Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы тензорного анализа

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

I. Криволинейные координаты **4**
I.1. Координатные линии и поверхности 19
I.2. Локальный базис криволинейной системы координат . . 22
I.3. Ортогональные криволинейные системы координат . . . 27
I.4. Связь с дифференцируемостью функций комплексного переменного 33
I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой 36

II. Символы Кристоффеля **45**
II.1. Свойства символов Кристоффеля 52
II.2. Доказательство свойств символов Кристоффеля 59
II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат 65

III. Тензорное поле. Ковариантная производная **86**
III.1. Тензорное поле 87
III.2. Задание тензорного поля: координатные функции . . . 98
III.3. Теорема о координатных функциях тензорного поля . . 102
III.4. Ковариантная производная 104
III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной 110
III.6. Теорема о ковариантной производной 121
III.7. Теорема Риччи 131

I. Криволинейные координаты

Мы рассмотрели понятие **системы координат**, в частности **полярную систему координат**, а также **цилиндрическую** и **сферическую системы координат**. В этом разделе мы обобщим и систематизируем наши знания по этому вопросу, и применим их к теории так называемого *тензорного поля*, которое обобщает известное из курса математического анализа понятие векторного поля.

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть W — подмножество n-мерного линейного*[1] *пространства U, D — область в $\mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, и $\Phi : D \to W$ — <u>взаимно однозначная</u> дифференцируемая функция. Тогда говорят, что Φ задает* **систему криволинейных координат** *множества $W = \Phi(D)$.*

[1] В данной работе мы будем отождествлять понятие точки и вектора, считая, что вместо точки рассматривается ее радиус-вектор. Это вызвано тем обстоятельством, что мы хотим обойтись без введения понятия «аффинное пространство». В этой связи мы позволим себе говорить о *системе координат линейного пространства.*

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть W — подмножество n-мерного линейного пространства U, D — область в $\mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, и $\Phi: D \to W$ — взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что Φ задает* **систему криволинейных координат** *множества $W = \Phi(D)$.*

Часто вместо *система криволинейных координат* говорят **криволинейная система координат**, и вместо *система криволинейных координат множества W* говорят **система криволинейных координат на множестве W**.

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть* W *— подмножество* n*-мерного линейного пространства* U, D *— область в* $\mathbb{R}^m$, *где* $m \leq n$, *и* $\Phi: D \to W$ *— взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что* Φ *задает* **системy криволинейных координат** *множества* $W = \Phi(D)$.

Например, на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ можно ввести систему координат, ставящую паре чисел (φ, θ) из прямоугольника $D = [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ точку с радиусом-вектором

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть* W *— подмножество* n*-мерного линейного пространства* U, D *— область в* $\mathbb{R}^m$, *где* $m \leq n$, *и* $\Phi: D \to W$ *— взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что* Φ *задает* **систему криволинейных координат** *множества* $W = \Phi(D)$.

Например, на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ можно ввести систему координат, ставящую паре чисел (φ, θ) из прямоугольника $D = [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ точку с радиусом-вектором $R\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + R\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + R\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$. Обычно координаты точки на поверхности земного шара определяются парой аналогичных координат: широтой (северной, южной) и долготой (западной, восточной).

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть W — подмножество n-мерного линейного пространства U, D — область в $\mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, и $\Phi:\ D \to W$ — взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что Φ задает* **систему криволинейных координат** *множества $W = \Phi(D)$.*

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$ — базис линейного пространства U. Для $\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \in D$ разложим вектор $\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)$ по этому базису:

$$\begin{gathered}\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \psi^1\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \\ +\psi^2\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \psi^n\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)\overrightarrow{\mathbf{e}}_n,\end{gathered} \tag{1}$$

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть W — подмножество n-мерного линейного пространства U, D — область в $\mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, и $\Phi : D \to W$ — взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что Φ задает* **систему криволинейных координат** *множества $W = \Phi(D)$.*

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\right\}$ — базис линейного пространства U. Для $\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \in D$ разложим вектор $\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)$ по этому базису:

$$\begin{gathered}\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \psi^1\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \\ + \psi^2\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \psi^n\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)\overrightarrow{\mathbf{e}}_n,\end{gathered} \tag{1}$$

то есть, используя соглашение Эйнштейна,

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть* W *— подмножество* n*-мерного линейного пространства* U*,* D *— область в* $\mathbb{R}^m$*, где* $m \leq n$*, и* $\Phi: D \to W$ *— взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что* Φ *задает* **системy криволинейных координат** *множества* $W = \Phi(D)$*.*

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\}$ — базис линейного пространства U. Для $\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \in D$ разложим вектор $\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right)$ по этому базису:

$$\begin{gathered} \Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \psi^1\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + \\ + \psi^2\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \psi^n\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_n, \end{gathered} \tag{1}$$

то есть, используя соглашение Эйнштейна,

$$\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \overrightarrow{\mathbf{r}}\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \psi^i\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_i.$$

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть W — подмножество n-мерного линейного пространства U, D — область в $\mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, и $\Phi :\ D \to W$ — взаимно однозначная дифференцируемая функция. Тогда говорят, что Φ задает* **систему криволинейных координат** *множества $W = \Phi(D)$.*

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\}$ — базис линейного пространства U.

$$\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \overrightarrow{\mathbf{r}}\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \psi^i\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_i.$$

Значит, функция Φ определяется набором *координатных функций*

$$\psi^1\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right), \ldots, \psi^n\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right).$$

I. Криволинейные координаты

Определение 1. *Пусть W — подмножество n-мерного линейного пространства U, D — область в $\mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, и $\Phi : D \to W$ — <u>взаимно однозначная</u> дифференцируемая функция. Тогда говорят, что Φ задает* **системy криволинейных координат** *множества $W = \Phi(D)$.*

Пусть $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n \right\}$ — базис линейного пространства U.

$$\Phi\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \overrightarrow{\mathbf{r}}\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) = \psi^i\left(q^1, q^2, \ldots, q^m\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_i.$$

Например, используя **переход от полярной к декартовой система координат** имеем

$$\Phi(\rho, \varphi) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi) = \rho\cos(\varphi) \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin(\varphi) \overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Здесь $e_1 = \overrightarrow{\mathbf{i}}$, $e_2 = \overrightarrow{\mathbf{j}}$, координатные функции равны $\psi^1(\rho, \varphi) = \rho\cos(\varphi)$, $\psi^2(\rho, \varphi) = \rho\sin(\varphi)$.

