Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Алгебра комплексных чисел

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Алгебра комплексных чисел

История формирования понятия комплексного числа интересна с исторической и психологической точек зрения. Но мы рассмотрим построение алгебры комплексных чисел как результат исследования.

Один из механизмов выбора направления исследования основан на *системе исследовательских стратегий*.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций позволяет, например, выделить специальные типы комплексных чисел: комплексные числа единичной длины (единичная окружность), корни степени n из 1.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия поиска аналогии позволяет, в частности, выбрать объекты, которые введением дополнительных операций превращаются в одну из моделей алгебры комплексных чисел.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов в сочетании с другими стратегиями обеспечивает введение операций и отношений на множестве комплексных чисел и переход от изучения отдельных комплексных чисел к подмножествам: единичной окружности, парам взаимно обратных и комплексно-сопряженных чисел и др.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия предвкушения, как обычно, позволяет строить гипотезы, обосновывать их или опровергать, осуществлять поиск решения задач и др.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия построения модели является источником таких направлений исследования как выделение стандартных способов задания комплексных чисел и их преобразований, моделированию операций и отношений и др.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия обогащения модели приводит ко введению таких понятий как комплексно-сопряженные числа, умножение комплексных чисел.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

В данной работе примером применения стратегии смены ролей и приоритетов является введение комплексного числа как записи корня многочлена

I. Исследовательские стратегии

1) стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций;
2) стратегия поиска аналогии;
3) стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов;
4) стратегия предвкушения;
5) стратегия построения модели;
6) стратегия обогащения модели;
7) стратегия смены ролей и приоритетов.

Стратегия смены ролей и приоритетов применяется при введении операций, введении понятия «уравнение» и др.

В данной работе примером применения стратегии смены ролей и приоритетов является введение комплексного числа как записи корня многочлена *в виде многочлена от* i.

II. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**. Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

II. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**. Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

II. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**. Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

II. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**. Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

Задача нахождения корней многочленов возникает в ходе решения уравнений.

II. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**. Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

Задача нахождения корней многочленов возникает в ходе решения уравнений. Но некоторые многочлены корней (действительных) не имеют, значит, мы не можем решить целый класс уравнений.

ЧТО ДЕЛАТЬ???

II. Комплексные числа и многочлены

Применим **стратегию поиска аналогии**.

II. Комплексные числа и многочлены

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа.

II. Комплексные числа и многочлены

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа.

$x + a = 0, \quad a > 0$ (вводим отрицательные числа)

II. Комплексные числа и многочлены

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа.

$x + a = 0, \quad a > 0$ (вводим отрицательные числа)

$ax = b, \quad a \neq 0$ (вводим рациональные числа)

II. Комплексные числа и многочлены

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа.

$x + a = 0, \quad a > 0$ (вводим отрицательные числа)

$ax = b, \quad a \neq 0$ (вводим рациональные числа)

$x^2 = a, \quad a > 0$ (вводим иррациональные числа)

II. Комплексные числа и многочлены

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа.

$x + a = 0, \quad a > 0$ (вводим отрицательные числа)

$ax = b, \quad a \neq 0$ (вводим рациональные числа)

$x^2 = a, \quad a > 0$ (вводим иррациональные числа)

$x^2 = a, \quad a < 0$ (вводим ??? числа)

Используя **стратегию поиска аналогии** приходим к необходимости расширения понятия «число».

II.1. Промежуточные выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

II.1. Промежуточные выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

II.1. Промежуточные выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

II.2. Комплексное число

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

II.2. Комплексное число

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

II.2. Комплексное число

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

II.2. Комплексное число

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n.$$

II.2. Комплексное число

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n$$

Какую степень многочлена выбрать?

II.2. Комплексное число

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n$$

Какую степень многочлена выбрать?

Применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

II.2. Комплексное число

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n$$

Какую степень многочлена выбрать?

Применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени 1.

II.2. Комплексное число

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n$$

Какую степень многочлена выбрать?

Применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени 1.

Поэтому «новые числа» будут иметь вид

II.2. Комплексное число

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n$$

Какую степень многочлена выбрать?

Применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени 1.

Поэтому «новые числа» будут иметь вид $a + bi$.

II.3. В каких направлениях продолжить исследование?

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например от i (в радиоэлектронике — от j).

$$a + bi + ci^2 + \ldots + di^n$$

Какую степень многочлена выбрать?

Применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени 1.

Поэтому «новые числа» будут иметь вид $a + bi$.

В каких направлениях рационально продолжить исследование?

II.3. В каких направлениях продолжить исследование?

Как определить равенство «новых чисел»?

II.3. В каких направлениях продолжить исследование?

Как определить равенство «новых чисел»?

Какие отношения ввести на множестве «новых чисел»?

II.3. В каких направлениях продолжить исследование?

Как определить равенство «новых чисел»?

Какие отношения ввести на множестве «новых чисел»?

Как определить операции «сложение» и «умножение»?

II.3. В каких направлениях продолжить исследование?

Как определить равенство «новых чисел»?

Какие отношения ввести на множестве «новых чисел»?

Как определить операции «сложение» и «умножение»?

Какие еще операции следует ввести?

II.4. Равенство комплексных чисел

Как определить равенство «новых чисел»?

Равенство многочленов выглядит вполне многообещающе:

II.4. Равенство комплексных чисел

Как определить равенство «новых чисел»?

Равенство многочленов выглядит вполне многообещающе:

$$a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

II.4. Равенство комплексных чисел

Как определить равенство «новых чисел»?

Равенство многочленов выглядит вполне многообещающе:

$$a + bi = c + di \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

Этой формулой мы свели равенство «новых чисел» к равенству действительных чисел.

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть **обратный элемент**,

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть **обратный элемент**,

есть нулевой элемент (**нейтральный** по сложению).

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть **обратный элемент**,

есть нулевой элемент (**нейтральный** по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть **обратный элемент**,

есть нулевой элемент (**нейтральный** по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

$$(a + bi) + (c + di) =$$

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть **обратный элемент**,

есть нулевой элемент (**нейтральный** по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) +$$

II.5. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть **обратный элемент**,

есть нулевой элемент (**нейтральный** по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (bc + ad)i + bdi^2.$$

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

$$(a+bi)(c+di) = ac + (bc+ad)i + bdi^2.$$

ЧТО ДЕЛАТЬ?

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

$$(a+bi)(c+di) = ac + (bc+ad)i + bdi^2.$$

ЧТО ДЕЛАТЬ?

Достаточно дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a+bi$.

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a+bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов x^2+bx+c «самый простой»?

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это $x^2 + 1$.

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это $x^2 + 1$.

Значит, положим $i^2 + 1 = 0$.

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это $x^2 + 1$.

Значит, положим $i^2 + 1 = 0$.

Значит, получили правило: $\boxed{i^2 = -1}$.

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Получили правило: $\boxed{i^2 = -1}$.

Отсюда следует правило умножения:

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Получили правило: $\boxed{i^2 = -1}$.

Отсюда следует правило умножения:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Рассмотреть пример?

II.6. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Получили правило: $\boxed{i^2 = -1}$.

Отсюда следует правило умножения:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Введем вторичные операции: вычитание и деление.

II.7. Вычитание и деление

Получили правило: $\boxed{i^2 = -1}$.

Отсюда следует правило умножения:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Введем вторичные операции: вычитание и деление.

Вычитание многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

II.7. Вычитание и деление

Получили правило: $\boxed{i^2 = -1}$.

Отсюда следует правило умножения:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Введем вторичные операции: вычитание и деление.

Вычитание многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Как быть с делением?

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

$$\frac{a+bi}{c+di} =$$

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

$$\frac{a+bi}{c+di} =$$

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di}=$$

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$$

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

II.7. Вычитание и деление

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

II.8. Деление: анализ корректности

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

II.8. Деление: анализ корректности

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

II.8. Деление: анализ корректности

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам следует представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

II.9. Комплексное сопряжение

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам следует представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

Естественно ее назвать ***комплексным сопряжением***:

II.9. Комплексное сопряжение

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам следует представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

Естественно ее назвать ***комплексным сопряжением***:

$$\overline{a+bi} =$$

II.9. Комплексное сопряжение

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам следует представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

Естественно ее назвать ***комплексным сопряжением***:

$$\overline{a+bi} = a - bi.$$

II.9. Комплексное сопряжение

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Когда возникала ситуация с «неприятностями в знаменателе»?

Когда надо избавиться от иррациональности в знаменателе.

Поэтому

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам следует представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

Естественно ее назвать ***комплексным сопряжением***:

$$\overline{a+bi} = a - bi.$$

Рассмотрим пример?

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$z + \overline{z} =$

$z \cdot \overline{z} =$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) =$

$z \cdot \overline{z} =$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a =$

$z \cdot \overline{z} =$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R};$

$z \cdot \overline{z} =$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) =$$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 =$$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R};$

$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$

2. **Комплексное сопряжение** суммы слагаемых равно сумме комплексно сопряженных слагаемых:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$

II.10. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R}$;

$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$.

2. **Комплексное сопряжение** суммы слагаемых равно сумме комплексно сопряженных слагаемых:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

3. **Комлексное сопряжение** произведения равно произведению комплексно сопряженных сомножителей:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

II.11. Итоговые формулы

$$i^2 = -1,$$

$$a + bi = c + di \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = c, \\ b = d, \end{cases}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\overline{a + bi} = a - bi, \quad (a + bi) \cdot \overline{(a + bi)} = a^2 + b^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}.$$

Главная потеря: исчезли привычные отношения «меньше», «больше».

III. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

III. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

III. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** минимизируем размерность.

III. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** минимизируем размерность.

Одномерный случай — это числовая ось. Ничего нового...

III. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

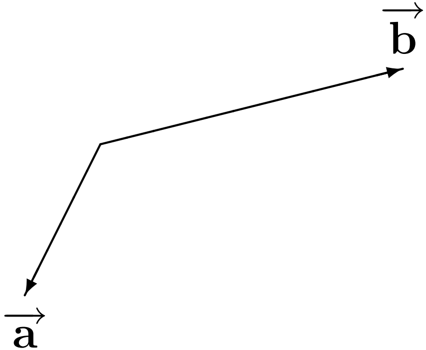
В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** минимизируем размерность.

Одномерный случай — это числовая ось. Ничего нового...

Поэтому рассмотрим *плоскость* геометрических векторов.

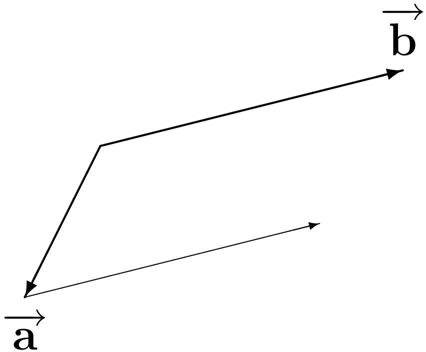
III.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника



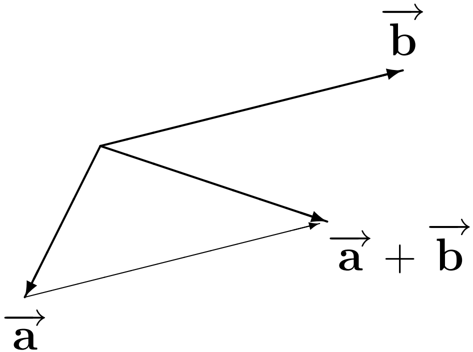
III.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника



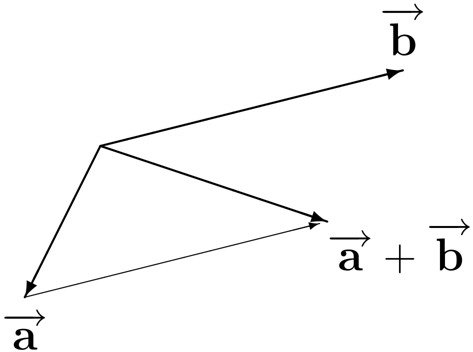
III.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

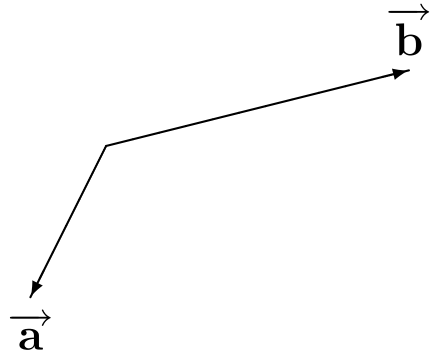
Сложение проводится или по правилу треугольника



III.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

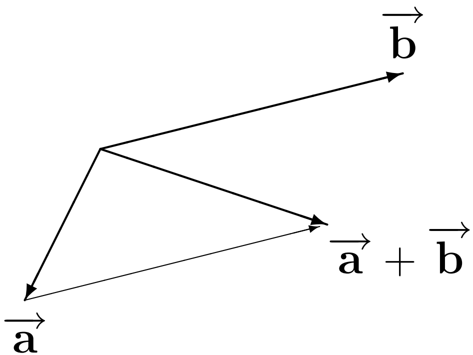
Сложение проводится или по правилу треугольника, или по правилу параллелограмма:

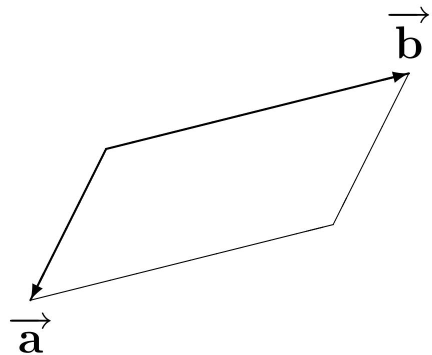




III.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

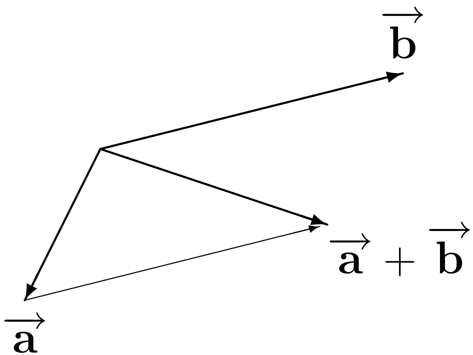
Сложение проводится или по правилу треугольника, или по правилу параллелограмма:

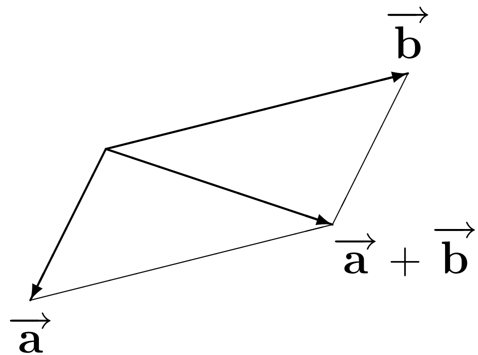




III.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника, или по правилу параллелограмма:





III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется...

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ естественно считать равной

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ естественно считать равной произведению их длин:

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ естественно считать равной произведению их длин:

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ естественно считать равной произведению их длин:

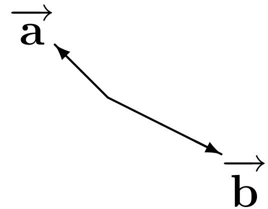
$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

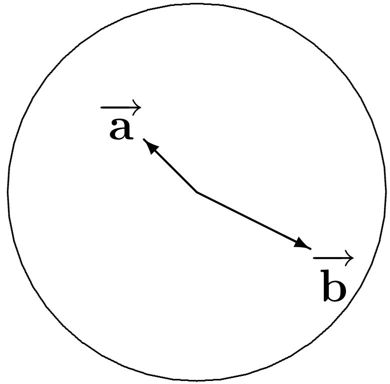
КАК ЗАДАТЬ
НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

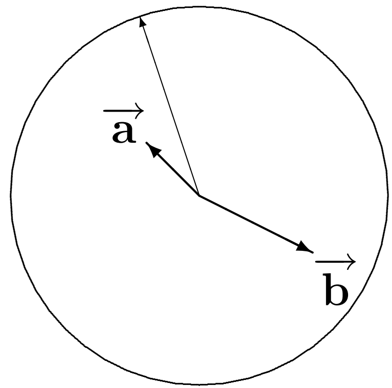
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

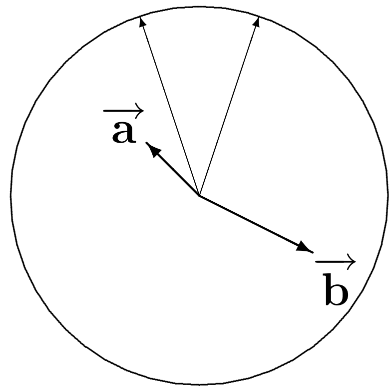
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

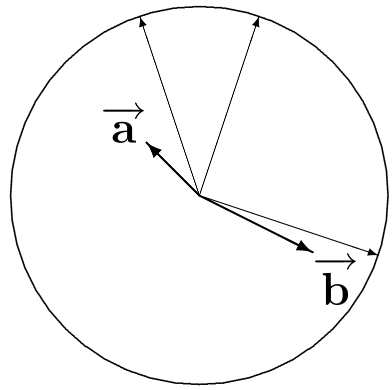
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

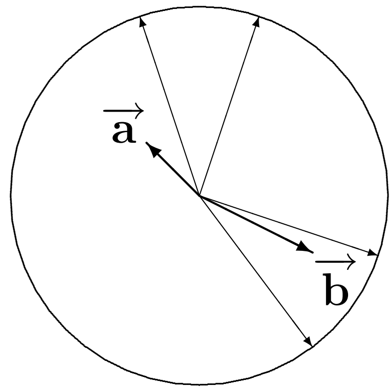
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

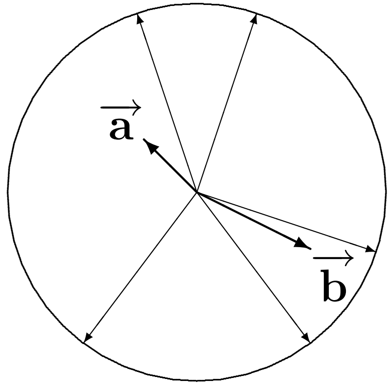
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

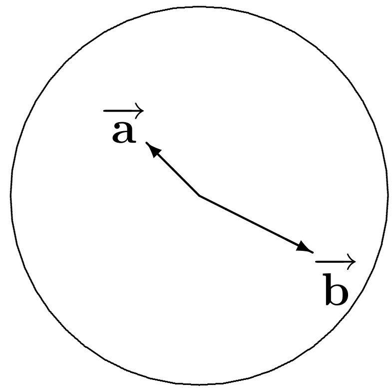
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ
НАПРАВЛЕНИЕ?

