Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Работа с символами суммирования и произведения

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Работа с символами суммирования и произведения

Для сокращения записей типа $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ часто используется обозначение $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. При этом $\sum$ называется **символом суммирования**, а k — *переменной, по которой производится суммирование*. Аналогично используется обозначение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$. Например,

I. Работа с символами суммирования и произведения

Для сокращения записей типа $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ часто используется обозначение $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. При этом $\sum$ называется **символом суммирования**, а k — *переменной, по которой производится суммирование*. Аналогично используется обозначение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$. Например,

$$\sum_{p=1}^{3} \prod_{q=1}^{p} a_p b_q = \underbrace{a_1 b_1}_{p=1} + \underbrace{a_2 b_1 + a_2 b_2}_{p=2} + \underbrace{a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3}_{p=3}.$$

Эти обозначения позволяют в ряде случаев существенно сократить выкладки.

II. Правила работы с символами суммирования и произведения

II.1) **сумма из одного слагаемого**;

II.2) **целочисленные значения символа суммирования**;

II.3) **независимость суммы от переменной суммирования**;

II.4) **вынесение общего множителя**;

II.5) **перестановка символов суммирования**.

II.1. Сумма из одного слагаемого

Выражение типа a_1 считается суммой, состоящей из одного слагаемого. При этом, например, $\sum\limits_{i=3}^{3} b_i = b_3$. Аналогичное соглашение действует и для произведения: $\prod\limits_{k=-2}^{-2} x_k = x_{-2}$.

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>*под*</u> *знаком* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*) до большего значения, указанного* <u>*над*</u> *символом* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*).*

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного $\underline{\text{под}}$ знаком $\sum$ (соответственно, $\prod$) до большего значения, указанного $\underline{\text{над}}$ символом $\sum$ (соответственно, $\prod$).

Например, выражение $a_1 + a_3 + a_5$ нельзя представить в виде $\sum\limits_{s=1}^{5} a_s$, так как

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>*под*</u> *знаком* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*) до большего значения, указанного* <u>*над*</u> *символом* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*).*

Например, выражение $a_1 + a_3 + a_5$ нельзя представить в виде $\sum\limits_{s=1}^{5} a_s$, так как

$$\sum_{s=1}^{5} a_s =$$

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>*под*</u> *знаком* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*) до большего значения, указанного* <u>*над*</u> *символом* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*).*

Например, выражение $a_1 + a_3 + a_5$ нельзя представить в виде $\sum\limits_{s=1}^{5} a_s$, так как

$$\sum_{s=1}^{5} a_s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного под знаком $\sum$ (соответственно, $\prod$) до большего значения, указанного над символом $\sum$ (соответственно, $\prod$).

Например, выражение $a_1 + a_3 + a_5$ нельзя представить в виде $\sum\limits_{s=1}^{5} a_s$, так как

$$\sum_{s=1}^{5} a_s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Правильно записать: $a_1 + a_3 + a_5 =$

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>*под*</u> *знаком* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*) до большего значения, указанного* <u>*над*</u> *символом* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*).*

Например, выражение $a_1 + a_3 + a_5$ нельзя представить в виде $\sum\limits_{s=1}^{5} a_s$, так как

$$\sum_{s=1}^{5} a_s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Правильно записать: $a_1 + a_3 + a_5 = \sum\limits_{s=1}^{3} a_{2s-1}$.

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>*под*</u> *знаком* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*) до большего значения, указанного* <u>*над*</u> *символом* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*).*

Другой пример:

$$h_0 + h_{1/2} + h_1 + h_{3/2} + h_2 =$$

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>под</u> знаком $\sum$ (соответственно, $\prod$) до большего значения, указанного <u>над</u> символом $\sum$ (соответственно, $\prod$).

Другой пример:

$$h_0 + h_{1/2} + h_1 + h_{3/2} + h_2 = \sum_{i=0}^{4} h_{i/2}.$$

II.2. Целочисленные значения символа суммирования

Переменная, по которой производится суммирование (произведение), принимает только целые значения, последовательно возрастающие от значения, и указанного <u>под</u> знаком $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*) до большего значения, указанного* <u>над</u> *символом* $\sum$ *(соответственно,* $\prod$*).*

В частности, *количество слагаемых в сумме* $\sum\limits_{i=p}^{q}$ *равно* $q-p+1$*, то есть количеству значений, которые принимает переменная, по которой производится суммирование.*

II.3. Независимость суммы от переменной суммирования

Сумма (произведение) не зависит от переменной, по которой производится суммирование (умножение).

