Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

# Билинейные и квадратичные формы

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

*Изд. 4-е, испр. и доп.*

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\ 1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$f_{11} = f\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\;1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$f_{11} = f\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (1\;1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Продолжая в том же духе, получаем

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\;1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Продолжая в том же духе, получаем

$$F_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности $2 \times 2$ формулой*

$$f(X, Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Продолжая в том же духе, получаем

$$F_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad f(X, Y) = [X]^t_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\mathbf{Б}}.$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Продолжая в том же духе, получаем

$$F_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad f\left( \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \right) =$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X, Y) = (1\ 1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Продолжая в том же духе, получаем

$$F_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad f\left( \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 1 \cdot a \cdot p + 3 \cdot a \cdot q + 2 \cdot a \cdot r + 3 \cdot b \cdot p + 9 \cdot b \cdot q + 6 \cdot b \cdot r +$$

$$+ 2 \cdot c \cdot p + 6 \cdot c \cdot q + 4 \cdot c \cdot r.$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1)\cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; f(X,Y) = [X]^t_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\mathbf{Б}}$$

Проверим, например,

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbf{Б}} =$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\ 1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ f(X,Y) = [X]^t_{\textbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\textbf{Б}}$$

Проверим, например,

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\;1)\cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ f(X,Y) = [X]^t_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\mathbf{Б}}$$

Проверим, например,

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 44.$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; f(X,Y) = [X]^t_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\mathbf{Б}}$$

Проверим, например,

$$f\left( \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\,1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\mathbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ f(X,Y) = [X]^t_{\mathbf{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\mathbf{Б}}$$

Проверим, например,

$$= (1\,1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

**Пример 1.** *Задать многочленом билинейную форму, заданную на линейном пространстве симметричных матриц размерности* $2 \times 2$ *формулой*

$$f(X,Y) = (1\ 1) \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Введем естественный базис:

$$\text{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ f(X,Y) = [X]^t_{\text{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} [Y]_{\text{Б}}$$

Проверим, например,

$$= (1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 44.$$

**Вернемся к лекции?**

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы***.

**Решение.**

$$5x^2-y^2-4z^2-6xy+xz+3yz = (x\ y\ z)\left(\phantom{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы***.

**Решение.**

$$5\mathbf{x^2} - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы.***

**Решение.**

$$5\mathbf{x^2} - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} \mathbf{5} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы****.*

**Решение.**

$$5x^2\mathbf{-y^2}-4z^2-6xy+xz+3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы****.*

**Решение.**

$$5x^2\mathbf{-y^2}-4z^2-6xy+xz+3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & & \\ & \mathbf{-1} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы***.

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 \mathbf{-4z^2} - 6xy + xz + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы***.

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 \mathbf{-4z^2} - 6xy + xz + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & \mathbf{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью **матрицы квадратичной формы**.*

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 \mathbf{-6xy} + xz + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы****.*

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 \mathbf{- 6xy} + xz + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & \mathbf{-3} & \\ \mathbf{-3} & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы.***

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + \mathbf{xz} + 3yz = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 5 & -3 & \\ -3 & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы****.*

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + \mathbf{xz} + 3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -3 & \mathbf{1/2} \\ -3 & -1 & \\ \mathbf{1/2} & & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы.***

**Решение.**

$$5x^2{-}y^2{-}4z^2{-}6xy{+}xz\mathbf{+3yz} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1/2 \\ -3 & -1 & \\ 1/2 & & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы***.

**Решение.**

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + \mathbf{3yz} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1/2 \\ -3 & -1 & \mathbf{3/2} \\ 1/2 & \mathbf{3/2} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** *Задайте квадратичную форму*

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 - 6xy + xz + 3yz$$

*с помощью* ***матрицы квадратичной формы****.*

**Решение.**

$$5x^2-y^2-4z^2-6xy+xz+3yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1/2 \\ -3 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Вернёмся к лекции?**

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\,\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\,\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 =$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$

