Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Булевы алгебры

Раздел электронного учебника
для сопровождения практического занятия

Изд. 4-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,{}^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение.

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. **Аксиомы A1–A8** легко проверяются традиционными методами **теории множеств**.

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,\overline{}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**. $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.

$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;
Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;
Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
Аксиомы A3: а) $(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z})$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z})$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы А4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;
Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
Аксиомы A3: а) $(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z})$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;
Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;
Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы А6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\} \rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы А6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;
Аксиомы А7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;
Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;
Аксиомы A8: а) $X \cup \overline{X} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \overline{X} = \emptyset$.

Пример 1. *Покажите, что алгебра*

$$\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$$

является булевой алгеброй.

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.

$X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Аксиомы A8: а) $X \cup \overline{X} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \overline{X} = \emptyset$.

Доказательство можно провести **методами теории множеств** и аналогично решению **соответствующего примера**.

Вернуться к лекции?

Пример 2. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра подмножеств множества* M*:* $\mathbf{S} = \langle A, \ \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$, *где* $A = \left\{ X \;\middle|\; X \subseteq M \right\}$.

Решение.

Пример 2. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра подмножеств множества* M*:* $\mathbf{S} = \langle A,\ \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$, *где* $A = \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq M \right\}$.

Решение. Доказательство выполнения **аксиом булевой алгебры** проводится традиционными методами **доказательства равенства множеств**, см. **пример**.

Вернуться к лекции или рассмотреть **другой пример**?

Пример 3. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра булевых функций от двух переменных* x, y: $\mathbf{B} = \langle B,\ \{\vee, \wedge, \overline{}\}\rangle$, *где функции* $\wedge$, $\vee$ *и* $\overline{}$ *определены таблицами.*

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

p	$\overline{q}$
0	1
1	0

Комментарий. Булева функция от двух переменных — это функция с областью определения $\{0;\ 1\} \times \{0;\ 1\}$ и областью значений $\{0;\ 1\}$.

Функция $\vee$ называется **дизъюнкцией**.

Функция $\wedge$ называется **конъюнкцией**.

Функция $\overline{x}$ называется **отрицанием**.

Пример 3. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра булевых функций от двух переменных x, y:* $\mathbf{B} = \langle B,\ \{\vee, \wedge, ^{-}\}\rangle$, *где функции* $\wedge$, $\vee$ *и* $^{-}$ *определены таблицами.*

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

p	$\overline{q}$
0	1
1	0

Решение. Приведем лишь доказательство **аксиомы**
$$\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y) = \big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big).$$

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	1	1	1			
1	1	0	1	0			
1	1	1	1	1			

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	1	1	1			
1	1	0	1	0			
1	1	1	1	1			

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	1	0		
1	0	0	1	0	0		
1	0	1	1	1	1		
1	1	0	1	0	0		
1	1	1	1	1	1		

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	1	0		
1	0	0	1	0	0		
1	0	1	1	1	1		
1	1	0	1	0	0		
1	1	1	1	1	1		

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y) = \big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big).$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Значит, **аксиома** доказана.

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y) = \big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big).$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Остальные **аксиомы** можно доказать аналогично.

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \in \{a;\ b\} \right\};\ \{\{a;\ b\};\ \emptyset;\ \cup;\ \cap;\ \overline{}\ \} \right\rangle,$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \in \{a;\ b\} \right\};\ \{\{a;\ b\};\ \emptyset;\ \cup;\ \cap;\ \overline{}\} \right\rangle,$$
$$\mathcal{B} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in \{0;\ 1\}, \\ f(x) \in \{0;\ 1\} \end{array} \right. \right\};\ \{\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle =$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — функции, тождественно равные 0 и, соответственно, 1.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \in \{a;\ b\} \right\};\ \{\{a;\ b\};\ \emptyset;\ \cup;\ \cap;\ \overline{}\} \right\rangle,$$

$$\mathcal{B} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, \begin{cases} x \in \{0;\ 1\}, \\ f(x) \in \{0;\ 1\} \end{cases} \right\};\ \{\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left\{ f \,\middle|\, \{x;\ f(x)\} \subseteq \{0;\ 1\} \right\};\ \{\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle,$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — функции, тождественно равные 0 и, соответственно, 1.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Естественный вопрос: как задать элементы носителей? Для алгебры $\mathcal{A}$ ответ очевиден:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Естественный вопрос: как задать элементы носителей? Для алгебры $\mathcal{A}$ ответ очевиден: элементами носителя являются *подмножества* из $\{a;\ b\}$, поэтому каждое подмножество зададим, например, списком элементов.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \Big\{\emptyset, \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}$$

Пример 4. *Рассмотрим **булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества** $\{a;\ b\}$ и булеву алгебру $\mathcal{B}$ **булевых функций от одной переменной** (с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \Big\{\emptyset, \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\Big\}$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Как задать носитель алгебры $\mathcal{B}$?

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.*

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.* Типовыми способами задания функции являются:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.* Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

Пример 4. *Рассмотрим **булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества** $\{a;\ b\}$ и булеву алгебру $\mathcal{B}$ **булевых функций от одной переменной** (с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции*. Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

— таблица;

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.* Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

— таблица;

— график.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.* Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

— таблица;

— график.

Какой из этих способов оптимален в нашем случае?

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны***, *и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. У интересующих нас функций область определения состоит всего из двух элементов, поэтому эти функции удобнее всего задать

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. У интересующих нас функций область определения состоит всего из двух элементов, поэтому эти функции удобнее всего задать таблицами:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. У интересующих нас функций область определения состоит всего из двух элементов, поэтому эти функции удобнее всего задать таблицами:

x	$f_0 = \mathbf{0}$	f_1	f_2	$f_3 = \mathbf{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$
X^{ψ_2}	f_3	f_1	f_2	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$
X^{ψ_2}	f_3	f_1	f_2	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Тот факт, что других изоморфизмов нет, следует из того, что при изоморфизме «ноль» и «единица» булевой алгебры переходят в «ноль» и «единицу» другой булевой алгебры.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$
X^{ψ_2}	f_3	f_1	f_2	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Вернуться к лекции?

Пример 5.

Например, в **булевой алгебре подмножеств** $\langle A;\ \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$ множества M (то есть $A = \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq M \right\}$) **атомами** являются

Пример 5.

Например, в **булевой алгебре подмножеств** $\langle A;\ \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$ множества M (то есть $A = \left\{X \,\middle|\, X \subseteq M\right\}$) **атомами** являются все одноэлементные подмножества $\{x\}$, где $x \in M$.

Пример 5.

В алгебре n- местных булевых функций $\langle A, \ \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ **атомами** являются

Пример 5.

В алгебре n- местных булевых функций $\langle A,\ \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ **атомами** являются булевы функции f такие, что каждая из них принимает значение 1 только при одном-единственном наборе значений аргументов. Например, при $n = 2$ множество **атомов** равно

Пример 5.