II.3. Независимость суммы от переменной суммирования

Сумма (произведение) не зависит от переменной, по которой производится суммирование (умножение).

Например,

$$\sum_{i=1}^{4} u_{i,5-i} = u_{1,4} + u_{2,3} + u_{3,2} + u_{4,1}.$$

II.3. Независимость суммы от переменной суммирования

Сумма (произведение) не зависит от переменной, по которой производится суммирование (умножение).

Например,

$$\sum_{i=1}^{4} u_{i,5-i} = u_{1,4} + u_{2,3} + u_{3,2} + u_{4,1}.$$

Фактически в $\sum\limits_{i=1}^{4} u_{i,5-i}$ никакого i нет!

Индекс i иногда называют «глухим» символом, «немым», «слепым» и т.п.

II.3. Независимость суммы от переменной суммирования

Сумма (произведение) не зависит от переменной, по которой производится суммирование (умножение).

При применении индекса суммирования в качестве переменной, по которой производится суммирование, можно использовать любую букву, кроме естественных исключений.

II.3. Независимость суммы от переменной суммирования

Сумма (произведение) не зависит от переменной, по которой производится суммирование (умножение).

При применении индекса суммирования в качестве переменной, по которой производится суммирование, можно использовать любую букву, кроме естественных исключений.

Допустим, при записи выражения $k_1 f_{i,1}(x) + k_2 f_{i,2}(x) + k_3 f_{i,3}(x)$ с помощью символа суммирования нельзя в качестве индекса, по которому производится суммирование, использовать буквы k, f, i, x. Но можно это выражение представить в виде $\sum\limits_{j=1}^{3} k_j f_{i,j}(x)$ или в виде

II.3. Независимость суммы от переменной суммирования

Сумма (произведение) не зависит от переменной, по которой производится суммирование (умножение).

При применении индекса суммирования в качестве переменной, по которой производится суммирование, можно использовать любую букву, кроме естественных исключений.

Допустим, при записи выражения $k_1 f_{i,1}(x) + k_2 f_{i,2}(x) + k_3 f_{i,3}(x)$ с помощью символа суммирования нельзя в качестве индекса, по которому производится суммирование, использовать буквы k, f, i, x. Но можно это выражение представить в виде $\sum\limits_{j=1}^{3} k_j f_{i,j}(x)$ или в виде $\sum\limits_{t=1}^{3} k_t f_{i,t}(x)$.

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно[1] *выносить за знак* $\sum$.

[1]то есть *значение* этого выражения не изменится.

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 =$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

$$= 3\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4\right) =$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

$$= 3\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4\right) = 6\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

$$= 3\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4\right) = 6\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{4} 6a_n =$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

$$= 3\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4\right) = 6\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{4} 6a_n = 2\sum_{n=1}^{4} 3a_n =$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

$$= 3\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4\right) = 6\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{4} 6a_n = 2\sum_{n=1}^{4} 3a_n = 3\sum_{n=1}^{4} 2a_n =$$

II.4. Вынесение общего множителя

Общий множитель можно выносить за знак $\sum$.

Это правило проиллюстрируем следующим примером:

$$6a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 2\left(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4\right) =$$

$$= 3\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4\right) = 6\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{4} 6a_n = 2\sum_{n=1}^{4} 3a_n = 3\sum_{n=1}^{4} 2a_n = 6\sum_{n=1}^{4} a_n.$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

В частности, значение этой суммы (произведения) не изменится. Например,

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} =$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

В частности, значение этой суммы (произведения) не изменится. Например,

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4} d_{1q} + \sum_{q=2}^{4} d_{2q} =$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

В частности, значение этой суммы (произведения) не изменится. Например,

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4} d_{1q} + \sum_{q=2}^{4} d_{2q} = \sum_{p=1}^{2}(d_{p2} + d_{p3} + d_{p4}) =$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

В частности, значение этой суммы (произведения) не изменится. Например,

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4} d_{1q} + \sum_{q=2}^{4} d_{2q} = \sum_{p=1}^{2} (d_{p2} + d_{p3} + d_{p4}) =$$

$$= (d_{12} + d_{13} + d_{14}) + (d_{22} + d_{23} + d_{24}), \text{ т.е.}$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