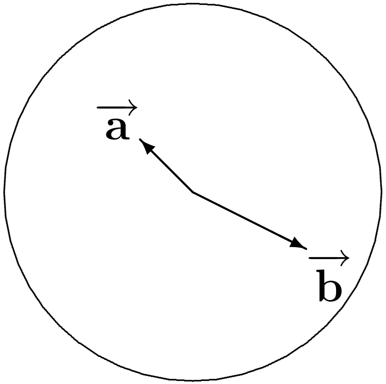


Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



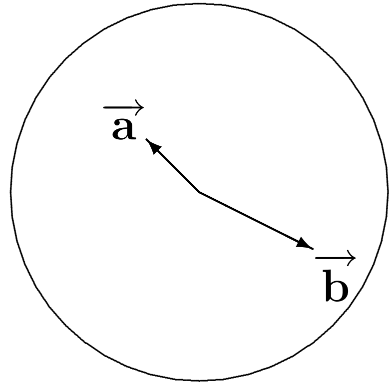
Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

В качестве такого объекта естественно взять вектор.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

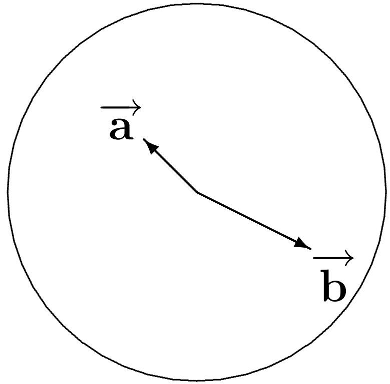
В качестве такого объекта естественно взять вектор.

Но его длина нам не важна!

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



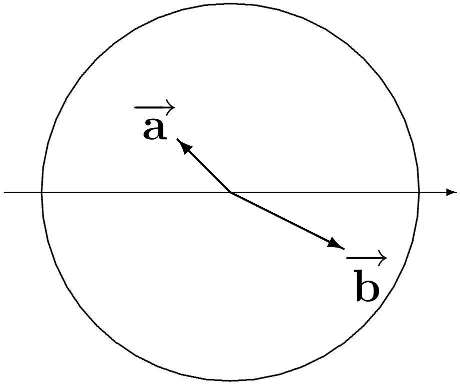
Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

Поэтому в качестве «стационарного» объекта возьмем **ось**.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ
НАПРАВЛЕНИЕ?

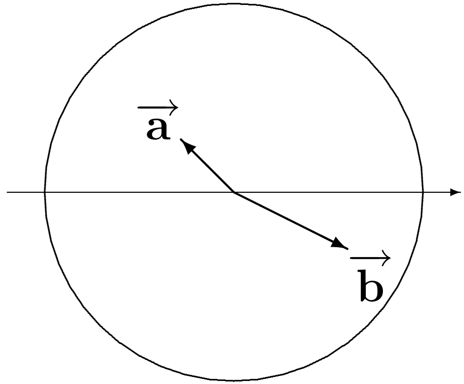


Эта ось называется **полярной осью**.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ
НАПРАВЛЕНИЕ?

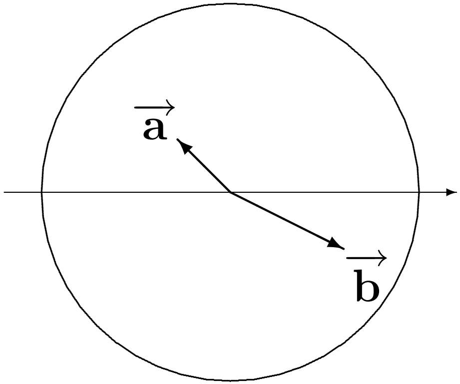


Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



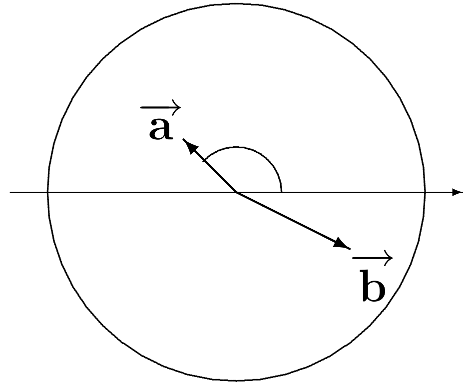
Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

Величина (ориентированного) угла, образуемого вектором с полярной осью, называется **аргументом**.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

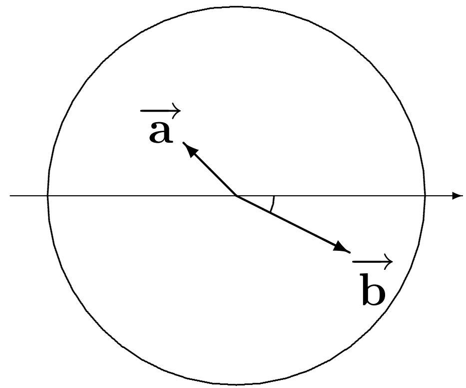
Величина (ориентированного) угла, образуемого вектором с полярной осью, называется **аргументом**.

Для $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ изображенный аргумент положителен.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

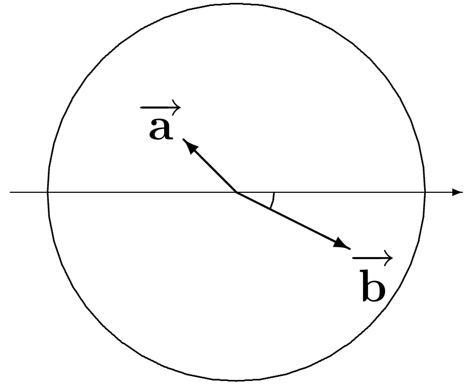
Величина (ориентированного) угла, образуемого вектором с полярной осью, называется **аргументом**.

Для $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ изображенный аргумент отрицателен.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?

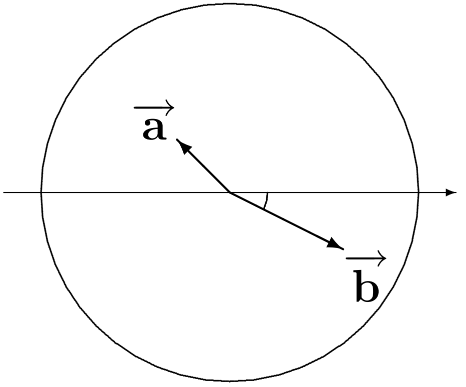


Для выбора аргумента произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



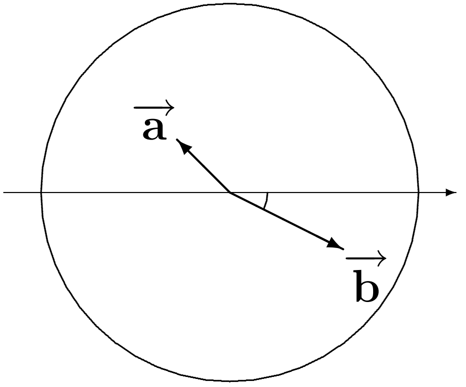
Для выбора аргумента произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

В качестве аргумента произведения естественно взять либо произведение, либо сумму аргументов сомножителей.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?



Для выбора аргумента произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

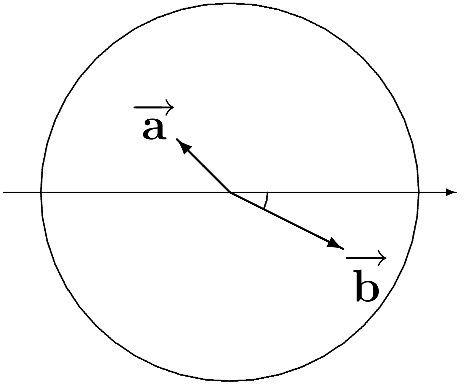
В качестве аргумента произведения естественно взять либо произведение, либо сумму аргументов сомножителей.

Измерение величины угла в виде «квадратных градусов» выглядит странно.

III.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$$

КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?

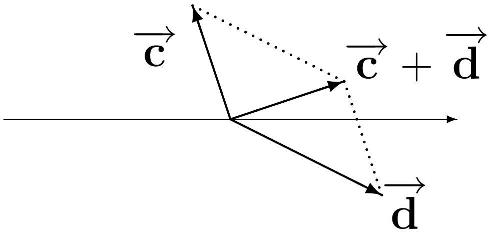


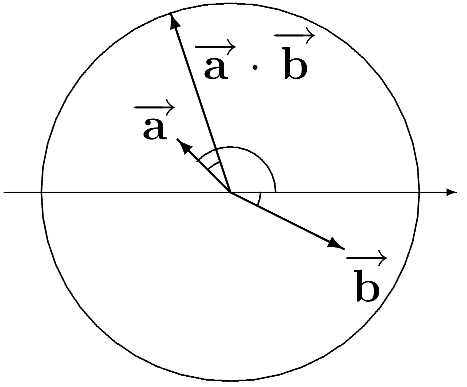
Для выбора аргумента произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

В качестве аргумента произведения естественно взять либо произведение, либо сумму аргументов сомножителей.

Поэтому выбираем сумму.

III.3. Итоговые правила сложения и умножения векторов комплексной плоскости

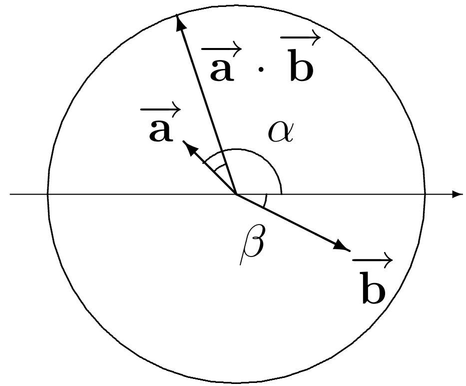




Сложение векторов комплексной плоскости проводится по «правилу параллелограмма» или «правилу треугольника».