В алгебре n- местных булевых функций $\langle A,\ \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ **атомами** являются булевы функции f такие, что каждая из них принимает значение 1 только при одном-единственном наборе значений аргументов. Например, при $n = 2$ множество **атомов** равно $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, где эти функции задаются таблицами

$f_1(x;y)$		
$y\backslash x$	0	1
0	1	0
1	0	0

,

$f_2(x;y)$		
$y\backslash x$	0	1
0	0	1
1	0	0

,

$f_3(x;y)$		
$y\backslash x$	0	1
0	0	0
1	1	0

,

$f_4(x;y)$		
$y\backslash x$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Рассмотрим пример безатомной булевой алгебры или **вернемся к лекции?**

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Напомним, что **рациональным** называется число вида $\dfrac{m}{n}$

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1;b_1)\cup(a_2;b_2)\cup\ldots\cup(a_m;b_m)\Big)\cap\mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le\ldots\le a_m<b_m\le 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Напомним, что **рациональным** называется число вида $\dfrac{m\in\mathbb{Z}}{n\in\mathbb{N}}$,

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1;b_1)\cup(a_2;b_2)\cup\ldots\cup(a_m;b_m)\Big)\cap\mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le\ldots\le a_m<b_m\le 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Напомним, что **рациональным** называется число вида $\dfrac{m\in\mathbb{Z}}{n\in\mathbb{N}}$, где $\mathbb{Z}=\{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2;\ldots\}$, $\mathbb{N}=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots\}$.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Очевидно, что множество M с операциями $\cup$, $\cap$ и операцией дополнения до множества $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$ является булевой алгеброй, в которой в качестве $\mathbf{0}$ выступает пустое множество $\emptyset$, а в качестве $\mathbf{1}$ — множество $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Очевидно, что множество M с операциями $\cup$, $\cap$ и операцией дополнения до множества $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$ является булевой алгеброй, в которой в качестве $\mathbf{0}$ выступает пустое множество $\emptyset$, а в качестве $\mathbf{1}$ — множество $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$.

Если X — **атом** этой булевой алгебры, то для $(a;\ b) \subseteq X$ имеем $\left(\dfrac{2a+b}{3};\ \dfrac{a+2b}{3}\right) \cap X = \left(\dfrac{2a+b}{3};\ \dfrac{a+2b}{3}\right) \notin \{X;\ \emptyset\}$, что противоречит **определению атома**.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1;b_1)\cup(a_2;b_2)\cup\ldots\cup(a_m;b_m)\Big)\cap\mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le\ldots\le a_m<b_m\le 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Очевидно, что множество M с операциями $\cup$, $\cap$ и операцией дополнения до множества $(0;\ 1)\cap\mathbb{Q}$ является булевой алгеброй, в которой в качестве $\mathbf{0}$ выступает пустое множество $\emptyset$, а в качестве $\mathbf{1}$ — множество $(0;\ 1)\cap\mathbb{Q}$.

Таким образом, у этой алгебры нет **атомов**.

Вернуться к лекции?

Пример 7 (строения конечной булевой алгебры). *Пусть операции в булевой алгебре определены такими таблицами* ***Кэли****:*

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

Что в этой булевой алгебре представляет собой элемент **1***? Найти все* ***атомы*** *этой булевой алгебры. Указать образы всех элементов при изоморфизме этой булевой алгебры на* ***алгебру всех подмножеств*** *некоторого множества.*

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

Очевидно, что $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = 3$. Гомоморфизм, например, такой:

1	2	3	4	+	*
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\cup$	$\cap$

.

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

Очевидно, что $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = 3$. Гомоморфизм, например, такой:

1	2	3	4	+	*
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\cup$	$\cap$

. Можно предложить и такой гомоморфизм:

1	2	3	4	+	*
$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\cup$	$\cap$

.

$+$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

Очевидно, что $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = 3$. Гомоморфизм, например, такой:

1	2	3	4	$+$	$*$
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\cup$	$\cap$

. Можно предложить и такой гомоморфизм:

1	2	3	4	$+$	$*$
$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\cup$	$\cap$

.

Рассмотреть следующий пример или **вернуться к лекции?**

Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}$, $E(f) = \{-5;\ 5\}$*, с операциями* f_1, f_0, $\max$, $\min$, $(-1) \cdot \bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма****, что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. Сначала опишем носитель этой булевой алгебры. Функции зададим таблицами:

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

$\max\{f(x);\ g(x)\}$								
$g\backslash f$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_2	f_1	f_2	f_7	f_6	f_1	f_6	f_7
f_3	f_3	f_1	f_7	f_3	f_5	f_5	f_1	f_7
f_4	f_4	f_1	f_6	f_5	f_4	f_5	f_6	f_1
f_5	f_5	f_1	f_1	f_5	f_5	f_5	f_1	f_1
f_6	f_6	f_1	f_6	f_1	f_6	f_1	f_6	f_1
f_7	f_7	f_1	f_7	f_7	f_1	f_1	f_1	f_7

$\min\{f(x);\ g(x)\}$								
$g\backslash f$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0
f_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_2	f_0	f_2	f_2	f_0	f_0	f_0	f_2	f_2
f_3	f_0	f_3	f_0	f_3	f_0	f_3	f_0	f_3
f_4	f_0	f_4	f_0	f_0	f_4	f_4	f_4	f_0
f_5	f_0	f_5	f_0	f_3	f_4	f_5	f_4	f_3
f_6	f_0	f_6	f_2	f_0	f_4	f_4	f_6	f_2
f_7	f_0	f_7	f_2	f_3	f_0	f_3	f_2	f_7

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции .

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Отметим, что указание образов **атомов** однозначно определяет автоморфизм.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Автоморфизм булевой алгебры либо переставляет **атомы** между собой (таких автоморфизмов $3! = 6$), либо отображает исходную булеву алгебру в двойственную, тогда образами **атомов** являются **коатомы**[1] f_5; f_6; f_7.

[1]То есть **атомы** двойственной алгебры.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Таких автоморфизмов также 6 штук. Пример неединичного автоморфизма можно задать таблицей (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

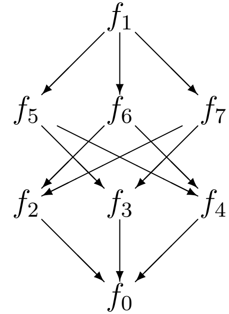
$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Таких автоморфизмов также 6 штук. Пример неединичного автоморфизма можно задать таблицей (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $\quad f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $\quad f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot\bullet$
x^φ	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4	f_6	f_5	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot\bullet$

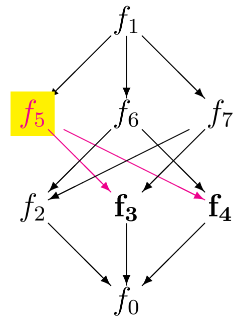
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



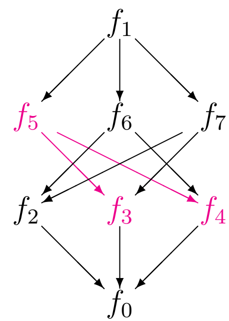
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ ?$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



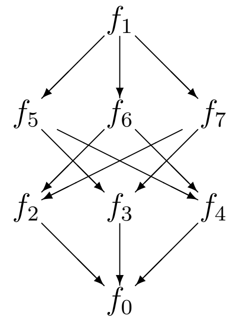
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	?			f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