I. Криволинейные координаты

В случае трехмерного (двумерного) пространства геометрических векторов обычно предполагается, что задан ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$ (соответственно, $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$), и «по умолчанию» координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ обозначаются (x, y, z) (соответственно, (x, y)), то есть

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \text{(соответственно,} \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,). \tag{2}$$

I. Криволинейные координаты

В случае трехмерного (двумерного) пространства геометрических векторов обычно предполагается, что задан ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\right\}$ (соответственно, $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$), и «по умолчанию» координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ обозначаются (x, y, z) (соответственно, (x, y)), то есть

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \text{(соответственно,} \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\,). \tag{2}$$

Поэтому в трехмерном и двумерном пространствах геометрических векторов криволинейные координаты обычно задаются системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \psi^1(q^1, q^2, q^3) \\ y = \psi^2(q^1, q^2, q^3) \\ z = \psi^3(q^1, q^2, q^3) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \psi^1(q^1, q^2) \\ y = \psi^2(q^1, q^2) \end{cases}$$

I. Криволинейные координаты

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \text{(соответственно,} \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,). \tag{2}$$

Например, для **цилиндрической** и **сферической** систем координат имеем

$$\Phi(\rho,\varphi,z) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,$$

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,$$

I. Криволинейные координаты

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \text{(соответственно,} \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,\text{)}. \tag{2}$$

Например, для **цилиндрической** и **сферической** систем координат имеем

$$\Phi(\rho,\varphi,z) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,$$

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,$$

то есть набор **координатных функций** имеет, соответственно, вид

I. Криволинейные координаты

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \quad \left(\text{соответственно,} \quad \overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,\right). \qquad (2)$$

Например, для **цилиндрической** и **сферической** систем координат имеем

$$\Phi(\rho,\varphi,z) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,$$

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,,$$

то есть набор **координатных функций** имеет, соответственно, вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

I.1. Координатные линии и поверхности

Определение 2. *Если* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *— система криволинейных координат, определенная на области* D*, то для любого фиксированного* i *и константы* C **координатной поверхностью** $q^i = C$ *называется подмножество*

$$\left\{ \Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) \,\middle|\, (q^1, q^2, \ldots, q^m) \in D,\ q^i = C \right\} \subseteq U. \tag{3}$$

I.1. Координатные линии и поверхности

Определение 2. *Если* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *— система криволинейных координат, определенная на области* D*, то для любого фиксированного* i *и константы* C **координатной поверхностью** $q^i = C$ *называется подмножество*

$$\left\{\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) \,\middle|\, (q^1, q^2, \ldots, q^m) \in D,\ q^i = C\right\} \subseteq U. \qquad (3)$$

Определение 3. *Если* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *— криволинейная система координат, определенная на области* D*, то для любого фиксированного* i *и любого набора констант* $C_1, \ldots C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_m$ **координатной линией** *называется множество*

$$\left\{\Phi(C_1, \ldots, C_{i-1}, q^i, C_{i+1}, \ldots, C_m) \,\middle|\, (C_1, \ldots, C_{i-1}, q^i, C_{i+1}, \ldots, C_m) \in D\right\}. \qquad (4)$$

I.1. Координатные линии и поверхности

Определение 2. *Если* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *— система криволинейных координат, определенная на области* D, *то для любого фиксированного* i *и константы* C **координатной поверхностью** $q^i = C$ *называется подмножество*

$$\left\{\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) \,\middle|\, (q^1, q^2, \ldots, q^m) \in D,\ q^i = C\right\} \subseteq U. \qquad (3)$$

Определение 3. *Если* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *— криволинейная система координат, определенная на области* D, *то для любого фиксированного* i *и любого набора констант* $C_1, \ldots C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_m$ **координатной линией** *называется множество*

$$\left\{\Phi(C_1, \ldots, C_{i-1}, q^i, C_{i+1}, \ldots, C_m) \,\middle|\, (C_1, \ldots, C_{i-1}, q^i, C_{i+1}, \ldots, C_m) \in D\right\}. \qquad (4)$$

Координатные линии на глобусе — это меридианы и параллели.

Рассмотреть пример?

I.2. Локальный базис криволинейной системы координат

Определение 4. *Пусть*

$$\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \psi^i(q^1, q^2, \ldots, q^m)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$$

— система криволинейных координат множества W, определенная на области D. Тогда каждой точке $\Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)$ множества $W = \Phi(D)$ можно поставить в соответствие систему векторов

$$\mathbf{Б}(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \left\{ \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^1}\bigg|_{(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)}, \ldots, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^m}\bigg|_{(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)} \right\}. \tag{5}$$

Как правило, эта система векторов оказывается линейно независимой. В этом случае она называется **локальным базисом системы криволинейных координат** Φ, *соответствующим точке* $(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)$.

I.2. Локальный базис криволинейной системы координат

Определение 4. *Пусть*

$$\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \psi^i(q^1, q^2, \ldots, q^m)\,\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$$

— система криволинейных координат множества W, определенная на области D. Тогда каждой точке $\Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)$ множества $W = \Phi(D)$ можно поставить в соответствие систему векторов

$$\text{Б}(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \left\{ \left.\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^1}\right|_{(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)}, \ldots, \left.\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^m}\right|_{(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)} \right\}. \tag{5}$$

Как правило, эта система векторов оказывается линейно независимой. В этом случае она называется **локальным базисом системы криволинейных координат** Φ, *соответствующим точке* $(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m)$.

Часто вместо $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^i}$ пишут $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}$ и даже $\overrightarrow{\mathbf{r}}_i$ (если из контекста ясно, о какой криволинейной системе координат идет речь).

I.2. Локальный базис криволинейной системы координат

Заметим, что для криволинейной системы координат этот локальный базис, вообще говоря, меняется при переходе от точки к точке.

Это бывает удобно в некоторых приложениях.

I.2. Локальный базис криволинейной системы координат

Заметим, что для криволинейной системы координат этот локальный базис, вообще говоря, меняется при переходе от точки к точке.

Например, при описании движения жидкости или газа вблизи какой-либо криволинейной поверхности Π может оказаться удобным ввести такую систему координат $\Phi(u, v, w)$, чтобы поверхность Π совпадала с координатной поверхностью $w = const$, а координатный вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_w$ был бы перпендикулярен к поверхности Π.

I.2. Локальный базис криволинейной системы координат

Заметим, что для криволинейной системы координат этот локальный базис, вообще говоря, меняется при переходе от точки к точке.

Например, при описании движения жидкости или газа вблизи какой-либо криволинейной поверхности Π может оказаться удобным ввести такую систему координат $\Phi(u, v, w)$, чтобы поверхность Π совпадала с координатной поверхностью $w = const$, а координатный вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_w$ был бы перпендикулярен к поверхности Π.

При этом $\overrightarrow{\mathbf{r}}_u$ и $\overrightarrow{\mathbf{r}}_v$ будут в каждой точке поверхности Π параллельны ей.

Рассмотреть пример?

I.3. Ортогональные криволинейные системы координат

Из **примера локального базиса полярной системы координат** следует, что в любой точке плоскости базисные векторы полярной системы координат ортогональны. Это полезное качество системы координат, так как хорошо известно, насколько ортогональный базис евклидова пространства удобнее «косоугольного» при решении многих задач. Это привело к появлению нового понятия — ортогональной криволинейной системы координат.

I.3. Ортогональные криволинейные системы координат

Определение 5. *Система криволинейных координат* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *подмножества* V *евклидова пространства* U *называется* **ортогональной криволинейной системой координат** *если для любого вектора линейного пространства соответствующий ему локальный базис* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^2}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^m}\right\}$ *этой системы координат является ортогональным базисом.*

I.3. Ортогональные криволинейные системы координат

Определение 5. *Система криволинейных координат* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *подмножества* V *евклидова пространства* U *называется* **ортогональной криволинейной системой координат** *если для любого вектора линейного пространства соответствующий ему локальный базис* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^2}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^m}\right\}$ *этой системы координат является ортогональным базисом.*

Помимо прямоугольной декартовой и полярной системы координат ортогональными являются также цилиндрическая и сферическая системы координат (в пространстве).