В частности, значение этой суммы (произведения) не изменится. Например,

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4} d_{1q} + \sum_{q=2}^{4} d_{2q} = \sum_{p=1}^{2}(d_{p2}+d_{p3}+d_{p4}) =$$

$$= (d_{12}+d_{13}+d_{14}) + (d_{22}+d_{23}+d_{24})\,, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12}+d_{13}+d_{14}+d_{22}+d_{23}+d_{24}.$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$*, то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$*, то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{22} + d_{23} + d_{24}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} =$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{22} + d_{23} + d_{24}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4} (d_{1q} + d_{2q}) =$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{22} + d_{23} + d_{24}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4} (d_{1q} + d_{2q}) = (d_{12} + d_{22}) + (d_{13} + d_{23}) + (d_{14} + d_{24})\,,\ \text{т.е.}$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{22} + d_{23} + d_{24}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4}(d_{1q} + d_{2q}) = (d_{12} + d_{22}) + (d_{13} + d_{23}) + (d_{14} + d_{24}), \text{ т.е.}$$

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} =$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, *то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$, *то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{22} + d_{23} + d_{24}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} = \sum_{q=2}^{4}(d_{1q} + d_{2q}) = (d_{12} + d_{22}) + (d_{13} + d_{23}) + (d_{14} + d_{24})\,, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} = d_{12} + d_{22} + d_{13} + d_{23} + d_{14} + d_{24}.$$

II.5. Перестановка символов суммирования

Если поменять местами знаки суммирования в выражении $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$*, то есть перейти к выражению* $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}$*, то это приведет к перестановке слагаемых в сумме. Аналогичное правило справедливо и для произведения.*

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=2}^{4} d_{pq} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{22} + d_{23} + d_{24}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=2}^{4}\sum_{p=1}^{2} d_{pq} = d_{12} + d_{22} + d_{13} + d_{23} + d_{14} + d_{24}.$$

В частности, $\sum\limits_{p=1}^{2}\sum\limits_{q=2}^{4} d_{pq} = \sum\limits_{q=2}^{4}\sum\limits_{p=1}^{2} d_{pq}$.

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение.

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Казалось бы, осталось только «раскрыть скобки».

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Казалось бы, осталось только «раскрыть скобки». Но этому препятствует тот факт, что индекс i в первой сумме изменяется независимо от значения этой переменной во второй сумме. Поэтому мы сначала проведем замену переменной, по которой производится суммирование, например, во второй сумме.

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

С помощью свойства $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda\right)$, где $\lambda = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$, получаем

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$.

С помощью свойства $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\lambda = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\lambda\right)$, где $\lambda = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) =$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$.

С помощью свойства $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\lambda = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\lambda\right)$, где $\lambda = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) =$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$.

С помощью свойства $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\lambda = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\lambda\right)$, где $\lambda = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\right) =$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$.

С помощью свойства $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\lambda = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\lambda\right)$, где $\lambda = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j.$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 =$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2)\,(a_1 + a_2) =$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2)\,(a_1 + a_2) = a_1a_1 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2a_2,$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2)\,(a_1 + a_2) = a_1a_1 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2a_2,$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j =$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2) = a_1a_1 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2a_2,$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j = a_1a_1 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2a_2,$$

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: с одной стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2) = a_1a_1 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2a_2,$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j = a_1a_1 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2a_2,$$

формула выполняется.

Пример 1. *Записать выражение* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ *в виде суммы произведений чисел* a_p.

Решение. Имеем $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j$.

Проверка: получили, что

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i a_j.$$

Конечно, «стопроцентной гарантии» наша проверка не дает, но все-таки результат проверки существенно добавил нам уверенности в справедливости полученной формулы.

Пример 2. *Переставить местами знаки суммирования в выражении* $\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=p}^{2n-p} b_{pq}$.

Решение.

Пример 2. *Переставить местами знаки суммирования в выражении* $\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=p}^{2n-p} b_{pq}$.