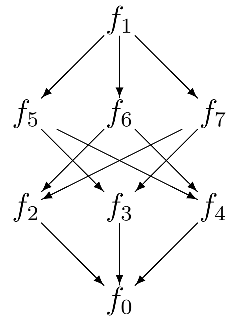
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_3^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



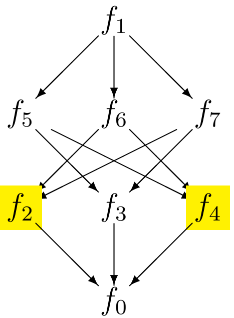
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_3^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



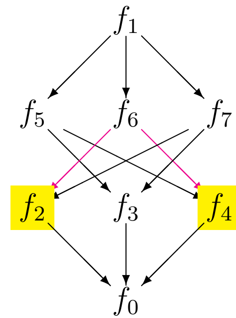
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_3^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	?			f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



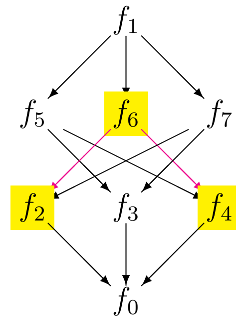
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_3^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ ?$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



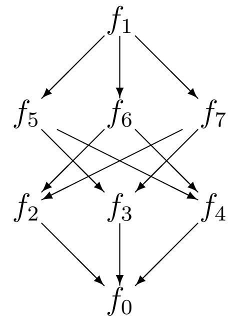
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_3^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} = f_6$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	?			f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



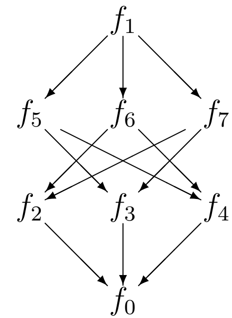
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_3^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} = f_6$

x	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0 \ f_1 \ f_3 \ f_4 \ f_2 \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0 \ f_1 \ f_4 \ f_2 \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0 \ f_1 \ f_3 \ f_2 \ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_4 \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0 \ f_1 \ f_4 \ f_3 \ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1 \ f_0 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1 \ f_0 \ f_6 \ f_7 \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1 \ f_0 \ f_7 \ f_5 \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1 \ f_0 \ f_6 \ f_5 \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1 \ f_0 \ f_5 \ f_7 \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1 \ f_0 \ f_7 \ f_6 \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



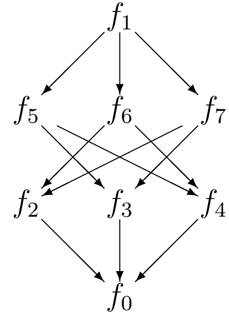
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	f_6	?		f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



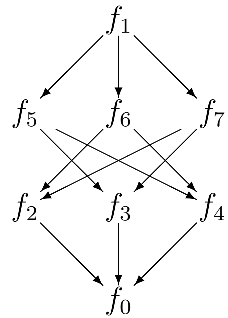
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6$?	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



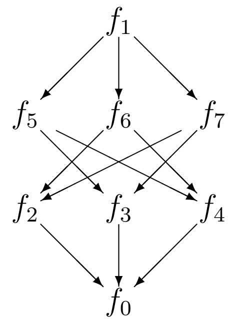
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_2}; f_4^{\varphi_1}\} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



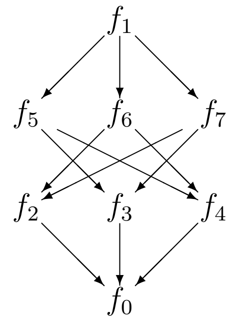
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_3; f_2\} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_6\ \ ?$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



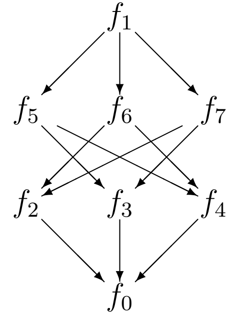
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_3; f_2\} = f_7$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6$?	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



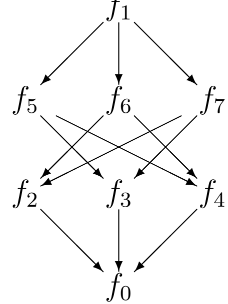
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_3; f_2\} = f_7$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



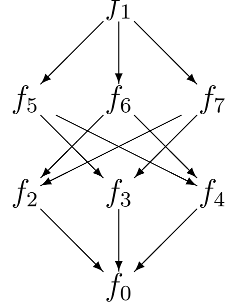
Список автоморфизмов: $(f_7)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_3\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_1}; f_3^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_3; f_4\} = f_5$

x	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0 f_1 f_3 f_4 f_2 f_6 f_7 f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0 f_1 f_4 f_2 f_3	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0 f_1 f_3 f_2 f_4	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0 f_1 f_2 f_4 f_3	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0 f_1 f_4 f_3 f_2	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1 f_0 f_5 f_6 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1 f_0 f_6 f_7 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1 f_0 f_7 f_5 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1 f_0 f_6 f_5 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1 f_0 f_5 f_7 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1 f_0 f_7 f_6 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



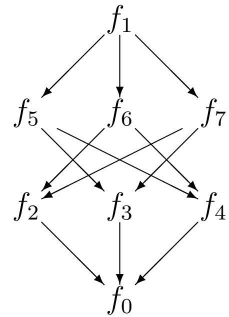
Список автоморфизмов: для φ_2–φ_5 получаем

x	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0 \ f_1 \ f_3 \ f_4 \ f_2 \ f_6 \ f_7 \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0 \ f_1 \ f_4 \ f_2 \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0 \ f_1 \ f_3 \ f_2 \ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_4 \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0 \ f_1 \ f_4 \ f_3 \ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1 \ f_0 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1 \ f_0 \ f_6 \ f_7 \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1 \ f_0 \ f_7 \ f_5 \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1 \ f_0 \ f_6 \ f_5 \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1 \ f_0 \ f_5 \ f_7 \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1 \ f_0 \ f_7 \ f_6 \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



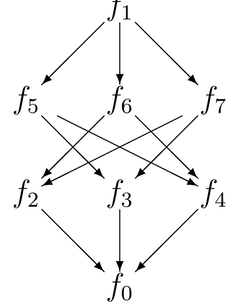
Список автоморфизмов: для φ_2–φ_5 получаем

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



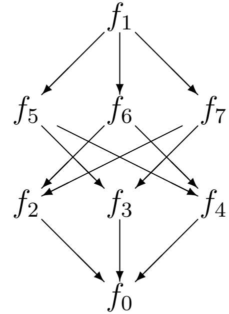
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_6} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	f_6	f_7	f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3	f_7	f_5	f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4	f_6	f_5	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3	f_5	f_7	f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2	f_7	f_6	f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	?			f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