I.3. Ортогональные криволинейные системы координат

Определение 5. *Система криволинейных координат* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *подмножества* V *евклидова пространства* U *называется* **ортогональной криволинейной системой координат** *если для любого вектора линейного пространства соответствующий ему локальный базис* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^2}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^m}\right\}$ *этой системы координат является ортогональным базисом.*

Для ортогональной криволинейной системы координат, в силу ортогональности локального базиса, соответствующего любому вектору, матрица Грама этого локального базиса диагональна.

I.3. Ортогональные криволинейные системы координат

Определение 5. *Система криволинейных координат* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *подмножества* V *евклидова пространства* U *называется* **ортогональной криволинейной системой координат** *если для любого вектора линейного пространства соответствующий ему локальный базис* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^2}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^m}\right\}$ *этой системы координат является ортогональным базисом.*

Для ортогональной криволинейной системы координат, в силу ортогональности локального базиса, соответствующего любому вектору, матрица Грама этого локального базиса диагональна.

Квадратные корни из диагональных элементов матрицы Грама, то есть *длины базисных векторов* называются **коэффициентами Ламэ** соответствующей криволинейной системы координат.

I.3. Ортогональные криволинейные системы координат

Определение 5. *Система криволинейных координат* $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ *подмножества* V *евклидова пространства* U *называется* **ортогональной криволинейной системой координат** *если для любого вектора линейного пространства соответствующий ему локальный базис* $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^2}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^m} \right\}$ *этой системы координат является ортогональным базисом.*

Квадратные корни из диагональных элементов матрицы Грама, то есть *длины базисных векторов* называются **коэффициентами Ламэ** соответствующей криволинейной системы координат. Они, вообще говоря, зависят от криволинейных координат $q^1, \ldots, q^m$.

Рассмотреть пример?

I.4. Связь с дифференцируемостью функций комплексного переменного

Теорема 1 (об условиях Коши-Римана). *Если*

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— дифференцируемая функция от комплексной переменной $z = x + iy$, *взаимно однозначно отображающая область* G *на область* H, *причем* $f'(z) \neq 0$ *для любого* $z \in G$, *то обратная функция* $f^{-1}(u, v)$, *отображающая* H *на* G, *является ортогональной системой криволинейных координат области* G.

Доказательство.

I.4. Связь с дифференцируемостью функций комплексного переменного

Теорема 1 (об условиях Коши-Римана). *Если*

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— дифференцируемая функция от комплексной переменной $z = x + iy$*, взаимно однозначно отображающая область* G *на область* H*, причем* $f'(z) \neq 0$ *для любого* $z \in G$*, то обратная функция* $f^{-1}(u, v)$*, отображающая* H *на* G*, является ортогональной системой криволинейных координат области* G*.*

Доказательство. В формулировке этой теоремы комплексное число $x + iy$ отождествляется с упорядоченной парой (x, y). Утверждение теоремы вытекает из условий Коши-Римана дифференцируемости функции комплексной переменной. Теорема доказана.

I.4. Связь с дифференцируемостью функций комплексного переменного

Теорема 1 (об условиях Коши-Римана). *Если*

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— дифференцируемая функция от комплексной переменной $z = x + iy$, взаимно однозначно отображающая область G на область H, причем $f'(z) \neq 0$ для любого $z \in G$, то обратная функция $f^{-1}(u, v)$, отображающая H на G, является ортогональной системой криволинейных координат области G.

В частности, пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, и $v(x, y)$ — сопряженная гармоническая функция, то есть $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ — дифференцируемая функция. Тогда f является ортогональной системой криволинейных координат для области взаимной однозначности функции f.

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

Тензорный аппарат обычно применяется в ситуациях, когда приходится переходить от одного базиса к другому. В рассматриваемой ситуации следует, разумеется, кроме перехода от базиса к базису рассмотреть переход от одной криволинейной системы координат к другой. Например, можно перейти от цилиндрической системы координат к сферической.

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

Поставим вопрос следующим образом: как получить матрицу перехода от локального базиса криволинейной системы координат $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ к локальному базису $\Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ в точке

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

По определению **матрицы перехода,** $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = a_i^j \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}$.

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

По определению **матрицы перехода,** $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = a_i^j \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} =$$

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

По определению **матрицы перехода,** $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = a_i^j \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q'^i} =$$

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

По определению **матрицы перехода,** $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = a_i^j \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial q'^i} + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^m}\frac{\partial q^m}{\partial q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} =$$

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

По определению **матрицы перехода,** $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = a_i^j \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial q'^i} + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^m}\frac{\partial q^m}{\partial q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}\frac{\partial q^j}{\partial q'^i}.$$

I.5. Переход от одной криволинейной системы координат к другой

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^m) = \Phi'(q_0'^1, q_0'^2, \ldots, q_0'^m).$$

Равенство $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^m) = \Phi'(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$ определяет q^i, как функцию от $(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$: $\quad q^i = q^i(q'^1, q'^2, \ldots, q'^m)$.

По определению **матрицы перехода,** $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = a_i^j \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial q'^i} + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^m}\frac{\partial q^m}{\partial q'^i} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}\frac{\partial q^j}{\partial q'^i}.$$

Следовательно, *для коэффициентов матрицы перехода из криволинейной системы координат* Φ *в* Φ' *получаем формулу*

$$a_i^j = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i}. \tag{6}$$

Рассмотреть пример?

II. Символы Кристоффеля

Пусть $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \psi^i(q^1, q^2, \ldots, q^n)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ — криволинейная система координат, определенная на области D, причем $n = \dim(U)$.

II. Символы Кристоффеля

Пусть $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \psi^i(q^1, q^2, \ldots, q^n)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ — криволинейная система координат, определенная на области D, причем $n = \dim(U)$. Тогда

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i q^j} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^i \partial q^j}$$

является вектором исходного пространства, и поэтому его можно разложить по базису $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^n}\right\} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_n\right\}$ (коэффициенты в разложении обозначили через Γ^k_{ij}):

II. Символы Кристоффеля

Пусть $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \psi^i(q^1, q^2, \ldots, q^n)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ — криволинейная система координат, определенная на области D, причем $n = \dim(U)$. Тогда

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i q^j} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^i \partial q^j}$$

является вектором исходного пространства, и поэтому его можно разложить по базису $\left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^n}\right\} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_n\right\}$ (коэффициенты в разложении обозначили через Γ^k_{ij}):

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} = \Gamma^k_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_k. \tag{7}$$

II. Символы Кристоффеля

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} = \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}_k. \qquad (7)$$

В евклидовом пространстве можно векторы $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j}$ разложить по взаимному базису:

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^k} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^k. \qquad (8)$$

II. Символы Кристоффеля

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} = \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}_k. \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^k} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^k. \qquad (8)$$

Определение 6. *Элементы* Γ^k_{ij}, *определенные* ***формулой (7)***, *называются* **символами Кристоффеля второго рода**, *а элементы* $\Gamma_{k,ij}$ *из* ***формулы (8)*** — **символами Кристоффеля первого рода**.