Решение. Отметим, что в условии этой задачи мы применили «сленг», общеупотребительный в математике. Имеется в виду, что надо представить это выражение в виде $\sum\limits_{q=?}^{?}\sum\limits_{p=?}^{?} b_{pq}$, для чего следует понять, какие выражения надо поставить вместо знаков вопроса. Попробуем получить нужный ответ, переходя к языку графики, см. **рис.1.**

$$
\begin{array}{l|ccccccc}
q=2n-1 & \times & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q=2n-2 & \times & \times & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q=2n-3 & \times & \times & \times & \ldots & \bullet & \bullet & \bullet \\
\ldots & & & & \ldots & & & \\
q=n+2 & \times & \times & \times & \ldots & \times & \bullet & \bullet \\
q=n+1 & \times & \times & \times & \ldots & \times & \times & \bullet \\
q=n & \times & \times & \times & \ldots & \times & \times & \times \\
q=n-1 & \times & \times & \times & \ldots & \times & \times & \bullet \\
q=n-2 & \times & \times & \times & \ldots & \times & \bullet & \bullet \\
\ldots & & & & \ldots & & & \\
q=3 & \times & \times & \times & \ldots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q=2 & \times & \times & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q=1 & \times & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
q\uparrow \quad p\rightarrow & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n
\end{array}
$$

Здесь символом $\bullet$ помечены «ячейки», отвечающие таким парам (p, q), что b_{pq} *не является* слагаемым суммы $\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=p}^{2n-p} b_{pq}$, и символом $\times$ — «ячейки», отвечающие таким парам (p, q), что b_{pq} *является* слагаемым суммы $\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=p}^{2n-p} b_{pq}$.

$$
\begin{array}{l|ccccccc}
q = 2n-1 & \times & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q = 2n-2 & \times & \times & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q = 2n-3 & \times & \times & \times & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\
\dots & & & & \dots & & & \\
q = n+2 & \times & \times & \times & \dots & \times & \bullet & \bullet \\
q = n+1 & \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \bullet \\
q = n & \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\
q = n-1 & \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \bullet \\
q = n-2 & \times & \times & \times & \dots & \times & \bullet & \bullet \\
\dots & & & & \dots & & & \\
q = 3 & \times & \times & \times & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q = 2 & \times & \times & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\
q = 1 & \times & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
q\uparrow \quad p \rightarrow & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n
\end{array}
$$

Если зафиксируем значение переменной q, то при p, пробегающем все значения от 1 до n, в этой картинке «вырежется» строка. Символы $\times$ в этой строке занимают столбцы с номерами

- от 1 до q — при $1 \le q \le n$;

$q = 2n - 1$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$q = 2n - 2$	$\times$	$\times$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$q = 2n - 3$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$\ldots$				$\ldots$			
$q = n + 2$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$
$q = n + 1$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\times$	$\bullet$
$q = n$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\times$	$\times$
$q = n - 1$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\times$	$\bullet$
$q = n - 2$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$
$\ldots$				$\ldots$			
$q = 3$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$q = 2$	$\times$	$\times$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$q = 1$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$q \uparrow \quad p \rightarrow$	1	2	3	$\ldots$	$n-2$	$n-1$	n

Если зафиксируем значение переменной q, то при p, пробегающем все значения от 1 до n, в этой картинке «вырежется» строка. Символы $\times$ в этой строке занимают столбцы с номерами

- от 1 до q — при $1 \leq q \leq n$;
- от 1 до $2n - q$ — при $n + 1 \leq q \leq 2n - 1$.

Если зафиксируем значение переменной q, то при p, пробегающем все значения от 1 до n, в этой картинке «вырежется» строка. Символы $\times$ в этой строке занимают столбцы с номерами

- от 1 до q — при $1 \leq q \leq n$;
- от 1 до $2n - q$ — при $n + 1 \leq q \leq 2n - 1$.

Следовательно, имеем $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}$.

