Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Основы тензорной алгебры

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 3-е, испр. и доп.

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2010

I. Введение

Тензорное исчисление — тема, традиционно «наводящая ужас» на студентов.

I. Введение

Тензорное исчисление — тема, традиционно «наводящая ужас» на студентов.

Во-первых, определение, часто даваемое в учебниках по физике, механике сплошных сред и др. (тензор — объект ранга r...), не совсем корректно. Мы приведем корректные определения, принятые в некоторых областях алгебры.

I. Введение

Тензорное исчисление — тема, традиционно «наводящая ужас» на студентов.

Во-первых, определение, часто даваемое в учебниках по физике, механике сплошных сред и др. (тензор — объект ранга r...), не совсем корректно.

Во-вторых, сам термин «тензор» используется во многих смыслах.

В этой связи мы говорим о тензор-функции, тензор-массиве и тензор-векторе. Имея тензор-функцию, легко написать тензор-массив или тензор-вектор, и наоборот.

I. Введение

Тензорное исчисление — тема, традиционно «наводящая ужас» на студентов.

Во-первых, определение, часто даваемое в учебниках по физике, механике сплошных сред и др. (тензор — объект ранга r...), не совсем корректно.

Во-вторых, сам термин «тензор» используется во многих смыслах.

Мы будем говорить просто «тензор», когда смысл ясен из контекста.

I. Введение

Все рассматриваемые линейные пространства предполагаются конечномерными. В примерах все линейные пространства рассмотрены над полем действительных чисел.

II. Мотивировка

До сих пор при работе с линейными пространствами (в курсе алгебры мы рассматриваем только конечномерные линейные пространства) одним из основных инструментов был перенос рассматриваемых в линейном пространстве U конструкций (векторов, линейных операторов, скалярного произведения и других билинейных форм и т.п.) в «стандартное» линейное пространство $\mathbb{R}^n$. Как правило, введенным в U «конструкциям» в $\mathbb{R}^n$ соответствуют «конструкции», введенные с помощью некоторых матриц.

II. Мотивировка

Пусть $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства U.

- Вектору $\mathbf{x}$ соответствует **столбец его координат** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{Б}$, коэффициенты которого определяются формулой $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$.

II. Мотивировка

Пусть $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства U.

- Вектору $\mathbf{x}$ соответствует **столбец его координат** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- Линейному оператору $\hat{L}$ соответствует **матрица линейного оператора** в базисе $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$: $\quad \hat{L}(\mathbf{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} l_{ji}\mathbf{e}_j$, с помощью которой оператор в $\mathbf{R}^n$ вводится «стандартной формулой» $\left[\hat{L}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{Б}} = L_{\mathbf{Б}} \cdot [\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$.

II. Мотивировка

Пусть $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства U.

- Вектору $\mathbf{x}$ соответствует **столбец его координат** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- Линейному оператору $\hat{L}$ соответствует **матрица линейного оператора** L.

- Билинейной форме f — **матрица этой формы** в базисе $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$: $\quad f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

II. Мотивировка

Пусть $\mathbf{Б} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства U.

- Вектору $\mathbf{x}$ соответствует **столбец его координат** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Линейному оператору $\hat{L}$ соответствует **матрица линейного оператора** L.
- Билинейной форме f — **матрица этой формы**, с помощью которой находится значение формы на векторах.
- Подпространству V — матрица коэффициентов системы линейных уравнений, задающих это подпространство $V = \left\{\mathbf{x} \,\middle|\, A[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}} = [\mathbf{0}]_{\mathbf{Б}}\right\}$.

II. Мотивировка

Таким образом, судя по нашему опыту (правда, небольшому) традиционный вопрос «что соответствует данной конструкции в $\mathbb{R}^n$» можно уточнить следующим образом: какая матрица соответствует данной «конструкции», и каким образом матрица «реализует» образ в $\mathbb{R}^n$ этой «конструкции».

Обычно в науке бывает очень полезным рассмотрение вопроса, в некотором смысле обратного к «традиционному», что является одним из примеров применения **стратегии смены ролей и приоритетов**.

II. Мотивировка

Таким образом, судя по нашему опыту (правда, небольшому) традиционный вопрос «что соответствует данной конструкции в $\mathbb{R}^n$» можно уточнить следующим образом: какая матрица соответствует данной «конструкции», и каким образом матрица «реализует» образ в $\mathbb{R}^n$ этой «конструкции».

Обычно в науке бывает очень полезным рассмотрение вопроса, в некотором смысле обратного к «традиционному», что является одним из примеров применения **стратегии смены ролей и приоритетов**.

В данном случае можно его сформулировать примерно так: можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

II. Мотивировка

Можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

Коэффициенты матрицы, соответствующей данной «конструкции», зависят от базиса (столбец координат вектора в разных базисах, матрица линейного оператора и билинейной, квадратичной формы в разных базисах и т.п.).

II. Мотивировка

Можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

Коэффициенты матрицы, соответствующей данной «конструкции», зависят от базиса (столбец координат вектора в разных базисах, матрица линейного оператора и билинейной, квадратичной формы в разных базисах и т.п.).

При этом каждый раз удавалось вычислять эту матрицу в другом базисе, используя только серию умножений на **матрицу перехода**, и на матрицу «обратного» перехода и транспонированные к ним.

II. Мотивировка

Можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

Вычислять эту матрицу в другом базисе удавалось, используя только серию умножений на **матрицу перехода**, и на матрицу «обратного» перехода и транспонированные к ним. Например,

- согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** для столбца координат $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$;

II. Мотивировка

Можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

Вычислять эту матрицу в другом базисе удавалось, используя только серию умножений на **матрицу перехода**, и на матрицу «обратного» перехода и транспонированные к ним. Например,

- согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** для столбца координат $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$;
- согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}L_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$;

II. Мотивировка

Можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

Вычислять эту матрицу в другом базисе удавалось, используя только серию умножений на **матрицу перехода**, и на матрицу «обратного» перехода и транспонированные к ним. Например,

- согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** для столбца координат $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$;
- согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}L_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$;
- согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах** $F_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}F_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$.

II. Мотивировка

Можно ли догадаться, что данные матрицы «реализуют» в $\mathbb{R}^n$ некоторую «конструкцию» линейного пространства U?

Вычислять эту матрицу в другом базисе удавалось, используя только серию умножений на **матрицу перехода**, и на матрицу «обратного» перехода и транспонированные к ним.

Поэтому вопрос, видимо, следует уточнить следующим образом. Пусть каждому базису **Б** соответствует некоторая матрица $M(\textbf{Б})$. Как по закону изменения матрицы при переходе в другой базис выяснить, соответствует ли этому способу выбора матрицы $M(\textbf{Б})$ какой-либо «объект» в линейном пространстве или нет?

II. Мотивировка

Пусть каждому базису **Б** соответствует некоторая матрица $M(\mathbf{Б})$. Как по закону изменения матрицы при переходе в другой базис выяснить, соответствует ли этому способу выбора матрицы $M(\mathbf{Б})$ какой-либо «объект» в линейном пространстве или нет?

Рассмотренные нами примеры говорят о том, что в качестве критерия можно взять следующее правило: при «хорошем выборе» матрицы $M(\mathbf{Б})$ матрица $M(\mathbf{Б'})$ вычисляется с помощью умножений на матрицу перехода $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ или матрицу обратного перехода $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, или транспонированные к ним.

II. Мотивировка

Пусть каждому базису **Б** соответствует некоторая матрица $M(\mathbf{Б})$. Как по закону изменения матрицы при переходе в другой базис выяснить, соответствует ли этому способу выбора матрицы $M(\mathbf{Б})$ какой-либо «объект» в линейном пространстве или нет?

Рассмотренные нами примеры говорят о том, что в качестве критерия можно взять следующее правило: при «хорошем выборе» матрицы $M(\mathbf{Б})$ матрица $M(\mathbf{Б'})$ вычисляется с помощью умножений на матрицу перехода $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$ или матрицу обратного перехода $T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, или транспонированные к ним.

Понятно, что эту идею надо хорошо сформулировать. В данном случае для реализации этой идеи разработан фактически специальный язык, к изучению основ которого мы приступаем.

II. Мотивировка

В рамках тензорного исчисления язык матричных операций в силу некоторых причин не используется. Это связано, в частности, с тем, что приходится рассматривать массивы не только одномерные (каждый элемент характеризуется номером строки), и двумерные (каждый элемент характеризуется парой чисел: номер строки и номер столбца), но и массивы большей размерности[1]. Попробуем сформулировать грамматические правила этого языка, используя в качестве основы рассмотренные нами примеры.

[1]Термин *размерность* в данном случае не имеет отношения к размерности линейного пространства и используется нами сейчас в «программистском» понимании, в тензорном исчислении, как мы увидим в дальнейшем, ему соответствует термин *ранг*. «В утешение» отметим, что термин *ранг* в тензорном исчислении не имеет никакого отношения к **рангу матрицы**.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$, и $B = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = T^{-1}_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, и $B = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$.

Согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б'}} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$, то есть $x'_i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}x_p$.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, и $B = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$.

Согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б'}} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$, то есть $x'_i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}x_p$.

Согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б'}} = BL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $l'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip}l_{pq}a_{qj}$.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, и $B = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$.

Согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б'}} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$, то есть $x'_i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}x_p$.

Согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б'}} = BL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $l'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip}l_{pq}a_{qj}$.

Согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах** $F_{\mathbf{Б'}} = A^tL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $f'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} a_{pi}f_{pq}a_{qj}$.

Отметим первую трудность: нам надо как-то различать, когда суммирование ведется по индексу, обозначающему строки или столбцы матрицы A, а когда — матрицы B.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, и $B = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$.

Согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б'}} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$, то есть $x'_i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}x_p$.

Согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б'}} = BL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $l'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip}l_{pq}a_{qj}$.

Согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах** $F_{\mathbf{Б'}} = A^t L_{\mathbf{Б}} A$, то есть $f'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} a_{pi}f_{pq}a_{qj}$.

Примем следующее правило: если при переходе от «старого базиса» к «новому базису» суммирование надо вести по индексу, являющемуся общим для **матрицы «объекта»** и **матрицы A**, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать **внизу**,

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$, и $B = T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$.

Согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}'} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$, то есть $x'_i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}x_p$.

Согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б}'} = BL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $l'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip}l_{pq}a_{qj}$.

Согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах** $F_{\mathbf{Б}'} = A^t L_{\mathbf{Б}} A$, то есть $f'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} a_{pi}f_{pq}a_{qj}$.

Примем следующее правило: если при переходе от «старого базиса» к «новому базису» суммирование надо вести по индексу, являющемуся общим для **матрицы «объекта»** и **матрицы B**, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать **наверху**.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$, и $B = T_{\mathbf{Б'}\to\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б'}}$.

Согласно **теореме о координатах вектора в разных базисах** $[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б'}} = B[\mathbf{x}]_{\mathbf{Б}}$, то есть $x'_i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}x_p$.

Согласно **теореме о матрице оператора в другом базисе** $L_{\mathbf{Б'}} = BL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $l'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip}l_{pq}a_{qj}$.

Согласно **теореме о матрице билинейной формы в разных базисах** $F_{\mathbf{Б'}} = A^tL_{\mathbf{Б}}A$, то есть $f'_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} a_{pi}f_{pq}a_{qj}$.

При этом соглашении приведенные равенства для координат вектора и компонент матриц линейного оператора приобретают, соответственно, вид $\acute{x}^i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip}\cdot x^p$ и $\acute{l}^i{}_j = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip}\cdot l^p{}_q\cdot a_{qj}$.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$, и $B = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}}$.

Если суммирование идет по индексу, общему для матрицы «объекта» и матрицы A, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать внизу, а если индекс — общий для матрицы «объекта» и матрицы B, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать наверху.

При этом соглашении приведенные равенства для координат вектора и компонент матриц линейного оператора приобретают, соответственно, вид $\acute{x}^i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip} \cdot x^p$ и $\acute{l}^i{}_j = \sum\limits_{p=1}^{n} \sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip} \cdot l^p{}_q \cdot a_{qj}$.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$, и $B = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = T^{-1}_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$.

Если суммирование идет по индексу, общему для матрицы «объекта» и матрицы A, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать внизу, а если индекс — общий для матрицы «объекта» и матрицы B, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать наверху.

При этом соглашении приведенные равенства для координат вектора и компонент матриц линейного оператора приобретают, соответственно, вид $\acute{x}^i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip} \cdot x^p$ и $\acute{l}^i{}_j = \sum\limits_{p=1}^{n} \sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip} \cdot l^p{}_q \cdot a_{qj}$.