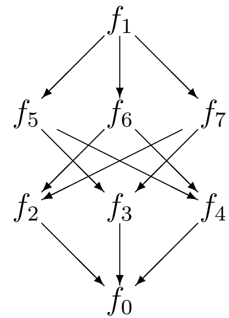
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} =$

x	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0 f_1 f_3 f_4 f_2 f_6 f_7 f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0 f_1 f_4 f_2 f_3 f_7 f_5 f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0 f_1 f_3 f_2 f_4 f_6 f_5 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0 f_1 f_2 f_4 f_3 f_5 f_7 f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0 f_1 f_4 f_3 f_2 f_7 f_6 f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1 f_0 f_5 f_6 f_7 ?	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1 f_0 f_6 f_7 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1 f_0 f_7 f_5 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1 f_0 f_6 f_5 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1 f_0 f_5 f_7 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1 f_0 f_7 f_6 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



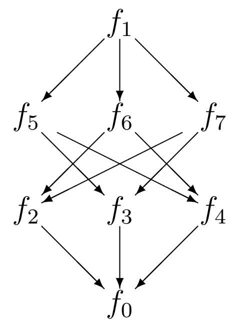
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7\ \ ?$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



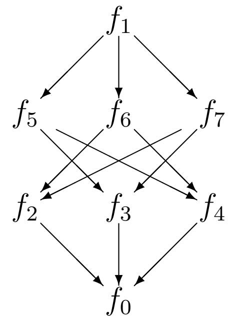
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$
$= \min\{f_6; f_7\} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	f_6	f_7	f_5	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3	f_7	f_5	f_6	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4	f_6	f_5	f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3	f_5	f_7	f_6	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2	f_7	f_6	f_5	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	?			f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



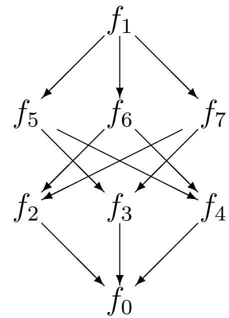
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$
$= \min\{f_6; f_7\} = f_2$

x	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0 f_1 f_3 f_4 f_2 f_6 f_7 f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0 f_1 f_4 f_2 f_3 f_7 f_5 f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0 f_1 f_3 f_2 f_4 f_6 f_5 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0 f_1 f_2 f_4 f_3 f_5 f_7 f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0 f_1 f_4 f_3 f_2 f_7 f_6 f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1 f_0 f_5 f_6 f_7 ?	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1 f_0 f_6 f_7 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1 f_0 f_7 f_5 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1 f_0 f_6 f_5 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1 f_0 f_5 f_7 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1 f_0 f_7 f_6 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



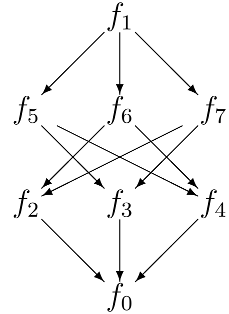
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$
$= \min\{f_6; f_7\} = f_2$

x	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0 f_1 f_3 f_4 f_2 f_6 f_7 f_5	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0 f_1 f_4 f_2 f_3 f_7 f_5 f_6	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0 f_1 f_3 f_2 f_4 f_6 f_5 f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0 f_1 f_2 f_4 f_3 f_5 f_7 f_6	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0 f_1 f_4 f_3 f_2 f_7 f_6 f_5	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1 f_0 f_5 f_6 f_7 f_2	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1 f_0 f_6 f_7 f_5	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1 f_0 f_7 f_5 f_6	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1 f_0 f_6 f_5 f_7	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1 f_0 f_5 f_7 f_6	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1 f_0 f_7 f_6 f_5	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



Список автоморфизмов:

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7\ f_5$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3\ f_7\ f_5\ f_6$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4\ f_6\ f_5\ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3\ f_5\ f_7\ f_6$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2\ f_7\ f_6\ f_5$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7\ f_2\ f_3\ f_4$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5\ f_3\ f_4\ f_2$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6\ f_4\ f_2\ f_3$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7\ f_3\ f_2\ f_4$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6\ f_2\ f_4\ f_3$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5\ f_4\ f_3\ f_2$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}, \quad E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* $f_1, \quad f_0, \quad \max, \quad \min, \quad (-1)\cdot\bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов***. *Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма***, *что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. Таблица, задающая стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее **атомов** имеет следующий вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}, \quad f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot\bullet$
x^ψ	$\emptyset$	$\{f_2;\ f_3;\ f_4\}$	$\{f_2\}$	$\{f_3\}$	$\{f_4\}$	$\{f_3;\ f_4\}$	$\{f_2;\ f_4\}$	$\{f_2;\ f_3\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Для того, чтобы найти все **гомоморфизмы** этой алгебры на двуатомную булевы алгебру, заметим, что, во-первых, это возможно сделать только «с точностью до **изоморфизма**», то есть при условии отождествления изоморфных алгебр,

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Для того, чтобы найти все **гомоморфизмы** этой алгебры на двуатомную булевы алгебру, заметим, что, во-первых, это возможно сделать только «с точностью до **изоморфизма**», то есть при условии отождествления изоморфных алгебр, во-вторых, образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент. В самом деле, если t — **атом**, то для любого элемента x из носителя исходной булевой алгебры имеем $t * x \in \{t;\ \mathbf{0}\}$, поэтому

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент. В самом деле, если t — **атом**, то для любого элемента x из носителя исходной булевой алгебры имеем $t * x \in \{t;\ \mathbf{0}\}$, поэтому $t^\varphi * x^\varphi \in \{t^\varphi;\ \mathbf{0}^\varphi\}$. Поэтому либо t^φ есть **атом**, либо

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент. В самом деле, если t — **атом**, то для любого элемента x из носителя исходной булевой алгебры имеем $t * x \in \{t;\ \mathbf{0}\}$, поэтому $t^\varphi * x^\varphi \in \{t^\varphi;\ \mathbf{0}^\varphi\}$. Поэтому либо t^φ есть **атом**, либо это нулевой элемент образа исходной алгебры.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

Поэтому **гомоморфизмы** отличаются друг от друга, во-первых, тем, какой из них пребразуется гомоморфизмом в нулевой элемент и, во-вторых, в какие именно **атомы** переходят «уцелевшие» **атомы**.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

Поэтому **гомоморфизмы** отличаются друг от друга, во-первых, тем, какой из них пребразуется гомоморфизмом в нулевой элемент и, во-вторых, в какие именно **атомы** переходят «уцелевшие» **атомы**.

В итоге получаем 6 гомоморфизмов. Например, возьмем в качестве образа алгебру подмножеств множества $\{a;\ b\}$. Тогда один из гомоморфизмов имеет вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $\quad f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

Поэтому **гомоморфизмы** отличаются друг от друга, во-первых, тем, какой из них пребразуется гомоморфизмом в нулевой элемент и, во-вторых, в какие именно **атомы** переходят «уцелевшие» **атомы**.

