Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Элементы канторовской «наивной» теории множеств

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений, изображенных справа,* **B** *— множество символов.*

$(x-1)^2$

x^2-1 $\quad x+1$

$x-2$

x^2-2x+1

A

$\triangle$ $\quad\clubsuit$

$\S$

$\heartsuit$ $\quad\spadesuit$

B

Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений, изображенных справа,* **B** *— множество символов.*

$$(x-1)^2 \quad x^2-1 \quad x+1 \quad x-2 \quad x^2-2x+1 \qquad \mathbf{A}$$

$$\triangle \quad \clubsuit \quad \S \quad \heartsuit \quad \spadesuit \qquad \mathbf{B}$$

Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений, изображенных справа,* **B** *— множество символов.*

$(x-1)^2$
x^2-1 $\quad x+1$
$x-2$
x^2-2x+1
A

$\triangle$ $\quad\clubsuit$
$\S$
$\heartsuit$ $\quad\spadesuit$
B

Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

x	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$	$x-2$	x^2-2x+1
$\varphi(x)$	$\triangle$	$\clubsuit$	$\S$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

Пример 1. *Пусть множество* **A** — *множество выражений, изображенных справа,* **B** — *множество символов.*

$(x-1)^2$ x^2-1 $x+1$ $x-2$ x^2-2x+1 **A**

$\triangle$ $\clubsuit$ $\S$ $\heartsuit$ $\spadesuit$ **B**

Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

x	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$	$x-2$	x^2-2x+1
$\varphi(x)$	$\triangle$	$\clubsuit$	$\S$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

Значит, во множествах **A** и **B** равное число элементов.

Пример 1. *Пусть множество* $\mathbf{A}$ — *множество выражений, изображенных справа,* $\mathbf{B}$ — *множество символов.*

$(x-1)^2$ $\quad x^2-1$ $\quad x+1$ $\quad x-2$ $\quad x^2-2x+1$ $\quad$ **A**

$\triangle$ $\quad \clubsuit$ $\quad \S$ $\quad \heartsuit$ $\quad \spadesuit$ $\quad$ **B**

Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Если отождествлять равносильные выражения, т.е. отождествить $(x-1)^2$ и x^2-2x+1, то для любой взаимно однозначной функции $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ имеем $E(\psi) \subset \mathbf{B}$, в частности, $E(\psi) \neq \mathbf{B}$.

Пример 1. *Пусть множество* **A** — *множество выражений, изображенных справа,* **B** — *множество символов.*

$(x-1)^2$

x^2-1 $\quad$ $x+1$

$x-2$

x^2-2x+1

A

$\triangle$ $\quad$ $\clubsuit$

$\S$

$\heartsuit$ $\quad$ $\spadesuit$

B

Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Если отождествлять равносильные выражения, т.е. отождествить $(x-1)^2$ и x^2-2x+1, то <u>не существует</u> взаимно однозначной функции $\theta : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Значит, в этом случае во множестве **A** меньше элементов, чем в **B**.

Вернемся к лекции?

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. Надо доказать, что

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$, то есть существует взаимно однозначная функция $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$;
- $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Z}|$, то есть существует взаимно однозначная функция $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. Надо доказать, что

- $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Z}|$, то есть существует взаимно однозначная функция $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$;
- $|\mathbb{N}| \ge |\mathbb{Z}|$, то есть существует взаимно однозначная функция $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$.

В качестве f возьмем функцию, осуществляющую вложение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$: $f(n) = n$.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. Надо доказать, что

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$, то есть существует взаимно однозначная функция $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$;
- $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Z}|$, то есть существует взаимно однозначная функция $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$.

В качестве g можно взять, например, функцию, определенную формулой $g(z) = 4|z| + \operatorname{sign}(z + 0.5)$, то есть функцию, имеющую такую таблицу значений:

x	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(x)$	$\ldots$	7	3	1	5	9	$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. В качестве $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ возьмем функцию, осуществляющую вложение $f(n) = n$.

В качестве $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ можно взять, например, функцию, определенную формулой $g(z) = 4|z| + \mathrm{sign}(z + 0.5)$, то есть функцию, имеющую такую таблицу значений:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$g(x)$	...	7	3	1	5	9	...

Очевидно (докажите самостоятельно), что эти функции являются взаимно однозначными и $D(f) = \mathbb{N}$, $E(f) = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $D(g) = \mathbb{Z}$, $E(g) \subseteq \mathbb{N}$. Утверждение доказано.

Вернуться к лекции?