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} =$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15}) +$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15}) + (b_{22} + b_{23} + b_{24}) +$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15}) + (b_{22} + b_{23} + b_{24}) + b_{33}.$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}) + (b_{22}+b_{23}+b_{24}) + b_{33}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=1}^{3}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=4}^{5}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq} =$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}) + (b_{22}+b_{23}+b_{24}) + b_{33}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=1}^{3}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=4}^{5}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq} =$$

$$= \Big(b_{11} + (b_{12}+b_{22}) + (b_{13}+b_{23}+b_{33})\Big) +$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}) + (b_{22}+b_{23}+b_{24}) + b_{33}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=1}^{3}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=4}^{5}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq} =$$

$$= \Big(b_{11} + (b_{12}+b_{22}) + (b_{13}+b_{23}+b_{33})\Big) + \Big((b_{14}+b_{24})\ + b_{15}\Big)\ .$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: с одной стороны

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{6-p} b_{pq} = (b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}) + (b_{22}+b_{23}+b_{24}) + b_{33}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{q=1}^{3}\sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=4}^{5}\sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq} =$$

$$= \Big(b_{11} + (b_{12}+b_{22}) + (b_{13}+b_{23}+b_{33})\Big) + \Big((b_{14}+b_{24})\ + b_{15}\Big)\ .$$

Таким образом, равенство $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=p}^{6-p} b_{pq} = \sum\limits_{q=1}^{3}\sum\limits_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum\limits_{q=4}^{5}\sum\limits_{p=1}^{2n-q} b_{pq}$ действительно имеет место.

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=p}^{2n-p} b_{pq} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum_{q=n+1}^{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-q} b_{pq}.$$

Проверка: мы доказали, что равенство $\sum\limits_{p=1}^{3} \sum\limits_{q=p}^{6-p} b_{pq} = \sum\limits_{q=1}^{3} \sum\limits_{p=1}^{q} b_{pq} + \sum\limits_{q=4}^{5} \sum\limits_{p=}^{2n}$ действительно имеет место.

Как и в предыдущем примере отметим, что такая проверка не дает «стопроцентной гарантии», но это все же «лучше, чем ничего».

Пример 3. *Упростить выражение* $(3 - 6x^2) \sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение.

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} =$$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right) =$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3}2^nx^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3}2^nx^{2n}=\sum_{n=1}^{3}3\cdot 2^nx^{2n}-\sum_{n=1}^{3}6\cdot 2^nx^{2n+2},$$

$$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right)=3\cdot 2x^2+3\cdot 4x^4+3\cdot 8x^6-6\cdot 2x^4-6\cdot 4x^6-6\cdot 8x^8.$$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right) = 3\cdot 2x^2+3\cdot 4x^4+3\cdot 8x^6-6\cdot 2x^4-6\cdot 4x^6-6\cdot 8x^8.$

Напрашивается привести подобные члены. Для этого в сумме $\sum\limits_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2}$ перейдем к индексу суммирования $m=n+1$, получим $\sum\limits_{m=2}^{4} 3\cdot 2^m x^{2m}$. Имеем

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

$$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right) = 3\cdot 2x^2 + 3\cdot 4x^4 + 3\cdot 8x^6 - 6\cdot 2x^4 - 6\cdot 4x^6 - 6\cdot 8x^8.$$

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} =$$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

$$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right) = 3\cdot 2x^2+3\cdot 4x^4+3\cdot 8x^6-6\cdot 2x^4-6\cdot 4x^6-6\cdot 8x^8.$$

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{m=2}^{4} 3\cdot 2^m x^{2m} =$$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

$$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right) = 3\cdot 2x^2+3\cdot 4x^4+3\cdot 8x^6-6\cdot 2x^4-6\cdot 4x^6-6\cdot 8x^8.$$

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{m=2}^{4} 3\cdot 2^m x^{2m} = \sum_{k=1}^{3} 3\cdot 2^k x^{2k} - \sum_{k=2}^{4} 3\cdot 2^k x^{2k} =$$

Пример 3. *Упростить выражение* $(3-6x^2)\sum\limits_{n=1}^{3} 2^n x^{2n}$.

Решение. «Раскроем скобки»:

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{3} 6\cdot 2^n x^{2n+2},$$

$$(3-6x)\left(2x^2+4x^4+8x^6\right) = 3\cdot 2x^2+3\cdot 4x^4+3\cdot 8x^6-6\cdot 2x^4-6\cdot 4x^6-6\cdot 8x^8.$$

$$(3-6x^2)\sum_{n=1}^{3} 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{3} 3\cdot 2^n x^{2n} - \sum_{m=2}^{4} 3\cdot 2^m x^{2m} = \sum_{k=1}^{3} 3\cdot 2^k x^{2k} - \sum_{k=2}^{4} 3\cdot 2^k x^{2k} =$$

$$= 3\cdot 2^1 x^{2\cdot 1} + \sum_{k=2}^{3} 3\cdot 2^k x^{2k} - \sum_{k=2}^{3} 3\cdot 2^k x^{2k} - 3\cdot 2^4 x^{2\cdot 4} = 6x^2 - 48x^8.$$