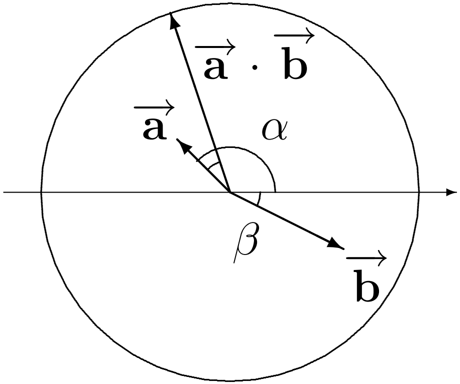
Итак, в комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ называется вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, модуль которого равен произведению модулей сомножителей: $\left|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$, а аргумент равен сумме **аргументов** сомножителей (с учётом знака слагаемых). Ой?

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



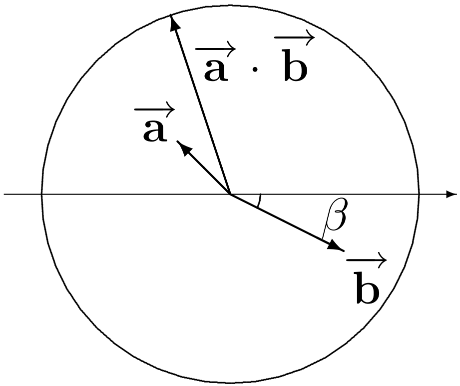
В данном примере положительный аргумент вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ суммировался с отрицательным аргументом вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, поэтому результат умножения $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$ относительно вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ повернут по часовой стрелке на угол $|\beta|$, а относительно вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ повернут против часовой стрелки на угол $|\alpha|$.

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

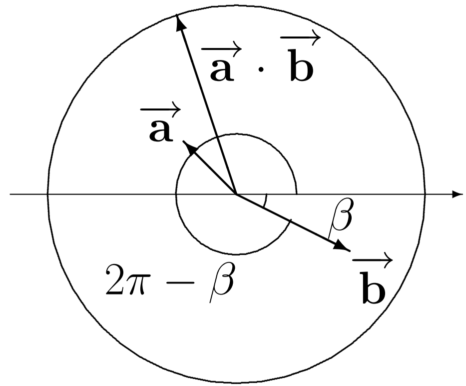
III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Мы выбрали отрицательное значение β для $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

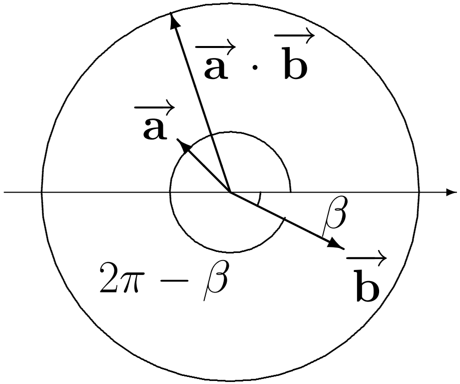


Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Мы выбрали отрицательное значение β для $\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

Помимо аргумента β для вектора $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, можно было взять другое значение аргумента, допустим, $(2\pi + \beta)$.

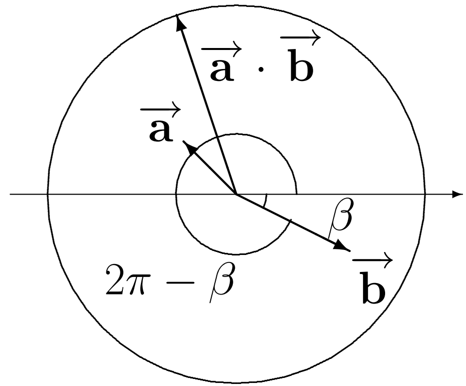
III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Караул! Аргумент вектора комплексной плоскости определяется неоднозначно!

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

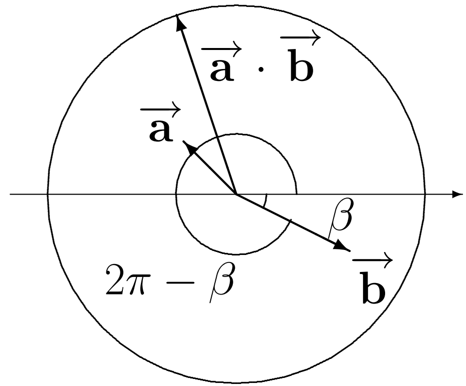


Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Караул! Аргумент вектора комплексной плоскости определяется неоднозначно!

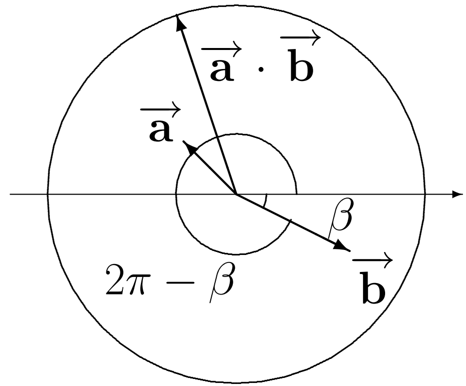
Где гарантия, что при другом выборе аргументов векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ получим тот же результат при умножении этих векторов комплексной плоскости?

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Значит, однозначность операции умножения векторов надо доказать!

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

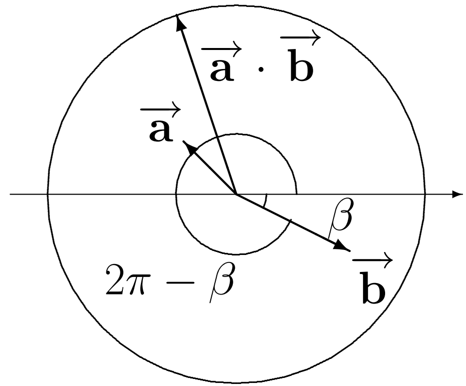


Значит, однозначность операции умножения векторов надо доказать!

Ясно, что различные аргументы вектора отличаются на угол $2k\pi$ радиан, где k — целое число. Поэтому при другом выборе аргументов для векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$

$$(\varphi + 2k\pi) + (\psi + 2m\pi) =$$

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

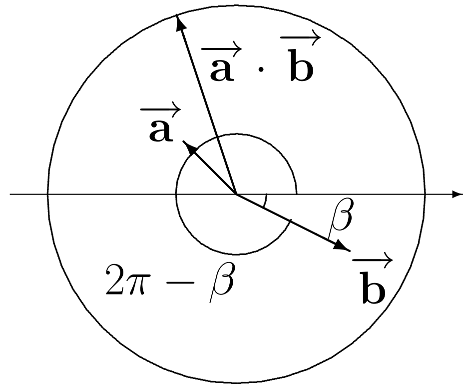


Значит, однозначность операции умножения векторов надо доказать!

Ясно, что различные аргументы вектора отличаются на угол $2k\pi$ радиан, где k — целое число. Поэтому при другом выборе аргументов для векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$

$$(\varphi + 2k\pi) + (\psi + 2m\pi) = (\varphi + \psi) + 2(k + m)\pi.$$

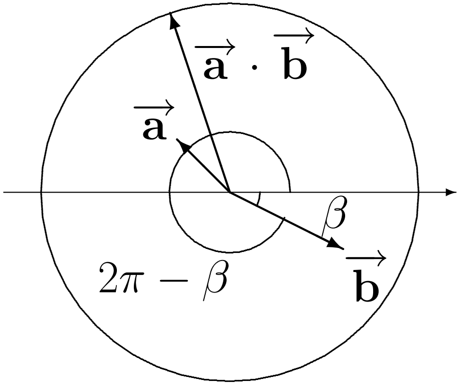
III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



$$(\varphi + 2k\pi) + (\psi + 2m\pi) = (\varphi + \psi) + 2(k + m)\pi.$$

Значит, при другом выборе аргументов получим, быть может, другое значение аргумента произведения векторов, но вектор будет тот же самый. Однозначность операции доказана.

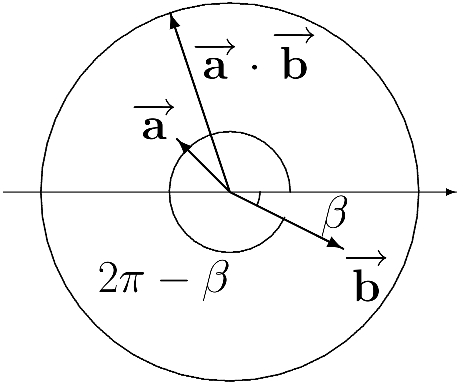
III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



В комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ называется вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, модуль которого равен произведению модулей сомножителей: $\left|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$, а аргумент равен сумме **аргументов** сомножителей (с учётом знака слагаемых).

Теперь всё хорошо?

III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



В комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ называется вектор $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, модуль которого равен произведению модулей сомножителей: $\left|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$, а **аргумент** равен сумме **аргументов** сомножителей (с учётом знака слагаемых).

Теперь всё хорошо?

А если хотя бы один из множителей — нулевой вектор?