$= 2\Bigg(\boxed{x^2 + 2xy} +$

$$(x + {\color{red}y})^2 = \boxed{x^2 + {\color{blue}2}x{\color{red}y}} + {\color{red}y}^2$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$

$$= 2\left(\boxed{x^2 + 2xy + y^2} - y^2\right) +$$

$$(x + {\color{red}y})^2 = \boxed{x^2 + {\color{blue}2}x{\color{red}y} + {\color{red}y}^2}$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(\boxed{x^2 + 2xy + y^2} - y^2\right) + 5y^2 =$

$$(x + y)^2 = \boxed{x^2 + 2xy + y^2}$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$

$$= 2(x^2 + 2xy + y^2 - y^2) + 5y^2 = 2\boxed{(x+y)^2} - 2y^2 + 5y^2$$

$$\boxed{(x+y)^2} = x^2 + 2xy + y^2$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\,(x + y)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\,(x + y)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y. \end{cases}$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$ то есть

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$ то есть $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$ то есть $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

$$\varphi(\overrightarrow{\mathbf{x}}) =$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$ то есть $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

$$\varphi(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

**Пример 3.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму*

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 5y^2 =$
$= 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 - 2y^2 + 5y^2 =$

$$= 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Положим $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$ то есть $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

$$\varphi(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

**Вернемся к лекции** или **рассмотрим еще один пример?**

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** Определим количество переменных, участвующих в «смешанных» слагаемых с ненулевыми коэффициентами.

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** Определим количество переменных, участвующих в «смешанных» слагаемых с ненулевыми коэффициентами.

Если переменных более двух, то выберем одну из них.

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$*.*

**Решение.** Определим количество переменных, участвующих в «смешанных» слагаемых с ненулевыми коэффициентами.

Если переменных более двух, то выберем одну из них.

Выделим полный квадрат путем включения в него всех слагаемых, имеющих общей выбранную переменную.

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=$$

$$(x+ay+bz)^2=x^2+2axy+2bxz+a^2y^2+2abyz+b^2z^2$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=\left(x^2+4xy-4xz\right)+y^2+z^2+4yz=$$

$$(x+ay+bz)^2=x^2+\underbrace{2axy}_{2\cdot 2xy}+\underbrace{2bxz}_{2\cdot(-2)xz}+a^2y^2+2abyz+b^2z^2$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = \left(x^2 + 4xy - 4xz\right) + y^2 + z^2 + 4yz =$$

$$= \left((x + 2y - 2z)^2 - 4y^2 - 4z^2 + 8yz\right) + y^2 + z^2 + 4yz =$$

$$(x + ay + bz)^2 = x^2 + 2axy + 2bxz + a^2y^2 + 2abyz + b^2z^2$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = \left(x^2 + 4xy - 4xz\right) + y^2 + z^2 + 4yz =$$

$$= \left((x + 2y - 2z)^2 - 4y^2 - 4z^2 + 8yz\right) + y^2 + z^2 + 4yz =$$

$$= (x + 2y - 2z)^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12yz.$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz =$

$= (x + 2y - 2z)^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12yz =$

Теперь избавимся от «смешанного слагаемого» $12yz$, выделив все слагаемые, содержащие, например, $y$, в полный квадрат:

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz =$

$= (x + 2y - 2z)^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12yz =$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz.$

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz =$

$$= (x + 2y - 2z)^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12yz = (x + 2y - 2z)^2 - 3\left(y^2 - 4yz\right) - 3z^2 =$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz =$

$$= (x + 2y - 2z)^2 - 3y^2 - 3z^2 + 12yz = (x + 2y - 2z)^2 - 3\left(y^2 - 4yz\right) - 3z^2 =$$

$$= (x + 2y - 2z)^2 - 3\left((y - 2z)^2 - 4z^2\right) - 3z^2 =$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz =$

$$= (x+2y-2z)^2-3y^2-3z^2+12yz = (x+2y-2z)^2-3\left(y^2-4yz\right)-3z^2 =$$

$$= (x+2y-2z)^2-3\left((y-2z)^2-4z^2\right)-3z^2 =$$

$$= (x+2y-2z)^2-3\,(y-2z)^2+9z^2.$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz =$

$$= (x + 2y - 2z)^2 - 3\,(y - 2z)^2 + 9z^2.$$

Таким образом,

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz =$

$$= (x + 2y - 2z)^2 - 3\,(y - 2z)^2 + 9z^2.$$

Таким образом,

$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2,$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** Таким образом,

$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2$,

где $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, \\ y' = y - 2z, \\ z' = z. \end{cases}$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** Таким образом,
$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2$,
где $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, \\ y' = y - 2z, \\ z' = z. \end{cases}$

При преобразовании методом Лагранжа обычно добиваются того, чтобы коэффициенты перед всеми слагаемыми были по модулю равны 1 или 0.