II. Символы Кристоффеля

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} = \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}_k. \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^k} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^k. \tag{8}$$

Символы Кристоффеля характеризуют «геометрию»[2], наведенную криволинейной системой координат Ф.

[2]Под «геометрией» в этом контексте мы понимаем не «геометрическое устройство мира», а особенности «геометрического описания этого мира».

II. Символы Кристоффеля

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} = \Gamma_{ij}^k \overrightarrow{\mathbf{r}}_k. \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i}}{\partial q^j} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^k} = \Gamma_{k,ij} \overrightarrow{\mathbf{r}}^k. \tag{8}$$

Чем более «кривыми» являются координатные линии (больше кривизна этих линий), или чем более «неравномерным» является движение точки по координатной линии при равномерном изменении соответствующей координаты q^i, тем «в среднем» больше по абсолютной величине будут символы Кристоффеля.

Рассмотреть пример?

II.1. Свойства символов Кристоффеля

Пусть $\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ — криволинейная система координат, определенная на области D, $\mathbf{Б} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^n} \right\} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_n \right\}$ — локальный базис, соответствующий точке с криволинейными координатами $(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^n)$, $\quad \mathbf{Б}^* = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}^1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}^n \right\}$ — базис, взаимный к базису $\mathbf{Б}$.

II.1. Свойства символов Кристоффеля

1. $\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}, \quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^m_{ij}, \quad$ где $\quad \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m;$

II.1. Свойства символов Кристоффеля

1. $\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}, \quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^m_{ij}, \quad$ где $\quad \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m;$

2. $\Gamma^k_{ij} = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right);$

II.1. Свойства символов Кристоффеля

1. $\Gamma^{k}_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}, \quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^{m}_{ij}, \quad$ где $\quad \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m;$

2. $\Gamma^{k}_{ij} = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right);$

3. $\Gamma^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ji};$

II.1. Свойства символов Кристоффеля

1. $\Gamma^{k}_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}, \quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^{m}_{ij},$ где $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m;$

2. $\Gamma^{k}_{ij} = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right);$

3. $\Gamma^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ji};$

4. $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j} = -\Gamma^{i}_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^k;$

II.1. Свойства символов Кристоффеля

1. $\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}, \quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^m_{ij}, \quad$ где $\quad \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m;$

2. $\Gamma^k_{ij} = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right);$

3. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji};$

4. $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^k;$

5. $\Gamma_{k,\,ij} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right);$

II.1. Свойства символов Кристоффеля

1. $\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}, \quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^m_{ij}, \quad$ где $\quad \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m;$

2. $\Gamma^k_{ij} = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right);$

3. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji};$

4. $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^k;$

5. $\Gamma_{k,\,ij} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right);$

6. функция, каждой криволинейной системе координат ставящая в соответствие массив символов Кристоффеля, не является тензором.

II.2. Доказательство свойств символов Кристоффеля

1). $\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{m,\,ij}$, $\quad \Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^m_{ij}$, $\quad$ где
$\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m$.

Доказательство. Очевидно. Действительно, с одной стороны,

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_k = \Gamma^k_{ij}g_{km}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{m,\,ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m,$$

откуда получаем требуемое равенство.

II.2. Доказательство свойств символов Кристоффеля

2). $\Gamma^k_{ij} = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right)$.

Доказательство.

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \Gamma^m_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_m\right) = \Gamma^m_{ij}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_m\right) = \Gamma^m_{ij}\delta^k_m = \Gamma^k_{ij}.$$

II.2. Доказательство свойств символов Кристоффеля

3). $\Gamma^{k}_{ij\cdot} = \Gamma^{k}_{ji\cdot}$.

Доказательство.

$$\Gamma^{k}_{ij\cdot}\overrightarrow{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^i\partial q^j} = \frac{\partial^2\overrightarrow{\mathbf{r}}}{\partial q^j\partial q^i} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^i} = \Gamma^{k}_{ji\cdot}\overrightarrow{\mathbf{r}}_k.$$

II.2. Доказательство свойств символов Кристоффеля

4). $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^k$.

Доказательство. Пусть $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j} = \Delta^i_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^k$. Надо доказать равенство $\Delta^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}$. Имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial q^j}\delta^i_k = \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_k\right) = \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_k\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^i, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_k}{\partial q^j}\right) =$$

$$= \left(\Delta^i_{jm}\overrightarrow{\mathbf{r}}^m, \overrightarrow{\mathbf{r}}_k\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^i, \Gamma^m_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}_m\right) = \Delta^i_{jm}\delta^m_k + \Gamma^m_{jk}\delta^i_m = \Delta^i_{jk} + \Gamma^i_{jk}.$$

Таким образом, $\Delta^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}$, то есть $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^k$, что и требовалось доказать.

II.2. Доказательство свойств символов Кристоффеля

5). $\Gamma_{k,\,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right).$

Доказательство.

$$\Gamma_{k,\,ij} = g_{km}\Gamma^m_{ij} = g_{km}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}^m, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ij}\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{ji}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j}\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^i}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j}\right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_k}{\partial q^j}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i\right) - \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_k}{\partial q^j}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^i}\right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_k}{\partial q^i}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right) - \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_k}{\partial q^i}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right) - \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^k}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i\right) - \left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_i}{\partial q^k}, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_k, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j\right) - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}_j, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right),$$

что и требовалось доказать.

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для **цилиндрической** системы координат мы вычислим массив символов Кристоффеля, а для сферической системы координат просто приведем соответствующий массив, опустив выкладки.

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для цилиндрической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} + z \overrightarrow{\mathbf{k}}$ имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho =$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для цилиндрической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi\, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi\, \overrightarrow{\mathbf{j}} + z\, \overrightarrow{\mathbf{k}}$ имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\, \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\, \overrightarrow{\mathbf{j}},$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для цилиндрической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} + z \overrightarrow{\mathbf{k}}$ имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi =$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для цилиндрической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} + z \overrightarrow{\mathbf{k}}$ имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}},$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для цилиндрической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_z =$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для цилиндрической системы координат $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} + z \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_z = \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Дифференцируя первый вектор локального базиса цилиндрической системы координат по ρ, получаем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial \rho} =$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_z = \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Дифференцируя первый вектор локального базиса цилиндрической системы координат по ρ, получаем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\rho} = \overrightarrow{\mathbf{0}} =$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Дифференцируя первый вектор локального базиса цилиндрической системы координат по ρ, получаем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\rho}=\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_1+\Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_2+\Gamma^3_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

откуда

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} + z \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho = \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi = -\rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{r}}_z = \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Дифференцируя первый вектор локального базиса цилиндрической системы координат по ρ, получаем

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial \rho} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = \Gamma^1_{11} \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 + \Gamma^2_{11} \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 + \Gamma^3_{11} \overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

откуда

$$\overrightarrow{\mathbf{0}} = \Gamma^1_{11} \left(\cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) + \Gamma^2_{11} \left(-\rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) + \Gamma^3_{11} \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\rho}=\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_1+\Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_2+\Gamma^3_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma^1_{11}\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^2_{11}\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^3_{11}\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Сравнивая координаты перед $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$, получаем систему уравнений