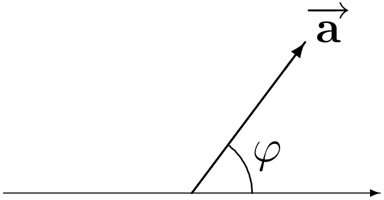
III.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

Определение 1. *В комплексной плоскости* ***произведением ненулевых векторов*** $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ *и* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, *что* $\left|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$, *и аргумент вектора* $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ *равен сумме* ***аргументов*** *сомножителей (с учётом знака слагаемых). При этом положим* $\overrightarrow{\mathbf{0}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Рассмотреть пример?

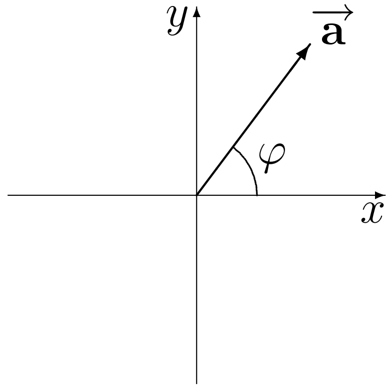
IV. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат:



IV. Переход от одного представления комплексного числа к другому

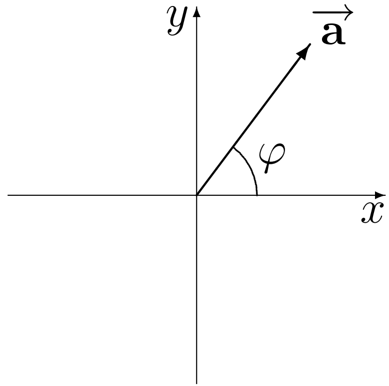
Введем на комплексной плоскости декартову систему координат:



IV. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

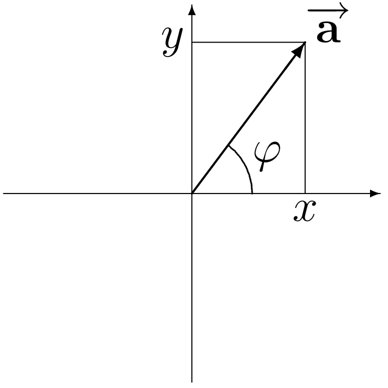
Найдем декартовы координаты вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.



IV. Переход от одного представления комплексного числа к другому

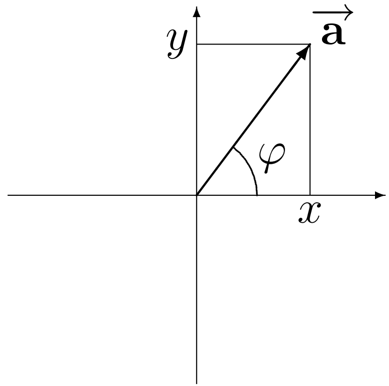
Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Пусть $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \rho$.



IV. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

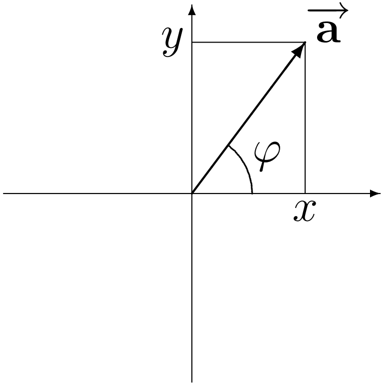


Найдем декартовы координаты вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Пусть $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \rho$.

Из прямоугольного треугольника получаем $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

IV. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.



Найдем декартовы координаты вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Пусть $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \rho$.

Из прямоугольного треугольника получаем $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \rho,$$

что для комплексных чисел на языке многочленов означает

$$x + iy = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем

$$F\left(z_1 + z_2\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left(\left(x_1+y_1 i\right)+\left(x_2+y_2 i\right)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left(\left(x_1+y_1 i\right)+\left(x_2+y_2 i\right)\right) = F\left(\left(x_1+x_2\right)+i\left(y_1+y_2\right)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем
$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left((x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)\right) = F\left((x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\right) =$$
$$= (x_1+x_2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1+y_2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left((x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)\right) = F\left((x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\right) =$$

$$= (x_1+x_2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1+y_2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \left(x_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \left(x_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left((x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)\right) = F\left((x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\right) =$$

$$= \left(x_1+x_2\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(y_1+y_2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \left(x_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \left(x_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

$$= F\left(x_1+y_1 i\right) + F\left(x_2+y_2 i\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left(\left(x_1+y_1 i\right)+\left(x_2+y_2 i\right)\right) = F\left(\left(x_1+x_2\right)+i(y_1+y_2)\right) =$$

$$= \left(x_1+x_2\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(y_1+y_2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} = \left(x_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) + \left(x_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

$$= F\left(x_1+y_1 i\right) + F\left(x_2+y_2 i\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right).$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:
$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy)=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right)=F\left(z_1\right)+F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right)=F\left(\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\right)=$$

$$=F\Bigg(\rho_1\rho_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Bigg)=$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right)=F\left(z_1\right)+F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \qquad\qquad\qquad\right)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \qquad\qquad\qquad\qquad\right)\right) =$$

Но $i^2 = -1$.

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \qquad\qquad\qquad\qquad\right)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1+z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F(z_1 z_2) = F(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \qquad\qquad)\right)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy)=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right)=F\left(z_1\right)+F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1z_2\right)=F\left(\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\right)=$$

$$=F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)\right)=$$

$$=F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right)=$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:
$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$
$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)\right) =$$
$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right) =$$
$$= \rho_1\rho_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1\rho_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right) =$$

$$= \rho_1\rho_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1\rho_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\rho_1\cos\varphi_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1\sin\varphi_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\left(\rho_2\cos\varphi_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_2\sin\varphi_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) =$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Тогда для сложения имеем $F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right)$.

Доказательство аналогичного свойства умножения:

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)\right) =$$

$$= F\left(\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right) =$$

$$= \rho_1\rho_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1\rho_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} =$$

$$= \left(\rho_1\cos\varphi_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1\sin\varphi_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\left(\rho_2\cos\varphi_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_2\sin\varphi_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = F\left(z_1\right)\cdot F\left(z_2\right).$$

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Для сложения и, соответственно, для умножения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right),$$

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(z_1\right)\cdot F\left(z_2\right).$$

Функция F является взаимно однозначной, т.е.

IV.1. Изоморфность

Положим

$$F(x+iy) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$

Для сложения и, соответственно, для умножения имеем

$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right),$$

$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(z_1\right) \cdot F\left(z_2\right).$$

Функция F является взаимно однозначной, т.е.

$$F(z_1) = F(z_2) \;\Leftrightarrow\; z_1 = z_2.$$

IV.1. Изоморфность

Положим
$$F(x+iy) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}}\,. \tag{2}$$
Для сложения и, соответственно, для умножения имеем
$$F\left(z_1+z_2\right) = F\left(z_1\right) + F\left(z_2\right),$$
$$F\left(z_1 z_2\right) = F\left(z_1\right) \cdot F\left(z_2\right).$$
Функция F является взаимно однозначной, т.е.
$$F(z_1) = F(z_2) \;\Leftrightarrow\; z_1 = z_2.$$
Значит рассмотренные нами алгебры — алгебра комплексных чисел на языке многочленов и алгебра векторов комплексной плоскости — являются одинаковыми, изоморфными.

IV.2. Формы записи комплексного числа

$$\overbrace{x+iy}^{\substack{\text{Алгебраическая}\\ \text{форма}\\ \text{записи}}} \quad =$$

IV.2. Формы записи комплексного числа

$$\overbrace{x+iy}^{\text{Алгебраическая форма записи}} = \underbrace{\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}_{\text{Тригонометрическая форма записи}} =$$

IV.2. Формы записи комплексного числа

$$\overbrace{x + iy}^{\substack{\text{Алгебраическая}\\ \text{форма}\\ \text{записи}}} = \underbrace{\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}_{\substack{\text{Тригонометрическая}\\ \text{форма}\\ \text{записи}}} = \overbrace{\rho e^{i\varphi}}^{\substack{\text{Показательная}\\ \text{форма}\\ \text{записи}}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Рассмотрим пример?

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Рассмотрим пример?

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. Это формула легко доказывается **методом математической индукции**.

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \le m < n$ формула (3) верна. Тогда

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \le m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

(по предположению индукции)

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= (\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= (\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

(по **правилу умножения векторов комплексной плоскости**)

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.***
При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= (\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. ***База индукции.*** При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= (\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула (3) доказана.

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}\right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Рассмотрим пример?

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}\right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Последняя формула в соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций** позволяет в качестве перспективного направления исследований выделить изучение

V. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}\right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Последняя формула в соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных»** ситуаций позволяет в качестве перспективного направления исследований выделить изучение

корней степени n из 1.

Рассмотрим пример?

VI. Корни степени n из 1

С чего начать изучение корней степени n из 1?

VI. Корни степени n из 1

С чего начать изучение корней степени n из 1?

Можно получить следствия из **формулы Муавра** («дедуктивный метод») или

VI. Корни степени n из 1

С чего начать изучение корней степени n из 1?

Можно получить следствия из **формулы Муавра** («дедуктивный метод») или

сформировать перспективные гипотезы на основании различных примеров («индуктивный метод»).