Неприятно, что в левой части последнего равенства индекс i стоит наверху, а в правой — внизу.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\text{Б}\to\text{Б'}}$, и $B = T_{\text{Б'}\to\text{Б}} = T^{-1}_{\text{Б}\to\text{Б'}}$.

Если суммирование идет по индексу, общему для матрицы «объекта» и матрицы A, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать внизу, а если индекс — общий для матрицы «объекта» и матрицы B, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать наверху.

При этом соглашении приведенные равенства для координат вектора и компонент матриц линейного оператора приобретают, соответственно, вид $\acute{x}^i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip} \cdot x^p$ и $\acute{l}^i{}_j = \sum\limits_{p=1}^{n} \sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip} \cdot l^p{}_q \cdot a_{qj}$.

Поэтому лучше и у матрицы перехода номер строки поставить наверху.

II.1. Мотивировка введения обозначений

Зафиксируем два базиса: **Б** и **Б'**. Для краткости для **матриц перехода** положим $A = T_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$, и $B = T_{\textbf{Б'}\to\textbf{Б}} = T^{-1}_{\textbf{Б}\to\textbf{Б'}}$.

Если суммирование идет по индексу, общему для матрицы «объекта» и матрицы A, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать внизу, а если индекс — общий для матрицы «объекта» и матрицы B, то у матрицы «объекта» этот индекс будем писать наверху.

При этом соглашении приведенные равенства для координат вектора и компонент матриц линейного оператора приобретают, соответственно, вид $\acute{x}^i = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{ip} \cdot x^p$ и $\acute{l}^i{}_j = \sum\limits_{p=1}^{n} \sum\limits_{q=1}^{n} b_{ip} \cdot l^p{}_q \cdot a_{qj}$.

Поэтому лучше и у матрицы перехода номер строки поставить наверху. Равенства принимают вид: $\acute{x}^i = \sum\limits_{p=1}^{n} b^i{}_p \cdot x^p$,

$$\acute{l}^i{}_j = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} b^i{}_p \cdot l^p{}_q \cdot a^q{}_j, \quad f'_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a^p{}_i \cdot f_{pq} \cdot a^q{}_j.$$

II.2. Некоторые обозначения

Буквы t и T для обозначения матрицы перехода в тензорном исчислении использовать неудобно, так как ими обозначают тензоры и их компоненты (по первой букве слова «тензор»).

Поэтому в тензорном исчислении матрицу перехода из базиса **Б** в базис **Б'** обычно обозначают через A, а матрицу обратного перехода — буквой B. Компоненты этих матриц обозначаются, соответственно, через $a^i{}_j$ и $b^i{}_j$.

Очень важным в тензорном исчислении является также обозначение одной функции: $\delta^i_j, \delta_{ij}, \delta^{ij}$ — это так называемый **символ Кронекера**, равный 1 при $i = j$, и 0 в противном случае.

II.3. Некоторые грамматические правила

1. Нам придется индексировать элементы массивов как нижними индексами, так и верхними индексами. Каждый раз из контекста будет ясно, что имеется в виду под T^2 — число $T \cdot T$ или второй элемент столбца, элементы которого обозначены, как $T^1, T^2, \ldots, T^n$.

II.3. Некоторые грамматические правила

1. Нам придется индексировать элементы массивов как нижними индексами, так и верхними индексами.

2. (*Соглашение Эйнштейна*). Если в выражении встречается повторяющийся индекс, то по нему производится суммирование (если не оговорено противное). То есть мы будем писать $x_i \cdot y^i_j$ вместо $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y^i_j$. Индекс j стоит «в гордом одиночестве», поэтому суммирования по нему не производится.

II.3. Некоторые грамматические правила

1. Нам придется индексировать элементы массивов как нижними индексами, так и верхними индексами.

2. (*Соглашение Эйнштейна*). Если в выражении встречается повторяющийся индекс, то по нему производится суммирование (если не оговорено противное).

3. Если, например, u_{ij}^k (где i, j, k — индексы) — элементы некоторого массива, то $\left(u_{ij}^k\right)$ обозначает весь массив.

II.3. Некоторые грамматические правила

1. Нам придется индексировать элементы массивов как нижними индексами, так и верхними индексами.
2. (*Соглашение Эйнштейна*). Если в выражении встречается повторяющийся индекс, то по нему производится суммирование (если не оговорено противное).
3. Если, например, u_{ij}^k (где i, j, k — индексы) — элементы некоторого массива, то $\left(u_{ij}^k\right)$ обозначает весь массив.
4. Элементы массивов у нас будут индексироваться и сверху, и снизу. В связи с этим могут возникнуть некоторые проблемы с матричной записью массива. В самом деле, массив можно задать так: $v_1^1 = 1, v_1^2 = -3, v_2^1 = 0, v_2^2 = 2$. Но, разумеется, более удобной будет матричная запись: $\left(v^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

II.3. Некоторые грамматические правила

Массив можно задать так: $v_1^1 = 1$, $v_1^2 = -3$, $v_2^1 = 0$, $v_2^2 = 2$. Более удобной будет матричная запись: $(v^i{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

К сожалению, при небрежной записи бывает невозможно понять, какой индекс стоит первым: i или j. Чтобы подчеркнуть, что у нас i — второй индекс, т.е. номер столбца, мы перед ним поставим точку, обозначающую «отсутствующий» первый индекс (этот индекс стоит внизу). Итак, мы будем в дальнейшем писать: $(v^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

II.3. Некоторые грамматические правила

Отметим еще, что массивы с числом индексов, большим 2, мы будем записывать в виде клеточной матрицы, например:

$$\left(u_{i\bullet k}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{1} & u_{12}^{1} \\ u_{11}^{2} & u_{12}^{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{21}^{1} & u_{22}^{1} \\ u_{21}^{2} & u_{22}^{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, массив $\left(X_{i\bullet kpq}^{\bullet j}\right)$ представляет собой матрицу-столбец $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \ldots \\ U_n \end{pmatrix}$, элементами которой являются квадратные матрицы размерности $n \times n$ (значение n каждый раз будет ясно из контекста): $U_i = \begin{pmatrix} V_{i\bullet 1}^{\bullet 1} & \ldots V_{i\bullet n}^{\bullet 1} \\ & \ldots & \\ V_{i\bullet 1}^{\bullet n} & \ldots V_{i\bullet n}^{\bullet n} \end{pmatrix}$; причем $V_{i\bullet k}^{\bullet j}$ являются квадратными матрицами размерности $n \times n$ с числовыми коэффициентами.

II.3. Некоторые грамматические правила

При этом последовательность индексов $ijkpq$ разбивается на «пары» индексов (последняя «пара» может быть неполной), начиная с крайнего справа: $\underbrace{i}_{3}\underbrace{jk}_{2}\underbrace{pq}_{1}$, причем индекс i (третья, неполная, «пара») обозначает номер матрицы U_i, вторая пара индексов, jk, «отвечает» за «расположение элемента» $V_{i\bullet k}^{\bullet j}$ в матрице U_i.

II.3. Некоторые грамматические правила

При этом последовательность индексов $ijkpq$ разбивается на «пары» индексов (последняя «пара» может быть неполной), начиная с крайнего справа: $\underbrace{i}_{3}\underbrace{jk}_{2}\underbrace{pq}_{1}$, причем индекс i (третья, неполная, «пара») обозначает номер матрицы U_i, вторая пара индексов, jk, «отвечает» за «расположение элемента» $V_{i\bullet k}^{\bullet j}$ в матрице U_i.

Наконец, элементы pq первой пары определяют «расположение» числа $X_{i\bullet kpq}^{\bullet j}$ в матрице $V_{i\bullet k}^{\bullet j}$.

II.3. Некоторые грамматические правила

Заметим, что аккуратная расстановка таких «точек» необходима только при переходе к матричной записи массива, в случае же формул типа $x^i = b^i_{\bullet j} x^j$ точку перед j можно и не ставить. Таким образом, формула $x^i = b^i_j x^j$ является грамматически правильной, и точка нужна только при задании массива матрицей: $(T^i_{\bullet j}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. В этом случае запись $(T^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ была бы двусмысленной.

II.3. Некоторые грамматические правила

1. Нам придется индексировать элементы массивов как нижними индексами, так и верхними индексами.

2. (*Соглашение Эйнштейна*). Если в выражении встречается повторяющийся индекс, то по нему производится суммирование (если не оговорено противное).

3. Если, например, u_{ij}^{k} (где i, j, k — индексы) — элементы некоторого массива, то $\left(u_{ij}^{k}\right)$ обозначает весь массив.

4. Правило «расстановки точек» для установления порядка следования индексов в матричной записи массива.

5. Матрицы перехода из базиса **Б** в **Б**$'$ и из **Б**$'$ в **Б** индексируются следующим образом: $A = \left(a^{i}_{\bullet j}\right)$, $B = \left(b^{i}_{\bullet j}\right)$.

Рассмотреть пример?

III. Определения тензора

Мы рассмотрим два основных варианта определения тензора, которые мы назовем (название не является общепринятым) *тензор-функция* и *тензор-вектор*. Как вариант задания тензора можно рассматривать *тензор-массив*.

III.1. Тензор-функция

Определение 1. *Пусть дано линейное пространство* V *размерности* n *над полем* K. *Функция* T, *областью определения которой является множество базисов пространства* V, *а областью значений — множество массивов* $\left(T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$ *элементов из* K, *называется* **тензором ранга** r *(где* $r = k + m$*),* m *раз* **ковариантным**, k *раз* **контравариантным**, *если для любых двух базисов* **Б** *и* **Б**$'$ *пространства* V *элементы массивов* $\left(T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$ *и* $\left(\acute{T}^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$, *являющихся значениями функции* T *на базисах* **Б** *и* **Б**$'$ *соответственно, связаны* **тензорным законом**:

$$\acute{T}^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m} = a^{p_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot a^{p_m}_{i_m} \cdot b^{j_1}_{q_1} \cdot b^{j_2}_{q_2} \cdot \ldots b^{j_k}_{q_k} \cdot T^{q_1 \dots q_k}_{p_1 \dots p_m}, \tag{1}$$

где $\left(a^i_{\bullet j}\right)$ *— матрица перехода из* **Б** *в* **Б**$'$, $\left(b^i_{\bullet j}\right)$ *— матрица обратного перехода.*

Рассмотреть пример?

III.2. Примеры тензоров

Вектору обычно сопоставляется контравариантный тензор ранга 1, каждому базису ставящий в соответствие **столбец координат** данного вектора в этом базисе. Мы показали, что эта функция является контравариантым тензором ранга 1.

III.2. Примеры тензоров

Линейному оператору обычно сопоставляется смешанный тензор ранга 2, каждому базису ставящий в соответствие **матрицу этого линейного оператора** в данном базисе. Мы показали, что эта функция является смешанным тензором ранга 2.

III.2. Примеры тензоров

Билинейной форме обычно сопоставляется дважды ковариантный тензор ранга 2, каждому базису ставящий в соответствие **матрицу этой билинейной формы** в данном базисе. *М*ы показали, что эта функция является дважды ковариантным тензором ранга 2.

III.2. Примеры тензоров

Квадратичной форме обычно сопоставляется дважды ковариантный тензор ранга 2, каждому базису ставящий в соответствие **матрицу данной квадратичной формы** в этом базисе. Мы показали, что эта функция является дважды ковариантным тензором ранга 2.

III.2. Примеры тензоров

Укажем смысл некоторых фраз, нередко используемых в литературе и профессиональном общении:

III.2. Примеры тензоров

Замечание 1 (о смысле некоторых фраз).

- Вектор v — это контравариантный тензор ранга 1: *базису сопоставляется* ***столбец координат*** *вектора* v.
- Линейный оператор $\hat{L}$ — это смешанный тензор ранга 2: *базису сопоставляется* ***матрица линейного оператора*** $\hat{L}$.
- Билинейная форма — это дважды ковариантный тензор ранга 2: *базису сопоставляется* ***матрица данной билинейной формы***.
- Квадратичная форма — это дважды ковариантный тензор ранга 2: *базису сопоставляется* ***матрица данной квадратичной формы***.

Рассмотреть пример?

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе.

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе. Например, при $r = 0$ получаем скаляр (он имеет постоянное значение во всех базисах),

при $r = 1$

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе. Например, при $r = 0$ получаем скаляр (он имеет постоянное значение во всех базисах),

при $r = 1$ — вектор-столбец,

$r = 2$

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе. Например, при $r = 0$ получаем скаляр (он имеет постоянное значение во всех базисах),

при $r = 1$ — вектор-столбец,

$r = 2$ — матрицу,

$r = 3$

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе. Например, при $r = 0$ получаем скаляр (он имеет постоянное значение во всех базисах),

при $r = 1$ — вектор-столбец,

$r = 2$ — матрицу,

$r = 3$ — клеточную матрицу-столбец, элементами которой являются «обычные» матрицы размерности $n \times n$, и т.п.