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\Bigl|\Bigl\{Y \Bigm| Y \subseteq X\Bigr\}\Bigr| = 2^n.$

Решение.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| =$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n.$

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0.$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0.$$

База индукции доказана.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Например, если $X = \{a;\ b;\ c\}$, то

$$P_1 = \left\{\emptyset;\ \{b\};\ \{c\};\ \{b;c\}\right\},$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Например, если $X = \{a;\ b;\ c\}$, то

$$P_1 = \left\{\emptyset;\ \{b\};\ \{c\};\ \{b;c\}\right\}, \quad P_2 = \left\{\{a\};\ \{a;b\};\ \{a;c\};\ \{a;b;c\}\right\},$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$*, то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Для этого построим **взаимно однозначную функцию**, отображающую P_1 на P_2.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Искомой является функция, заданная формулой: $f(Y) = Y \cup \{a\}$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$*, то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \Rightarrow Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$x \in Y' \Rightarrow$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X\backslash\{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \Rightarrow Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$*, то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n.$

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Y'' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$*, то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Y'' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow x \in Y'' \Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Y'' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow x \in Y'' \Rightarrow Y' \subseteq Y''$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$Y' \subseteq Y''$. Аналогично получаем

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$Y' \subseteq Y''$. Аналогично получаем $Y'' \subseteq Y'$, откуда

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$Y' \subseteq Y''$. Аналогично получаем $Y'' \subseteq Y'$, откуда $Y' = Y''$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Очевидно, что f отображает P_1 на P_2. Действительно,

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Если $Z \in P_2$, то

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Если $Z \in P_2$, то $Z = (Z \backslash \{a\}) \cup \{a\}$, т.е.

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Если $Z \in P_2$, то $Z = (Z \setminus \{a\}) \cup \{a\}$, т.е. $Z = f(Z \setminus \{a\})$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Пример 3. *Докажите, что если X – множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$, *то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X\backslash\{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X\backslash\{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \setminus \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) =$$

Пример 3. *Докажите, что если* X *— множество, состоящее из* n *элементов, т.е.* $|X| = n$*, то множество всех его подмножеств состоит из* 2^n *элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$*.*

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n.$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n.$$

Шаг индукции доказан. Согласно принципу математической индукции утверждение доказано.

Вернуться к лекции?

Задачи для самостоятельного решения

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.58.) Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача I.2. (Ответ приведен на стр.62.) Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Задача I.3. (Ответ приведен на стр.65.) Докажите, что прямое произведение конечного числа не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача I.4. (Ответ приведен на стр.67.) Докажите, что прямое произведение счетного множества счетных множеств есть несчетное множество.

Задача I.5. (Ответ приведен на стр.69.) Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Задача I.6. (Ответ приведен на стр.71.) Является ли множество всех конечных подмножеств счетного множества счетным множеством?

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. $f : A \to \mathbb{N}, \quad g : B \to \mathbb{N},$

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. $f: \ A \to \mathbb{N}, \quad g: \ B \to \mathbb{N},$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ \end{cases}$$

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. $f:\ A \to \mathbb{N}, \quad g:\ B \to \mathbb{N},$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ 2g(x), & \text{если} \quad x \in B \backslash A. \end{cases}$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Мощность множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не больше мощности множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Последнее множество счетно. Значит, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$. Обратное неравенство следует из бесконечности множества рациональных чисел. Утверждение доказано.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Конструктивное доказательство. Пусть f — **взаимно однозначное отображение** множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ во множество $\mathbb{N}$. Для любого рационального числа x положим $F(x) = \left\{ f(m,n) \middle| x = \frac{m}{n} \right\}$. Это множество не одноэлементное, так как например $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$. Нетрудно показать, что в качестве искомого вложения $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{N}$ можно взять функцию, определенную формулой $g(x) = \min F(x)$.

Решение задачи 3.

Задача 3. Докажите, что прямое произведение конечного числа не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача 3. Доказите, что прямое произведение конечного числа не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. Индукция по числу множителей в прямом произведении.

Решение задачи 4.

Задача 4. Докажите, что прямое произведение счетного множества счетных множеств есть несчетное множество.

Задача 4. Докажите, что прямое произведение счетного множества счетных множеств есть несчетное множество.

Ответ. Доказательство полностью аналогично доказательству несчетности континуума.

Решение задачи 5.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Возьмем бесконечную последовательность различных простых чисел: $p_1 < p_2 < \ldots$. Искомое отображение $g: \ B \mapsto \mathbb{N}$ введем формулой $g(b) = p_k^{f_k(b)}$, где k — такой наименьший номер, что $b \in A_k$. Нетрудно проверить, что g является **взаимно однозначным отображением**.

Решение задачи 6.

Задача 6. Является ли множество всех конечных подмножеств счетного множества счетным множеством?

Задача 6. Является ли множество всех конечных подмножеств счетного множества счетным множеством?

Ответ. Пусть A — счетное множество, B — множество всех его конечных подмножеств. Обозначим через A_m множество всех m-элементных подмножеств множества A. Тогда $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ — объединение счетного множества счетных множеств. Значит, согласно предыдущему пункту оно счетно.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?