VI. Корни степени n из 1

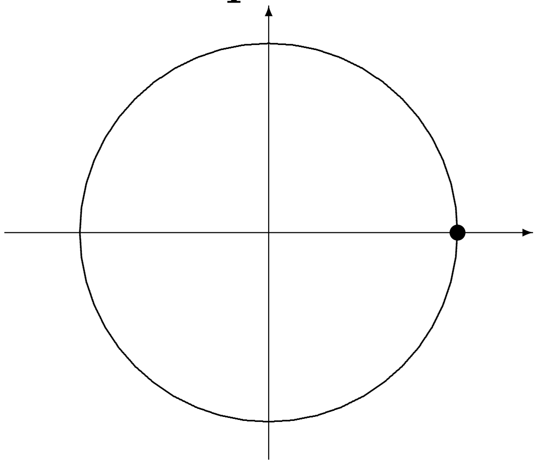
С чего начать изучение корней степени n из 1?

Можно получить следствия из **формулы Муавра** («дедуктивный метод») или
сформировать перспективные гипотезы на основании различных примеров («индуктивный метод»).

Применим второй метод.

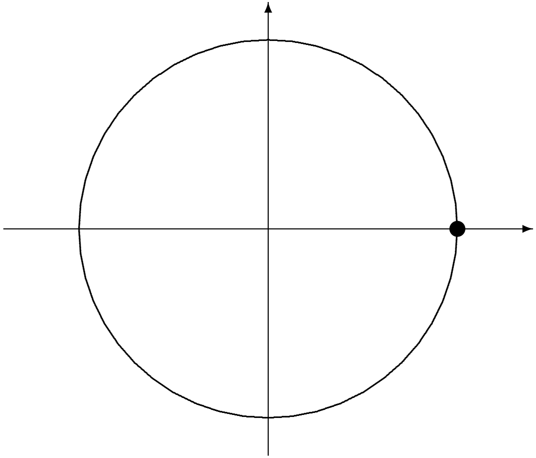
VI.1. Корни степени 4 из 1

Корни степени 4 из 1 имеют вид



$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{???i}} =$$

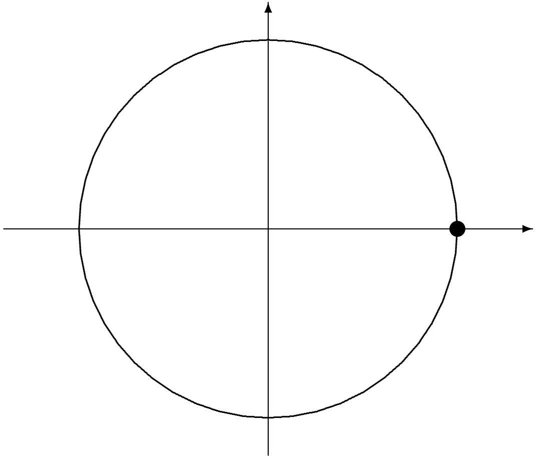
VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} =$$

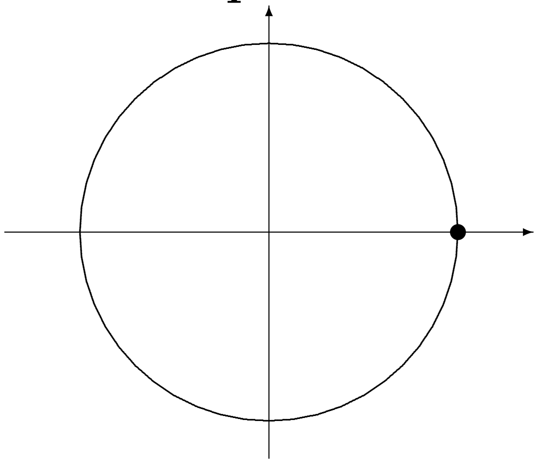
VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

VI.1. Корни степени 4 из 1

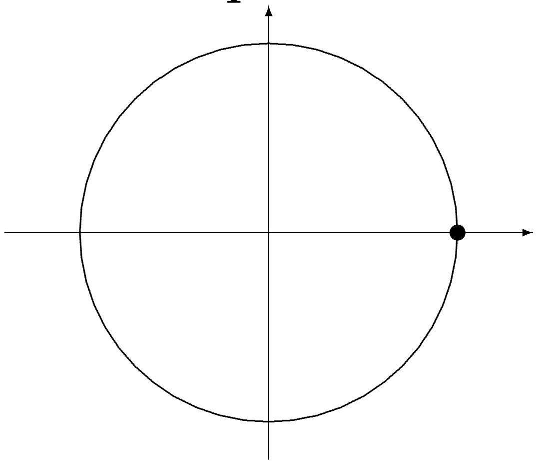


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \;\Rightarrow\; e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 =$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



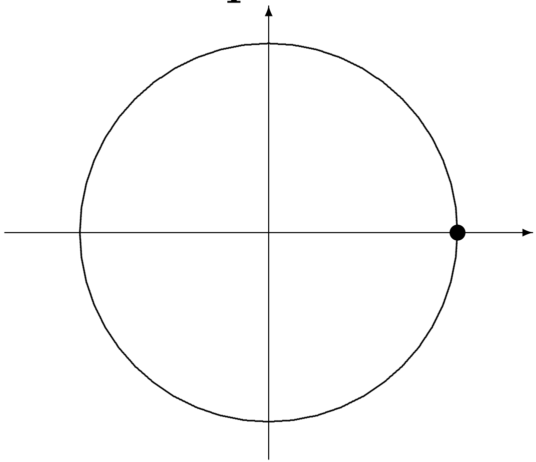
Корни степени 4 из 1 имеют вид

1,

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \;\Rightarrow\; e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

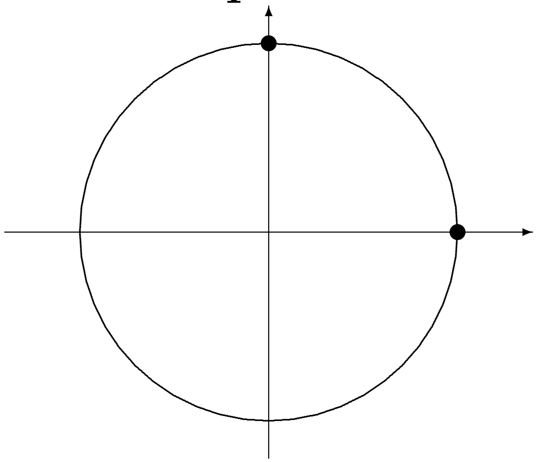
1,

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \;\Rightarrow\; e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; e^{1\pi i/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} =$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

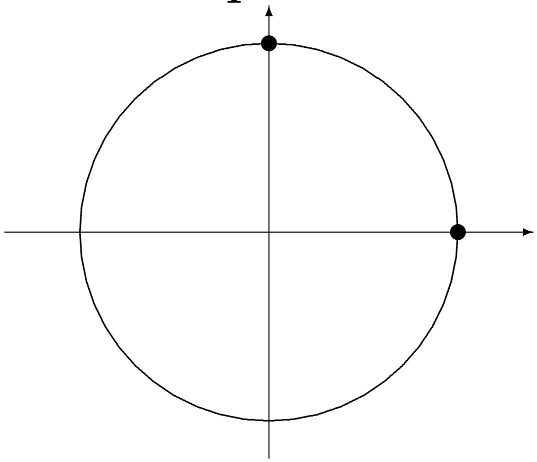
1, i,

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \ \Rightarrow \ e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \ \Rightarrow \ e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,$

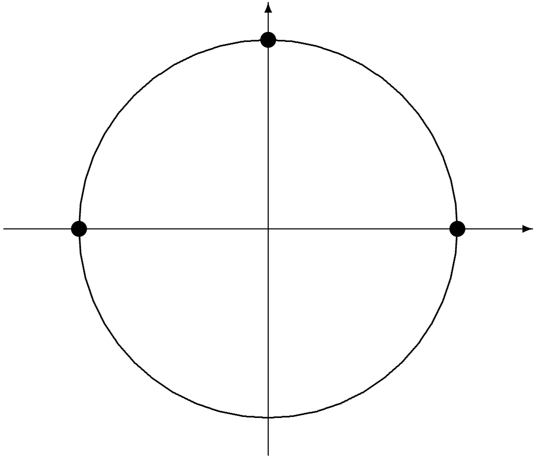
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \ \Rightarrow \ e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \ \Rightarrow \ e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \ \Rightarrow \ e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi =$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

1, i, (-1),

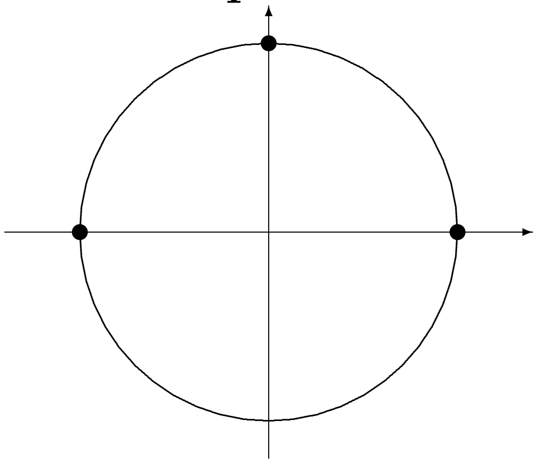
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \ \Rightarrow \ e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \ \Rightarrow \ e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \ \Rightarrow \ e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

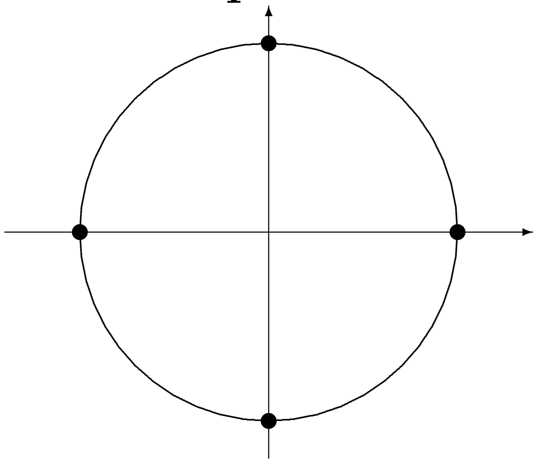
$$k = 0 \ \Rightarrow\ e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \ \Rightarrow\ e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \ \Rightarrow\ e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$k = 3 \ \Rightarrow\ e^{3\pi i/2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} =$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид 1, i, (-1), $(-i)$.

