Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Булевы и логические функции

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых,

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых, подобрать термин, обозначающий более общее понятие,

во-вторых,

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых, подобрать термин, обозначающий более общее понятие,

во-вторых, указать характеристические свойства.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

во-первых, подобрать термин, обозначающий более общее понятие,

во-вторых, указать характеристические свойства.

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция?

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция? Формулы типа $\min\{x, y\}$ не очень уместны, так как они «работают» только для случая, когда булевы значения 0 и 1 интерпретируются, как числа (а как быть, если вместо них используются, например, слова true и false?)

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция*.

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция? Поэтому лучше всего просто указать ее таблицу истинности.

Пример 1. *Сформулируйте определение конъюнкции.*

Ответ. В соответствии с **правилами построения определений** надо,

Обобщающий термин, понятно, это *функция.*

Среди свойств на первом месте, очевидно, тот факт, что конъюнкция — булева функция. Наконец, надо окончательно охарактеризовать именно конъюнкцию. Как задается конъюнкция?

Итак: **конъюнкцией** называется булева функция, задаваемая таблицей истинности:

x	y	$x\&y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Решить уравнение* $(x \& y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение с помощью таблицы истинности.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0 0			
0 1			
1 0			
1 1			

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
1	1	1	1	

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример 2. *Решить уравнение* $(x \& y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Хорошо, что мало аргументов.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение с помощью таблицы истинности.

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$(x\&y) \to (x \vee y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Хорошо, что мало аргументов. А если... :(

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Поэтому «распаковывая» левую часть уравнения сначала «снимаем» импликацию.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Поэтому «распаковывая» левую часть уравнения сначала «снимаем» импликацию.

Когда импликация равна 0?

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Поэтому «распаковывая» левую часть уравнения сначала «снимаем» импликацию.

Когда импликация равна 0?

Только в одном случае — когда посылка равна 1 (в данном случае $x\&y = 1$), а заключение ложно (в данном случае $x \vee y = 0$).

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Получаем, что исходное *уравнение* эквивалентно *системе уравнений* $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ то есть *высказывание* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$ эквивалентно *высказыванию* $(x\&y = 1)\&(x \vee y = 0)$.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. «Внешней» функцией является импликация, так как при вычислении левой части последним действием является вычисление импликации.

Получаем, что исходное *уравнение* эквивалентно *системе уравнений* $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ то есть *высказывание* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$ эквивалентно *высказыванию* $(x\&y = 1)\&(x \vee y = 0)$.

Заметим, что первый знак & в последнем равенстве обозначает *булеву* функцию, а второй, «соединяющий» высказывания $x\&y = 1$ и $x \vee y = 0$, — *логическую* функцию.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x \& y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x \& y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$

Для дальнейших рассуждений можно применить два существенно различных языка.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$

Решение на языке высказываний

Решаем полученную систему уравнений. Высказывание $x\&y = 1$, как следует из таблицы истинности конъюнкции, эквивалентно высказыванию $(x = 1)\&(y = 1)$. Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда оба дизъюнкта равны 0. Значит, высказывание $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$ эквивалентно высказыванию

$$((x = 1)\&(y = 1))\&((x = 0)\&(y = 0)).$$

Но последнее высказывание всегда ложно! Значит, у исходного уравнения нет ни одного решения.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$

Решение на языке множеств

С помощью таблиц истинности конъюнкции и дизъюнкции легко проверить, что множество V решений первого уравнения равно $\{(1,1)\}$, а множество W решений второго уравнения имеет вид $W = \{(0,0)\}$.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} V = \left\{ (x;y) \,\middle|\, x\&y = 1 \right\}, \\ W = \left\{ (x;y) \,\middle|\, x \vee y = 0 \right\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Всякий элемент (x, y) содержится в U тогда и только тогда, когда он является решением как первого уравнения (то есть содержится в V), так и решением второго уравнения (то есть является элементом множества W).

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \Big\{(x;y) \,\Big|\, x\&y = 1\Big\}, \\ W = \Big\{(x;y) \,\Big|\, x \vee y = 0\Big\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Таким образом, *по определению* операции «пересечение» имеем, что $U = V \cap W$.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0.$

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \left\{(x;y) \,\middle|\, x\&y = 1\right\}, \\ W = \left\{(x;y) \,\middle|\, x \vee y = 0\right\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Таким образом, *по определению* операции «пересечение» имеем, что $U = V \cap W$.

Но, очевидно, $U = V \cap W = \{(1,1)\} \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ — пустое множество.

Пример 2. *Решить уравнение* $(x\&y) \to (x \vee y) = 0$.

Решение. $\begin{cases} x\&y = 1, \\ x \vee y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} V = \Big\{(x;y) \,\Big|\, x\&y = 1\Big\}, \\ W = \Big\{(x;y) \,\Big|\, x \vee y = 0\Big\}, \end{cases}$

Решение на языке множеств

Таким образом, *по определению* операции «пересечение» имеем, что $U = V \cap W$.

Но, очевидно, $U = V \cap W = \{(1,1)\} \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ — пустое множество.

Таким образом, решений у исходного уравнения нет (что подтверждает сделанный ранее вывод).