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** Таким образом,
$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2$,
где $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, \\ y' = y - 2z, \\ z' = z. \end{cases}$

Поэтому можно записать, что

$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz = x''^2 - y''^2 + z''^2$, где

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** Таким образом,
$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2$,
где $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, \\ y' = y - 2z, \\ z' = z. \end{cases}$

Поэтому можно записать, что

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz = x''^2 - y''^2 + z''^2, \text{ где } \begin{cases} x'' = x + 2y - 2z, \\ y'' = \sqrt{3}(y - 2z), \\ z'' = 3z. \end{cases}$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x''^2 - y''^2 + z''^2$,

$$\begin{cases} x'' = x + 2y - 2z, \\ y'' = \sqrt{3}(y - 2z), \\ z'' = 3z. \end{cases} \qquad \text{т.е.}$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x''^2 - y''^2 + z''^2$,

$$\begin{cases} x'' = x + 2y - 2z, \\ y'' = \sqrt{3}(y - 2z), \\ z'' = 3z. \end{cases} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = x''^2 - y''^2 + z''^2$,

$$\begin{cases} x'' = x + 2y - 2z, \\ y'' = \sqrt{3}(y - 2z), \\ z'' = 3z. \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

откуда $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

**Пример 4.** *Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму* $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz = x''^2 - y''^2 + z''^2$,

$$\begin{cases} x'' = x+2y-2z, \\ y'' = \sqrt{3}(y-2z), \\ z'' = 3z. \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

откуда $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Вернемся к лекции?

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$\mathbf{2}x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + \mathbf{4}xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + \mathbf{5}y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \mathbf{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения соответствующего линейного оператора:

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения соответствующего линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения соответствующего линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 =$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения соответствующего линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* **примера 3**

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные значения соответствующего линейного оператора равны 1 и 6.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные значения соответствующего линейного оператора равны 1 и 6.

Найдем собственные векторы $x'\overrightarrow{\mathbf{i}} + y'\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 1:

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные значения соответствующего линейного оператора равны 1 и 6.

Найдем собственные векторы $x'\overrightarrow{\mathbf{i}} + y'\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные значения соответствующего линейного оператора равны 1 и 6.

Найдем собственные векторы $x'\overrightarrow{\mathbf{i}} + y'\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

Найдем собственные векторы $x''\overrightarrow{\mathbf{i}} + y''\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 6:

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

Найдем собственные векторы $x''\overrightarrow{\mathbf{i}} + y''\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 6:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

Найдем собственные векторы $x''\overrightarrow{\mathbf{i}} + y''\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 6:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

Полученные векторы взаимно перпендикулярны. Для того, чтобы осуществить переход от ОНБ $\left\{\overrightarrow{\mathbf{i}},\ \overrightarrow{\mathbf{j}}\right\}$ к ОНБ из собственных векторов оператора с данной матрицей, остается нормировать полученные собственные векторы.

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-\mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

$$T = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-\mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & \\ 1/\sqrt{5} & \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\,\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\,\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\mathbf{1}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & \\ 1/\sqrt{5} & \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\mathbf{1}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & \\ 1/\sqrt{5} & \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 1 отвечают векторы вида $C\left(-2\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$, собственному значению 6 отвечают векторы вида $C\left(\mathbf{1}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$.

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Проведем замену переменных (перейдем к другому ОНБ):

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (u\ v)\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (u\ v)\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= (u\ v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

**Пример 5.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 3***

$$\varphi(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2) = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

**Решение.**

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (u\ v)\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= (u\ v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u^2 + 6v^2.$$

**Вернемся к лекции** или рассмотрим **другой пример?**

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из **примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 =$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера*** *4* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3).$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 3 соответствует вектор

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 3 соответствует вектор
$C\,(e_1 + e_2) + D\,(e_2 + e_3)$,

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера*** *4* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 3 соответствует вектор
$C\,(e_1 + e_2) + D\,(e_2 + e_3)$,
а собственному значению $(-3)$ — вектор

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Собственному значению 3 соответствует вектор
$C\,(e_1 + e_2) + D\,(e_2 + e_3)$,
а собственному значению $(-3)$ — вектор $E\,(e_1 - e_2 + e_3)$.