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\rho}=\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_1+\Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_2+\Gamma^3_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma^1_{11}\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^2_{11}\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^3_{11}\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Сравнивая координаты перед $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\cos\varphi\cdot\Gamma^1_{11} & + & (-\rho\sin\varphi)\cdot\Gamma^2_{11} & + & 0\cdot\Gamma^3_{11} & = & 0\\ \sin\varphi\cdot\Gamma^1_{11} & + & \rho\cos\varphi\cdot\Gamma^2_{11} & + & 0\cdot\Gamma^3_{11} & = & 0\\ 0\cdot\Gamma^1_{11} & + & 0\cdot\Gamma^2_{11} & + & 1\cdot\Gamma^3_{11} & = & 0\end{cases}$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\rho}=\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma_{11}^1\overrightarrow{\mathbf{r}}_1+\Gamma_{11}^2\overrightarrow{\mathbf{r}}_2+\Gamma_{11}^3\overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\begin{cases}\cos\varphi\cdot\Gamma_{11}^1+(-\rho\sin\varphi)\cdot\Gamma_{11}^2+0\cdot\Gamma_{11}^3=0\\ \sin\varphi\cdot\Gamma_{11}^1+\rho\cos\varphi\cdot\Gamma_{11}^2+0\cdot\Gamma_{11}^3=0\\ 0\cdot\Gamma_{11}^1+0\cdot\Gamma_{11}^2+1\cdot\Gamma_{11}^3=0\end{cases}$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{11}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\rho}=\overrightarrow{\mathbf{0}}=\Gamma^1_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_1+\Gamma^2_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_2+\Gamma^3_{11}\overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{0}}=$$

$$=\Gamma^1_{12}\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^2_{12}\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^3_{12}\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11}\\ \Gamma^3_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho=\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}},\quad \overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_z=\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{12}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}_\rho}{\partial\varphi}=-\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=\Gamma^1_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_1+\Gamma^2_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_2+\Gamma^3_{12}\overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$-\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}=$$

$$=\Gamma^1_{12}\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^2_{12}\left(-\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)+\Gamma^3_{12}\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}\\ \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\sin\varphi\\ 0 & \cos\varphi\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} + z \overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\rho}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{12} \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 + \Gamma^2_{12} \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 + \Gamma^3_{12} \overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{21} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}}{\partial \rho} = -\sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} = \Gamma^1_{21} \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 + \Gamma^2_{21} \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 + \Gamma^3_{21} \overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{22} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\varphi}}{\partial \varphi} = -\rho \cos\varphi \overrightarrow{\mathbf{j}} - \rho \sin\varphi \overrightarrow{\mathbf{i}} = \Gamma^1_{22} \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 + \Gamma^2_{22} \overrightarrow{\mathbf{r}}_2 + \Gamma^3_{22} \overrightarrow{\mathbf{r}}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{13} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{31} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{23} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_{33} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Решая матричное уравнение (вместо девяти систем линейных уравнений)

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} & \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} & \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} & \Gamma^2_{31} & \Gamma^2_{32} & \Gamma^2_{33} \\ \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} & \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} & \Gamma^3_{31} & \Gamma^3_{32} & \Gamma^3_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi & 0 & -\sin\varphi & -\rho\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

получаем массив символов Кристоффеля для **цилиндрической системы координат:**

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Получаем массив символов Кристоффеля для **цилиндрической системы координат:**

$$
\left(\Gamma^{k}_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{10}
$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Для **сферической** системы координат

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(r,\varphi,\theta)=r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+r\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

имеем:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_1=\overrightarrow{\mathbf{r}}_r=\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_2=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\varphi=-r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_3=\overrightarrow{\mathbf{r}}_\theta=r\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+r\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}-r\sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

II.3. Символы Кристоффеля цилиндрической и сферической систем координат

Массив символов Кристоффеля для **сферической системы координат:**

$$
\left(\Gamma^{k}_{\bullet ij}\right) = \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ctg}\theta \\ 0 & \operatorname{ctg}\theta & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{r} \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ \dfrac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix} \tag{11}
$$

III. Тензорное поле. Ковариантная производная

III.1. Тензорное поле

Определение 7. *Если* V *— подмножество линейного пространства* U, $W = U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_m$, *где* $U_i \in \{U, U^*\}$, *и* $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *— функция, каждому вектору* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ *из* V *ставящая в соответствие тензор-вектор* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) \in W$, *то говорят, что на множестве* V *задано* **тензорное поле** $\overrightarrow{\mathbf{T}}$.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Каковы наиболее перспективные направления исследования?

Посмотреть список базовых исследовательских стратегий?

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Каковы наиболее перспективные направления исследования?

Посмотреть список базовых исследовательских стратегий?

Для того, чтобы каждый раз не надо было «изобретать велосипед» естественно применить **стратегию поиска аналогии**.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Каковы наиболее перспективные направления исследования?

Посмотреть список базовых исследовательских стратегий?

Для того, чтобы каждый раз не надо было «изобретать велосипед» естественно применить **стратегию поиска аналогии**. Ясно, что тензорное поле обобщает понятия «скалярное поле» (это тензорное поле ранга 0) и «векторное поле» (это контравариантное поле ранга 1).

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Каковы наиболее перспективные направления исследования?

Посмотреть список базовых исследовательских стратегий?

Для того, чтобы каждый раз не надо было «изобретать велосипед» естественно применить **стратегию поиска аналогии**. Ясно, что тензорное поле обобщает понятия «скалярное поле» (это тензорное поле ранга 0) и «векторное поле» (это контравариантное поле ранга 1). Поэтому имеет смысл перенести конструкции, введенные для этих полей (дифференциальные операции, оператор $\overrightarrow{\nabla}$, различные конструкции интеграла, векторные линии и линии (поверхности) уровня и др.), на случай произвольного тензорного поля.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Каковы наиболее перспективные направления исследования?

Посмотреть список базовых исследовательских стратегий?

Для применения метода аналогии и других методов научного исследования нам необходимо определиться со стандартными способами задания тензорного поля.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Каковы наиболее перспективные направления исследования?

Посмотреть список базовых исследовательских стратегий?

Для применения метода аналогии и других методов научного исследования нам необходимо определиться со стандартными способами задания тензорного поля.

Следовательно, на данном этапе исследования приоритетной является **стратегия построения модели**.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Пусть $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ — система криволинейных координат подмножества V линейного пространства U, и $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ — тензорное поле.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Пусть $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ — система криволинейных координат подмножества V линейного пространства U, и $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ — тензорное поле.

Тогда каждой точке с радиусом-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q^1, \ldots, q^n)$ соответствует локальный базис $\mathbf{Б}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_n \right\}$ и взаимный к нему базис $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}^1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}^n \right\}$.

