенцию  $\vdash P \vee \neg P$ . «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash$ .

Единственное правило вывода, позволяющее в качестве вывода получить секвенцию такого вида — это правило 10.

В качестве  $\Gamma \vdash \neg P$  можно взять аксиому  $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$ , при этом к посылке этой секвенции, согласно правилу 12, можно дописать любую формулу. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 попробуем взять  $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$ .

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Генерация» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash$ . Используем правило 10, в качестве  $\Gamma \vdash \neg P$  возьмем  $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$ . В качестве первой секвенции посылки из правила 10 возьмем  $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$ .

Согласно правилу 4 для доказательства последней секвенции достаточно доказать, например, секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash P$ . Единственное правило, «нетривиальным» следствием в котором может быть эта формула, является правило 9.

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Генерация» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash$ . Используем правило 10, в качестве  $\Gamma \vdash \neg P$  возьмем  $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$ . В качестве первой секвенции посылки из правила 10 возьмем  $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$ .

Согласно правилу 4 для доказательства последней секвенции достаточно доказать, например, секвенцию  $\neg(P \vee \neg P) \vdash P$ . Единственное правило, «нетривиальным» следствием в котором может быть эта формула, является правило 9.

Итак, надо доказать,  $\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash$ . Как мы уже отмечали, такое заключение можно получить только из правила 10. Одной из секвенций посылки можно взять  $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$ , в которой, согласно правилу 12 посылку можно «расширить». Во второй секвенции посылки правила 10 должно быть правило, вывод в котором имеет вид  $P \vee \neg P$ . В качестве посылки можно взять один из «дизъюнктов», например,  $\neg P$ . Секвенция  $\neg P \vdash P \vee \neg P$  следует из аксиомы  $\neg P \vdash \neg P$  и правила 5.

**Задача 1.** Проверить истинность формулы  $P \vee \neg P$ . Доказать эту формулу.

**Ответ.** «Оформление» доказательства.

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Оформим результат в виде так называемого **дерева доказательства**:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P \vdash P \vee \neg P} \\
 \frac{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash P \vee \neg P; \quad \neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash} \quad (10) \\
 \frac{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P} \quad (9) \\
 \frac{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P; \quad \neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\neg(P \vee \neg P) \vdash} \quad (4) \\
 \frac{\neg(P \vee \neg P) \vdash}{\vdash P \vee \neg P} \quad (10)
 \end{array}$$

# Решение задачи 2.

**Задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg P, P \vee Q \vdash Q$ .

**Задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg P, P \vee Q \vdash Q$ .

**Ответ.**

$$1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$$

$$5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$$

$$8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash}; \quad 11. \frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$$

$$12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$$

Дерево доказательства с «полиграфической точки зрения» в данном случае является слишком «широким», поэтому обозначим через  $\mathcal{D}$  следующее дерево доказательства секвенции  $\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash$ :

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{P \vdash P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P} (12, 11) \quad \frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P} (12, 11)}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash} (10)$$



**Задача 2.** Докажите секвенцию  $\neg P, P \vee Q \vdash Q$ .

**Ответ.**

$$1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad 2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 3. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 4. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$$

$$5. \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad 6. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 7. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$$

$$8. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad 9. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad 10. \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash}; \quad 11. \frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$$

$$12. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$$

Тогда общее дерево доказательства имеет вид:

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash} \quad \neg P, P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q} (9) \quad \frac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} (12, 11) \quad \frac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q} (12, 11)}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} (6)$$

# Решение задачи 3.

**Задача 3.** Докажите секвенцию  $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$ .

**Задача 3.** Докажите секвенцию  $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$ .

**Ответ.**

**B**

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}^{(9)} \\
 \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q^{(4)}, \quad \frac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}^{(11, 12)}}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}^{(10)} \\
 \hline
 P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q^{(9)}
 \end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A} \\
\frac{}{\neg(\neg P) \vdash P}^{(9)} \\
\frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash P}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash P}^{(11, 12)}, \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash P \rightarrow Q}^{(12)} \\
\frac{}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash Q}^{(8)} \\
\frac{}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash \neg P \vee Q}^{(5)} \\
\frac{}{\mathbf{B} \approx P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg(\neg P) \vdash}^{(12, 11, 10)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathbf{B} \\
\frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}{}^{(9)} \\
\frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}^{(4)}, \frac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}^{(11, 12)} \\
\frac{}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}^{(10)} \\
\frac{}{P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q}^{(9)}
\end{array}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