В итоге получаем 6 гомоморфизмов. Например, возьмем в качестве образа алгебру подмножеств множества $\{a;\ b\}$. Тогда один из гомоморфизмов имеет вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	max	min	$(-1)\cdot\bullet$
x^ψ	$\emptyset$	$\{a;\ b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a;\ b\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

В итоге получаем 6 гомоморфизмов. Например, возьмем в качестве образа алгебру подмножеств множества $\{a;\ b\}$. Тогда один из гомоморфизмов имеет вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	max	min	$(-1)\cdot\bullet$
x^ψ	$\emptyset$	$\{a;\ b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a;\ b\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}, \quad E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* $f_1, \quad f_0, \quad \max, \quad \min, \quad (-1) \cdot \bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма****, что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. $\min^{\varphi}\{\max^{\varphi}\{f_2^{\varphi};\ f_3^{\varphi}\};\ f_7^{\varphi}\} = f_7^{\varphi}$,

Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}, \quad E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* $f_1, \quad f_0, \quad \max, \quad \min, \quad (-1) \cdot \bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма****, что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. $\min^{\varphi}\{\max^{\varphi}\{f_2^{\varphi};\ f_3^{\varphi}\};\ f_7^{\varphi}\} = f_7^{\varphi}$,
$(\{f_2\} \cup \{f_3\}) \cap \{f_2;\ f_3\} = \{f_2;\ f_3\}$ — истинная формула.
Рассмотреть следующий пример или **вернуться к лекции?**

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{\quad}\}\rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры. Найти образы предикатов* $\mathcal{R}_1 \sim\ x \leq y,\quad \mathcal{R}_2 \sim\ x \neq y$ *при естественном изоморфизме этой алгебры в алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Какой из этих предикатов является коатомом булевой алгебры* $\mathcal{A}$ *(то есть атомом двойственной булевой алгебры)? Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры* $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру. Доказать, что алгебра* $\mathcal{A}$ *изоморфна булевой алгебре булевых функций от двух переменных с операциями* $\vee$, $\wedge$, $\overline{\quad}$.

Решение.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\right\rangle .$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**?

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle .$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**? Мы выделили 2 типа предикатов: **предикат-высказывание** и **предикат-функция**.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\right\rangle .$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**? Мы выделили 2 типа предикатов: **предикат-высказывание** и **предикат-функция**.

Предикаты $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ заданы как предикаты-высказывания, поэтому, видимо, описание **атомов** следует дать как предикатов-высказываний.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\ \}\rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**? Мы выделили 2 типа предикатов: **предикат-высказывание** и **предикат-функция**.

Предикаты $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ заданы как предикаты-высказывания, поэтому, видимо, описание **атомов** следует дать как предикатов-высказываний. На самом деле это непринципиально, так как перевод с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний дается **соответсвующей формулой**.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\right\rangle .$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Поэтому зададим **атомы** с помощью предикатов-функций, при этом приведем предикаты-функции для предикатов-высказываний $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, а также нулевого и единичного элементов этой булевой алгебры:

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \rangle \,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Поэтому зададим **атомы** с помощью предикатов-функций:

		0	**1**	атомы					
x	y	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	r_1	r_2
2	2	0	1	1	0	0	0	1	0
2	6	0	1	0	1	0	0	1	1
6	2	0	1	0	0	1	0	0	1
6	6	0	1	0	0	0	1	1	0

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Таким образом, в соответствии с **формулой перехода от предиката-функции к предикату-высказыванию** искомые **атомы** можно представить в виде, например, следующих предикатов-высказываний:

$$\mathcal{P}_2 \sim p_2 = 1, \quad \mathcal{P}_3 \sim p_3 = 1, \quad \mathcal{P}_4 \sim p_4 = 1, \quad \mathcal{P}_5 \sim p_5 = 1.$$

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \left\{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\right\}\right\rangle .$$

Найти образы предикатов $\mathcal{R}_1 \sim\ x \leq y,\quad \mathcal{R}_2 \sim\ x \neq y$ *при естественном изоморфизме этой алгебры в алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Решение. Имеем $r_1 = p_2 \vee p_3 \vee p_5$, поэтому под действием стандартного **изоморфизма** ψ в алгебру подмножеств множества **атомов** получаем

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\rangle\,.$$

Найти образы предикатов $\mathcal{R}_1 \sim\ x \leq y$, $\mathcal{R}_2 \sim\ x \neq y$ *при естественном изоморфизме этой алгебры в алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Решение. Имеем $r_1 = p_2 \vee p_3 \vee p_5$, поэтому под действием стандартного **изоморфизма** ψ в алгебру подмножеств множества **атомов** получаем

$$\mathcal{R}_1^{\psi} = (\mathcal{R}_2 \vee \mathcal{R}_3 \vee \mathcal{R}_5)^{\psi} = \{\mathcal{R}_2;\ \mathcal{R}_3;\ \mathcal{R}_5\}\,,$$

$$\mathcal{R}_2^{\psi} = (\mathcal{R}_3 \vee \mathcal{R}_4)^{\psi} = \{\mathcal{R}_3;\ \mathcal{R}_4\}\,,$$

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle .$$

Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру.*

Решение. Подсчитаем число гомоморфизмов в двуатомную булеву алгебру.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{\quad}\}\rangle\,.$$

Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру.*

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет»[2] только 2 атома.

[2]То есть не обратится в ноль.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \left\{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\right\}\right\rangle.$$

Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру.*

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Если бы образ исходной алгебры не был двуатомным, это число пришлось бы удвоить из-за возможности гомоморфизма в двойственную алгебру.

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Если бы образ исходной алгебры не был двуатомным, это число пришлось бы удвоить из-за возможности гомоморфизма в двойственную алгебру. В данном случае удвоения не происходит, так как в двуатомной булевой алгебре всего 4 элемента и, следовательно, **атомы** совпадают с **коатомами** (т.е. **атомами** двойственной алгебры).

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Если бы образ исходной алгебры не был двуатомным, это число пришлось бы удвоить из-за возможности гомоморфизма в двойственную алгебру. В данном случае удвоения не происходит, так как в двуатомной булевой алгебре всего 4 элемента и, следовательно, **атомы** совпадают с **коатомами** (т.е. **атомами** двойственной алгебры).

Итак, искомое число гомоморфизмов равно $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{\quad}\} \right\rangle.$$

Доказать, что алгебра $\mathcal{A}$ *изоморфна булевой алгебре булевых функций от двух переменных с операциями* $\vee$, $\wedge$, $\overline{\quad}$.

Решение. Осталось доказать изоморфность исходной булевой алгебры и алгебры булевых функций от двух переменных.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\ \}\rangle\,.$$

Доказать, что алгебра $\mathcal{A}$ *изоморфна булевой алгебре булевых функций от двух переменных с операциями* $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$.

Решение. Искомая изоморфность следует из того, что и в той, и в другой булевой алгебре содержится ровно 4 атома и, следовательно, по **теореме о классификации конечных булевых алгебр** обе они изоморфны булевой алгебре подмножеств четырехэлементного множества.

Вернуться к лекции?

Задача I.1. (Ответ приведен на стр.161.) Найти **булеву алгебру**, состоящую из минимального числа элементов.

Задача II.2. (Ответ приведен на стр.163.) Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача II.3. (Ответ приведен на стр.173.) Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача II.4. (Ответ приведен на стр.181.) Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Задача III.5. (Ответ приведен на стр.185.) Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Задача III.6. (Ответ приведен на стр.222.) Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найти **булеву алгебру**, состоящую из минимального числа элементов.