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе.

Размерность же определяет пределы изменения значений индексов, то есть «объем» массива.

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе.

Размерность же определяет пределы изменения значений индексов, то есть «объем» массива.

Например, пусть $r = 2$. Тогда массив компонент тензора в любом базисе представляет собой

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе.

Размерность же определяет пределы изменения значений индексов, то есть «объем» массива.

Например, пусть $r = 2$. Тогда массив компонент тензора в любом базисе представляет собой матрицу размерности $n \times n$, где n — размерность пространства.

III.3. Размерность и ранг

Следует различать *размерность пространства*, в котором задан тензор, и *ранг тензора*.

Ранг r тензора определяет структуру массива его компонент в любом базисе.

Размерность же определяет пределы изменения значений индексов, то есть «объем» массива.

Например, пусть $r = 2$. Тогда массив компонент тензора в любом базисе представляет собой матрицу размерности $n \times n$, где n — размерность пространства.

Таким образом, уменьшение n приводит к уменьшению размерности матрицы, в то время как уменьшение r — к изменению структуры массива (до вектор-столбца или даже скаляра).

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это функция.

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это функция.

Стандартные способы задания функции: график,

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это функция.

Стандартные способы задания функции: график, таблица,

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это функция.

Стандартные способы задания функции: график, таблица, формула.

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это функция.

Стандартные способы задания функции: график, таблица, формула.

Пусть нам известно строение тензора (то есть количество ко- и контравариантных индексов и порядок перечисления элементов) и массив его компонент в некотором фиксированном базисе **Б**.

III.4. Тензор-массив

Нужны *типовые способы задания тензора*.

Итак, согласно предыдущему определению, тензор — это функция.

Стандартные способы задания функции: график, таблица, формула.

Пусть нам известно строение тензора (то есть количество ко- и контравариантных индексов и порядок перечисления элементов) и массив его компонент в некотором фиксированном базисе **Б**.

Тогда, если взять любой базис $\mathbf{Б}'$, то массив компонент этого тензора в $\mathbf{Б}'$ (то есть значение тензор-функции на базисе $\mathbf{Б}'$) легко найти с помощью **тензорного закона.**

III.4. Тензор-массив

Определение 2. *Массив компонент тензора T в каком-либо фиксированном базисе при фиксированном строении тензора и порядке перечисления индексов (в соответствии с правилом 4, стр. 42) мы будем называть* **тензором-массивом**.

III.4. Тензор-массив

Определение 2. *Массив компонент тензора T в каком-либо фиксированном базисе при фиксированном строении тензора и порядке перечисления индексов (в соответствии с правилом 4, стр. 42) мы будем называть* **тензором-массивом.**

Таким образом, фраза «пусть дан тензор $\left(T_{i}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$» означает, что этот тензор задан, как тензор-массив второго ранга, ко-контравариантный. При этом данный тензор пока не задан полностью, поскольку не указано, какому базису соответствуют эти компоненты. Правильнее написать $T(\mathbf{Б}) = \left(T_{i}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, где **Б** — некоторый базис.

III.4. Тензор-массив

Определение 2. *Массив компонент тензора T в каком-либо фиксированном базисе при фиксированном строении тензора и порядке перечисления индексов (в соответствии с правилом 4, стр. 42) мы будем называть* **тензором-массивом.**

В дальнейшем, как правило, если базис не указан, мы будем считать, что основное пространство — это $\mathbb{R}^n$ (для указанного выше примера $\mathbb{R}^3$), и данные компоненты соответствуют естественному базису (в примере выше это $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Рассмотреть пример?

IV. Тензор-вектор

Оказывается, тензор-массив — не единственный, и не всегда самый удобный способ задания тензор-функции. В целом ряде приложений возникают и другие. Среди них наиболее важными являются полилинейные формы и тензор-вектор. О полилинейных формах мы в данном пособии говорить не будем, а вот без тензор-вектора нам не обойтись. Рассмотрим несколько новых понятий.

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Пусть U и V — два линейных пространства над полем K (как правило, в приложениях K — это либо поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел). Рассмотрим множество формальных выражений вида $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_s \otimes v_s$, где все u_i принадлежат U, и v_i принадлежат V, s — произвольное натуральное число.

В этих выражениях знаки $\otimes$ и $+$ не обозначают пока никаких операций, таким образом, множество W — это просто множество «слов» такого вида. Плохо, конечно, что знак $+$ уже «занят» в U и в V. Впрочем, он в этих пространствах все равно может иметь разный смысл, но это не приводит к недоразумениям. Каждый раз из контекста будет ясно, какой $+$ имеется в виду.

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Пусть U и V — два линейных пространства над полем K (как правило, в приложениях K — это либо поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел). Рассмотрим множество формальных выражений вида $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_s \otimes v_s$, где все u_i принадлежат U, и v_i принадлежат V, s — произвольное натуральное число.

На множестве W определим теперь операцию сложения элементов (вновь обозначаемую многоликим символом $+$) и операцию умножения на элементы из поля K следующими правилами.

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Пусть U и V — два линейных пространства над полем K (как правило, в приложениях K — это либо поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел). Рассмотрим множество формальных выражений вида $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_s \otimes v_s$, где все u_i принадлежат U, и v_i принадлежат V, s — произвольное натуральное число.

Если $w_1 = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_p \otimes v_p$ и $w_2 = u'_1 \otimes v'_1 + u'_2 \otimes v'_2 + \ldots + u'_q \otimes v'_q$, то положим

$$w_1 + w_2 = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_p \otimes v_p + u'_1 \otimes v'_1 + u'_2 \otimes v'_2 + \ldots + u'_q \otimes v'_q,$$

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Пусть U и V — два линейных пространства над полем K (как правило, в приложениях K — это либо поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел). Рассмотрим множество формальных выражений вида $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_s \otimes v_s$, где все u_i принадлежат U, и v_i принадлежат V, s — произвольное натуральное число.

Если $w_1 = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \ldots + u_p \otimes v_p$, то положим для любого λ из K

$$\lambda \cdot w_1 = (\lambda \cdot u_1) \otimes v_1 + (\lambda \cdot u_2) \otimes v_2 + \ldots + (\lambda \cdot u_p) \otimes v_p.$$

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Определим на W следующее правило отождествления элементов: элементы w_1 и w_2 считаются **равными**, если w_2 можно получить из w_1 с помощью цепочки преобразований, каждое из которых является преобразованием одного из следующих трех типов:

1. $u \otimes v + u' \otimes v' = u' \otimes v' + u \otimes v$;

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Определим на W следующее правило отождествления элементов: элементы w_1 и w_2 считаются **равными**, если w_2 можно получить из w_1 с помощью цепочки преобразований, каждое из которых является преобразованием одного из следующих трех типов:

1. $u \otimes v + u' \otimes v' = u' \otimes v' + u \otimes v$;
2. $(\lambda \cdot u) \otimes v = u \otimes (\lambda \cdot v)$;

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Определим на W следующее правило отождествления элементов: элементы w_1 и w_2 считаются **равными**, если w_2 можно получить из w_1 с помощью цепочки преобразований, каждое из которых является преобразованием одного из следующих трех типов:

1. $u \otimes v + u' \otimes v' = u' \otimes v' + u \otimes v$;
2. $(\lambda \cdot u) \otimes v = u \otimes (\lambda \cdot v)$;
3. $u \otimes v + u \otimes v' = u \otimes (v + v') \quad$ и $\quad u \otimes v + u' \otimes v = (u + u') \otimes v$.

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Определим на W следующее правило отождествления элементов: элементы w_1 и w_2 считаются **равными**, если w_2 можно получить из w_1 с помощью цепочки преобразований, каждое из которых является преобразованием одного из следующих трех типов:

1. $u \otimes v + u' \otimes v' = u' \otimes v' + u \otimes v$;
2. $(\lambda \cdot u) \otimes v = u \otimes (\lambda \cdot v)$;
3. $u \otimes v + u \otimes v' = u \otimes (v + v') \quad$ и $\quad u \otimes v + u' \otimes v = (u + u') \otimes v$.

Преобразования выполняются и справа налево, и слева направо.

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Нетрудно проверить, что множество W с таким отождествлением элементов и определенными выше операциями сложения элемента и умножения элемента на скаляр из K является линейным пространством над K. Оно обозначается через $U \otimes V$, и называется **тензорным произведением** линейного пространства U на линейное пространство V.

IV.1. Тензорное произведение линейных пространств

Нетрудно проверить, что множество W с таким отождествлением элементов и определенными выше операциями сложения элемента и умножения элемента на скаляр из K является линейным пространством над K. Оно обозначается через $U \otimes V$, и называется **тензорным произведением** линейного пространства U на линейное пространство V.

Обычно по определению полагают, что

$$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W) = U \otimes V \otimes W.$$

Рассмотреть пример?

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

Оказывается, имея базисы для U и V, легко построить базис для $W = U \otimes V$.

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

Пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства U, $\mathbf{Б}_V = \{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис пространства V. Возьмем произвольный элемент $w = \sum\limits_{i=1}^{s} u_i \otimes v_i$ из W. Пусть

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j,$$

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

Пусть $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства U, $\mathbf{Б}_V = \{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис пространства V. Возьмем произвольный элемент $w = \sum\limits_{i=1}^{s} u_i \otimes v_i$ из W. Пусть

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \quad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

Тогда, по определению тензорного произведения пространств, получаем

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \quad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

По определению тензорного произведения пространств, получаем

$$w = \sum_{i=1}^{s} u_i \otimes v_i =$$

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \quad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

По определению тензорного произведения пространств, получаем

$$w = \sum_{i=1}^{s} u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k \right) =$$

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \quad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

По определению тензорного произведения пространств, получаем

$$w = \sum_{i=1}^{s} u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_{ij} \cdot \mu_{ik} \right) \cdot e_j \otimes f_k.$$

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \quad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

По определению тензорного произведения пространств, получаем

$$w = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_{ij} \cdot \mu_{ik} \right) \cdot e_j \otimes f_k.$$

Следовательно, каждый вектор из $U \otimes V$ является линейной комбинацией векторов $e_j \otimes f_k$.

Верно ли, что система векторов

$\mathbf{Б}_{U \otimes V} = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \ldots, e_n \otimes f_m\}$

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \quad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

По определению тензорного произведения пространств, получаем

$$w = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_{ij} \cdot \mu_{ik} \right) \cdot e_j \otimes f_k.$$

Следовательно, каждый вектор из $U \otimes V$ является линейной комбинацией векторов $e_j \otimes f_k$.

Верно ли, что система векторов

$\text{Б}_{U \otimes V} = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \ldots, e_n \otimes f_m\}$ будет базисом для $U \otimes V$?

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j, \quad v_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} f_k, \qquad \text{где } \lambda_{ij}, \mu_{ik} \in K.$$

По определению тензорного произведения пространств, получаем

$$w = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_{ij} \cdot \mu_{ik} \right) \cdot e_j \otimes f_k.$$

Следовательно, каждый вектор из $U \otimes V$ является линейной комбинацией векторов $e_j \otimes f_k$.

Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** осталось проверить линейную независимость системы векторов $\text{Б}_{U \otimes V}$. Это является делом непростым, и мы опустим соответствующие выкладки. Нами «наполовину доказана» следующая теорема.

IV.2. Базис и размерность тензорного произведения линейных пространств

Теорема 1 (**о базисе тензорного произведения линейных пространств**). *Пусть* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис линейного пространства* U, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *— базис линейного пространства* V. *Тогда*

$$\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \ldots, e_n \otimes f_m\}$$

— базис пространства $U \otimes V$.

Рассмотреть пример?

IV.3. Сопряженное пространство

При изучении линейных пространств исследователи нередко сталкиваются с разнообразными функциями, каждому вектору ставящими в соответствие элемент из основного поля K.

IV.3. Сопряженное пространство

При изучении линейных пространств исследователи нередко сталкиваются с разнообразными функциями, каждому вектору ставящими в соответствие элемент из основного поля K.

Это, например, модуль вектора,

IV.3. Сопряженное пространство

При изучении линейных пространств исследователи нередко сталкиваются с разнообразными функциями, каждому вектору ставящими в соответствие элемент из основного поля K.

Это, например, модуль вектора, проекция вектора на ось,

IV.3. Сопряженное пространство

При изучении линейных пространств исследователи нередко сталкиваются с разнообразными функциями, каждому вектору ставящими в соответствие элемент из основного поля K.