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

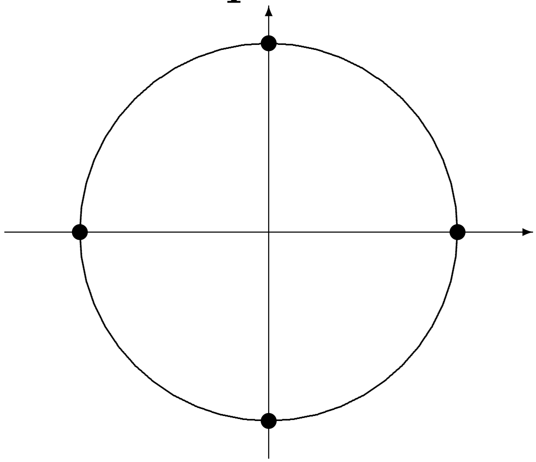
$$k = 0 \;\Rightarrow\; e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

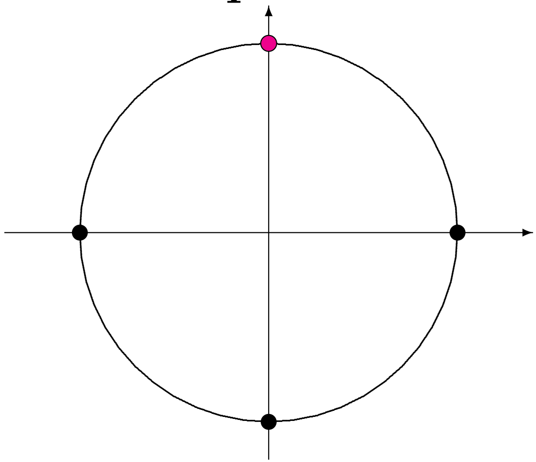
$$k = 3 \;\Rightarrow\; e^{3\pi i/2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид $1, i, (-1), (-i)$.

VI.1. Корни степени 4 из 1

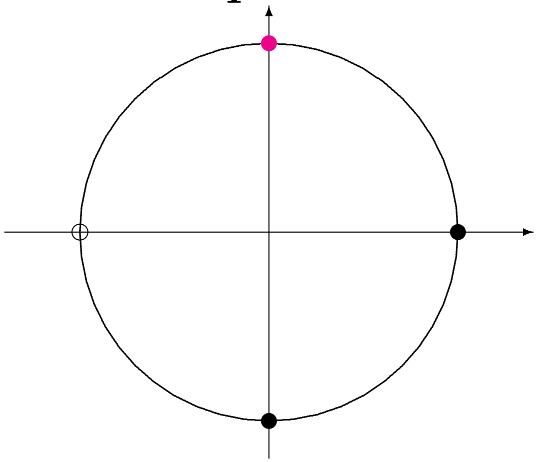


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i,$

VI.1. Корни степени 4 из 1

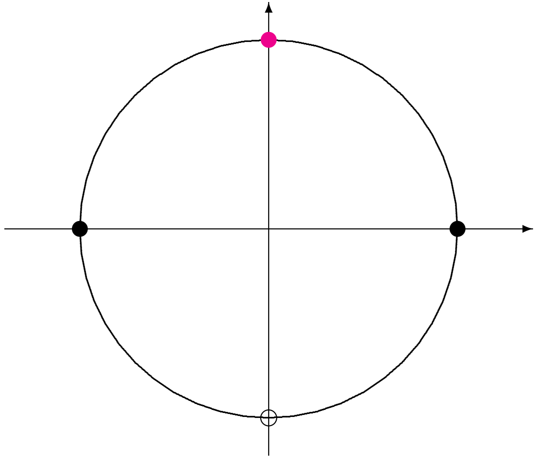


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1,$

VI.1. Корни степени 4 из 1

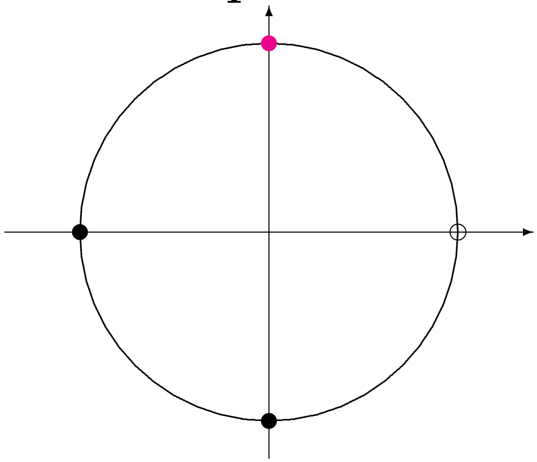


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$

VI.1. Корни степени 4 из 1

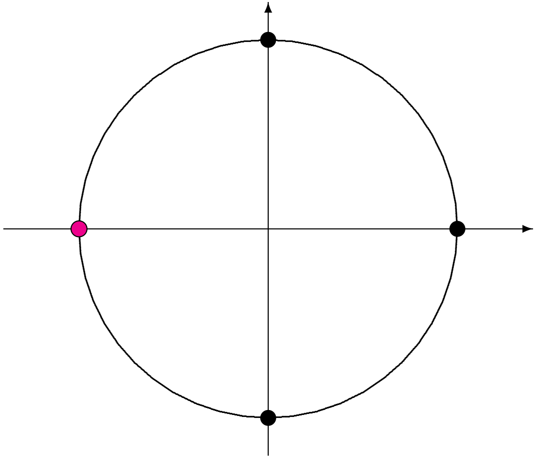


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



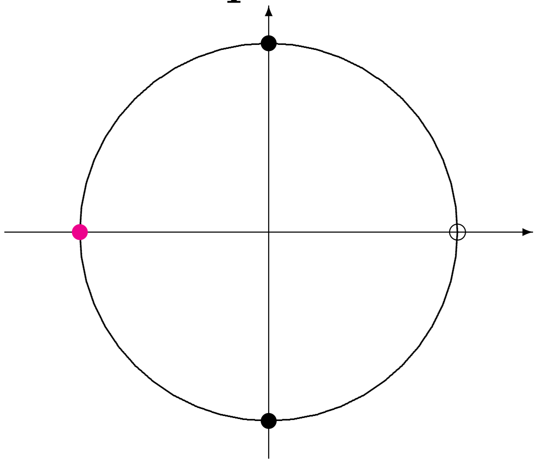
Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1,$

VI.1. Корни степени 4 из 1



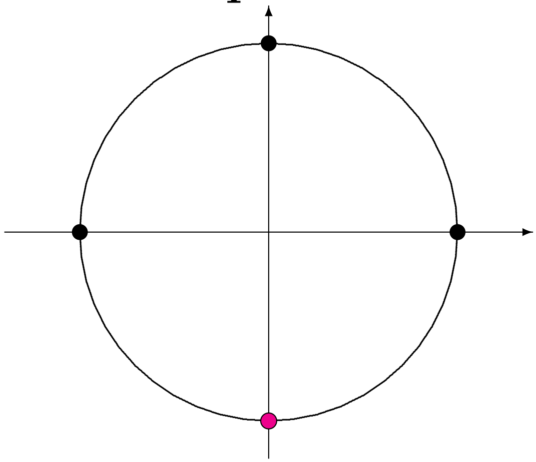
Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

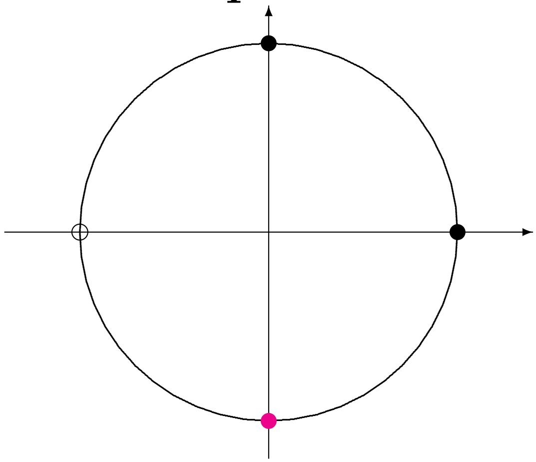
$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

$(-i)^1 = -i,$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

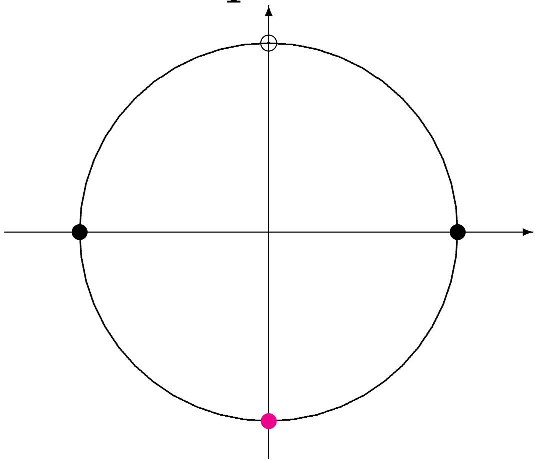
1, i, (-1), $(-i)$.