Задача 1. Найти **булеву алгебру**, состоящую из минимального числа элементов.

Ответ. Это булева алгебра, состоящая из одного элемента, играющего одновременно роль нуля и единицы.

Решение задачи 2.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1}=u+v \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
& \mathbf{0}=u*v &
\end{tikzcd}$$

Атомы=коатомы.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

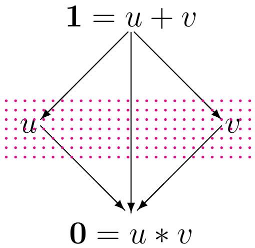
Ответ.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}
$$

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

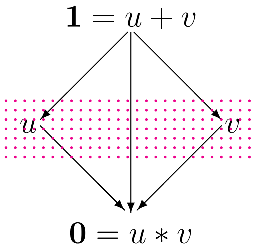


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

формулой?
графиком?
таблицей?

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

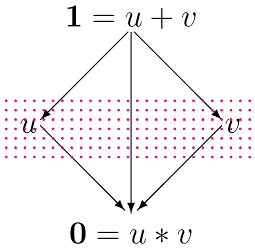


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}							

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

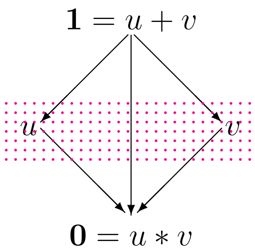


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}					$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

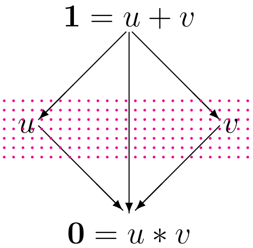


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}		$\{u\}$	$\{v\}$		$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

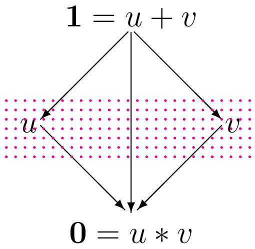


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ		$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u, v\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

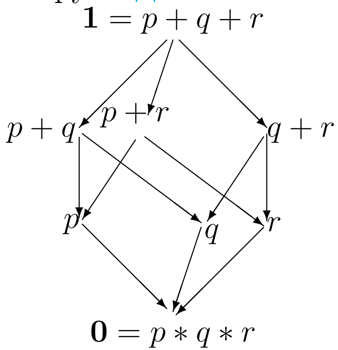
x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u, v\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Решение задачи 3.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

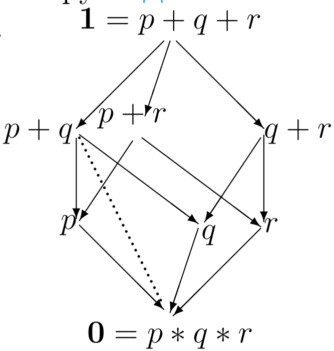
Ответ.



Петли и остальные дуги («стрелки») графа проводятся **«по транзитивности»**.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

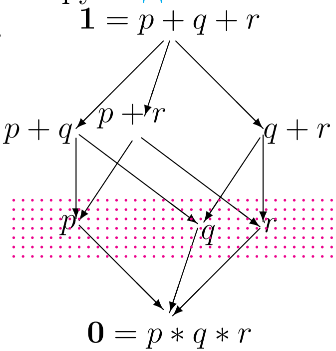
Ответ.



Петли и остальные дуги («стрелки») графа проводятся **«по транзитивности»**.
Например, такова дуга от $(a + b)$ к $\mathbf{0}$.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

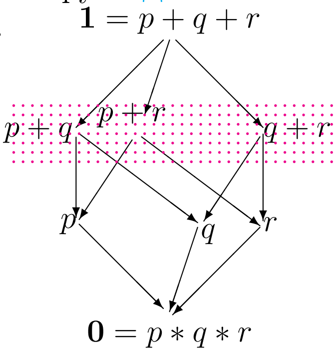
Ответ.



Атомы и

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

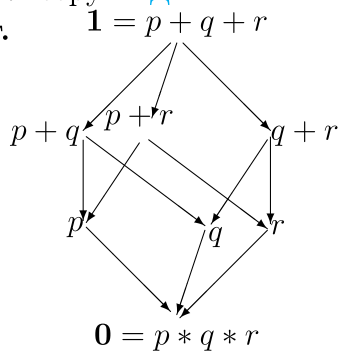
Ответ.



Атомы и коатомы.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

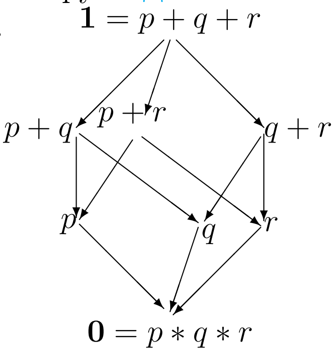


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	p	q	r	$p+q$	$p+r$	$q+r$	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}											

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

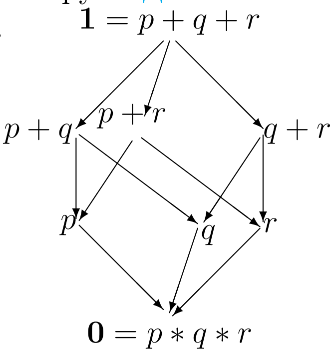


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	p	q	r	$p+q$	$p+r$	$q+r$	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}									$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

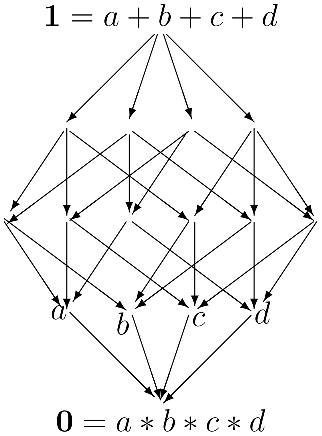
x	$\mathbf{0}$	p	q	r	$p+q$	$p+r$	$q+r$	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{\quad}$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{\quad}$

Решение задачи 4.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

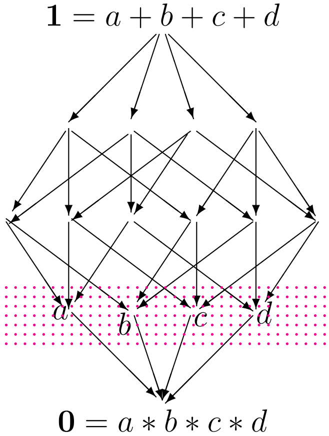
Ответ.



Остальные стрелки проводятся **«по транзитивности»**.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

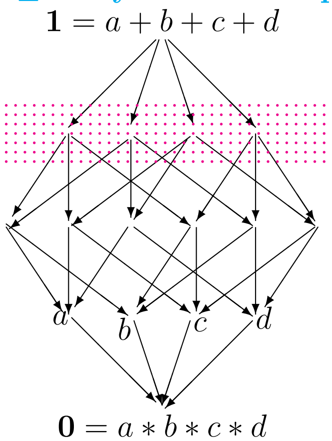
Ответ.



Атомы и

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.