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

Пусть $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ — система криволинейных координат подмножества V линейного пространства U, и $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ — тензорное поле.
Тогда каждой точке с радиусом-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q^1, \ldots, q^n)$ соответствует локальный базис $\mathbf{Б}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_n \right\}$.
Базису $\mathbf{Б}(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ пространства U соответствуют взаимный к нему базис $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}^1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}^n \right\}$ и базис $\mathbf{B}(q^1, q^2, \ldots, q^n) =$

$$= \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i_k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i_m} \,\middle|\, i_j \in \{1, 2, \ldots n\} \right\}.$$

III.1. Тензорное поле

Зафиксируем, для простоты, следующий порядок множителей:

$$W = \underbrace{U \otimes U \otimes \ldots \otimes U}_{k} \otimes \underbrace{U^* \otimes U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{m-k}.$$

$\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ — система криволинейных координат, $\mathbf{Б}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}_n \right\}$ — локальный базис и $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}^1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{r}}^n \right\}$ — взаимный к нему базис. Пусть $\mathbf{B}(q^1, q^2, \ldots, q^n) =$

$$= \left\{ \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i_k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i_m} \,\middle|\, i_j \in \{1, 2, \ldots n\} \right\}.$$

Тогда для каждой точки множества V с радиусом-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \Phi(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ можно разложить по базису $\mathbf{B}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = T^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_{k+1} \ldots i_m}(q^1, q^2, \ldots, q^n) \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{i_k} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i_m} \qquad (12)$$

III.2. Задание тензорного поля: координатные функции

Определение 8. *Функции* $T^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_m}(q^1, q^2, \ldots, q^n)$, *определенные равенством (12), называются* **координатными функциями тензорного поля** $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *в системе криволинейных координат* Φ.

III.2. Задание тензорного поля: координатные функции

Определение 8. *Функции* $T^{i_1 i_2 \,.\,.\,.\, i_k}_{ i_{k+1} i_{k+2} \,.\,.\,.\, i_m}(q^1, q^2, \ldots, q^n)$, *определенные равенством (12), называются* **координатными функциями тензорного поля** $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *в системе криволинейных координат* Φ.

Порядок множителей в W может быть другим. Например, разложение тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}} : V \to U \otimes U^* \otimes U$ по локальному базису системы криволинейных координат с помощью координатных функций имеет вид:

III.2. Задание тензорного поля: координатные функции

Определение 8. *Функции* $T^{i_1 i_2 \dots i_k}_{ i_{k+1} i_{k+2} \dots i_m}(q^1, q^2, \dots, q^n)$, *определенные равенством (12), называются* **координатными функциями тензорного поля** $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *в системе криволинейных координат* Φ.

Порядок множителей в W может быть другим. Например, разложение тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}} : V \to U \otimes U^* \otimes U$ по локальному базису системы криволинейных координат с помощью координатных функций имеет вид:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{i \bullet k}_{\bullet j}(q^1, \dots, q^n) \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} =$$

III.2. Задание тензорного поля: координатные функции

Определение 8. *Функции* $T^{i_1 i_2 \,\cdot\, \cdot\, \cdot\, i_k}_{\,\cdot\; \cdot \;\; i_{k+1} i_{k+2} \dots i_m}(q^1, q^2, \dots, q^n)$, *определенные равенством (12), называются* **координатными функциями тензорного поля** $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *в системе криволинейных координат* Φ.

Порядок множителей в W может быть другим. Например, разложение тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}} : V \to U \otimes U^* \otimes U$ по локальному базису системы криволинейных координат с помощью координатных функций имеет вид:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{i \bullet k}_{\bullet j}(q^1, \dots, q^n)\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^k} = T^{i \bullet k}_{\bullet j}(q^1, \dots, q^n)\, \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_k.$$

III.3. Теорема о координатных функциях тензорного поля

Теорема 2 (о координатных функциях тензорного поля.). *Если* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *— тензорное поле на множестве* V*, то координатные функции поля* $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *в системах* $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ *и* $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ *криволинейных координат множества* V *связаны* **тензорным законом**

$$T'^{j_1\,\ldots\,j_m}_{i_1\,\ldots\,i_k}(q'^1, \ldots, q'^n) = a^{s_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot a^{s_k}_{i_k} \cdot b^{j_1}_{t_1} \cdot \ldots \cdot b^{j_m}_{t_m} \cdot T^{t_1\,\ldots\,t_m}_{s_1\,\ldots\,s_k}(q^1, \ldots, q^n),$$

где, в соответствии с результатами раздела I.5, имеем $a^i_j = \dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$*.*

Как обычно, b^i_j *— это компоненты обратной к* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$ *матрицы.*

III.3. Теорема о координатных функциях тензорного поля

Теорема 2 (о координатных функциях тензорного поля.). *Если* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ *— тензорное поле на множестве* V, *то координатные функции поля* $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *в системах* $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ *и* $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ *криволинейных координат множества* V *связаны* **тензорным законом**

$$T'^{\,j_1 \,\ldots\, j_m}_{i_1 \,\ldots\, i_k}(q'^1, \ldots, q'^n) = a^{s_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot a^{s_k}_{i_k} \cdot b^{j_1}_{t_1} \cdot \ldots \cdot b^{j_m}_{t_m} \cdot T^{t_1 \,\ldots\, t_m}_{s_1 \,\ldots\, s_k}(q^1, \ldots, q^n),$$

где, в соответствии с результатами раздела I.5, *имеем* $a^i_j = \dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$.

Как обычно, b^i_j *— это компоненты обратной к* $\left(a^i_{\bullet j}\right)$ *матрицы.*

Доказательство. Это следствие из формул (12) и (6).

Рассмотреть пример?

III.4. Ковариантная производная

В дальнейшем мы иногда в ситуациях, когда это не приводит к двусмысленности, будем писать «тензор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$» вместо «тензорное поле $\overrightarrow{\mathbf{T}}$». Это вызвано тем обстоятельством, что обычно функцию $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ мы будем задавать выражением, то есть указывать *значение* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в точке с радиусом-вектором $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ (это значение является тензором-вектором).

III.4. Ковариантная производная

Определение 9. *Пусть*

$$\Phi(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^n) = \psi^t(q^1, q^2, \ldots, q^n)\overrightarrow{\mathbf{e}}_t$$

— криволинейная система координат, определенная на области D*, и* $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^n)\right)$ *— тензорное поле со значениями в* $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m$*, где* $V_t \in \{U, U^*\}$*. Мы будем писать* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ *вместо* $\overrightarrow{\mathbf{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}(q^1, q^2, \ldots, q^n)\right)$*. Тогда* **ковариантной производной** *тензорного поля* $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ *называется тензорное поле, задаваемое формулой*

$$\left(\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}\right)(q^1, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^t} \otimes \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} \in V^* \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m,$$

где $\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} = \lim\limits_{\Delta q^t \to 0} \dfrac{\Delta\overrightarrow{\mathbf{T}}}{\Delta q^t} =$

$$= \lim_{\Delta q^t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^{t-1}, q^t + \Delta q^t, q^{t+1}, \ldots, q^n) - \overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^t, \ldots, q^n)}{\Delta q^t}.$$

III.4. Ковариантная производная

$$\left(\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{\mathbf{T}}\right)(q^1, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^t} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} \in V^* \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m,$$

где $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} = \lim\limits_{\Delta q^t \to 0} \dfrac{\Delta \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\Delta q^t} =$

$$= \lim_{\Delta q^t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^{t-1}, q^t + \Delta q^t, q^{t+1}, \ldots, q^n) - \overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^t, \ldots, q^n)}{\Delta q^t}.$$

Если $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ — тензорное поле ранга 0 (то есть скалярное поле), то $\otimes$ — это просто умножение вектора на скаляр.