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1,$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

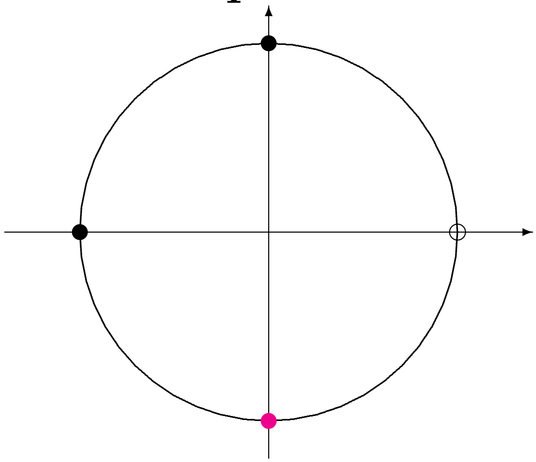
$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

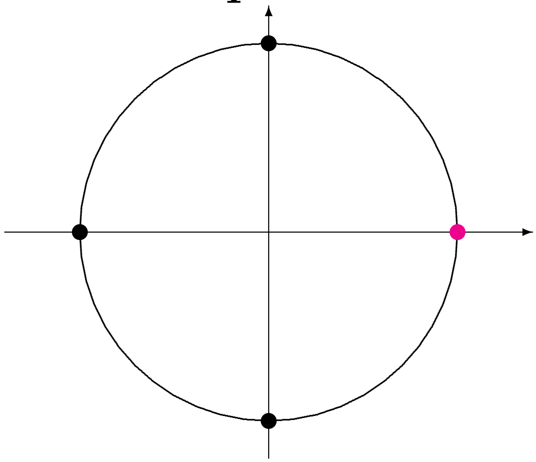
$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$

$(-i)^4 = 1.$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

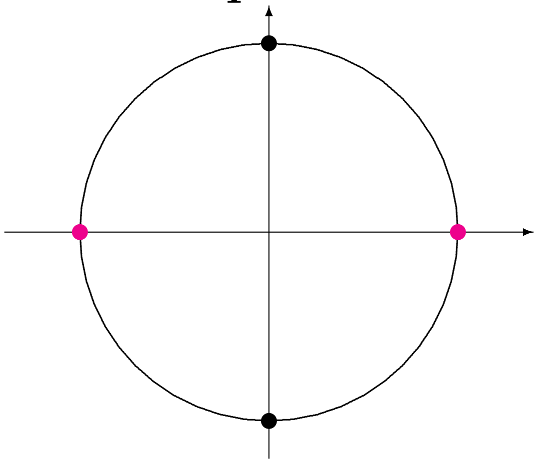
$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$

$(-i)^4 = 1.$

Таким образом, среди корней степени 4 из 1 некоторые числа обращаются в ноль в степени, меньшей 4:

$1^1 = 1,$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

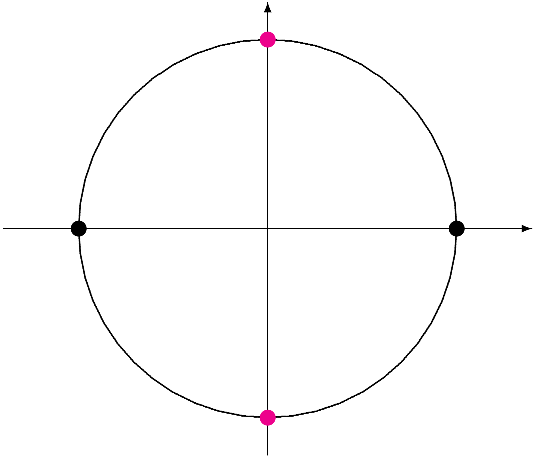
$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$

$(-i)^4 = 1.$

Таким образом, среди корней степени 4 из 1 некоторые числа обращаются в ноль в степени, меньшей 4:

$1^1 = 1, \quad (-1)^2 = 1.$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

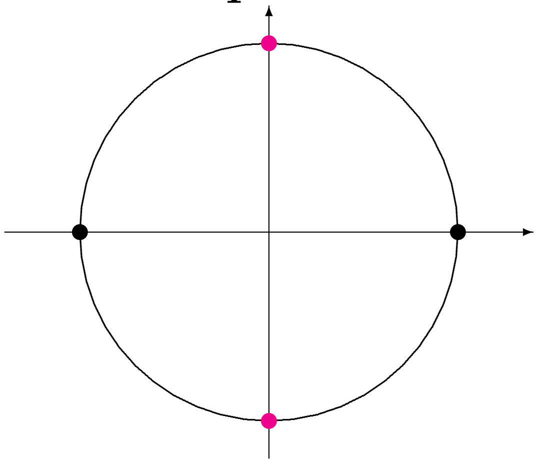
$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$

$(-i)^4 = 1.$

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** наибольший интерес представляют те корни z степени 4 из 1, для которых

$$m \in \{1;\ 2;\ 3\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1.$$

VI.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1,\ i,\ (-1),\ (-i).$

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$

$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$

$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$

$(-i)^4 = 1.$

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** наибольший интерес представляют те корни z степени 4 из 1, для которых

$$m \in \{1;\ 2;\ 3\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1.$$

В рассмотренном случае получилось, что любой корень степени 4 из 1 представляется в виде i^k и в виде $(-i)^m$.

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Рассмотрим пример?

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство.

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \ \Rightarrow\ \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q =$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} =$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} =$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p =$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p =$$

$$= \left(e^{i2\pi}\right)^p =$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \;\Rightarrow\; z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n)=1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n)=d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p =$$

$$= \left(e^{i2\pi}\right)^p = 1^p =$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p =$$

$$= \left(e^{i2\pi}\right)^p = 1^p = 1.$$

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = 1.$$

В силу **формулы (5)** q не может быть меньше n.

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n) = d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = 1.$$

В силу **формулы (5)** q не может быть меньше n.

Значит, $q = n$, поэтому

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n)=1$.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**$(k;n)=d$. Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \ \Rightarrow\ \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = 1.$$

В силу **формулы (5)** q не может быть меньше n.

Значит, $q=n$, поэтому **НОД**$(k;n)=1$.

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n)=1$.

Доказательство. Обратное утверждение легко доказать методом «от противного», сделайте это самостоятельно.

VI.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n)=1$.

Вычислить количество первообразных корней степени n из 1 можно с помощью **функции Эйлера**, используя **теорему о вычислении функции Эйлера**.

VI.3. Теорема о степенях первообразного корня

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). *Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то*

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k \begin{cases} k \in \{0;\ 1;\ \ldots;(n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{cases}$$

VI.3. Теорема о степенях первообразного корня

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). *Корень* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда* **НОД**$(k;n) = 1$.

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). *Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то*

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k \begin{cases} k \in \{0;\ 1;\ \ldots;(n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{cases}$$

Доказательство. Это следствие из **критерия первообразности корня** и **следствия о представлении Н.О.Д.**

VI.4. Теорема о группе корней из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). *Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то*

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k \begin{cases} k \in \{0;\ 1;\ \ldots;(n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{cases}$$

Теорема 3 (о группе корней из 1). *Пусть n — натуральное число. Множество комплексных корней степени n из 1 является* ***циклической группой*** *относительно операции умножения комплексных чисел.*

Доказательство.

VI.4. Теорема о группе корней из 1

Определение 2. *Корень z степени n из 1 называется* **первообразным корнем** *тогда и только тогда, когда*

$$m \in \{1;\ 2;\ \ldots;(n-1)\} \ \Rightarrow\ z^m \neq 1. \tag{5}$$

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). *Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то*

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k \begin{cases} k \in \{0;\ 1;\ \ldots;(n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{cases}$$

Теорема 3 (о группе корней из 1). *Пусть n — натуральное число. Множество комплексных корней степени n из 1 является* ***циклической группой*** *относительно операции умножения комплексных чисел.*

Доказательство. Это следствие из **теоремы о степенях первообразного корня** и **примера конечной циклической группы**.

Матричное и теоретико-множественное представление комплексных чисел

Мы рассмотрели **представление комплексных чисел в виде многочленов** от переменной i (в электротехнике и радиоэлектронике рассматриваются многочлены от j), и **представление комплексных чисел как векторов комплексной плоскости**. В некоторых случаях применяются другие трактовки термина «комплексное число». Мы рассмотрим **теоретико-множественное** и **матричное** представления.

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$;

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$;
2. $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$;

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$;
2. $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$;
3. $\overline{(a; b)} = (a; -b)$.

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$;
2. $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$;
3. $\overline{(a; b)} = (a; -b)$.

Роль мнимой единицы играет пара

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$;
2. $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$;
3. $\overline{(a; b)} = (a; -b)$.

Роль мнимой единицы играет пара $(0; 1)$, поскольку
$(0; 1) \cdot (0; 1) =$

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a;b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a;b)\cdot(c;d)=(a\cdot c-b\cdot d;a\cdot d+b\cdot c)$;
2. $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$;
3. $\overline{(a;b)}=(a;-b)$.

Роль мнимой единицы играет пара $(0;1)$, поскольку
$(0;1)\cdot(0;1)=(-1;0)$.

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}.$$

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Комплексное сопряжение на языке матричной алгебры определяется формулой

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}.$$

Комплексное сопряжение на языке матричной алгебры определяется формулой $\overline{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}.$$

В роли мнимой единицы в этой алгебре выступает матрица

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}.$$

В роли мнимой единицы в этой алгебре выступает матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поскольку, очевидно, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Рассмотреть примеры решения задач?

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?