Это, например, модуль вектора, проекция вектора на ось, **аргумент комплексного числа** (напомним, что комплексные числа образуют двумерное векторное пространство над полем действительных чисел).

IV.3. Сопряженное пространство

При изучении линейных пространств исследователи нередко сталкиваются с разнообразными функциями, каждому вектору ставящими в соответствие элемент из основного поля K.

Математики питают давнее пристрастие к линейности, поэтому среди таких функций особое внимание было уделено линейным. И, как оказалось, не напрасно.

IV.3. Сопряженное пространство

На множестве V^* линейных функций, переводящих линейное пространство в основное поле K введем операции сложения и умножения на скаляр из K следующими естественными правилами: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, где λ — произвольный элемент поля K. Нетрудно проверить, что V^* относительно этих операций является линейным пространством.

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство V^* линейных функций, векторам пространства V ставящих в соответствие элементы из основного поля K, называется* **сопряженным** *к V пространством.*

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство V^* линейных функций, векторам пространства V ставящих в соответствие элементы из основного поля K, называется* **сопряженным** *к V пространством.*

Обычно изучение нового понятия осуществляется одним из двух способов:

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство V^* линейных функций, векторам пространства V ставящих в соответствие элементы из основного поля K, называется* **сопряженным** *к V пространством.*

Обычно изучение нового понятия осуществляется одним из двух способов:

— индуктивно (рассмотрение примеров, построение моделей);

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство* V^* *линейных функций, векторам пространства* V *ставящих в соответствие элементы из основного поля* K*, называется* **сопряженным** *к* V *пространством.*

Обычно изучение нового понятия осуществляется одним из двух способов:

— индуктивно (рассмотрение примеров, построение моделей);
— дедуктивно (анализ определения, получение следствий).

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство V^* линейных функций, векторам пространства V ставящих в соответствие элементы из основного поля K, называется* **сопряженным** *к V пространством.*

Приведем примеры таких линейных функций, то есть векторов из сопряженного пространства.

1. Для пространства многочленов степени не выше n и любого числа a функция $F(f) = f(a)$ будет линейной.

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство V^* линейных функций, векторам пространства V ставящих в соответствие элементы из основного поля K, называется* **сопряженным** *к V пространством.*

Приведем примеры таких линейных функций, то есть векторов из сопряженного пространства.

1. Для пространства многочленов степени не выше n и любого числа a функция $F(f) = f(a)$ будет линейной.

   В самом деле, для любых чисел λ, μ имеем:

   $$F(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda F(f) + \mu F(g),$$

   что и требовалось доказать.

IV.3. Сопряженное пространство

Определение 3. *Линейное пространство V^* линейных функций, векторам пространства V ставящих в соответствие элементы из основного поля K, называется* **сопряженным** *к V пространством.*

Приведем примеры таких линейных функций, то есть векторов из сопряженного пространства.

1. Для пространства многочленов степени не выше n и любого числа a функция $F(f) = f(a)$ будет линейной.

2. В пространстве квадратных $n \times n$-матриц рассмотрим **функцию** $\mathrm{tr}(X)$. Она, очевидно, будет линейной.

IV.4. Взаимный базис

После изучения линейной алгебры у Вас должен был выработаться один полезный рефлекс: при работе с линейным пространством надо в первую очередь найти

IV.4. Взаимный базис

После изучения линейной алгебры у Вас должен был выработаться один полезный рефлекс: при работе с линейным пространством надо в первую очередь найти его базис. Как найти базис сопряженного пространства?

IV.4. Взаимный базис

После изучения линейной алгебры у Вас должен был выработаться один полезный рефлекс: при работе с линейным пространством надо в первую очередь найти его базис. Как найти базис сопряженного пространства?

Пусть **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства V. Обозначим через f^i функцию, ставящую каждому вектору в соответствие его i-ю координату в базисе **Б**.

IV.4. Взаимный базис

После изучения линейной алгебры у Вас должен был выработаться один полезный рефлекс: при работе с линейным пространством надо в первую очередь найти его базис. Как найти базис сопряженного пространства?

Пусть **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства V. Обозначим через f^i функцию, ставящую каждому вектору в соответствие его i-ю координату в базисе **Б**. Таким образом, функция f^i определяется равенством

$$f^i\left(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n\right) = f^i\left(x^j e_j\right) = x^i. \tag{2}$$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \tag{2}$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство.

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \tag{2}$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Сначала докажем линейную независимость системы функций $\mathbf{Б}^*$.

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \tag{2}$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть для некоторых $y_1,\ldots,y_n$ имеет место равенство:

$$0=y_i\cdot f^i=y_1\cdot f^1+\ldots+y_n\cdot f^n.$$

Вычисляя значение этой функции на базисном векторе e_i получаем

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n\right) = f^i\left(x^j e_j\right) = x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть для некоторых $y_1, \ldots, y_n$ имеет место равенство:

$$0 = y_i \cdot f^i = y_1 \cdot f^1 + \ldots + y_n \cdot f^n.$$

Вычисляя значение этой функции на базисном векторе e_i получаем

$$0\left(e_i\right) = y_1 \cdot f^1\left(e_i\right) + \ldots + y_n \cdot f^n\left(e_i\right).$$

Согласно определению, то есть равенству (2), левая часть равенства равна 0, а правая — y_i (все остальные слагаемые равны 0).

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* **Б**$^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)***, *является базисом* ***сопряженного пространства***.

Доказательство. Пусть для некоторых $y_1,\ldots,y_n$ имеет место равенство:

$$0=y_i\cdot f^i=y_1\cdot f^1+\ldots+y_n\cdot f^n.$$

Вычисляя значение этой функции на базисном векторе e_i получаем

$$0\left(e_i\right)=y_1\cdot f^1\left(e_i\right)+\ldots+y_n\cdot f^n\left(e_i\right).$$

Поэтому $y_i=0$ для любого i, что и доказывает линейную независимость системы **Б***.

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)***, *является базисом* ***сопряженного пространства***.

Доказательство. Осталось проверить максимальность системы $\mathbf{Б}^*$.

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n\right) = f^i\left(x^j e_j\right) = x^i. \tag{2}$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. Надо проверить, что

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства***.

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. Надо проверить, что $f=y_i\cdot f^i$ для подходящих y_i.

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\textbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства***.

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора x^ie_i получаем (так как $f^i\left(x^j\cdot e_j\right)=x^i$), что

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора x^ie_i получаем (так как $f^i\left(x^j\cdot e_j\right)=x^i$), что

$$f(x)=f\left(x^i\cdot e_i\right)=$$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n\right) = f^i\left(x^j e_j\right) = x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)***, *является базисом* ***сопряженного пространства***.

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора $x^i e_i$ получаем (так как $f^i\left(x^j \cdot e_j\right) = x^i$), что

$$f(x) = f\left(x^i \cdot e_i\right) = x^i \cdot f\left(e_i\right) =$$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора x^ie_i получаем (так как $f^i\left(x^j\cdot e_j\right)=x^i$), что

$$f(x)=f\left(x^i\cdot e_i\right)=x^i\cdot f\left(e_i\right)=x^1\cdot f\left(e_1\right)+\ldots+x^n\cdot f\left(e_n\right)=$$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n\right) = f^i\left(x^j e_j\right) = x^i. \tag{2}$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\text{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)***, *является базисом* ***сопряженного пространства***.

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора $x^i e_i$ получаем (так как $f^i\left(x^j \cdot e_j\right) = x^i$), что

$$f(x) = f\left(x^i \cdot e_i\right) = x^i \cdot f\left(e_i\right) = x^1 \cdot f\left(e_1\right) + \ldots + x^n \cdot f\left(e_n\right) =$$

$$= x^1 \cdot y_1 + \ldots + x^n \cdot y_n =$$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора x^ie_i получаем (так как $f^i\left(x^j\cdot e_j\right)=x^i$), что

$$f(x)=f\left(x^i\cdot e_i\right)=x^i\cdot f\left(e_i\right)=x^1\cdot f\left(e_1\right)+\ldots+x^n\cdot f\left(e_n\right)=$$

$$=x^1\cdot y_1+\ldots+x^n\cdot y_n=y_1f^1(x)+\ldots+y_nf^n(x),$$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1+\ldots+x^ne_n\right)=f^i\left(x^je_j\right)=x^i. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о взаимном базисе). *Система векторов* $\mathbf{Б}^*=\left\{f^1,f^2,\ldots,f^n\right\}$ *где* f^i *определены* ***равенством (2)****, является базисом* ***сопряженного пространства****.*

Доказательство. Пусть f — вектор из V^*. В силу линейности функции f для любого вектора x^ie_i получаем (так как $f^i\left(x^j\cdot e_j\right)=x^i$), что

$$f(x)=f\left(x^i\cdot e_i\right)=x^i\cdot f\left(e_i\right)=x^1\cdot f\left(e_1\right)+\ldots+x^n\cdot f\left(e_n\right)=$$

$$=x^1\cdot y_1+\ldots+x^n\cdot y_n=y_1f^1(x)+\ldots+y_nf^n(x),$$

где $y_i=f\left(e_i\right)$, что и требовалось доказать. Значит, $\mathbf{Б}^*$ — базис пространства V^*.

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1 + \ldots + x^ne_n\right) = f^i\left(x^je_j\right) = x^i. \qquad (2)$$

Определение 4. *Для базиса* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ *система функций* **Б**$^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$*, где* f^i *определяются* ***соотношениями (2)****, называется* **взаимным** *к* **Б** *базисом.*

В частности, $f^i\left(e_j\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 0, & \text{если} \quad i = j. \end{cases}$

IV.4. Взаимный базис

$$f^i\left(x^1e_1 + \ldots + x^ne_n\right) = f^i\left(x^je_j\right) = x^i. \tag{2}$$

Определение 4. *Для базиса* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ *система функций* **Б**$^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$, *где* f^i *определяются* ***соотношениями (2)***, *называется* **взаимным** *к* **Б** *базисом*.

В частности, размерности исходного и сопряженного пространства равны, следовательно, они изоморфны. Более того, как мы позднее увидим (см. раздел «отождествление V и V^*») в евклидовом пространстве можно отождествить исходное пространство с сопряженным с помощью весьма естественного правила.

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — *два базиса линейного пространства* V, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* $\mathbf{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ — *соответствующие* ***взаимные базисы***. *Тогда* $e'_i = a_i^j e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b_j^i f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство.

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \dots, f^n\right\}$ *и* $\mathbf{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \dots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a^j_i e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b^i_j f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c^i_j \cdot f^j$. Тогда

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $\text{Б}^* = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ *и* $\text{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a^j_i e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b^i_j f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c^i_j \cdot f^j$. Тогда

$\delta^s_i = \acute{f}^s\left(e'_i\right) =$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* **Б**$' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, **Б**$^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* **Б**$'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a_i^j e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b_j^i f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c_j^i \cdot f^j$. Тогда

$$\delta_i^s = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(e'_i\right) =$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* **Б**$' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — *два базиса линейного пространства* V, **Б**$^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* **Б**$'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ — *соответствующие* ***взаимные базисы***. *Тогда* $e'_i = a_i^j e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b_j^i f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c_j^i \cdot f^j$. Тогда

$$\delta_i^s = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(a_i^j \cdot e_j\right) =$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* $\mathbf{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы***. *Тогда* $e'_i = a^j_i e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b^i_j f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c^i_j \cdot f^j$. Тогда

$$\delta^s_i = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c^s_t \cdot f^t\left(e'_i\right) = c^s_t \cdot f^t\left(a^j_i \cdot e_j\right) = c^s_t \cdot a^j_i \cdot f^t\left(e_j\right) =$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса**).** *Пусть* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* **Б**$' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, **Б**$^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* **Б**$'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a_i^j e_j$*, если и только если* $\acute{f}^i = b_j^i f^j$*, где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c_j^i \cdot f^j$. Тогда

$$\delta_i^s = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(a_i^j \cdot e_j\right) = c_t^s \cdot a_i^j \cdot f^t\left(e_j\right) = c_t^s \cdot a_i^j \cdot \delta_j^t.$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* **Б** $= \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* **Б**$' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, **Б**$^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* **Б**$'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы***. *Тогда* $e'_i = a_i^j e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b_j^i f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c^i_j \cdot f^j$. Тогда

$$\delta_i^s = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(e'_i\right) = c_t^s \cdot f^t\left(a_i^j \cdot e_j\right) = c_t^s \cdot a_i^j \cdot f^t\left(e_j\right) = c_t^s \cdot a_i^j \cdot \delta_j^t.$$