III.4. Ковариантная производная

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}\right)(q^1, \ldots, q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^t} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} \in V^* \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m,$$

где $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} = \lim\limits_{\Delta q^t \to 0} \dfrac{\Delta \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\Delta q^t} =$

$$= \lim_{\Delta q^t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^{t-1}, q^t + \Delta q^t, q^{t+1}, \ldots, q^n) - \overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^t, \ldots, q^n)}{\Delta q^t}.$$

Обозначение $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ следует воспринимать, как своеобразное «тензорное произведение» «формального вектора» $\overrightarrow{\nabla}$ на тензор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Как и в математическом анализе, при «умножении» на компоненты «формального вектора» $\overrightarrow{\nabla}$ вместо *произведения* чисел и выражений надо рассматривать *действие* соответствующего дифференциального оператора на соответствующее выражение.

III.4. Ковариантная производная

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}\right)(q^1,\ldots,q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^t} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} \in V^* \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m,$$

где $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} = \lim\limits_{\Delta q^t \to 0} \dfrac{\Delta \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\Delta q^t} =$

$$= \lim_{\Delta q^t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1,\ldots,q^{t-1},q^t+\Delta q^t,q^{t+1},\ldots,q^n) - \overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1,\ldots,q^t,\ldots,q^n)}{\Delta q^t}.$$

Пусть $\Phi(q^1,\ldots,q^n)$ — криволинейная система координат, и $T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — координатные функции тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ в системе криволинейных координат Φ, то координатные функции тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ обозначаются через $\nabla_t T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Отметим, что в «отдельном» обозначении ∇_i не больше смысла, чем в приставке «по» в слове «поехали».

III.4. Ковариантная производная

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}\right)(q^1,\ldots,q^n) = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^t} \otimes \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} \in V^* \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m,$$

где $\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^t} = \lim\limits_{\Delta q^t \to 0} \dfrac{\Delta\overrightarrow{\mathbf{T}}}{\Delta q^t} =$

$$= \lim_{\Delta q^t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1,\ldots,q^{t-1},q^t+\Delta q^t,q^{t+1},\ldots,q^n) - \overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1,\ldots,q^t,\ldots,q^n)}{\Delta q^t}.$$

Мы в тензорном анализе примем по определению, что тензорное произведение линейных пространств является ассоциативной операцией, то есть

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C.$$

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$*, как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$*, не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство. Как уже было отмечено в разделе I.5, компоненты матрицы перехода $a^{i}_{\bullet j}$ из $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ в систему криволинейных координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ имеют вид $\dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$.

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$*, как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$*, не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство. Как уже было отмечено в разделе I.5, компоненты матрицы перехода $a^i_{\bullet j}$ из $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ в систему криволинейных координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ имеют вид $\dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$. Значит, компоненты $b^i_{\bullet j}$ матрицы обратного перехода имеют вид $\dfrac{\partial q'^i}{\partial q^j}$. В частности, по теореме об изменении векторов взаимного базиса,

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство. Как уже было отмечено в разделе I.5, компоненты матрицы перехода $a^i_{\bullet j}$ из $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$ в систему криволинейных координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ имеют вид $\dfrac{\partial q^i}{\partial q'^j}$. Значит, компоненты $b^i_{\bullet j}$ матрицы обратного перехода имеют вид $\dfrac{\partial q'^i}{\partial q^j}$. В частности, по теореме об изменении векторов взаимного базиса,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j}.$$

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$*, как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$*, не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q^j}.$$

Поэтому при переходе в криволинейную систему координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ получаем (здесь, краткости ради, вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}_{q'^i}$ переобозначен через $\overrightarrow{\mathbf{r}}'_i$)

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$*, как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$*, не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}q'^{i} = \frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{j}}\overrightarrow{\mathbf{r}}q^{j}.$$

Поэтому при переходе в криволинейную систему координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ получаем (здесь, краткости ради, вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}q'^{i}$ переобозначен через $\overrightarrow{\mathbf{r}}'^{i}$)

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'^{m} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q'^{m}} =$$

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j}.$$

Поэтому при переходе в криволинейную систему координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ получаем (здесь, краткости ради, вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i}$ переобозначен через $\overrightarrow{\mathbf{r}}'^i$)

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'^m \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q'^m} = \frac{\partial q'^m}{\partial q^p}\overrightarrow{\mathbf{r}}^p \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s}\frac{\partial q^s}{\partial q'^m} =$$

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$*, как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$*, не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j}.$$

Поэтому при переходе в криволинейную систему координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ получаем (здесь, краткости ради, вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i}$ переобозначен через $\overrightarrow{\mathbf{r}}'^i$)

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'^m \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q'^m} = \frac{\partial q'^m}{\partial q^p}\overrightarrow{\mathbf{r}}^p \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s}\frac{\partial q^s}{\partial q'^m} = \delta^s_p \overrightarrow{\mathbf{r}}^p \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s} =$$

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j}.$$

Поэтому при переходе в криволинейную систему координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ получаем (здесь, краткости ради, вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i}$ переобозначен через $\overrightarrow{\mathbf{r}}'^{i}$)

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'^{m} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q'^m} = \frac{\partial q'^m}{\partial q^p}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{p} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s}\frac{\partial q^s}{\partial q'^m} = \delta^s_p \overrightarrow{\mathbf{r}}^{p} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{p} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^p}.$$

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q^j}.$$

Поэтому при переходе в криволинейную систему координат $\Phi'(q'^1, \ldots, q'^n)$ получаем (здесь, краткости ради, вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}}^{q'^i}$ переобозначен через $\overrightarrow{\mathbf{r}}'^{i}$)

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'^{m} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q'^m} = \frac{\partial q'^m}{\partial q^p}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{p} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s}\frac{\partial q^s}{\partial q'^m} = \delta^s_p\overrightarrow{\mathbf{r}}^{p} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^s} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{p} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{T}}}{\partial q^p}.$$

Теорема доказана.

III.5. Теорема о тензоре ковариантной производной

Теорема 3 (о тензоре ковариантной производной). *Тензорное поле* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *как функция от* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *не зависит от выбора криволинейной системы координат.*

В этой теореме доказывалось, что операция $\overrightarrow{\nabla}$ является «тензорной» операцией, то есть ее результат *не зависит* от выбора криволинейной системы координат.

III.6. Теорема о ковариантной производной

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, q^2, \dots, q^n)$ — тензорное поле, заданное в криволинейной системе координат Φ. Возникает задача получения формулы, позволяющей непосредственно вычислять координатные функции тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$ с помощью координатных функций тензорного поля $\overrightarrow{\mathbf{T}}$. Понятно, что при этом необходимо учитывать особенности геометрии, задаваемой криволинейной системой координат Φ, то есть символы Кристоффеля.