Задания
для самостоятельного
выполнения

Задача III.1. (Ответ приведен на стр.95.) Проверьте непосредственным вычислением (переходя от записи с помощью символа суммирования к обычной записи) справедливость формулы

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = \sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq}.$$

Задача III.2. (Ответ приведен на стр.99.) Проверьте непосредственным вычислением равенства

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = \sum_{i=1}^{4} (i-1)(i+1) = \sum_{j=1}^{4} (j^2-1).$$

Задача III.3. (Ответ приведен на стр.103.) Проверьте непосредственным вычислением, выполняется ли равенство $\sum_{n=1}^{3}(2n)^2 \stackrel{?}{=} \sum_{m=2}^{6} m^2$. Сколько слагаемых в левой и правой частях этой формулы?

Задача III.4. (Ответ приведен на стр.107.) Запишите с помощью символа суммирования выражения

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9, \quad a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0, \quad 1 + 2^4 + 3^9 + 4^{16}.$$

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.111.) Переставьте местами символы суммирования $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1)$. Проверьте правильность результата непосредственным вычислением.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.116.) Переставьте местами символы суммирования в выражении $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=p}^{p+3} t_{pq}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Проверьте непосредственным вычислением (переходя от записи с помощью символа суммирования к обычной записи) справедливость формулы

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = \sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq}.$$

Задача 1. Проверьте непосредственным вычислением (переходя от записи с помощью символа суммирования к обычной записи) справедливость формулы

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = \sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq}.$$

Ответ.

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = x_2 \left(y_{21} + y_{22} + y_{23}\right) + x_3 \left(y_{31} + y_{32} + y_{33}\right),$$

Задача 1. Проверьте непосредственным вычислением (переходя от записи с помощью символа суммирования к обычной записи) справедливость формулы

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = \sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq}.$$

Ответ.

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = x_2 \left(y_{21} + y_{22} + y_{23}\right) + x_3 \left(y_{31} + y_{32} + y_{33}\right),$$

$$\sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq} = x_2 y_{21} + x_3 y_{31} + x_2 y_{22} + x_3 y_{32} + x_2 y_{23} + x_3 y_{33}.$$

Задача 1. Проверьте непосредственным вычислением (переходя от записи с помощью символа суммирования к обычной записи) справедливость формулы

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = \sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq}.$$

Ответ.

$$\sum_{p=2}^{3} x_p \sum_{q=1}^{3} y_{pq} = x_2 \left(y_{21} + y_{22} + y_{23}\right) + x_3 \left(y_{31} + y_{32} + y_{33}\right),$$

$$\sum_{q=1}^{3} \sum_{p=2}^{3} x_p y_{pq} = x_2 y_{21} + x_3 y_{31} + x_2 y_{22} + x_3 y_{32} + x_2 y_{23} + x_3 y_{33}.$$

Теперь доказываемое равенство следует из очевидного равенства

$$x_2 \left(y_{21} + y_{22} + y_{23}\right) + x_3 \left(y_{31} + y_{32} + y_{33}\right) = x_2 y_{21} + x_3 y_{31} + x_2 y_{22} + x_3 y_{32} + x_2 y_{23} + x_3 y_{33}.$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Проверьте непосредственным вычислением равенства

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = \sum_{i=1}^{4}(i-1)(i+1) = \sum_{j=1}^{4}(j^2-1).$$

Задача 2. Проверьте непосредственным вычислением равенства

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = \sum_{i=1}^{4} (i-1)(i+1) = \sum_{j=1}^{4} (j^2-1).$$

Ответ.

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = 0(0+2) + 1(1+2) + 2(2+2) + 3(2+3) = 3 + 8 + 15 = 26,$$

Задача 2. Проверьте непосредственным вычислением равенства

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = \sum_{i=1}^{4}(i-1)(i+1) = \sum_{j=1}^{4}(j^2-1).$$

Ответ.