Заметим, что

$$a_i^j \cdot \delta_j^t =$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $\text{Б}^* = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ *и* $\text{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a^j_i e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b^i_j f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c^i_j \cdot f^j$. Тогда

$$\delta^s_i = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c^s_t \cdot f^t\left(e'_i\right) = c^s_t \cdot f^t\left(a^j_i \cdot e_j\right) = c^s_t \cdot a^j_i \cdot f^t\left(e_j\right) = c^s_t \cdot a^j_i \cdot \delta^t_j.$$

Заметим, что

$$a^j_i \cdot \delta^t_j = a^1_i \cdot 0 + \ldots + a^t_i \cdot 1 + \ldots + a^n_i \cdot 0 =$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $Б = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $Б' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $Б^* = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ *и* $Б'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы***. *Тогда* $e'_i = a_i^j e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b_j^i f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c_j^i \cdot f^j$. Тогда

$$\delta_i^s = \acute{f}^s(e'_i) = c_t^s \cdot f^t(e'_i) = c_t^s \cdot f^t\left(a_i^j \cdot e_j\right) = c_t^s \cdot a_i^j \cdot f^t(e_j) = c_t^s \cdot a_i^j \cdot \delta_j^t.$$

Заметим, что

$$a_i^j \cdot \delta_j^t = a_i^1 \cdot 0 + \ldots + a_i^t \cdot 1 + \ldots + a_i^n \cdot 0 = a_i^t.$$

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $\text{Б}^* = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ *и* $\text{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a^j_i e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b^i_j f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\acute{f}^i = c^i_j \cdot f^j$. Тогда

$$\delta^s_i = \acute{f}^s\left(e'_i\right) = c^s_t \cdot f^t\left(e'_i\right) = c^s_t \cdot f^t\left(a^j_i \cdot e_j\right) = c^s_t \cdot a^j_i \cdot f^t\left(e_j\right) = c^s_t \cdot a^j_i \cdot \delta^t_j.$$

Заметим, что

$$a^j_i \cdot \delta^t_j = a^1_i \cdot 0 + \ldots + a^t_i \cdot 1 + \ldots + a^n_i \cdot 0 = a^t_i.$$

Следовательно, $\delta^s_i = c^s_t \cdot a^t_i$. Но это означает, что $c^s_t = b^s_t$ (в силу однозначности обратной матрицы). Теорема доказана.

IV.5. Теорема об изменении взаимного базиса

Теорема 3 (об изменении взаимного базиса). *Пусть* $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *и* $\text{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* V, $\text{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ *и* $\text{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ *— соответствующие* ***взаимные базисы****. Тогда* $e'_i = a^j_i e_j$, *если и только если* $\acute{f}^i = b^i_j f^j$, *где* $\left(b^i_{\bullet j}\right) = \left(a^i_{\bullet j}\right)^{-1}$.

Таким образом, при переходе в другой базис пространства V соответствующие векторы взаимного базиса меняются по правилу, аналогичному тензорному закону для контравариантного тензора, поэтому индексы у векторов взаимного базиса мы пишем сверху.

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть* V *— линейное пространство,* f *— вектор сопряженного к* V *пространства* V^*. *Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства* V *ставящая в соответствие столбец координат вектора* f *в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство.

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть* V *— линейное пространство,* f *— вектор сопряженного к* V *пространства* V^*. *Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства* V *ставящая в соответствие столбец координат вектора* f *в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение **тензорного закона**.

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* $\mathbf{Б}^*$, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — два базиса линейного пространства V, $\mathbf{Б}^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ и $\mathbf{Б}'^* = \left\{\acute{f}^1, \acute{f}^2, \ldots, \acute{f}^n\right\}$ — соответствующие взаимные базисы, причем $e'_i = a_i^j \cdot e_j$.

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Допустим, что $f = y_i \cdot f^i = y'_j \cdot \acute{f}^j$. По **теореме об изменении взаимного базиса** получаем $\acute{f}^i = b^i_j \cdot f^j$.

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Допустим, что $f = y_i \cdot f^i = y'_j \cdot \acute{f}^j$. По **теореме об изменении взаимного базиса** получаем $\acute{f}^i = b^i_j \cdot f^j$. Умножим это равенство на a^s_i и просуммируем по i. Получим

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б****, взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Допустим, что $f = y_i \cdot f^i = y'_j \cdot \acute{f}^j$. По **теореме об изменении взаимного базиса** получаем $\acute{f}^i = b^i_j \cdot f^j$. Умножим это равенство на a^s_i и просуммируем по i. Получим

$$a^s_i \cdot \acute{f}^i =$$

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Допустим, что $f = y_i \cdot f^i = y'_j \cdot \acute{f}^j$. По **теореме об изменении взаимного базиса** получаем $\acute{f}^i = b^i_j \cdot f^j$. Умножим это равенство на a^s_i и просуммируем по i. Получим

$$a^s_i \cdot \acute{f}^i = a^s_i \cdot b^i_j \cdot f^j =$$

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Допустим, что $f = y_i \cdot f^i = y'_j \cdot \acute{f}^j$. По **теореме об изменении взаимного базиса** получаем $\acute{f}^i = b^i_j \cdot f^j$. Умножим это равенство на a^s_i и просуммируем по i. Получим

$$a^s_i \cdot \acute{f}^i = a^s_i \cdot b^i_j \cdot f^j = \delta^s_j \cdot f^j = f^s.$$

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б****, взаимном к базису* **Б***, является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Допустим, что $f = y_i \cdot f^i = y'_j \cdot \acute{f}^j$. По **теореме об изменении взаимного базиса** получаем $\acute{f}^i = b^i_j \cdot f^j$. Умножим это равенство на a^s_i и просуммируем по i. Получим

$$a^s_i \cdot \acute{f}^i = a^s_i \cdot b^i_j \cdot f^j = \delta^s_j \cdot f^j = f^s.$$

Итак, доказано $f^s = a^s_i \cdot \acute{f}^i$, откуда

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (о ковариантных координатах). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б****, взаимном к базису* **Б***, является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Итак, доказано $f^s = a_i^s \cdot \acute{f}^i$, откуда

$$f = y'_j \cdot \acute{f}^j = y_i \cdot f^i = y_i \cdot a_j^i \cdot \acute{f}^j.$$

Следовательно,

IV.6. Теорема о ковариантных координатах

Теорема 4 (**о ковариантных координатах**). *Пусть V — линейное пространство, f — вектор сопряженного к V пространства V^*. Тогда функция, каждому базису* **Б** *пространства V ставящая в соответствие столбец координат вектора f в базисе* **Б***, *взаимном к базису* **Б**, *является ковариантным тензором первого ранга.*

Доказательство. Итак, доказано $f^s = a_i^s \cdot \acute{f}^i$, откуда

$$f = y'_j \cdot \acute{f}^j = y_i \cdot f^i = y_i \cdot a_j^i \cdot \acute{f}^j.$$

Следовательно, по **теореме об однозначности разложения вектора по базису** $y'_i = a_i^j \cdot y_j$, что и требовалось доказать.

Рассмотреть пример?

IV.7. Определение тензор-вектора

Определение 5. *Пусть* V *— линейное пространство. Всякий вектор линейного пространства* $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_r$*, где ровно* k *пространств* V_i *совпадает с* V*, а остальные* m *штук пространств* V_i *совпадают с* V^* *(здесь* $m + k = r$*), называется тензор-вектором ранга* r*,* m *раз ковариантным и* k *раз контравариантным.*

IV.7. Определение тензор-вектора

Определение 5. *Пусть V — линейное пространство. Всякий вектор линейного пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_r$, где ровно k пространств V_i совпадает с V, а остальные m штук пространств V_i совпадают с V^* (здесь $m + k = r$), называется тензор-вектором ранга r, m раз ковариантным и k раз контравариантным.*

Например, любой из векторов пространства $V \otimes V \otimes V^* \otimes V$ является трижды контравариантным и один раз ковариантным тензором четвертого ранга.

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

Пусть дана тензор-функция ранга r, m раз ковариантная и k раз контравариантная. Для упрощения дальнейшего изложения, упорядочим массив его координат так, чтобы сначала перечислялись все верхние, а потом — нижние индексы.

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

Пусть дана тензор-функция ранга r, m раз ковариантная и k раз контравариантная. Для упрощения дальнейшего изложения, упорядочим массив его координат так, чтобы сначала перечислялись все верхние, а потом — нижние индексы.

Итак, возьмем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, и пусть $\left(T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}\right)$ — массив его координат в этом базисе. Этому тензору поставим в соответствие вектор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ из

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

Пусть дана тензор-функция ранга r, m раз ковариантная и k раз контравариантная. Для упрощения дальнейшего изложения, упорядочим массив его координат так, чтобы сначала перечислялись все верхние, а потом — нижние индексы.

Итак, возьмем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, и пусть $\left(T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}\right)$ — массив его координат в этом базисе. Этому тензору поставим в соответствие вектор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ из

$$W = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ штук}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{m \text{ штук}},$$

определяемый соотношением:

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

Пусть дана тензор-функция ранга r, m раз ковариантная и k раз контравариантная. Для упрощения дальнейшего изложения, упорядочим массив его координат так, чтобы сначала перечислялись все верхние, а потом — нижние индексы.

Итак, возьмем базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, и пусть $\left(T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}\right)$ — массив его координат в этом базисе. Этому тензору поставим в соответствие вектор $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ из

$$W = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ штук}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{m \text{ штук}},$$

определяемый соотношением:

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}, \qquad (3)$$

где f^i — векторы взаимного базиса.

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}, \tag{3}$$

где f^i — векторы взаимного базиса.

Итак, всякой тензор-функции соответствует однозначно определенный тензор-вектор. Это соответствие обратимо. Действительно, пусть

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}, \tag{3}$$

где f^i — векторы взаимного базиса.

Итак, всякой тензор-функции соответствует однозначно определенный тензор-вектор. Это соответствие обратимо. Действительно, пусть дан тензор-вектор из пространства W (определенного несколькими строками ранее). Возьмем произвольный базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V. Ему поставим в соответствие базис

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}, \qquad (3)$$

где f^i — векторы взаимного базиса.

Итак, всякой тензор-функции соответствует однозначно определенный тензор-вектор. Это соответствие обратимо. Действительно, пусть дан тензор-вектор из пространства W (определенного несколькими строками ранее). Возьмем произвольный базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V. Ему поставим в соответствие базис

$$B = \left\{\ldots, e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots f^{i_m}, \ldots\right\}$$

пространства W, где f^i — векторы взаимного базиса.

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_m}, \tag{3}$$

где f^i — векторы взаимного базиса. Возьмем произвольный базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства V. Ему поставим в соответствие базис

$$B = \left\{\dots, e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \dots f^{i_m}, \dots\right\}$$

пространства W, где f^i — векторы взаимного базиса.

Функция, каждому базису **Б** пространства V ставящая в соответствие массив его координат в соответствующем базисе B, очевидно, будет искомой тензор-функцией.

V. Связь тензор-вектора с тензор-функцией и тензор-массивом

$$\overrightarrow{\mathbf{T}} = T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m} \cdot e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_m}, \qquad (3)$$

где f^i — векторы взаимного базиса.

Итак, **соотношение (3)** устанавливает взаимно-однозначное соответствие между тензор-функциями и тензор-векторами.

Рассмотреть пример?

VI. Операции тензорной алгебры

Пусть U — линейное пространство размерности n над полем K.

VI.1. Сумма тензоров

Пусть тензоры T и R имеют одинаковое строение: $T^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ и $R^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_m}$.

VI.1. Сумма тензоров

Пусть тензоры T и R имеют одинаковое строение: $T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ и $R^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$.

В терминах тензор-функции: **суммой** *m раз ковариантных и k раз контравариантных тензоров T и R называется функция, каждому базису Б пространства V ставящая в соответствие массив* $\left(T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m} + R^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}\right)$*, где* $T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ *и* $R^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ *— компоненты, соответственно, тензоров T и R в базисе* **Б**.

VI.1. Сумма тензоров

Пусть тензоры T и R имеют одинаковое строение: $T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ и $R^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$.

В терминах тензор-функции: **суммой** *m раз ковариантных и k раз контравариантных тензоров T и R называется функция, каждому базису Б пространства V ставящая в соответствие массив* $\left(T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m} + R^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}\right)$, *где $T^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ и $R^{j_1\cdots j_k}_{i_1\ldots i_m}$ — компоненты, соответственно, тензоров T и R в базисе* **Б**.

Можно сказать и так: суммой тензоров T и R называется функция $T+R$, каждому базису **Б** ставящая в соответствие массив $(T+R)(\mathbf{Б}) = T(\mathbf{Б}) + R(\mathbf{Б})$.