Базисные векторы, отвечающие собственному значению $(-3)$, необходимо ортогонализовать, например, **методом Грама-Шмидта**.

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера*** *4* $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Собственное значение 3: $(e_1 + e_2)$ и $(e_1 - e_2 - 2e_3)$,
собственное значение $(-3)$: $(e_1 - e_2 + e_3)$.

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Собственное значение 3: $\quad (e_1 + e_2) \quad$ и $\quad (e_1 - e_2 - 2e_3)$,
собственное значение $(-3)$: $\quad (e_1 - e_2 + e_3)$.

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$T=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$$

$$=(u\ v\ w)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$.

**Решение.**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (u\ v\ w)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 3u^2 + 3v^2 - 3w^2.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** *Ортогональным преобразованием приведите к каноническому виду квадратичную форму из* ***примера 4*** $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$.

**Решение.**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$$

$$=(u\ v\ w)\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=3u^2+3v^2-3w^2.$$

**Вернемся к лекции?**

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.**

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Можно воспользоваться представлением, **полученным ранее** при решении **примера 3**:

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Можно воспользоваться представлением, **полученным ранее** при решении **примера 3**:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Можно воспользоваться представлением, **полученным ранее** при решении **примера 3**:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x + y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Сумма квадратов неотрицательна и обращается в ноль только при нулевых значениях слагаемых.

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Можно воспользоваться представлением, **полученным ранее** при решении **примера 3**:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = 2\left(x+y\right)^2 + 3y^2 = 2x'^2 + 3y'^2.$$

Сумма квадратов неотрицательна и обращается в ноль только при нулевых значениях слагаемых.

Другой вариант решения связан с применением **критерия Сильвестра**.

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1+y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right)=2x^2+4xy+5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Главные миноры:

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Главные миноры: $A_1 = \det(2) = 2$

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \;\; y)\begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Главные миноры: $A_1 = \det(2) = 2 > 0,$

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \ \ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Главные миноры: $A_1 = \det(2) = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \;\; y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Главные миноры: $A_1 = \det(2) = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0.$

**Пример 7.** *Доказать, что квадратичная форма*

$$\varphi\left(x\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y\overrightarrow{\mathbf{e}}_2\right) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

*является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.** $2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \;\; y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Главные миноры: $A_1 = \det(2) = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0.$

Получили, что все главные миноры квадратичной формы положительны. Следовательно, квадратичная форма является положительно определенной.

**Вернемся к лекции** или рассмотрим **следующий пример?**

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.**

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Можно использовать **полученное ранее равенство**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x + 2y - 2z)^2 - 3(y - 2z)^2 + 9z^2.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Можно использовать **полученное ранее равенство**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x + 2y - 2z)^2 - 3\,(y - 2z)^2 + 9z^2.$$

Выражение в правой части последнего равенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$
*не является положительно определенной.*

**Решение.** Можно использовать **полученное ранее равенство**
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x + 2y - 2z)^2 - 3(y - 2z)^2 + 9z^2.$$
Выражение в правой части последнего равенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Например, при $(x;\ y;\ z) = (1;\ 0;\ 0)$ значение квадратичной формы положительно.

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Можно использовать **полученное ранее равенство**

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz = (x + 2y - 2z)^2 - 3\,(y - 2z)^2 + 9z^2.$$

Выражение в правой части последнего равенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Например, при $(x;\ y;\ z) = (1;\ 0;\ 0)$ значение квадратичной формы положительно.

При $(x;\ y;\ z) = (-2;\ 1;\ 0)$ — отрицательно.

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Можно использовать **полученное ранее равенство**

$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz=(x+2y-2z)^2-3\,(y-2z)^2+9z^2.$$

Выражение в правой части последнего равенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Например, при $(x;\ y;\ z)=(1;\ 0;\ 0)$ значение квадратичной формы положительно.

При $(x;\ y;\ z)=(-2;\ 1;\ 0)$ — отрицательно.

Рассмотрим еще один вариант решения.