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = 0(0+2) + 1(1+2) + 2(2+2) + 3(2+3) = 3+8+15 = 26,$$

$$\sum_{i=1}^{4}(i-1)(i+1) = (1-1)(1+1) + (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1) = 3+8+15 = 26,$$

Задача 2. Проверьте непосредственным вычислением равенства

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = \sum_{i=1}^{4}(i-1)(i+1) = \sum_{j=1}^{4}(j^2-1).$$

Ответ.

$$\sum_{i=0}^{3} i(i+2) = 0(0+2) + 1(1+2) + 2(2+2) + 3(2+3) = 3 + 8 + 15 = 26,$$

$$\sum_{i=1}^{4}(i-1)(i+1) = (1-1)(1+1) + (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1) = 3 + 8 + 15 = 26,$$

$$\sum_{j=1}^{4}(j^2-1) = \big(1^2-1\big) + \big(2^2-1\big) + \big(3^2-1\big) + \big(4^2-1\big) = 0 + 3 + 8 + 15 = 26$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Проверьте непосредственным вычислением, выполняется ли равенство $\sum_{n=1}^{3}(2n)^2 \stackrel{?}{=} \sum_{m=2}^{6} m^2$. Сколько слагаемых в левой и правой частях этой формулы?

Задача 3. Проверьте непосредственным вычислением, выполняется ли равенство $\sum\limits_{n=1}^{3}(2n)^2 \stackrel{?}{=} \sum\limits_{m=2}^{6} m^2$. Сколько слагаемых в левой и правой частях этой формулы?

Ответ. Равенство не выполняется:

Задача 3. Проверьте непосредственным вычислением, выполняется ли равенство $\sum\limits_{n=1}^{3}(2n)^2 \overset{?}{=} \sum\limits_{m=2}^{6} m^2$. Сколько слагаемых в левой и правой частях этой формулы?

Ответ. Равенство не выполняется:

$$\sum_{n=1}^{3}(2n)^2 = (2\cdot 1)^2 + (2\cdot 2)^2 + (2\cdot 3)^2 = 4 + 16 + 36 = 56$$

(всего три слагаемых), но

Задача 3. Проверьте непосредственным вычислением, выполняется ли равенство $\sum_{n=1}^{3}(2n)^2 \overset{?}{=} \sum_{m=2}^{6} m^2$. Сколько слагаемых в левой и правой частях этой формулы?

Ответ. Равенство не выполняется:

$$\sum_{n=1}^{3}(2n)^2 = (2\cdot 1)^2 + (2\cdot 2)^2 + (2\cdot 3)^2 = 4 + 16 + 36 = 56$$

(всего три слагаемых), но

$$\sum_{m=2}^{6} m^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90$$

(всего 5 слагаемых).

Решение задачи 4.

Задача 4. Запишите с помощью символа суммирования выражения

$$1+3+5+7+9, \quad a_4-a_3+a_2-a_1+a_0, \quad 1+2^4+3^9+4^{16}.$$

Задача 4. Запишите с помощью символа суммирования выражения

$$1+3+5+7+9, \quad a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0, \quad 1 + 2^4 + 3^9 + 4^{16}.$$

Ответ.

$$1+3+5+7+9 = \sum_{n=0}^{4}(2n+1) = \sum_{n=1}^{5}(2n-1),$$

Задача 4. Запишите с помощью символа суммирования выражения

$$1+3+5+7+9, \quad a_4-a_3+a_2-a_1+a_0, \quad 1+2^4+3^9+4^{16}.$$

Ответ.

$$1+3+5+7+9=\sum_{n=0}^{4}(2n+1)=\sum_{n=1}^{5}(2n-1),$$

$$a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=\sum_{p=0}^{4}a_{4-p},$$

Задача 4. Запишите с помощью символа суммирования выражения

$$1+3+5+7+9, \quad a_4-a_3+a_2-a_1+a_0, \quad 1+2^4+3^9+4^{16}.$$

Ответ.

$$1+3+5+7+9=\sum_{n=0}^{4}(2n+1)=\sum_{n=1}^{5}(2n-1),$$

$$a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=\sum_{p=0}^{4}a_{4-p},$$

$$1+2^4+3^9+4^{16}=\sum_{m=1}^{4}m^{m^2}.$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Переставьте местами символы суммирования $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1)$. Проверьте правильность результата непосредственным вычислением.