VI.2. Теорема о сумме тензоров

Теорема 5 (о сумме тензоров). *Сумма тензоров одинаковой структуры является тензором.*

Доказательство.

VI.2. Теорема о сумме тензоров

Теорема 5 (о сумме тензоров). *Сумма тензоров одинаковой структуры является тензором.*

Доказательство проведите самостоятельно.

VI.2. Теорема о сумме тензоров

Теорема 5 (о сумме тензоров). *Сумма тензоров одинаковой структуры является тензором.*

Доказательство проведите самостоятельно.

В терминах тензор-массива сумма тензоров — обычная сумма массивов.

VI.2. Теорема о сумме тензоров

Теорема 5 (о сумме тензоров). *Сумма тензоров одинаковой структуры является тензором.*

Доказательство проведите самостоятельно.

В терминах тензор-массива сумма тензоров — обычная сумма массивов.

В терминах тензор-вектора сумма тензоров — обычная сумма векторов.

VI.3. Умножение тензора на скаляр

В терминах тензор-функции: **произведением** *тензора* T *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* $\left(\lambda \cdot T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$, *где* $T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}$ *— компоненты тензора* T *в базисе* **Б**.

VI.3. Умножение тензора на скаляр

В терминах тензор-функции: **произведением** *тензора T на скаляр $\lambda \in K$ называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив $\left(\lambda \cdot T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}\right)$, где $T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}$ — компоненты тензора T в базисе* **Б**.

Очевидно, что произведение тензора T на скаляр λ является тензором.

VI.3. Умножение тензора на скаляр

В терминах тензор-функции: **произведением** *тензора* T *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* $\left(\lambda \cdot T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}\right)$, *где* $T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_m}$ *— компоненты тензора* T *в базисе* **Б**.

Очевидно, что произведение тензора T на скаляр λ является тензором.

В терминах тензор-массива получаем обычное произведение массива на скаляр.

VI.3. Умножение тензора на скаляр

В терминах тензор-функции: **произведением** *тензора* T *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется функция, каждому базису ставящая в соответствие массив* $\left(\lambda \cdot T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}\right)$, *где* $T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}$ *— компоненты тензора* T *в базисе* **Б**.

Очевидно, что произведение тензора T на скаляр λ является тензором.

В терминах тензор-массива получаем обычное произведение массива на скаляр.

В терминах тензор-вектора так же получается обычное произведение вектора на скаляр.

VI.4. Перестановка однотипных индексов (транспонирование)

В терминах массивов: *пусть задан массив* $T = (T_{i_1 \dots i_m})$. *Тогда массивом,* **транспонированным** *к массиву* T *по* p*-му и* q*-му индексам, называется массив*

$$T^{t_{p,q}} = \left(T_{i_1 \dots i_{p-1} i_q i_{p+1} \dots i_{q-1} i_p i_{q+1} i_{q+2} \dots i_m}\right).$$

В этом определении нас не интересовало, на какой высоте находится тот или иной индекс (это важно только для тензорного закона), поэтому мы все индексы писали внизу.

VI.4. Перестановка однотипных индексов (транспонирование)

В терминах массивов: *пусть задан массив* $T = (T_{i_1 \ldots i_m})$. *Тогда массивом,* **транспонированным** *к массиву* T *по* p*-му и* q*-му индексам, называется массив*

$$T^{t_{p,q}} = \left(T_{i_1 \ldots i_{p-1} i_q i_{p+1} \ldots i_{q-1} i_p i_{q+1} i_{q+2} \ldots i_m}\right).$$

В этом определении нас не интересовало, на какой высоте находится тот или иной индекс (это важно только для тензорного закона), поэтому мы все индексы писали внизу.

В терминах тензор-функции: **Транспонированием** *тензора* T *по* p*-му и* q*-му индексам называется функция, каждому базису* **Б** *ставящая в соответствие массив* $T^{t_{p,q}}(\mathbf{Б})$.

VI.4. Перестановка однотипных индексов (транспонирование)

Теорема 6 (о транспонировании тензора). *Если индексы с номерами p и q либо оба верхние, либо оба нижние, то функция, каждому базису* **Б** *ставящая в соответствие массив $T^{t_{p,q}}(\mathbf{Б})$, является тензором той же структуры, что и T.*

Доказательство.

VI.4. Перестановка однотипных индексов (транспонирование)

Теорема 7 (**о транспонировании тензора**). *Если индексы с номерами* p *и* q *либо оба верхние, либо оба нижние, то функция, каждому базису* **Б** *ставящая в соответствие массив* $T^{t_{p,q}}(\mathbf{Б})$, *является тензором той же структуры, что и* T.

Доказательство проведите самостоятельно.

VI.4. Перестановка однотипных индексов (транспонирование)

Теорема 8 (о транспонировании тензора). *Если индексы с номерами p и q либо оба верхние, либо оба нижние, то функция, каждому базису* **Б** *ставящая в соответствие массив $T^{t_{p,q}}(\mathbf{Б})$, является тензором той же структуры, что и T.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Таким образом, транспонирование сводится к переупорядочению элементов массива, при этом, получается, вообще говоря, другой массив. Важно, что при этом получается тензор того же строения, что и исходный, что позволяет вычислять линейные комбинации с исходным тензором.

VI.4. Перестановка однотипных индексов (транспонирование)

Теорема 9 (о транспонировании тензора). *Если индексы с номерами p и q либо оба верхние, либо оба нижние, то функция, каждому базису* **Б** *ставящая в соответствие массив $T^{t_{p,q}}(\mathbf{Б})$, является тензором той же структуры, что и T.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Таким образом, транспонирование сводится к переупорядочению элементов массива, при этом, получается, вообще говоря, другой массив. Важно, что при этом получается тензор того же строения, что и исходный, что позволяет вычислять линейные комбинации с исходным тензором.

В терминах тензор-вектора транспонированию соответствует симметричное отражение относительно некоторой гиперплоскости. Во всяком случае, получается вектор того же пространства.

VI.5. Тензорное (внешнее) произведение тензоров

В терминах массивов: *Пусть* $T = \left(T_{i_1\ldots i_p}\right)$ *и* $R = \left(R_{j_1\ldots j_q}\right)$ *— два массива*[2]. *Тогда* **тензорным произведением** *массивов* T *и* R *называется массив*

$$\left(Q_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q}\right) = \left(T_{i_1\ldots i_p} \cdot R_{j_1\ldots j_q}\right).$$

[2]Сейчас нас не интересует, на какой высоте находится тот или иной индекс (это важно только для тензорного закона), поэтому, формулируя определение только для массивов, мы все индексы пишем внизу.

VI.5. Тензорное (внешнее) произведение тензоров

В терминах массивов: *Пусть* $T = \left(T_{i_1 \ldots i_p}\right)$ *и* $R = \left(R_{j_1 \ldots j_q}\right)$ *— два массива. Тогда* **тензорным произведением** *массивов* T *и* R *называется массив*

$$\left(Q_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}\right) = \left(T_{i_1 \ldots i_p} \cdot R_{j_1 \ldots j_q}\right).$$

В терминах тензор-функции: **тензорным произведением** *тензора* T *на тензор* R *называется функция* $\overrightarrow{\mathbf{T}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{R}}$, *каждому базису* **Б** *пространства* V *ставящая в соответствие массив*

$$(T \otimes R)(\mathbf{Б}) = \left(Q^{j_1 \ldots j_k s_1 \ldots s_q}_{i_1 \ldots i_m t_1 \ldots t_p}\right) = \left(T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m} \cdot R^{s_1 \ldots s_q}_{t_1 \ldots t_p}\right),$$

где $\left(T^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_m}\right) = T(\mathbf{Б})$ *и* $\left(R^{s_1 \ldots s_q}_{t_1 \ldots t_p}\right) = R(\mathbf{Б})$.

VI.5. Тензорное (внешнее) произведение тензоров

Теорема 10 (о тензорном произведении тензоров). *Тензорное произведение тензоров является тензором.*

Доказательство.

VI.5. Тензорное (внешнее) произведение тензоров

Теорема 10 (о тензорном произведении тензоров). *Тензорное произведение тензоров является тензором.*

Доказательство очевидно, проведите его самостоятельно.

VI.5. Тензорное (внешнее) произведение тензоров

Теорема 10 (о тензорном произведении тензоров). *Тензорное произведение тензоров является тензором.*

Доказательство очевидно, проведите его самостоятельно.

В терминах тензор-вектора: **тензорным произведением** тензора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ из пространства U на тензор $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ из пространства V называется вектор $T \otimes R$ из пространства $U \otimes V$.

VI.5. Тензорное (внешнее) произведение тензоров

Теорема 10 (о тензорном произведении тензоров). *Тензорное произведение тензоров является тензором.*

Доказательство очевидно, проведите его самостоятельно.

В терминах тензор-вектора: **тензорным произведением** тензора $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ из пространства U на тензор $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ из пространства V называется вектор $T \otimes R$ из пространства $U \otimes V$.

Очевидно, что ранг тензорного произведения тензоров равен сумме рангов сомножителей[3].

[3]если мы принимаем грамматическое правило $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W) = U \otimes V \otimes W$.

VI.6. Свертывание

Определение приведем только в терминах тензор-функции и массива.

VI.6. Свертывание

В терминах массива: *Пусть* $T = (T_{i_1\dots i_m})$ — *массив. Тогда* **сверткой** *массива* T *по* p*-му и* q*-му индексам, где* $p < q$*, называется массив*

$$\left(R_{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_{q-1}i_{q+1}\dots i_m}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{i_1\dots i_{p-1}\,k\,i_{p+1}\dots i_{q-1}\,k\,i_{q+1}\dots i_m}\right).$$

VI.6. Свертывание

В терминах массива: *Пусть* $T = (T_{i_1 \ldots i_m})$ — *массив. Тогда* **сверткой** *массива* T *по* p*-му и* q*-му индексам, где* $p < q$*, называется массив*

$$\left(R_{i_1 \ldots i_{p-1} i_{p+1} \ldots i_{q-1} i_{q+1} \ldots i_m}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{i_1 \ldots i_{p-1}\, k\, i_{p+1} \ldots i_{q-1}\, k\, i_{q+1} \ldots i_m}\right).$$

В терминах тензор-функции: *Пусть дан тензор* T*. Функция, каждому базису* **Б** *пространства* U *ставящая в соответствие массив* $(T^{j_1 \cdots j_{q-1} i_p j_{q+1} j_{q+2} \cdots j_k}_{i_1 \ldots i_m})$*, называется* **сверткой** *тензора* T *по индексам* i_p, j_q.

VI.6. Свертывание

В терминах массива: *Пусть* $T = (T_{i_1 \ldots i_m})$ — *массив. Тогда* **сверткой** *массива* T *по* p-*му и* q-*му индексам, где* $p < q$, *называется массив*

$$(R_{i_1 \ldots i_{p-1} i_{p+1} \ldots i_{q-1} i_{q+1} \ldots i_m}) = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{i_1 \ldots i_{p-1}\, k\, i_{p+1} \ldots i_{q-1}\, k\, i_{q+1} \ldots i_m} \right).$$

В терминах тензор-функции: *Пусть дан тензор* T. *Функция, каждому базису* **Б** *пространства* U *ставящая в соответствие массив* $(T^{j_1 \cdots j_{q-1} i_p j_{q+1} j_{q+2} \cdots j_k}_{i_1 \ldots i_m})$, *называется* **сверткой** *тензора* T *по индексам* i_p, j_q.

Напомним, что по повторяющимся индексам — в данном случае по i_p — ведется суммирование.

VI.6. Свертывание

В терминах массива: *Пусть* $T = (T_{i_1 \dots i_m})$ *— массив. Тогда* **сверткой** *массива* T *по* p*-му и* q*-му индексам, где* $p < q$, *называется массив*

$$(R_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_{q-1} i_{q+1} \dots i_m}) = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{i_1 \dots i_{p-1}\, k\, i_{p+1} \dots i_{q-1}\, k\, i_{q+1} \dots i_m} \right).$$

В терминах тензор-функции: *Пусть дан тензор* T. *Функция, каждому базису* **Б** *пространства* U *ставящая в соответствие массив* $(T^{j_1 \cdots j_{q-1} i_p j_{q+1} j_{q+2} \cdots j_k}_{i_1 \dots i_m})$, *называется* **сверткой** *тензора* T *по индексам* i_p, j_q.

Таким образом, свертка тензора сопоставляет каждому базису свертку значения этого тензора на этом базисе по соответствующим индексам. При этом индексы, по которым проводится свертывание тензора, должны находиться на разной высоте.

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство.