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$
*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы
$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + \boxed{4} \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$
имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \\ \boxed{2} & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 2 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$
*не является положительно определенной.*

**Решение.** Для доказательства утверждения используем **критерий Сильвестра.**

Матрица коэффициентов квадратичной формы
$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz$$
имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*
$$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4xz$$
*не является положительно определенной.*

**Решение.** $1\cdot x^2+1\cdot y^2+1\cdot z^2+4\cdot xy+4\cdot yz-4\cdot xz=$
$=(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Главные миноры:

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$
*не является положительно определенной.*

**Решение.** $1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz =$
$$= (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Главные миноры: $A_1 = \det(1) = 1 > 0,$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** $1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz =$
$= (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Главные миноры: $A_1 = \det(1) = 1 > 0$, $A_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** $1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz =$

$= (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$ Главные миноры: $A_1 = \det(1) = 1 > 0,$

$$A_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

$$A_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27 < 0.$$

**Пример 8.** *Докажите, что квадратичная форма*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4xz$$

*не является положительно определенной.*

**Решение.** $1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + 4 \cdot xy + 4 \cdot yz - 4 \cdot xz =$

$= (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Главные миноры: $A_1 = \det(1) = 1 > 0$, $A_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$.

$$A_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27 < 0.$$

По **критерию Сильвестра** квадратичная форма не является положительно определенной.

**Вернемся к лекции?**

# Задачи для самостоятельного решения

**Задача I.1.** (Ответ приведен на стр.160.) На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \left\{x^0;\ x;\ x^2\right\}$, $\mathbf{Б}' = \left\{x-1;\ x+1;\ x^2-1\right\}$.

**Задача II.2.** (Ответ приведен на стр.175.) Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму
$x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.

**Задача II.3.** (Ответ приведен на стр.179.) Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму
$x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz$.

**Задача II.4.** (Ответ приведен на стр.183.) Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму
$4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz.$

**Задача II.5.** (Ответ приведен на стр.187.) Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму
$3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz.$

**Задача III.6.** (Ответ приведен на стр.192.) С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Задача III.7.** (Ответ приведен на стр.216.) С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Задача III.8.** (Ответ приведен на стр.230.) С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \quad \text{(III.8)}$$

# Ответы и решения

# Решение задачи 1.

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\,(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Сначала найдем искомую билинейную форму по **лемме о матрице квадратичной формы**. Ясно, что данная **квадратичная форма** порождается билинейной формой $f\,(p(x), q(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx$. Имеем

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\,(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.**

$$g(p(x), q(x)) = \frac{1}{2}\left(f\,(p(x), q(x)) + f\,(q(x), p(x))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx + \int\limits_0^1 q(x)\,p(1-x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx - \int\limits_1^0 q(1-t)\,p(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx + \int\limits_0^1 q(1-x)\,p(x)\,dx\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 p(x)\,q(1-x)\,dx = f\,(p(x), q(x)).$$

В данном случае исходная билинейная форма оказалась симметричной. Найдем матрицу этой билинейной формы (а, значит, и квадратичной формы).

$$F_{11} = f\left(x^0, x^0\right) = \int\limits_0^1 x^0 \left(1 - x\right)^0 dx = 1,$$

$$F_{12} = F_{21} = f\left(x, x^0\right) = \int\limits_0^1 x \left(1 - x\right)^0 dx = \frac{1}{2},$$

$$F_{13} = F_{31} = f\left(x^2, x^0\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(1 - x\right)^0 dx = \frac{1}{3},$$

$$F_{22} = f\left(x, x\right) = \int\limits_0^1 x \left(1 - x\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$F_{23} = F_{32} = f\left(x^2, x\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(1 - x\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$F_{33} = f\left(x^2, x^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \left(1 - x\right)^2 dx = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

Получили $\mathbb{F}_{\textbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix}$. Можно было найти матрицу квадратичной формы, представив ее в виде многочлена от координат вектора в базисе **Б**:

$$\Phi(a,b,c) = \varphi\left(ax^0 + bx + cx^2\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(ax^0 + bx + cx^2\right)\,\left(a(1-x)^0 + b(1-x) + c(1-x)^2\right)\,dx =$$

$$= a^2 + \frac{ab}{2} + \frac{ac}{3} + \frac{ab}{2} + b^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + bc\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \frac{ac}{3} + bc\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + c^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) =$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{30} - 2\cdot\frac{ab}{2} + 2\cdot\frac{ac}{3} + 2\cdot\frac{bc}{12} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Матрицу в базисе $\mathbf{Б}'$ найдем по определению и с помощью **теоремы о матрице билинейной формы в разных базисах**.

