

Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный экономический университет



Ю. Б. Мельников

Гамма-функция

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

Изд. 3-е, испр. и доп.



e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru

сайты:
<http://melnikov.k66.ru>,
<http://melnikov.web.ur.ru>

Екатеринбург
2010

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция	3
II. Свойства интегралов Эйлера	7
III. Некоторые применения гамма-функции	14

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция

В этом разделе мы рассмотрим важный для многих применений пример приложения несобственных интегралов, зависящих от параметра. Особое внимание мы уделим так называемой гамма-функции, продолжающей функцию натурального аргумента $f(n) = n!$ «почти на все» множество всех действительных чисел.

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция

Определение 1. Эйлеровым интегралом первого рода *называется* функция $\mathbf{B}(p, q)$, заданная формулой

$$\mathbf{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

где $\operatorname{Re}(p) > 0$ и $\operatorname{Re}(q) > 0$.

I. Эйлеровы интегралы. Гамма-функция

Определение 1. Эйлеровым интегралом первого рода называется функция $B(p, q)$, заданная формулой

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

где $Re(p) > 0$ и $Re(q) > 0$.

Определение 2. Гамма-функцией (Эйлеровым интегралом второго рода) называется функция $\Gamma(y)$ заданная для положительных значений переменной y формулой

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx.$$

Значения гамма-функции для отрицательных нецелых значений переменной y определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$\Gamma(y) = \frac{\Gamma(y+1)}{y},$$

справедливость которого для положительных значений переменной y доказана ниже.

График гамма-функции приведен **на рис. 1.**

Определение 2. Гамма-функцией (Эйлеровым интегралом второго рода) называется функция $\Gamma(y)$ заданная для положительных значений переменной y формулой $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$. Значения гамма-функции для отрицательных нецелых значений переменной y определяются с помощью рекуррентного соотношения $\Gamma(y) = \frac{\Gamma(y+1)}{y}$.

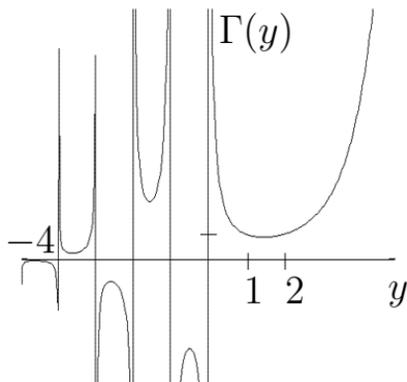


Рис. 1. График гамма-функции.

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p + 1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p + 1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Связь с факториалом: $\Gamma(n + 1) = n!$ Таким образом, гамма-функция является продолжением факториала на все действительные значения аргумента, кроме $\{0, -1, -2, \dots\}$.

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p + 1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Связь с факториалом: $\Gamma(n + 1) = n!$ Таким образом, гамма-функция является продолжением факториала на все действительные значения аргумента, кроме $\{0, -1, -2, \dots\}$.

Формулы приведения: если $p = n + \alpha$, где n — целое число и $0 < \alpha < 1$, то

$$\Gamma(n + \alpha) = (n + \alpha - 1) \cdot (n + \alpha - 2) \cdot \dots \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Эту формулу записывают и так:

$$\Gamma(p) = (p - 1) \cdot (p - 2) \cdot \dots \cdot (p - n) \cdot \Gamma(p - n), \quad \text{если } p - n > 0.$$

II. Свойства интегралов Эйлера

Рекуррентные соотношения: $\Gamma(p + 1) = p \cdot \Gamma(p)$, где $p \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Связь с факториалом: $\Gamma(n + 1) = n!$ Таким образом, гамма-функция является продолжением факториала на все действительные значения аргумента, кроме $\{0, -1, -2, \dots\}$.

Формулы приведения: если $p = n + \alpha$, где n — целое число и $0 < \alpha < 1$, то

$$\Gamma(n + \alpha) = (n + \alpha - 1) \cdot (n + \alpha - 2) \cdot \dots \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Эту формулу записывают и так:

$$\Gamma(p) = (p - 1) \cdot (p - 2) \cdot \dots \cdot (p - n) \cdot \Gamma(p - n), \quad \text{если } p - n > 0.$$

Асимптотическое представление: $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(y + 1)}{y^{y+0.5} e^{-y}} = \sqrt{2\pi}.$

II. Свойства интегралов Эйлера

Функциональные уравнения: 1. $\Gamma(p)\Gamma(-p) = -\frac{\pi}{p \sin \pi p}$;

2. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$;

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) = \frac{\pi}{\cos \pi p}$;

4. $\Gamma(np) = \sqrt{\frac{n^{2np-1}}{(2\pi)^{n-1}}} \cdot \Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(p + \frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(p + \frac{n-1}{n}\right)$
(теорема умножения **Гаусса**).

связь с $\mathbf{B}(p, q)$: $\mathbf{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

сведение к единичному квадрату: $\mathbf{B}(p+1, q) = \frac{p}{p+q}\mathbf{B}(p, q)$;

$\mathbf{B}(p, q+1) = \frac{q}{p+q}\mathbf{B}(p, q)$.

II. Свойства интегралов Эйлера

Доказательство. Сначала докажем рекуррентные соотношения. Для отрицательных нецелых значений переменной p эти соотношения принимаются по определению, поэтому осталось рассмотреть случай $p > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^p \quad du = p \cdot x^{p-1} \\ dv = e^{-x} dx \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= \underbrace{x^p \cdot (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty}}_{=0 \text{ т.к. } p > 0} - \int_0^{\infty} p \cdot x^{p-1} \cdot (-e^{-x}) dx = p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p \cdot \Gamma(p).\end{aligned}$$

Теперь докажем связь с факториалом. Формула $\Gamma(n+1) = n!$ дока-

зывается индукцией по n . В самом деле, при $n = 0$ получаем

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

Пусть $n > 0$ и для любого положительного целого числа, меньшего n , формула верна. Тогда, в силу доказанных рекуррентных соотношений и гипотезы индукции

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$$

Формулы приведения выводятся аналогично.

Доказательство формулы для асимптотического представления, функциональных уравнений и формул, использующих $B(p, q)$, мы приводить не будем.

III. Некоторые применения гамма-функции

Интеграл Пуассона (см.раздел ??, стр.??). Как известно, первообразная функции e^{-x^2} не является элементарной функцией. Однако, вычислить ее значения в отдельных точках (точнее, предел при $x \rightarrow +\infty$), можно. А именно, проводя замену переменной $x^2 = t$, получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 0.5 \cdot \Gamma(0.5).$$

Согласно приведенной в пункте «функциональные уравнения» формуле 2, стр.11, получаем

$$\Gamma(0.5) \cdot \Gamma(1 - 0.5) = \Gamma(0.5)^2 = \frac{\pi}{\sin 0.5\pi} = \pi, \quad \text{поэтому} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вычисление интегралов J_{2n} вида $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx$. Положим $x = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\alpha}}$.

$$J_{2n} = \frac{1}{2\alpha^{n+0.5}} \int_0^{+\infty} t^{n-0.5} e^{-t} dt = \frac{1}{2\alpha^{n+0.5}} \Gamma(n + 0.5).$$

Например,

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}, \quad J_2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}.$$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: <http://melnikov.k66.ru>, <http://melnikov.web.ur.ru>

Вернуться к списку презентаций?