$$\frac{\frac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P; \neg(\neg P) \vdash \neg P}^{(12)}, \frac{\neg(\neg P) \vdash \neg(\neg P)}{\neg P; \neg(\neg P) \vdash \neg(\neg P)}^{(11, 12)}}{\mathbf{A} \approx \neg(\neg P); \neg P \vdash}^{(11, 10)}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \frac{\neg(\neg P) \vdash P}{}^{(9)} \\ \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash P}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash P}^{(11, 12)}, \frac{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash P \rightarrow Q}^{(12)} \\ \hline \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash Q}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash \neg P \vee Q}^{(8)} \\ \hline \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash \neg P \vee Q}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P) \vdash \neg P \vee Q}^{(5)} \\ \hline \mathbf{B} \approx P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg(\neg P) \vdash \end{array}^{(12, 11, 10)}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}^{(9)} \\ \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}^{(4)}, \frac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}^{(11, 12)} \\ \hline \frac{P \rightarrow Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}{P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q}^{(10)} \\ \hline P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q \end{array}^{(9)}$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

# Решение задачи 4.

**Задача 4.** Доказать формулу  $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$ .

**Задача 4.** Доказать формулу  $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$ .

**Ответ.**

$$\frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi} (12) \quad \frac{\Psi \vdash \Psi}{\Phi, \Psi \vdash \Psi} (12)}{\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi} (1).$$



# Решение задачи 5.

**Задача 5.** Доказать формулу  $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \rightarrow \Phi$ ;

**Задача 5.** Доказать формулу  $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \rightarrow \Phi$ ;

**Ответ.**

$$\frac{\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi} (2)}{\Phi \wedge \Psi, \Psi \vdash \Phi} (12)$$
$$\frac{\Phi \wedge \Psi, \Psi \vdash \Phi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \rightarrow \Phi} (7)$$

# Решение задачи 6.

**Задача 6.** Доказать формулу  $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$ .

**Задача 6.** Доказать формулу  $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$ .

**Ответ.**

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \Psi \vee \Phi} (5)}{\Phi \vee \Psi, \Phi \vdash \Psi \vee \Phi,} (12) \quad \frac{\frac{\frac{\Psi \vdash \Psi}{\Psi \vdash \Psi \vee \Phi} (4)}{\Phi \vee \Psi, \Psi \vdash \Psi \vee \Phi,} (12) \quad \Phi \vee \Psi \vdash \Phi \vee \Psi}{\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi} (6).$$

# Решение задачи 7.

**Задача 7.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Задача 7.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Ответ.**

$$\frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \frac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \rightarrow \Theta}^{(7)}}{\Gamma \vdash \Theta}^{(8)}.$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$       2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$       3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$       4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$       5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$       7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$       8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$       10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$       11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$       12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Задача 7.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Ответ.**

$$\frac{\Gamma \vdash \Psi, \quad \frac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \rightarrow \Theta}^{(7)}}{\Gamma \vdash \Theta} (8).$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

# Решение задачи 8.

**Задача 8.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.



**Задача 8.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Ответ.**

$$\frac{\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi} (2) \quad \frac{\mathbf{A}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \rightarrow \Theta} (7)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi, \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \rightarrow \Theta} (12, 11) \quad (8)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$     2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$     3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$     4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$     5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi};$     7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$     8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi};$     10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash};$     11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$     12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

**Задача 8.** Докажите, что правило вывода  $\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$  не расширяет множество доказуемых секвенций.

**Ответ.**

$$\mathbf{A} : \frac{\frac{\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi} (3) \quad \frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta} (12, 11) \quad \frac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \rightarrow \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Theta} (7)}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Theta} (8)$$

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi} (2) \quad \frac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \rightarrow \Theta} (12, 11) \quad \mathbf{A}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta} (8)$$

1.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Phi};$
3.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
4.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5.  $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega;}{\Gamma \vdash \Psi};$
7.  $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi;}{\Gamma \vdash \Psi};$
9.  $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash;}{\Gamma \vdash \Phi};$
10.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg \Phi;}{\Gamma \vdash};$
11.  $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega;}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega};$
12.  $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$

Спасибо

за

внимание!

е-mail: [melnikov@k66.ru](mailto:melnikov@k66.ru), [melnikov@r66.ru](mailto:melnikov@r66.ru)

сайты: <http://melnikov.k66.ru>, <http://melnikov.web.ur.ru>

Вернуться к списку презентаций?