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = f\left(x-1, x-1\right) = \int\limits_0^1 (x-1)((1-x)-1)\, dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\,(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6},$$

$$F'_{12} = F'_{21} = f\,(x+1, x-1) = \int\limits_0^1 (x+1)((1-x)-1)\,dx = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6},$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6},$$

$$F'_{13} = F'_{31} = f\left(x^2-1, x-1\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\left((1-x)-1\right) dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\,(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = f\,(x+1, x+1) = \int\limits_0^1 (x+1)((1-x)+1)\,dx = \int\limits_0^1 \left(2 + x - x^2\right)\,dx =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6},$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\,(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)\,p(1-x)\,dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6},$$

$$F'_{23} = F'_{32} = f\left(x^2-1, x+1\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\,((1-x)+1)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^2 - x^3 - 2 + x\right)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{13}{12},$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\quad \mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6}, \quad F'_{23} = F'_{32} = -\frac{13}{12},$$

$$F'_{33} = f\left(x^2-1, x^2-1\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\left((1-x)^2-1\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2-1\right)\left(x^2-2x\right) dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{30}.$$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx.$ Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6}, \quad F'_{23} = F'_{32} = -\frac{13}{12}, \quad F'_{33} = \frac{11}{30}.$$

Получили $\mathbb{F}_{\mathbf{Б}'} =$

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах $\mathbf{Б} = \{x^0;\ x;\ x^2\}$, $\mathbf{Б}' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисления «по честному».

$$F'_{11} = \frac{1}{6}, \quad F'_{12} = F'_{21} = -\frac{5}{6}, \quad F'_{13} = F'_{31} = \frac{1}{4},$$

$$F'_{22} = \frac{13}{6}, \quad F'_{23} = F'_{32} = -\frac{13}{12}, \quad F'_{33} = \frac{11}{30}.$$

Получили $\mathbb{F}_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & 1/4 \\ -5/6 & 13/6 & -13/12 \\ 1/4 & -13/12 & 11/30 \end{pmatrix}$.

**Задача 1.** На **линейном пространстве** многочленов степени не выше 2 **квадратичная форма** $F$ определена формулой: $\varphi\left(p(x)\right) = \int\limits_0^1 p(x)\, p(1-x)\, dx$. Найдите симметричную **билинейную форму**, порождающую данную квадратичную форму, матрицу этой квадратичной формы в базисах **Б** $= \{x^0;\ x;\ x^2\}$, **Б**$' = \{x-1;\ x+1;\ x^2-1\}$.

**Ответ.** Вычисление по **формуле** с помощью **матрицы перехода** дает тот же результат:

$$\mathbb{F}_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \mathbb{F}_{\mathbf{Б}'} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & 1/4 \\ -5/6 & 13/6 & -13/12 \\ 1/4 & -13/12 & 11/30 \end{pmatrix}.$$

Уря-я-я-я-я!!!!

# Решение задачи 2.

**Задача 2.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.

**Задача 2.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.

**Ответ.** $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz =$

**Задача 2.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.

**Ответ.** $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz = (x - 3y + z)^2 + y^2 + 4yz + 3z^2 =$

**Задача 2.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.

**Ответ.** $x^2 + 10y^2 + 4z^2 - 6xy + 2xz - 2yz = (x - 3y + z)^2 + y^2 + 4yz + 3z^2 = = (x - 3y + z)^2 + (y + 2z)^2 - z^2$.

# Решение задачи 3.

**Задача 3.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz$.

**Задача 3.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz$.

**Ответ.** $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz =$

**Задача 3.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz$.

**Ответ.** $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz = (x + 2y - 2z)^2 - 4y^2 - 4yz - 10z^2 =$

**Задача 3.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz$.

**Ответ.** $x^2 - 6z^2 + 4xy - 4xz - 12yz = (x + 2y - 2z)^2 - 4y^2 - 4yz - 10z^2 =$
$= (x + 2y - 2z)^2 - (2y + z)^2 - (3z)^2$.

# Решение задачи 4.

**Задача 4.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz$.

**Задача 4.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz$.

**Ответ.** $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz =$

**Задача 4.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz$.

**Ответ.** $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz = (2x - y + 3z)^2 - 9y^2 + 12yz + 12z^2 =$

**Задача 4.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz$.

**Ответ.** $4x^2 - 8y^2 + 21z^2 - 4xy + 6yz + 12xz = (2x - y + 3z)^2 - 9y^2 + 12yz + 12z^2 =$
$= (2x - y + 3z)^2 - (3y - 2z)^2 + (4z)^2$.