Вернуться к лекции?

Задачи для самостоятельного решения

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.57.) Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.60.) Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Задача I.3. (Ответ приведен на стр.63.) Решите уравнение $\overline{x\&y} \longrightarrow (x \vee y) = 0.$

Задача I.4. (Ответ приведен на стр.66.) Решите уравнение $x\&(y \to x) = 1$.

Задача I.5. (Ответ приведен на стр.68.) Решите уравнение $x \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$.

Задача I.6. (Ответ приведен на стр.70.) Решите уравнение $x \longrightarrow (x \& y) = y$.

Задача I.7. (Ответ приведен на стр.72.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Задача I.8. (Ответ приведен на стр.75.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.

Задача I.9. (Ответ приведен на стр.78.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Задача I.10. (Ответ приведен на стр.81.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \& g) \vee h \equiv (f \vee h) \& (g \vee h)$.

Задача I.11. (Ответ приведен на стр.84.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Задача I.12. (Ответ приведен на стр.87.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Задача I.13. (Ответ приведен на стр.90.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Задача I.14. (Ответ приведен на стр.93.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 1 \equiv f$.

Задача I.15. (Ответ приведен на стр.96.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Задача I.16. (Ответ приведен на стр.99.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 0 \equiv 0$.

Задача I.17. (Ответ приведен на стр.102.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Задача I.18. (Ответ приведен на стр.105.) Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Задача 1. Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Ответ.

Задача 1. Сформулируйте определение булевой функции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции.

Ответ.

Решение задачи 2.

Задача 2. Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Задача 2. Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Ответ.

Задача 2. Рассмотрим логические значения 0 и 1, как обычные числа. Проверьте, что $(1 - xy) \cdot \max\{x, z\}$ — булева функция, представьте ее выражением, содержащим только рассмотренные нами элементарные булевы функции (то есть «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация» и «эквиваленция»).

Ответ.

Решение задачи 3.

Задача 3. Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.

Задача 3. Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.

Ответ.

Задача 3. Решите уравнение $\overline{x \& y} \to (x \vee y) = 0$.
Ответ.

Решение задачи 4.

Задача 4. Решите уравнение $x\&(y \to x) = 1$.

Задача 4. Решите уравнение $x\&(y \rightarrow x) = 1$.
Ответ. $(x; y) \in \{(1; 0),\ (1; 1)\}$.

Решение задачи 5.

Задача 5. Решите уравнение $x \to (x \to y) = 1$.

Задача 5. Решите уравнение $x \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$.
Ответ. $(x; y) \in \{(0;0),\ (0;1),\ (1;1)\}$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Решите уравнение $x \to (x \& y) = y$.

Задача 6. Решите уравнение $x \longrightarrow (x\&y) = y$.
Ответ. $(x; y) \in \{(0; 1),\ (1; 0)\}$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Доказите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Задача 7. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Ответ.

Задача 7. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Ответ.

Решение задачи 8.

Задача 8. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.

Задача 8. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \& g) \& h \equiv f \& (g \& h)$.

Ответ.

Задача 8. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g)\&h \equiv f\&(g\&h)$.
Ответ.

Решение задачи 9.

Задача 9. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Задача 9. Доказите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g) \& h \equiv (f \& h) \vee (g \& h)$.

Ответ.

Задача 9. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \vee g)\&h \equiv (f\&h) \vee (g\&h)$.

Ответ.

Решение задачи 10.

Задача 10. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \& g) \vee h \equiv (f \vee h) \& (g \vee h)$.

Задача 10. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f \& g) \vee h \equiv (f \vee h) \& (g \vee h)$.

Ответ.

Задача 10. Докажите справедливость тождества для булевых функций $(f\&g) \vee h \equiv (f \vee h)\&(g \vee h)$.

Ответ.

Решение задачи 11.

Задача 11. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Задача 11. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.

Ответ.

Задача 11. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee f \equiv f \equiv f \& f$.
Ответ.

Решение задачи 12.

Задача 12. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Задача 12. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Ответ.

Задача 12. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee g \equiv f \Leftrightarrow f \& g \equiv g$.

Ответ.

Решение задачи 13.

Задача 13. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Задача 13. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.

Ответ.

Задача 13. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 1 \equiv 1$.
Ответ.

Решение задачи 14.

Задача 14. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 1 \equiv f$.

Задача 14. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 1 \equiv f$.

Ответ.

Задача 14. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 1 \equiv f$.

Ответ.

Решение задачи 15.

Задача 15. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Задача 15. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.

Ответ.

Задача 15. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee 0 \equiv f$.
Ответ.

Решение задачи 16.

Задача 16. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 0 \equiv 0$.

Задача 16. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f\&0 \equiv 0$.
Ответ.

Задача 16. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& 0 \equiv 0$.
Ответ.

Решение задачи 17.

Задача 17. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Задача 17. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.

Ответ.

Задача 17. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \vee \overline{f} \equiv 1$.
Ответ.

Решение задачи 18.

Задача 18. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Задача 18. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Ответ.

Задача 18. Докажите справедливость тождества для булевых функций $f \& \overline{f} \equiv 0$.

Ответ.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?