Задача 5. Переставьте местами символы суммирования $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1)$. Проверьте правильность результата непосредственным вычислением.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что $i(j+1)$ является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что $i(j+1)$ не является слагаемым этой суммы):

$$\begin{array}{c|cccc} j\backslash i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \times & \times & \times & \times \\ 2 & \bullet & \times & \times & \times \\ 3 & \bullet & \bullet & \times & \times \\ 4 & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{array}.$$

Задача 5. Переставьте местами символы суммирования $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=i}^{4} i(j+1)$. Проверьте правильность результата непосредственным вычислением.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что $i(j+1)$ является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что $i(j+1)$ не является слагаемым этой суммы): $\begin{array}{c|cccc} j\backslash i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \times & \times & \times & \times \\ 2 & \bullet & \times & \times & \times \\ 3 & \bullet & \bullet & \times & \times \\ 4 & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{array}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{j} i(j+1).$$

Задача 5. Переставьте местами символы суммирования $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=i}^{4} i(j+1)$. Проверьте правильность результата непосредственным вычислением.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что $i(j+1)$ является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что $i(j+1)$ не является слагаемым этой суммы): $\begin{array}{c|cccc} j\backslash i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \times & \times & \times & \times \\ 2 & \bullet & \times & \times & \times \\ 3 & \bullet & \bullet & \times & \times \\ 4 & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{array}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{j} i(j+1).$$

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1) = 1\cdot\underbrace{(2+3+4+5)}_{j=1,2,3,4}+2\cdot\underbrace{(3+4+5)}_{j=2,3,4}+3\cdot\underbrace{(4+5)}_{j=3,4}+4\cdot\underbrace{5}_{j=4} = 85,$$

Задача 5. Переставьте местами символы суммирования $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1)$. Проверьте правильность результата непосредственным вычислением.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что $i(j+1)$ является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что $i(j+1)$ не является слагаемым этой суммы):

$j\backslash i$	1	2	3	4
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
2	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$
3	$\bullet$	$\bullet$	$\times$	$\times$
4	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$

. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{j} i(j+1).$$

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} i(j+1) = 1\cdot\underbrace{(2+3+4+5)}_{j=1,2,3,4}+2\cdot\underbrace{(3+4+5)}_{j=2,3,4}+3\cdot\underbrace{(4+5)}_{j=3,4}+4\cdot\underbrace{5}_{j=4} = 85,$$

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{j} i(j+1) = \underbrace{1}_{i=1}\cdot 2+\underbrace{(1+2)}_{i=1,2}\cdot 3+\underbrace{(1+2+3)}_{i=1,2,3}\cdot 4+\underbrace{(1+2+3+4)}_{i=1,2,3,4}\cdot 5 = 85.$$

Решение задачи 6.

Задача 6. Переставьте местами символы суммирования в выражении $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=p}^{p+3} t_{pq}$.

Задача 6. Переставьте местами символы суммирования в выражении $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=p}^{p+3} t_{pq}$.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что t_{pq} является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что t_{pq} не является слагаемым этой суммы):

Задача 6. Переставьте местами символы суммирования в выражении $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=p}^{p+3} t_{pq}$.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что t_{pq} является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что t_{pq} не является слагаемым этой суммы):

$q \backslash p$	1	2	3
1	$\times$	$\bullet$	$\bullet$
2	$\times$	$\times$	$\bullet$
3	$\times$	$\times$	$\times$
4	$\times$	$\times$	$\times$
5	$\bullet$	$\times$	$\times$
6	$\bullet$	$\bullet$	$\times$

.

Задача 6. Переставьте местами символы суммирования в выражении $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=p}^{p+3} t_{pq}$.

Ответ. На языке графики ($\times$ означает, что t_{pq} является слагаемым этой суммы, $\bullet$ — означает, что t_{pq} не является слагаемым этой суммы):

$q\backslash p$	1	2	3
1	$\times$	$\bullet$	$\bullet$
2	$\times$	$\times$	$\bullet$
3	$\times$	$\times$	$\times$
4	$\times$	$\times$	$\times$
5	$\bullet$	$\times$	$\times$
6	$\bullet$	$\bullet$	$\times$

. Поэтому

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p}^{p+3} t_{pq} = \sum_{q=1}^{3}\sum_{p=1}^{q} t_{pq} + \sum_{q=4}^{6}\sum_{p=q-3}^{3} t_{pq}.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?