Атомы и коатомы.

Решение задачи 5.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Как обычно, начнем с рассмотрения **«экстремальных случаев»**: во-первых, когда конгруенция — это отношение равенства, во-вторых, когда конгруенция — это **универсальное отношение**.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**,

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.

Задача 5. Для булевой алгебры, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все фактор-системы.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций.

Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Если $x \in C_0$ и t — такой атом, что $t \leq x$, т.е., согласно определению индуцированного отношения, $x * t = t$.

Следовательно, по определению конгруенции

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.
Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow\ (t;\ \mathbf{0}) \in T.$$

Задача 5. Для булевой алгебры, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все фактор-системы.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow\ (t;\ \mathbf{0}) \in T.$$

Таким образом, t **находится в классе** $C_0 = C(x) = C(t)$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.
Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\left\{ \begin{array}{l} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{array} \right. \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow\ (t;\ \mathbf{0}) \in T.$$

Таким образом, t **находится в классе** $C_0 = C(x) = C(t)$.
Поэтому следует в первую очередь рассматривать **атомы**, находящиеся в том же классе, что и $\mathbf{0}$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Если $x \in C(b) = C(a+b)$, то по **определению конгруенции**

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Если $x \in C(b) = C(a+b)$, и t — **атом**, отличный от a и b, то, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ b) \in T, \\ (t;\ t) \in T, \end{cases} \Rightarrow\ (x*t;\ b*t) \in T,\ \Rightarrow\ (x*t;\ \mathbf{0}) \in T,\ \Rightarrow\ x*t \in \{t,\ \mathbf{0}\} \cap \{a,\ \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Следовательно, $x*t = 0$. Поэтому, в силу **теоремы об элементах конечной булевой алгебры** либо $x = b$, либо $x = a+b$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Если $x \in C(b) = C(a+b)$, и t — **атом**, отличный от a и b, то, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ b) \in T, \\ (t;\ t) \in T, \end{cases} \Rightarrow\ (x*t;\ b*t) \in T,\ \Rightarrow\ (x*t;\ \mathbf{0}) \in T,\ \Rightarrow\ x*t \in \{t,\ \mathbf{0}\} \cap \{a,\ \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

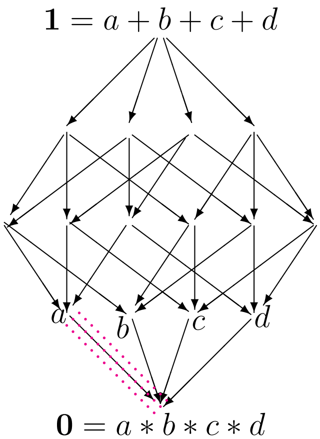
Следовательно, $x*t = 0$. Поэтому, в силу **теоремы об элементах конечной булевой алгебры** либо $x = b$, либо $x = a+b$.
Продолжая эти рассуждения, получаем, что классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},\quad \{c+d,\ a+c+d\},\quad \{b+c+d,\ a+b+c+d\},$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

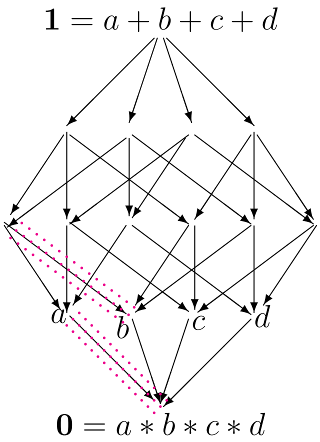
$$\{\mathbf{0},\ a\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

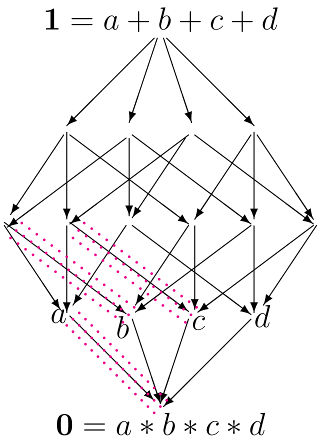
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

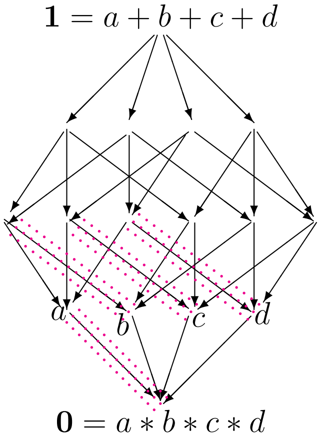
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$

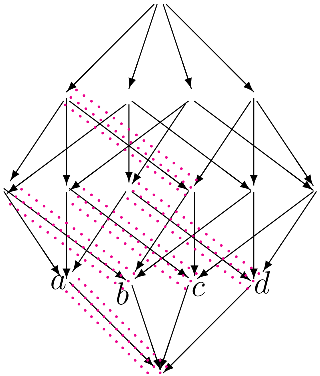


Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a\}, \quad \{b,\ a+b\}, \quad \{c,\ a+c\}, \quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},$$

$\mathbf{1} = a+b+c+d$

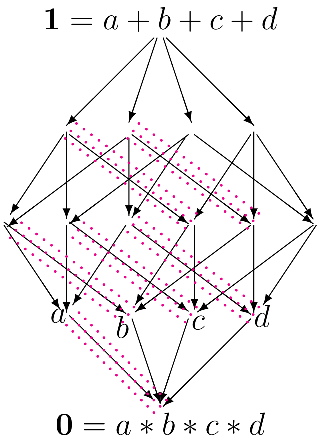


$\mathbf{0} = a*b*c*d$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

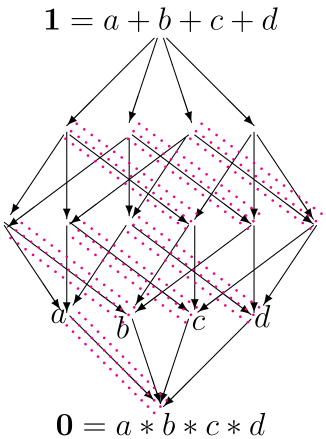
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

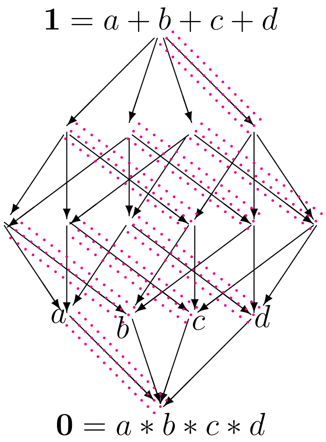
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},\quad \{c+d,\ a+c+d\},$$



Задача 5. Для булевой алгебры, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все фактор-системы.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},\quad \{c+d,\ a+c+d\},\quad \{b+c+d,\ a+b+c+d\},$$



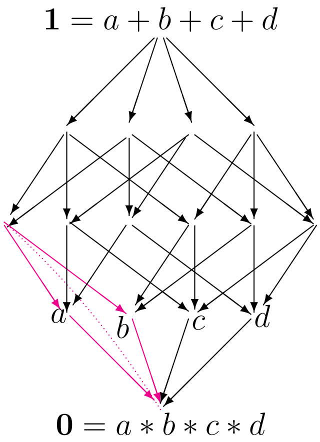
Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