III.6. Теорема о ковариантной производной

Теорема 4 (о ковариантной производной). *Пусть* $\overrightarrow{\mathbf{T}}(q^1, \ldots, q^n)$ *— тензорное поле, и* $T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(q_0^1, \ldots, q_0^n)$ *— его координатные функции в системе криволинейных координат* $\Phi(q^1, \ldots, q^n)$. *Тогда в системе координат* Φ *координатные функции*

$$R^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{t i_1 i_2 \ldots i_k} = \nabla_t T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

тензорного поля $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}}$, *удовлетворяют соотношению*

$$\nabla_t T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \frac{\partial T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\partial q^t} +$$

$$+ \Gamma^{j_1}_{st} T^{s j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \Gamma^{j_2}_{st} T^{j_1 s \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \ldots + \Gamma^{j_m}_{st} T^{j_1 \ldots j_{m-1} s}_{i_1 i_2 \ldots i_k} -$$

$$- \Gamma^{s}_{i_1 t} T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{s i_2 \ldots i_k} - \Gamma^{s}_{i_2 t} T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 s \ldots i_k} - \ldots - \Gamma^{s}_{i_k t} T^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_{k-1} s}. \quad (13)$$

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство. Доказательство мы проведем только для случая тензора структуры $T_{i}^{\bullet j}$.

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство. Итак, используя тот факт, что символ суммирования является «глухим» символом, в частности, например, $T_{\dot{i}}^{\bullet \dot{j}} \Gamma_{st}^{i} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{s} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\dot{j}} = T_{s}^{\bullet \dot{j}} \Gamma_{it}^{s} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\dot{j}}$ (провели замену символа $i \leftrightarrow s$) и $T_{\dot{i}}^{\bullet \dot{j}} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \Gamma_{\dot{j}t}^{s} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{s} = T_{\dot{i}}^{\bullet s} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \Gamma_{st}^{\dot{j}} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{\dot{j}}$ (замена символа $j \leftrightarrow s$), имеем

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство.

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} =$$

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство.

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j}}{\partial q^{t}} =$$

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство.

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_i^{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^t} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_i^{\bullet j}}{\partial q^t} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet j} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^t} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^t} =$$

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство.

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j}}{\partial q^{t}} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}}{\partial q^{t}} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} + \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes T_{i}^{\bullet j} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}}{\partial q^{t}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} + \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes T_{i}^{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j}}{\partial q^{t}} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}}{\partial q^{t}} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} - \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes T_{i}^{\bullet j} \Gamma_{st}^{i} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{s} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_{j} + \overrightarrow{\mathbf{r}}^{t} \otimes T_{i}^{\bullet j} \overrightarrow{\mathbf{r}}^{i} \otimes \Gamma_{tj}^{s} \overrightarrow{\mathbf{r}}_{s} =$$

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство.

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_i^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^t} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_i^{\bullet j}}{\partial q^t}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet j}\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^t} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^t} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_i^{\bullet j}}{\partial q^t}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j - \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet j}\Gamma_{st}^i\overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \Gamma_{tj}^s\overrightarrow{\mathbf{r}}_s =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_i^{\bullet j}}{\partial q^t}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j - \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_s^{\bullet j}\Gamma_{it}^s\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_i^{\bullet s}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \Gamma_{ts}^j\overrightarrow{\mathbf{r}}_j =$$

III.6. Теорема о ковариантной производной

Доказательство.

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{T}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^t} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}}{\partial q^t}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_{i}^{\bullet j}\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}^i}{\partial q^t} \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_{i}^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{r}}_j}{\partial q^t} =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}}{\partial q^t}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j - \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_{i}^{\bullet j}\Gamma_{st}^{i}\overrightarrow{\mathbf{r}}^s \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_{i}^{\bullet j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \Gamma_{tj}^{s}\overrightarrow{\mathbf{r}}_s =$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \frac{\partial T_{i}^{\bullet j}}{\partial q^t}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j - \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_{s}^{\bullet j}\Gamma_{it}^{s}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j + \overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes T_{i}^{\bullet s}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \Gamma_{ts}^{j}\overrightarrow{\mathbf{r}}_j =$$

$$= \left(\frac{\partial T_{i}^{\bullet j}}{\partial q^t} - \Gamma_{it}^{s}T_{s}^{\bullet j} + \Gamma_{ts}^{j}T_{i}^{\bullet s}\right)\overrightarrow{\mathbf{r}}^t \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}_j.$$

III.7. Теорема Риччи

Теорема 5 (Риччи). *Ковариантная производная поля метрического тензора равна 0.*

III.7. Теорема Риччи

Теорема 5 (Риччи). *Ковариантная производная поля метрического тензора равна 0.*

Доказательство. Под *полем метрического тензора* понимается тензорное поле $g_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = (\overrightarrow{\mathbf{r}}_i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j)\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j$.

III.7. Теорема Риччи

Теорема 5 (Риччи). *Ковариантная производная поля метрического тензора равна 0.*

Доказательство. Под *полем метрического тензора* понимается тензорное поле $g_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j = (\overrightarrow{\mathbf{r}}_i, \overrightarrow{\mathbf{r}}_j)\overrightarrow{\mathbf{r}}^i \otimes \overrightarrow{\mathbf{r}}^j$.

По определению ковариантной производной и метрического тензора имеем, используя **свойство 4 символов Кристоффеля**,

III.7. Теорема Риччи

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

III.7. Теорема Риччи

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

III.7. Теорема Риччи

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left((\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

III.7. Теорема Риччи

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left((\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{ji},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{ki})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+$$

$$+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}}{\partial q^{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}}{\partial q^{i}}=$$

III.7. Теорема Риччи

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left((\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{ji},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{ki})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+$$

$$+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}}{\partial q^{i}}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}}{\partial q^{i}}=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\Gamma_{ij}^{s}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\Gamma_{ik}^{s}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+$$

$$+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\left(-\Gamma_{is}^{j}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{s}\right)\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\left(-\Gamma_{is}^{k}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{s}\right).$$

III.7. Теорема Риччи

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial}{\partial q^{i}}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\Gamma^{s}_{ij}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\Gamma^{s}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+$$

$$+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\left(-\Gamma^{j}_{is}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{s}\right)\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\left(-\Gamma^{k}_{is}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{s}\right)$$

Заменяя в двух последних выражениях символы суммирования таким образом, чтобы получить разложение по системе векторов $\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}$, получаем

$$\overrightarrow{\nabla}\left(g_{jk}\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}\right)=$$

$$=\Gamma^{s}_{ij}(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}+\Gamma^{s}_{ik}(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}-$$

$$-\Gamma^{s}_{ij}(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{k})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}-\Gamma^{s}_{ik}(\overrightarrow{\mathbf{r}}_{j},\overrightarrow{\mathbf{r}}_{s})\overrightarrow{\mathbf{r}}^{i}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{j}\otimes\overrightarrow{\mathbf{r}}^{k}=\overrightarrow{\mathbf{0}},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотреть пример?

Замечание 1. *Если тензорное поле имеет вид* $\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^i \overrightarrow{\mathbf{r}}_i$, *то массив символов Кристоффеля удобнее «реорганизовать» иначе: вместо массива* $(\Gamma^k_{\bullet ij})$ *удобнее рассматривать массив* $(\Gamma^{\bullet\bullet k}_{ij})$. *Это позволяет сразу представить соответствующее слагаемое массива* $\nabla_i T^j$ *в матричном виде:*

$$(Q^{\bullet j}_{i}) = (T^p \Gamma^{\bullet\bullet j}_{pi}) = \begin{pmatrix} T^1 & \dots & T^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^{\bullet\bullet 1}_{pi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma^{\bullet\bullet 2}_{pi} \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{pmatrix} \Gamma^{\bullet\bullet n}_{pi} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?