# Решение задачи 5.

**Задача 5.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz$.

**Задача 5.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz$.

**Ответ.** $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz =$

**Задача 5.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz$.

**Ответ.** $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz = \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2\sqrt{3}z\right)^2 + \frac{1}{4}y^2 - 4yz - 16z^2 =$

**Задача 5.** Методом Лагранжа приведите к каноническому виду квадратичную форму $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz$.

**Ответ.** $3x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz - 12xz = \left(\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 2\sqrt{3}z\right)^2 + \dfrac{1}{4}y^2 - 4yz - 16z^2 =$

$$= \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2\sqrt{3}z\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - 4z\right)^2 - (4\sqrt{2}z)^2.$$

**Задача 5.**

# Решение задачи 6.

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\underbrace{5x^2 - 30y^2 - 120xy}_{\substack{\text{квадратичная}\\ \text{форма}}} \quad \underbrace{-250x}_{\substack{\text{линейная}\\ \text{форма}}} \quad +121 = 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

Найдем **собственные векторы** и **собственные значения** линейного оператора с матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix}$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению $-75$:

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению $-75$:

$$\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda+75)(\lambda-50).$$

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению $-75$:

$$\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda+75)(\lambda-50).$$

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению $-75$:

$$\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ C \neq 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda+75)(\lambda-50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\gamma\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} =$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

**Найдем с помощью матрицы** оператора **собственные векторы** $\gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, отвечающие собственному значению 50:

$$\begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ C \neq 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda+75)(\lambda-50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, а орт, отвечающий собственному значению 50 — $-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Следовательно, закон преобразования координат (основанный на **матрице перехода** и **теореме о координатах вектора в разных базисах**) имеет вид

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda+75)(\lambda-50).$$

Значит, один из ортов, являющихся собственным вектором, отвечающим $(-75)$, имеет вид $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$, а орт, отвечающий собственному значению 50 — $-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Следовательно, закон преобразования координат (основанный на **матрице перехода** и **теореме о координатах вектора в разных базисах**) имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y', \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+121=0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$-75x'^2 + 50y'^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0,$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$-75x'^2 + 50y'^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0,$$

$$-75\left(x' + 1\right)^2 + 50\left(y' + 2\right)^2 + 121 + 75 - 200 = 0,$$

**Задача 6.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 121 = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -250 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 121 = 0.$$

$$-75x'^2 + 50y'^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0,$$

$$-75\left(x' + 1\right)^2 + 50\left(y' + 2\right)^2 + 121 + 75 - 200 = 0,$$

$$-75\left(x' + 1\right)^2 + 50\left(y' + 2\right)^2 - 4 = 0.$$

# Решение задачи 7.

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\underbrace{10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz}_{\substack{\text{квадратичная}\\ \text{форма}}} \underbrace{-88x + 16y - 44z}_{\substack{\text{линейная}\\ \text{форма}}} +73 = 0.$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 324\lambda - 2916 =$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 324\lambda - 2916 = -(\lambda - 9)(\lambda - 18)(\lambda + 18).$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9,

$$\begin{pmatrix} 2/3 & & \\ 1/3 & & \\ -2/3 & & \end{pmatrix}$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** $9$, $18$ и

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & \\ 1/3 & -2/3 & \\ -2/3 & 1/3 & \end{pmatrix}$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** 9, 18 и $(-18)$,

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** $9$, $18$ и $(-18)$, получаем с помощью **формулы преобразования координат**

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

Найдя **с помощью матрицы** оператора **собственные векторы**, отвечающие **собственным значениям** $9$, $18$ и $(-18)$, получаем с помощью **формулы преобразования координат**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ -10 & 1 & -14 \\ -2 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$9p^2 + 18q^2 - 18r^2 - 24p - 84q - 48r + 73 = 0$$

**Задача 7.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$10x^2 + y^2 - 2z^2 - 20xy - 8xz - 28yz - 88x + 16y - 44z + 73 = 0.$$