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T^{pq}_{ijk}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T^{pq}_{ijk}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}^q_{ij} =$$

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T_{ijk}^{pq}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}_{ij}^{q} = \acute{T}_{ijp}^{pq} =$$

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T^{pq}_{ijk}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}^{q}_{ij} = \acute{T}^{pq}_{ijp} = a^{u}_{i} \cdot a^{v}_{j} \cdot a^{w}_{p} \cdot b^{p}_{s} \cdot b^{q}_{t} \cdot T^{st}_{uvw} =$$

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T^{pq}_{ijk}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}^{q}_{ij} = \acute{T}^{pq}_{ijp} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot a^w_p \cdot b^p_s \cdot b^q_t \cdot T^{st}_{uvw} = a^u_i \cdot a^v_j \cdot b^q_t \cdot \delta^w_s \cdot T^{st}_{uvw} =$$

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T^{pq}_{ijk}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}^{q}_{ij} = \acute{T}^{pq}_{ijp} = a^{u}_{i} \cdot a^{v}_{j} \cdot a^{w}_{p} \cdot b^{p}_{s} \cdot b^{q}_{t} \cdot T^{st}_{uvw} = a^{u}_{i} \cdot a^{v}_{j} \cdot b^{q}_{t} \cdot \delta^{w}_{s} \cdot T^{st}_{uvw} =$$

$$= a^{u}_{i} a^{v}_{j} b^{q}_{t} T^{st}_{uvs} =$$

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T_{ijk}^{pq}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}_{ij}^{q} = \acute{T}_{ijp}^{pq} = a_i^u \cdot a_j^v \cdot a_p^w \cdot b_s^p \cdot b_t^q \cdot T_{uvw}^{st} = a_i^u \cdot a_j^v \cdot b_t^q \cdot \delta_s^w \cdot T_{uvw}^{st} =$$

$$= a_i^u a_j^v b_t^q T_{uvs}^{st} = a_i^u a_j^v b_t^q R_{uv}^{t},$$

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Доказательство стандартное, мы проиллюстрируем его на примере тензора T_{ijk}^{pq}, где свертка ведется по индексам p, k. Итак,

$$\acute{R}_{ij}^{q} = \acute{T}_{ijp}^{pq} = a_i^u \cdot a_j^v \cdot a_p^w \cdot b_s^p \cdot b_t^q \cdot T_{uvw}^{st} = a_i^u \cdot a_j^v \cdot b_t^q \cdot \delta_s^w \cdot T_{uvw}^{st} =$$

$$= a_i^u a_j^v b_t^q T_{uvs}^{st} = a_i^u a_j^v b_t^q R_{uv}^{t},$$

что и требовалось доказать.

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (**о свертке тензоров**). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Заметим, что, во-первых, свертка проводится по разновысоким индексам, иначе не получился бы тензор, и во-вторых, ранг свертки равен $r-2$, где r — ранг исходного тензора.

VI.6. Свертывание

Теорема 11 (о свертке тензоров). *Свертка тензоров (по разновысоким индексам!) является тензором.*

Заметим, что, во-первых, свертка проводится по разновысоким индексам, иначе не получился бы тензор, и во-вторых, ранг свертки равен $r-2$, где r — ранг исходного тензора.

В качестве примера свертки можно привести след линейного оператора, равный следу его матрицы в каком либо базисе: $\operatorname{tr}\hat{L} = L^i_i$. Это, очевидно, свертка. Ранг исходного тензора был равен 2, следовательно, ранг его свертки равен 0. В частности, след оператора во всех базисах одинаковый. Доказательство этого факта в линейной алгебре проводилось точно так же (с точностью до обозначений), как и доказательство предыдущей теоремы.

VI.7. Внутреннее произведение тензоров

Это суперпозиция тензорного произведения и свертки. То есть сначала вычисляется тензорное произведение, а потом производится свертка по разновысоким индексам, взятым из разных сомножителей. Поэтому при внутреннем произведении надо указывать, по каким индексам проводится свертывание.

VI.7. Внутреннее произведение тензоров

Примеры применения внутреннего произведения.

1. Зафиксируем вектор x и линейный оператор $\hat{L}$. Каждому базису поставим в соответствие столбец координат вектора $\hat{L}(x)$ в этом базисе. Этот тензор можно записать в виде внутреннего произведения тензоров. Пусть **Б** $= \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства U, $x = x^i \cdot e_i$, $\hat{L}(x) = y = y^i \cdot e_i$. Тогда

$$y^j \cdot e_j = y = \hat{L}(x) = \hat{L}\left(x^i \cdot e_i\right) = x^i \cdot \hat{L}\left(e_i\right) = x^i \cdot L_i^j \cdot e_j,$$

где $\left(L_i^j\right)$ — матрица оператора $\hat{L}$ в базисе **Б**. Поэтому $y^j = L_i^j \cdot x^i$, что и требовалось доказать.

VI.7. Внутреннее произведение тензоров

Примеры применения внутреннего произведения.

1. Зафиксируем вектор x и линейный оператор $\hat{L}$. Каждому базису поставим в соответствие столбец координат вектора $\hat{L}(x)$ в этом базисе. Этот тензор можно записать в виде внутреннего произведения тензоров. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства U, $x = x^i \cdot e_i$, $\hat{L}(x) = y = y^i \cdot e_i$. Тогда
$$y^j \cdot e_j = y = \hat{L}(x) = \hat{L}\left(x^i \cdot e_i\right) = x^i \cdot \hat{L}\left(e_i\right) = x^i \cdot L_i^j \cdot e_j,$$
где $\left(L_i^j\right)$ — матрица оператора $\hat{L}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Поэтому $y^j = L_i^j \cdot x^i$, что и требовалось доказать.

2. Значение билинейной формы на фиксированных векторах x, y. Действительно,
$$F(x, y) = F\left(x^i \cdot e_i, y^j \cdot e_j\right) = x^i \cdot y^j \cdot F\left(e_i, e_j\right) = x^i \cdot y^j \cdot F_{ij},$$
что и требовалось доказать.

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Теорема 12 (обратный тензорный признак, правило частного). *Пусть функция T переводит множество базисов в множество массивов $(T(i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_k, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t))$ (здесь индексы i_h, j_h, p_h, q_h пробегают значения от 1 до n). Если T такова, что для любого тензора $R^{p_1 \ldots p_s h_1 \ldots h_v}_{q_1 \ldots q_t r_1 \ldots r_u}$ функция, каждому базису* **Б** *ставящая в соответствие массив элементов вида*

$$Q^{j_1 \ldots j_k h_1 \ldots h_v}_{i_1 \ldots i_m r_1 \ldots r_u} = \tag{4}$$

$$= T\left(i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_k, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t\right) \cdot R^{p_1 \ldots p_s h_1 \ldots h_v}_{q_1 \ldots q_t r_1 \ldots r_u}$$

является тензором, то T также является тензором структуры $T^{j_1 \ldots j_k q_1 \ldots q_t}_{i_1 \ldots i_m p_1 \ldots p_s}$ (в равенстве (4) в правой части стоят значения функции T и R в базисе **Б**).

Доказательство.

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство. В общем случае очень громоздкое, поэтому мы проиллюстрируем его основную идею в частном случае, когда равенство (4) имеет вид:

$$Q^{jl} = T(i, j, k) \cdot R_k^{li}.$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R_k^{li}$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li}$.

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_{k}$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_{k}$. В силу **тензорного закона** (по условию Q и R — тензоры), получаем:

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R_k^{li}$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li}$. В силу тензорного закона (по условию Q и R — тензоры), получаем:

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li} = \acute{Q}^{jl} =$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_k$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k$. В силу тензорного закона (по условию Q и R — тензоры), получаем:

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = \acute{Q}^{jl} = b^j_s \cdot b^l_t \cdot Q^{st} =$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_k$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k$. В силу тензорного закона (по условию Q и R — тензоры), получаем:

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = \acute{Q}^{jl} = b^j_s \cdot b^l_t \cdot Q^{st} = b^j_s \cdot b^l_t \cdot T(u,s,v) \cdot R^{tu}_v =$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R_k^{li}$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li}$. В силу тензорного закона (по условию Q и R — тензоры), получаем:

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li} = \acute{Q}^{jl} = b_s^j \cdot b_t^l \cdot Q^{st} = b_s^j \cdot b_t^l \cdot T(u,s,v) \cdot R_v^{tu} =$$

$$= b_s^j \cdot b_t^l \cdot T(u,s,v) \cdot b_v^p \cdot a_q^t \cdot a_r^u \cdot R_p^{qr} =$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R_k^{li}$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li}$. В силу тензорного закона (по условию Q и R — тензоры), получаем:

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li} = \acute{Q}^{jl} = b_s^j \cdot b_t^l \cdot Q^{st} = b_s^j \cdot b_t^l \cdot T(u,s,v) \cdot R_v^{tu} =$$

$$= b_s^j \cdot b_t^l \cdot T(u,s,v) \cdot b_v^p \cdot a_q^t \cdot a_r^u \cdot R_p^{qr} = b_s^j \cdot b_v^p \cdot a_r^u \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}_p^{lr},$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R_k^{li}$.

Перейдем в другой базис **Б**$'$. Имеем: $\acute{Q}^{jl} = T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li}$. В силу тензорного закона (по условию Q и R — тензоры), получаем:

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li} = \acute{Q}^{jl} = b_s^j \cdot b_t^l \cdot Q^{st} = b_s^j \cdot b_t^l \cdot T(u,s,v) \cdot R_v^{tu} =$$

$$= b_s^j \cdot b_t^l \cdot T(u,s,v) \cdot b_v^p \cdot a_q^t \cdot a_r^u \cdot R_p^{qr} = b_s^j \cdot b_v^p \cdot a_r^u \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}_p^{lr},$$

ибо $b_t^l \cdot a_q^t = \delta_q^l$ (кроме того, мы записали тензорный закон «наоборот», для перехода из **Б** в **Б**$'$).

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R_k^{li}$.

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}_k^{li} = b_s^j \cdot b_v^p \cdot a_r^u \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}_p^{lr}.$$

Зафиксируем произвольную тройку натуральных чисел, не превосходящих n: (f,g,h).

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_k$.

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = b^j_s \cdot b^p_v \cdot a^u_r \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}^{lr}_p.$$

Зафиксируем произвольную тройку натуральных чисел, не превосходящих n: $\quad (f,g,h)$. Определим в базисе **Б**$'$ тензор-массив $\acute{R}^{lr}_p$ правилом: все его компоненты равны 0, кроме одной, а именно, $\acute{R}^{fg}_h = 1$ (можно было записать короче:

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_{k}$.

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_{k} = b^{j}_{s} \cdot b^{p}_{v} \cdot a^{u}_{r} \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}^{lr}_{p}.$$

Зафиксируем произвольную тройку натуральных чисел, не превосходящих n: (f,g,h). Определим в базисе **Б**$'$ тензор-массив $\acute{R}^{lr}_{p}$ правилом: все его компоненты равны 0, кроме одной, а именно, $\acute{R}^{fg}_{h} = 1$ (можно было записать короче: $\acute{R}^{lr}_{p} = \delta^{l}_{f} \cdot \delta^{r}_{g} \cdot \delta^{h}_{p}$). Тогда

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_{k} = T'(g,j,h) =$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_k$.

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = b^j_s \cdot b^p_v \cdot a^u_r \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}^{lr}_p.$$

Зафиксируем произвольную тройку натуральных чисел, не превосходящих n: $\quad (f,g,h)$. Определим в базисе **Б**$'$ тензор-массив $\acute{R}^{lr}_p$ правилом: все его компоненты равны 0, кроме одной, а именно, $\acute{R}^{fg}_h = 1$ (можно было записать короче: $\acute{R}^{lr}_p = \delta^l_f \cdot \delta^r_g \cdot \delta^h_p$). Тогда

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = T'(g,j,h) = b^j_s \cdot b^h_v \cdot a^u_g \cdot T(u,s,v).$$

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_k$.

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = b^j_s \cdot b^p_v \cdot a^u_r \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}^{lr}_p.$$

Зафиксируем произвольную тройку натуральных чисел, не превосходящих n: $\quad (f,g,h)$. Определим в базисе $\mathbf{Б}'$ тензор-массив $\acute{R}^{lr}_p$ правилом: все его компоненты равны 0, кроме одной, а именно, $\acute{R}^{fg}_h = 1$ (можно было записать короче: $\acute{R}^{lr}_p = \delta^l_f \cdot \delta^r_g \cdot \delta^h_p$). Тогда

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = T'(g,j,h) = b^j_s \cdot b^h_v \cdot a^u_g \cdot T(u,s,v).$$

Таким образом, для такого выбора тензора R имеем выполнение тензорного закона для компонент $T(g,j,h)$ по всем j.