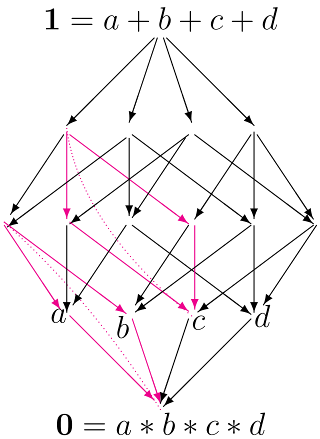
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

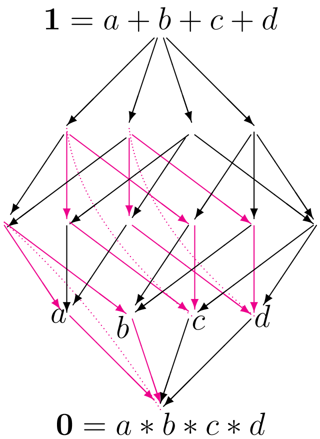
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\}, \quad \{c,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},$$



Задача 5. Для булевой алгебры, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все фактор-системы.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

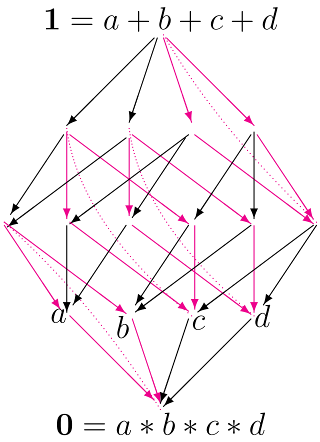
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},\quad \{d,\ a+d,\ b+d,\ a+b+d\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},\quad \{d,\ a+d,\ b+d,\ a+b+d\},$$
$$\{c+d,\ a+c+d,\ b+c+d,\ a+b+c+d\},$$



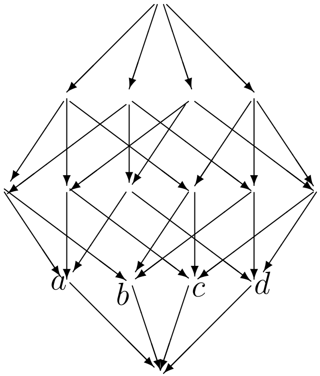
Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$\mathbf{1} = a + b + c + d$

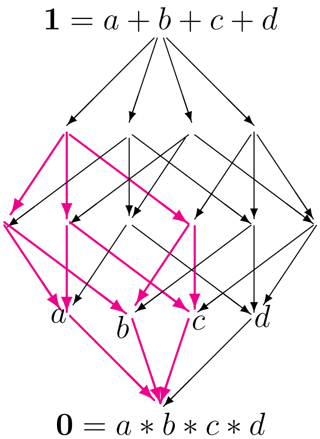


$\mathbf{0} = a * b * c * d$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

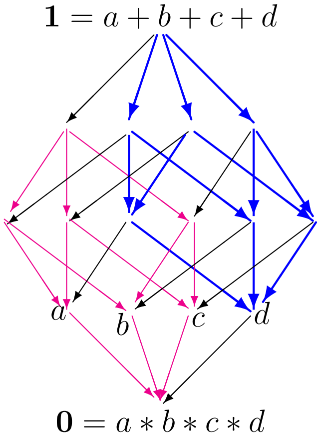
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},$$
$$\{d,\ a+d,\ b+d,\ c+d,\ a+b+d,\ a+c+d,\ b+c+d,\ a+b+c+d\},$$



Задача 5.

Решение задачи 6.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ. Сначала зададим носитель этой алгебры таблицей:

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что **0** в этой булевой алгебре является функция f_0,

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что **0** в этой булевой алгебре является функция f_0,
а **1** является

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что **0** в этой булевой алгебре является функция f_0,
а **1** является функция f_{15}.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является функция f_0,
а $\mathbf{1}$ является функция f_{15}.
Операцию $\overline{}$ можно задать формулой:

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является функция f_0,
а $\mathbf{1}$ является функция f_{15}.
Операцию $\overline{}$ можно задать формулой: $\overline{f(x,y)} = 1 - f(x,y)$.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\; \Leftrightarrow$$

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow$$

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in \{0;\ 1\}\; p(x,y) \leq q(x,y).$$

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in \{0;\ 1\}\ p(x,y) \leq q(x,y).$$

Следовательно, **атомами** этой булевой алгебры являются функции

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

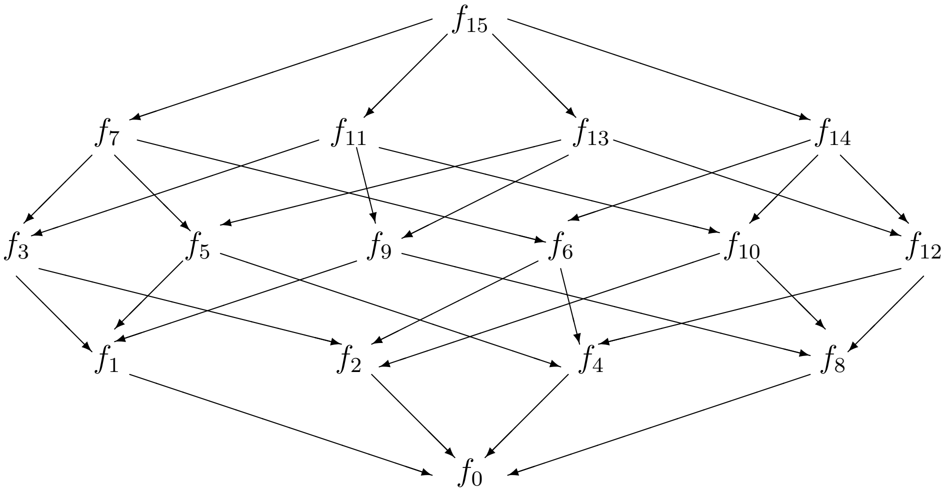
$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall x,y \in \{0;\ 1\}\ p(x,y) \leq q(x,y).$$

Следовательно, **атомами** этой булевой алгебры являются функции $f_1, f_2, f_4(x,y), f_8(x,y)$.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1



Как и на других изображениях графа индуцированного отношения $\geq$, приведенных в теме «Булевы алгебры», для упрощения чертежа мы не изобразили петли и дуги (т.е. «стрелки»), которые можно провести «по транзитивности».

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим формулой? графиком? таблицей?

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{f_1\}$	$\{f_2\}$	$\{f_1, f_2\}$	$\{f_4\}$	$\{f_1, f_4\}$	$\{f_2, f_4\}$	$\{f_1, f_2, f_4\}$	$\{f_8\}$	$\{f_1, f_8\}$	$\{f_2, f_8\}$	$\{f_1, f_2, f_8\}$	$\{f_4, f_8\}$	$\{f_1, f_4, f_8\}$	$\{f_2, f_4, f_8\}$	$\{f_1, f_2, f_4, f_8\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?