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ -10 & 1 & -14 \\ -2 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -88 & 16 & -44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + 73 = 0,$$

$$9p^2 + 18q^2 - 18r^2 - 24p - 84q - 48r + 73 = 0$$

$$9\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + 18\left(q - \frac{7}{3}\right)^2 - 18\left(r + \frac{4}{3}\right)^2 - 9 = 0.$$

# Решение задачи 8.

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** Выделяем в уравнении (III.8) квадратичную и линейную части:

$$\underbrace{7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz} + \underbrace{30x + 24y - 12z} - 13 = 0.$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad (\text{III.8})$$

**Ответ.** В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 =$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad (III.8)$$

**Ответ.** В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 = (\lambda - 9)(\lambda + 9)^2 .$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** В матричном виде это уравнение можно представить в виде (отождествляя одноэлементную матрицу с ее единственным элементом):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0. \qquad (1)$$

Найдем ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей, равной матрице квадратичной формы. Для этого сначала найдем собственные значения, т.е. корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & -8-\lambda & 1 \\ -4 & 1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 = (\lambda - 9)(\lambda + 9)^2 .$$

Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \tag{III.8}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$,

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \tag{III.8}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \tag{III.8}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \tag{III.8}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 0$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad (\mathrm{III}.8)$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}},\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}};\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)} =$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}; -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)} = -\frac{4}{2} =$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}; -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)} = -\frac{4}{2} = -2$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} - 2\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) \quad \perp \quad \left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}},\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \alpha\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}};\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)}{\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}},\ -\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right)} = -\frac{4}{2} = -2$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \tag{III.8}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:

$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}} - 2\left(-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad (\text{III.8})$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
Ортогонализируя последнюю систему векторов **методом Грама-Шмидта**, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $(-9)$:
$-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$. После ортогонализации базиса получаем **матрицу перехода**. Эта матрица перехода позволяет использовать **закон преобразования координат**, т.е. закон вида

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.
Ортогонализируя последнюю систему векторов, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $-9$: $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$. После ортогонализации базиса получаем **матрицу перехода**. Эта матрица перехода позволяет использовать **закон преобразования координат**, т.е. закон вида $\left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б'}} \left[\overrightarrow{\mathbf{r}}\right]_{\mathbf{Б'}}$. В данном случае получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Подставляя **выражение (2)** в **формулу (1)**, получаем

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение

$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0.$ (III.8)

**Ответ.** Собственному значению 9 соответствует вектор $-4\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, а собственному значению $-9$ — векторы $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{\mathbf{i}} + 4\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Ортогонализируя последнюю систему векторов, получаем ортогональную систему собственных векторов, отвечающих собственному значению $-9$: $-\overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$. После ортогонализации базиса получаем **матрицу перехода**. Эта матрица перехода позволяет использовать **закон преобразования координат**, т.е. закон вида $[\overrightarrow{\mathbf{r}}]_{\text{Б}} = T_{\text{Б} \to \text{Б'}}[\overrightarrow{\mathbf{r}}]_{\text{Б'}}$. В данном случае получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \tag{2}$$

Подставляя **выражение (2)** в **формулу (1)**, получаем

$$9p^2 - 9q^2 - 9r^2 - 18\sqrt{2}p + 18q - 18\sqrt{2}r - 13 = 0. \tag{3}$$

**Задача 8.** С помощью **ортогонального преобразования** и параллельного переноса привести к **каноническому** виду уравнение
$7x^2 - 8y^2 - 8z^2 - 8xy - 8xz + 2yz + 30x + 24y - 12z - 13 = 0.$ (III.8)

**Ответ.** Подставляя **выражение (2)** в **формулу (1)**, получаем

$$9p^2 - 9q^2 - 9r^2 - 18\sqrt{2}p + 18q - 18\sqrt{2}r - 13 = 0. \tag{3}$$

Для получения окончательного ответа осталось выделить полные квадраты при переменных $p$, $q$ и $r$:

$$9\left(p - \sqrt{2}\right)^2 - 9\left(q - 1\right)^2 - 9\left(r + \sqrt{2}\right)^2 - 4 = 0. \tag{4}$$

Таким образом, с помощью преобразования координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + \sqrt{2} \\ v + 1 \\ w - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

уравнение (III.8), стр.157 преобразуется к виду

$$9u^2 - 9v^2 - 9w^2 - 4 = 0.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?