VI.8. Обратный тензорный признак (правило частного)

Доказательство равенства $Q^{jl} = T(i,j,k) \cdot R^{li}_k$.

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = b^j_s \cdot b^p_v \cdot a^u_r \cdot T(u,s,v) \cdot \acute{R}^{lr}_p.$$

Зафиксируем произвольную тройку натуральных чисел, не превосходящих n: (f,g,h). Определим в базисе **Б**$'$ тензор-массив $\acute{R}^{lr}_p$ правилом: все его компоненты равны 0, кроме одной, а именно, $\acute{R}^{fg}_h = 1$ (можно было записать короче: $\acute{R}^{lr}_p = \delta^l_f \cdot \delta^r_g \cdot \delta^h_p$). Тогда

$$T'(i,j,k) \cdot \acute{R}^{li}_k = T'(g,j,h) = b^j_s \cdot b^h_v \cdot a^u_g \cdot T(u,s,v).$$

Таким образом, для такого выбора тензора R имеем выполнение тензорного закона для компонент $T(g,j,h)$ по всем j. Но набор (f,g,h) выбирался произвольно. Поэтому тензорный закон при переходе в базис **Б**$'$ для функции T выполняется для всех ее компонент. Теорема доказана.

VII. Некоторые виды тензоров второго ранга

VII.1. Смешанные тензоры

1. Функция $\mathbf{Ш}\left(\mathbf{Б}\right) = \left(Ш^i_j\right)$, ставящая каждому базису пространства U в соответствие массив $\lambda\left(\delta^i_j\right)$, является, как нетрудно проверить, тензором. Этот тензор называется **шаровым тензором**.

VII.1. Смешанные тензоры

1. Функция $\textbf{Ш}\left(\textbf{Б}\right) = \left(Ш^i_j\right)$, ставящая каждому базису пространства U в соответствие массив $\lambda\left(\delta^i_j\right)$, является, как нетрудно проверить, тензором. Этот тензор называется **шаровым тензором**.

2. Смешанный тензор второго ранга[4] D называется **девиатором** тогда и только тогда, когда его свертка равна 0.

[4]то есть один раз ковариантный, один раз контравариантый

VII.1. Смешанные тензоры

1. Функция **Ш** (**Б**) $= \left(Ш^i_j\right)$, ставящая каждому базису пространства U в соответствие массив $\lambda\left(\delta^i_j\right)$, является, как нетрудно проверить, тензором. Этот тензор называется **шаровым тензором**.

2. Смешанный тензор второго ранга D называется **девиатором** тогда и только тогда, когда его свертка равна 0.

Свертка тензора второго ранга — это тензор нулевого ранга, то есть константа. Эта константа не зависит от базиса (поскольку тензорный закон для нее вырождается). Следовательно, для того, чтобы смешанный тензор был девиатором необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одном из базисов пространства V след матрицы, являющейся значением тензора в этом базисе, был нулевым. В этом случае след любого из значений этого тензора — нулевой.

VII.2. Однородные тензоры (дважды ко- или дважды контравариантные)

1. Тензор[5] S^{ij} (соответственно, S_{ij}) называется **симметричным**, если в некотором базисе **Б** его компоненты связаны соотношениями $S^{ij} = S^{ji}$ (соответственно, $S_{ij} = S_{ji}$) для всех i, j.

[5]Имеется в виду функция $S\left(\right) = \left(S^{ij}\right)$.

VII.2. Однородные тензоры (дважды ко- или дважды контравариантные)

1. Тензор S^{ij} (соответственно, S_{ij}) называется **симметричным**, если в некотором базисе **Б** его компоненты связаны соотношениями $S^{ij} = S^{ji}$ (соответственно, $S_{ij} = S_{ji}$) для всех i, j.

2. Тензор A^{ij} (соответственно, A_{ij}) называется **антисимметричным**, если матрица его координат в некотором базисе **Б** — кососимметричная, то есть $A^{ij} = -A^{ji}$ (соответственно, $A_{ij} = -A_{ji}$) для всех i, j.

VII.3. Критерий симметричности тензора

Лемма 1 (критерий симметричности тензора). *Тензоры* $P(\mathbf{Б}) = (P_{ij})$ *и* $P(\mathbf{Б}) = \left(Q^{ij}\right)$ *являются симметричными тогда и только тогда, когда массивы их координат являются симметричными в любом базисе.*

VII.4. Критерий антисимметричности тензора

Лемма 2 (критерий антисимметричности тензора). *Тензоры* $P(\mathbf{Б}) = (P_{ij})$ *и* $P(\mathbf{Б}) = \left(Q^{ij}\right)$ *являются антисимметричными тогда и только тогда, когда массивы их координат являются антисимметричными в* *любом* *базисе.*

Следовательно, приведенные выше понятия обладают одним важным качеством — наличие или отсутствие у тензора любого из этих свойств можно установить по конкретному тензор-массиву. В частности, если в каком-то базисе массив координат тензора не является симметричным или антисимметричным, то нет необходимости проверять симметричность или, соответственно, антисимметричность этого тензора ни в каком другом базисе.

Определения симметричного и антисимметричного тензора можно обобщить для тензора любого ранга. Например, массив $T\,() = \left(T^{ij}_{pqrt}\right)$ является **симметричным по индексам** p, r тогда и только тогда, когда $T^{ij}_{pqrt} = T^{ij}_{rqpt}$.

Определения симметричного и антисимметричного тензора можно обобщить для тензора любого ранга. Например, массив $T\left(\right) = \left(T^{ij}_{pqrt}\right)$ является **симметричным по индексам** p, r тогда и только тогда, когда $T^{ij}_{pqrt} = T^{ij}_{rqpt}$.

Такой массив является **антисимметричным по индексам** p, t тогда и только тогда, когда $T^{ij}_{pqrt} = -T^{ij}_{tqrp}$.

Определения симметричного и антисимметричного тензора можно обобщить для тензора любого ранга. Например, массив $T() = \left(T^{ij}_{pqrt}\right)$ является **симметричным по индексам** p, r тогда и только тогда, когда $T^{ij}_{pqrt} = T^{ij}_{rqpt}$.

Такой массив является **антисимметричным по индексам** p, t тогда и только тогда, когда $T^{ij}_{pqrt} = -T^{ij}_{tqrp}$.

Тензор является **симметричным** (соответственно, **антисимметричным**) **по данной паре индексов** тогда и только тогда, когда в некотором базисе массов его компонент симметричен (соответственно, антисимметричен) по этой паре индексов. Очевидно, что симметричность тензора по данной паре индексов означает симметричность массива его компонент по этой паре индексов *в любом* базисе. Ситуация с антисимметричным тензором аналогичная.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Мы фактически дадим формулу для вычисления соответствующего шарового тензора и девиатора.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (**о разложении смешанного тензора**). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

Осталось лишь проверить, что D^i_j — девиатор. Для этого найдем его свертку (здесь $n = \dim U$):

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

Осталось лишь проверить, что D^i_j — девиатор. Для этого найдем его свертку (здесь $n = \dim U$):

$$D^i_i =$$

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

Осталось лишь проверить, что D^i_j — девиатор. Для этого найдем его свертку (здесь $n = \dim U$):

$$D^i_i = T^i_i - Ш^i_i =$$

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

Осталось лишь проверить, что D^i_j — девиатор. Для этого найдем его свертку (здесь $n = \dim U$):

$$D^i_i = T^i_i - Ш^i_i = T^i_i - \lambda \cdot \delta^i_i =$$

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

Осталось лишь проверить, что D^i_j — девиатор. Для этого найдем его свертку (здесь $n = \dim U$):

$$D^i_i = T^i_i - Ш^i_i = T^i_i - \lambda \cdot \delta^i_i = T^i_i - \lambda \cdot n =$$

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 13 (о разложении смешанного тензора). *Всякий смешанный тензор второго ранга представим в виде суммы шарового тензора и девиатора.*

Доказательство. Пусть задан тензор T с компонентами T^i_j в базисе **Б**. Положим $Ш^i_j = \lambda \cdot \delta^i_j$, где $\lambda = T^i_i/n$, $D^i_j = T^i_j - Ш^i_j$.

Осталось лишь проверить, что D^i_j — девиатор. Для этого найдем его свертку (здесь $n = \dim U$):

$$D^i_i = T^i_i - Ш^i_i = T^i_i - \lambda \cdot \delta^i_i = T^i_i - \lambda \cdot n = T^i_i - n \cdot T^i_i/n = 0,$$

что и требовалось доказать.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 14 (о разложении однородного тензора). *Всякий дважды ковариантный (соответственно, дважды контравариантный) тензор разлагается в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Доказательство.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 14 (о разложении однородного тензора). *Всякий дважды ковариантный (соответственно, дважды контравариантный) тензор разлагается в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Доказательство. Доказательство проведем для дважды ковариантного тензора, для второго случая оно аналогичное.

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 14 (о разложении однородного тензора). *Всякий дважды ковариантный (соответственно, дважды контравариантный) тензор разлагается в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Доказательство. Положим $A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$,

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 14 (о разложении однородного тензора). *Всякий дважды ковариантный (соответственно, дважды контравариантный) тензор разлагается в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Доказательство. Положим $A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right), \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right).$

VII.5. Теоремы о разложениях

Теорема 14 (**о разложении однородного тензора**). *Всякий дважды ковариантный (соответственно, дважды контравариантный) тензор разлагается в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Доказательство. Положим $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}), \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$. Очевидно, что A_{ij} — антисимметричный тензор, а S_{ij} — симметричный, и тензор T является их суммой. Теорема доказана.

VII.6. Симметрирование и альтернирование

Определение 6. *Функция, ставящая тензору* T_{ij} *в соответствие тензор* $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ *(аналогично и для дважды контравариантного тензора) называется* **альтернированием**.

VII.7. Симметрирование и альтернирование

Определение 6. *Функция, ставящая тензору* T_{ij} *в соответствие тензор* $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ *(аналогично и для дважды контравариантного тензора) называется* **альтернированием**.

Определение 7. *Функция, ставящая тензору* T_{ij} *в соответствие тензор* $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ *(аналогично и для дважды контравариантного тензора) называется* **симметрированием**.

VIII. Инварианты тензора. Тензорный эллипсоид

Определение 8. *Пусть дан тензор* T. *Функция, каждому массиву координат этого тензора ставящая в соответствие элемент основного поля* K *(зависящий, вообще говоря, от массива), называется* **инвариантом** *тензора тогда и только тогда, когда значение этой функции не зависит от того, в каком базисе вычислен массив координат тензора.*

VIII. Инварианты тензора. Тензорный эллипсоид

Определение 8. *Пусть дан тензор T. Функция, каждому массиву координат этого тензора ставящая в соответствие элемент основного поля K (зависящий, вообще говоря, от массива), называется* **инвариантом** *тензора тогда и только тогда, когда значение этой функции не зависит от того, в каком базисе вычислен массив координат тензора.*

Иными словами, среди всех функций, множество значений которых — основное поле K, а область определения — множество значений тензор-функции T, мы выделяем функции-константы, на всех аргументах принимающие одно и то же значение.

VIII. Инварианты тензора. Тензорный эллипсоид

Важность инвариантов определяется тем, что они характеризуют особенности тензор-функции, а не конкретного тензор-массива. Как правило, инварианты — это какие-то характеристики исходного объекта, по которому мы построили тензор.

VIII. Инварианты тензора. Тензорный эллипсоид

Важность инвариантов определяется тем, что они характеризуют особенности тензор-функции, а не конкретного тензор-массива. Например, свертка смешанного тензора второго ранга — это инвариант. Если этот тензор соответствовал линейному оператору, то для вполне приводимого линейного оператора получаем важную характеристику — это сумма всех его собственных значений (с учетом размерности подпространств собственных векторов).

VIII. Инварианты тензора. Тензорный эллипсоид

Важность инвариантов определяется тем, что они характеризуют особенности тензор-функции, а не конкретного тензор-массива. Например, свертка смешанного тензора второго ранга — это инвариант. Если этот тензор соответствовал линейному оператору, то для вполне приводимого линейного оператора получаем важную характеристику — это сумма всех его собственных значений (с учетом размерности подпространств собственных векторов).

Детерминант такого тензора — тоже инвариант. В случае, когда тензор сопоставляет базису матрицу данного линейного оператора в пространстве геометрических векторов, этот инвариант имеет простой геометрический смысл — он характеризует уменьшение или увеличение объема при действии оператора.

VIII. Инварианты тензора. Тензорный эллипсоид

Определение 9. *Если* S_{ij} *— симметричный тензор, то поверхность, задаваемая уравнением* $x^i \cdot x^j \cdot S_{ij} = 0$*, называется* **тензорным эллипсоидом.**

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?